8 - Aproksymacja Poissona. Obciążenie najcięższej urny.

Saturday, 3 February 2024 22:36

Rzucamy m kul do n urn

Niech $X_i^{(m)}$ będzie liczbą kul wrzuconą do i-tej urny

Niech $Y_1^{(m)}, \dots, Y_n^{(m)}$ będą niezależnymi zmiennymi o rozkładzie Poissona z parametrem $\frac{m}{n}$

Rozkład $(Y_1^{(m)}, \dots, Y_n^{(m)})$ pod warunkiem $\sum_{i=1}^{n} Y_i^{(m)} = k$ jest taki sam jak rozkład $(X_1^{(k)}, \dots, X_n^{(k)})$.

$$\mathbb{P}\left[(X_1^{(k)}, \dots, X_n^{(k)}) = (k_1, \dots, k_n)\right] = \frac{\binom{k}{k_1, \dots, k_n}}{n^k}$$ ← uogólnione $\binom{n}{k}$

$$= \frac{k!}{k_1! \cdots k_n!\, n^k}$$

$$\mathbb{P}\left[(Y_1^{(m)}, \dots, Y_n^{(m)}) = (k_1, \dots, k_n) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} Y_i^{(m)} = k\right] =$$

$$= \frac{\mathbb{P}[Y_1^{(m)} = k_1] \cdots \mathbb{P}[Y_n^{(m)} = k_n]}{\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i^{(m)} = k\right]} =$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{m}{n}} \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{k_i}}{k_i!}}{e^{-m} \frac{m^k}{k!}} = \frac{k!}{\prod_{i=1}^{n} k_i! \cdot n^k}$$

Niech $f(x_1, \dots, x_n)$ będzie nieujemną funkcją

$$\mathbb{E}\left[f(X_1^{(m)}, \dots, X_n^{(m)})\right] \leq e\sqrt{m}\, \mathbb{E}\left[f(Y_1^{(m)}, \dots, Y_n^{(m)})\right]$$

$$\mathbb{E}\left[f(Y_1^{(m)}, \dots, Y_n^{(m)})\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[f(Y_1^{(m)}, \dots, Y_n^{(m)}) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} Y_i = k\right] \cdot \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i^{(m)} = k\right]$$

$$\geq \mathbb{E}\left[f(Y_1^{(m)}, \dots, Y_n^{(m)}) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} Y_i = m\right] \cdot \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i = m\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[f(X_1^{(m)}, \dots, X_n^{(m)})\right] \cdot \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i^{(m)} = m\right]$$

$$\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i^{(m)} = k\right] = e^{-m} \cdot \frac{m^m}{m!}$$

$$n! \leq e\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\int_{k-1}^{k} \ln x \, dx \geq \frac{\ln k-1 + \ln k}{2}$$

$$\ln n! = \sum_{k=1}^{n} \ln k \leq \int_{1}^{n} \ln x \, dx + \frac{1}{2} \ln n$$

Szacowanie trapezami

log jest wklęsły

$$\int \log x \, dx = x \log(x) - x$$

$$\ln n! - \frac{1}{2} \ln n \leq n \ln n - n + 1$$

$$\frac{n!}{\sqrt{n}} \leq n^n \cdot \frac{1}{e^n} \cdot e \Rightarrow n! \leq \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e\sqrt{n}$$

$$e^{-m} \frac{m^m}{m!} \geq \left(\frac{m}{e}\right)^m \cdot \left(\frac{e}{m}\right)^m \frac{1}{e\sqrt{m}} \quad \square$$

Najbardziej obciążona urna zawiera $\Omega\left(\frac{\ln n}{\ln \ln n}\right)$ kul z p. $1 - \frac{1}{n}$

Mamy n kul i n urn. Możemy nasz model przybliżać aproksymacją Poissona.

Niech $M = \frac{\ln n}{\ln \ln n}$ $\quad \mathbb{P}[Y_i^{(n)} \geq M] \geq \mathbb{P}[Y_i^{(n)} = M] = e^{-1} \frac{1}{M!} = \frac{1}{e \cdot M!}$

Szansa, że wszystkie nie obciążone $\leq \left(1 - \frac{1}{e \cdot M!}\right)^n \leq e^{-\frac{n}{eM!}}$

Chcemy: $e^{-\frac{n}{eM!}} \leq n^{-2} \iff -\frac{n}{eM!} \leq -2\ln n \iff \frac{n}{2e\ln n} \geq M!$

Lub równoważnie $\ln M! \leq \ln n - \ln \ln n - \ln 2e$

$$M! \leq e\sqrt{M}\left(\frac{M}{e}\right)^M \leq M\left(\frac{M}{e}\right)^M \quad \Big| \ln$$

$$\ln M! \leq M \ln M - M + \ln M \quad \Big| M := \frac{\ln n}{\ln \ln n}$$

$$\frac{\ln n}{\ln \ln n} \cdot \ln\left(\frac{\ln n}{\ln \ln n}\right) - \frac{\ln n}{\ln \ln n} + \ln \frac{\ln n}{\ln \ln n} =$$

$$= \frac{\ln n}{\ln \ln n}\left(\ln \ln n - \underbrace{\ln \ln \ln n}_{\leq \ln \ln n}\right) - \frac{\ln n}{\ln \ln n} + \ln \ln n - \ln \ln \ln n$$

$$\leq \ln n - \frac{\ln n}{\ln \ln n} + \ln \ln n - \frac{\ln n}{\ln \ln n} \cdot \ln \ln \ln n$$

$$\leq \ln n - \frac{\ln n}{\ln \ln n}$$

$\frac{\ln n}{\ln \ln n} \gg \ln \ln n$:)

$$\ln n - \frac{\ln n}{\ln \ln n} \leq \ln n - \ln \ln n - \ln 2e \quad \square$$:)