# 1 - rozkład dwumianowy, geometryczny

Wednesday, 31 January 2024 17:45

## Rozkład Bernoulliego z parametrem p

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{z prav. } p \\ 0 & \text{z prav } 1-p \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[Y] = p$$

## Rozkład dwumianowy z parametrami n i p $B(n,p)$

$$X \sim B(N,p)$$

$$\mathbb{P}[X=j] = \binom{N}{j} p^j (1-p)^{N-j}$$

Lub równoważnie $X = \sum_{j=1}^{N} X_j$

$X_j$ ma rozkład Bernoulliego z parametrem p

## Momenty

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{E}[X_j] = Np$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{N} k^2 \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \qquad \binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!} = \frac{N}{k} \cdot \frac{(N-1)!}{(k-1)!(N-k)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{N} N \cdot k \binom{N-1}{k-1} p^k (1-p)^{N-k} = Np \sum_{k=1}^{N} k \binom{N-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{N-k}$$

$$= Np \sum_{k=0}^{N-1} (k+1) \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-k-1} = Np\left((N-1)p+1\right)$$

$$= N^2p^2 - Np^2 + Np = N^2p^2 + Np(1-p)$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = Np(1-p)$$

## Funkcja tworząca Momenty

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \cdot e^{tk}$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} (pe^t)^k (1-p)^{N-k} = \left(pe^t + (1-p)\right)^N$$

## Rozkład Geometryczny z parametrem p

$$X \sim Geo(p)$$

Rzucamy monetą o szansie sukcesu p

Szansa na (pierwszy) sukces w n-tej próbie

$$\mathbb{P}[X=n] = (1-p)^{n-1} p$$

## Bez pamięci

$$\mathbb{P}[X=n+k \mid X>k] = \mathbb{P}[X=n]$$

$$\frac{\mathbb{P}[X=n+k \cap X>k]}{\mathbb{P}[X>k]} = \frac{(1-p)^{n+k-1} \cdot p}{(1-p)^k} = (1-p)^{n-1} p$$

## Momenty

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[X \geq k] = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} = \frac{1}{p}$$

## Funkcja tworząca momenty

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p \cdot e^{tk} =$$

$$= pe^t \sum_{k=1}^{\infty} \left((1-p) \cdot e^t\right)^{k-1} = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$$

## Wariancja

$$\mathbb{E}[X^2] = M_X''(0) = \frac{1-p}{p^2} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$