26 - Schemat Monte Carlo do otrzymywania FPRAS. Zliczanie DNF.

Tuesday, 6 February 2024 21:48

(ε, δ)-aproksymacja

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-aproksymację wartości V jeśli:

$$\mathbb{P}[|X-V| \leqslant \delta V] \leqslant 1-\gamma$$

Chernoff

Zmienne indykatorowe $X_1, \dots, X_m$ - iid $\mathbb{E}[X_i] = \mu$

Jeśli $m \geqslant \frac{3\ln\left(\frac{2}{\delta}\right)}{\mu \varepsilon^2}$ to $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$ jest (ε, δ)-aprox. μ.

Dowód: $\mathbb{P}[|X-\mu m| \geqslant \varepsilon \mu m] \leqslant 2e^{-\frac{\mu m \varepsilon^2}{3}}$

$$\mathbb{P}\left[\left|\tfrac{1}{m}X-\mu\right| \geqslant \varepsilon\mu\right] \leqslant 2e^{-\frac{m\mu\varepsilon^2}{3}} \leqslant 2e^{-\ln\frac{2}{\delta}} = 2\frac{\delta}{2} = \delta$$

FPRAS

Fully polynomial randomized approximation scheme

Dla danego problemu obliczeniowego $x \to R(x)$

Umiemy generować (ε, δ)-aproksymację $R(x)$ w czasie wielomianowym od $|x|$, $\frac{1}{\varepsilon}$, $\ln\frac{1}{\delta}$

Metoda Monte Carlo

problem: $x \to R(x)$

chcemy FPRAS dla x, ε, δ

1. Projektujemy zmienną indykatorową X: $\mathbb{E}[X] = R(x)$
2. Powtarzamy m razy $m \geqslant \frac{3\ln\left(\frac{2}{\delta}\right)}{R(x)\varepsilon^2}$

Problem: Czy $R(x)$ jest wielomianowe od $|x|$?

Jeśli tak to $\frac{1}{m}\sum X_i$ dobrze przybliża $R(x)$

Zliczanie wartościowań DNF

DNF:

$$(x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \dots) \vee (\bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge \dots) \vee \dots$$

Chcemy policzyć rozwiązania.

Podejście naiwne

n - liczba zmiennych, F - formuła

$C(F)$ - liczba rozwiązań

$R(F) = \frac{C(F)}{2^n}$

Jednak $\frac{1}{R(F)}$ nie musi być wielomianowe od n.

Podejście lepsze

$F = C_1 \vee C_2 \vee \dots \vee C_t$

F spełnialna $\Leftrightarrow \exists_i C_i$ prawdziwe.

Zakładamy, że w żadnej klauzuli nie ma $x \wedge \bar{x}$

C_i ma l_i literałów

- l_i zmiennych - dokładnie 2^{n-l_i} wartościowań spełnia C_i
- SC_i - wartościowania spełniające C_i

$S = \{(a,i) : a \in SC_i\} \Rightarrow |S| = \sum_{i=1}^{t} 2^{n-l_i}$

$C(F) = \left|\bigcup_{i=1}^{t} SC_i\right|$

- $RC_i = SC_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} SC_j$
- $R = \{(a,i) : a \in RC_i\}$

$C(F) = |R|$

- $R(F) = \frac{C(F)}{|S|} = \frac{|R|}{|S|}$

1. Losujemy (a,i) z S

   $X = [(a,i) \in R]$

2. Powtarzamy odpowiednią liczbę razy.

3. Czy $\frac{1}{R(F)}$ jest wielomianowe od n, t?

   $\frac{1}{R(F)} = \frac{|S|}{|R|} \leqslant t$

Jak losować (a,i) z S?

1. Z prawdopodobieństwem $\frac{|SC_i|}{|S|}$ wybierz i
2. Wylosuj jednostajnie a z SC_i (nie wymuszone).