2 - Problem kolekcjonera kuponów i Quicksort

Wednesday, 31 January 2024 19:07

Problem kolekcjonera kuponów

Jest n różnych obiektów.

Ile razy musimy (jednostajnie) losować kolejny aby mieć wszystkie?

X - ilość losowań X_i - ilość losowań mając $i-1$ el. aby dostać i-ty

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Mając $i-1$ kuponów, szansa, że dostaniemy nowy:

$$1 - \frac{i-1}{n} = \frac{n-i+1}{n}$$

Czas oczekiwania na i-ty element to $Geo\left(\frac{n-i+1}{n}\right)$

$$\mathbb{E}[X_i] = \frac{n}{n-i+1}$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} = n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = n H_n$$

Oszacowanie H_n

$$H_n = \ln n + \theta(1)$$

$$\ln n = \int_1^n \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n$$

Quicksort

Model 1 - losujemy pivot

X - oczekiwana liczba porównań

X_{ij} - indykator czy i i j były porównane

Niech $y_1, \dots, y_n$ będą posortowanymi wartościami $x_1, \dots, x_n$

$\mathbb{P}[X_{ij} = 1]$ jest równe prawdopodobieństwu,

że pierwszy wybrany element z $y_i, \dots, y_j$ to y_i lub y_j

$$\mathbb{P}[Y_{ij}] = \frac{2}{j-i+1}$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{E}[Y_{ij}] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k} \cdot (n-k+1) = 2nH_n + O(n)$$

Losujemy permutację i pivot jest pierwszy

y_i i y_j są porównane, jeśli y_i lub y_j są jako pierwsze wybrane z $y_i, \dots, y_j$. Pierwszym pivotem z $y_i, \dots, y_j$ zostaje pierwszy element w wejściowej permutacji.