18 - Proces Poissona - rozkład czasów między zdarzeniami

Friday, 19 January 2024 17:39

Międzyczasy w procesie Poissona z parametrem λ

Niech X_1 będzie czasem oczekiwania na 1 zdarzenie.
Niech X_n będzie czasem pomiędzy $n-1$ i n-tym zdarzeniem.

Wtedy $X_1, \dots, X_n \sim Exp(\lambda)$ oraz są niezależne

$$\mathbb{P}[X_1 > t] = \mathbb{P}[P_0(t) = 0] = e^{-\lambda t}$$

$$\mathbb{P}[X_1 \leq t] = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$\mathbb{P}\left[X_n > t_n \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{n-1} (X_i = t_i)\right] = \mathbb{P}\left[N\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) - N\left(\sum_{i=1}^{n-1} t_i\right) = 0\right] = e^{-\lambda t_n}$$

$$\mathbb{P}[X_n \leq t_n] = 1 - e^{-\lambda t_n}$$

Międzyczasy definiują proces Poissona

$N(t)$ - stochastyczny proces zliczający

1) $N(t) = 0$

2) Czasy pomiędzy zdarzeniami są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem λ

Wtedy $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem λ

1: $N(0) = 0$

2: - Zmienne wykładnicze można resetować, więc zaczynając wyróżniony przedział resetujemy aktualną zmienną.
- Mamy zatem pełną symetrię między przedziałami o tej samej długości.
- W szczególności rozłączne przedziały są niezależne.

3: $\mathbb{P}[N(t) = 1] = \mathbb{P}[X_1 \leq t \cap X_1 + X_2 > t]$

$$= \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{P}[X_2 > t - x]\, dx = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \cdot e^{-\lambda(t-x)}\, dx$$

$$= \int_0^t \lambda e^{-\lambda t}\, dx = t \cdot \lambda e^{-\lambda t}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mathbb{P}[N(t) = 1]}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t \lambda e^{-\lambda t} + C}{t} = \lambda$$

4: $\mathbb{P}[N(t) \geq 2] = 1 - \mathbb{P}[N(t) = 0] - \mathbb{P}[N(t) = 1]$

$$= 1 - \mathbb{P}[X_1 > t] - \mathbb{P}[N(t) = 1]$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mathbb{P}[N(t) \geq 2]}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1 - \mathbb{P}[X_1 > t]}{t} - \lim_{t \to 0} \frac{\mathbb{P}[N(t) = 1]}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1 - e^{-\lambda t}}{t} - \lambda = \lim_{t \to 0} \lambda e^{-\lambda t} - \lambda = 0$$