6 - kule i urny. Obciążenie najcięższej.

Saturday, 3 February 2024 20:41

Rzucamy n kul do n urn

Z prawdopodobieństwem dążącym do $1-\frac{1}{n}$ największe obciążenie urny nie przekracza $\frac{3\ln n}{\ln\ln n}$

Oszacujmy prawdopodobieństwo, że ustalona urna dostanie co najmniej $M \geq \frac{3\ln n}{\ln\ln n}$ kul:

$$\binom{n}{M}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^M = \frac{n!}{M!(n-M)!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^M \leq \frac{1}{M!} \leq \left(\frac{e}{M}\right)^M \qquad \frac{M^M}{M!} \leq e^M$$

$$\leq \left(\frac{e}{\frac{3\ln n}{\ln\ln n}}\right)^{\frac{3\ln n}{\ln\ln n}} = \left(\frac{e\ln\ln n}{3\ln n}\right)^{\frac{3\ln n}{\ln\ln n}} \leq \left(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right)^{\frac{3\ln n}{\ln\ln n}}$$

$$= \exp\left[(\ln\ln\ln n - \ln\ln n)\cdot\frac{3\ln n}{\ln\ln n}\right]$$

$$= \exp\left[-3\ln n + \frac{3\ln n}{\ln\ln n}\cdot\ln\ln\ln n\right] \leq e^{-2\ln n} = \frac{1}{n^2}$$