16 - kule I urny z wzmocnionym feedbackiem

Thursday, 18 January 2024 23:10

Mamy dwie urny z jedną kulą w środku

W pierwszej urnie x kul, w drugiej y kul.

Dorzucamy kule: do pierwszej $\frac{x^p}{x^p+y^p}$, drugiej $\frac{y^p}{x^p+y^p}$

Dla $p=1$ rozkład w 1 urnie jednostajny $[1, n-1]$ dla n kul.

Indukcja

Dla $p>1$

Dla dowolnego początkowego ustawienia istnieje c takie, że jedna z urn dostanie co najwyżej c kul.

- Zaczynamy z $(1,1)$ ale nie wpływa na dowód
- Jeśli w 1 urnie jest n kul w czasie t, to kolejna przyjdzie w czasie $t+T_n$, gdzie $T_n \sim Exp[n^p]$.
- Analogiczna rodzina zmiennych U_k dla drugiej urny.
- Na raz działają dwie zmienne T_x i U_y.
  Kolejna kula idzie do urny, która się pierwsza zatrzyma.
  Dokładnie symulują warunki zadania.
- Czasy nasycenia:
  czas po którym liczba kul w urnie jest rozbieżna.

$$F_1 = \sum_{j=1}^{\infty} T_j \qquad F_2 = \sum_{j=1}^{\infty} U_j$$

$$\mathbb{E}[F_1] = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}[T_j] = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^p} < \alpha_p$$

- Z prawdopodobieństwem 1 $F_1 \neq F_2$

$$T_1 = \sum_{j=1}^{\infty} U_j - \sum_{j=2}^{\infty} U_j$$

Jeśli wylosujemy T_1 na końcu to równość zachodzi z $p=0$.

- Bez straty ogólności $F_1 < F_2$

Istnieje takie n: $\sum_{j=1}^{n} U_j \leq F_1 < \sum_{j=1}^{n+1} U_j$

Zatem $\sum_{j=1}^{n} U_j \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} T_j < \sum_{j=1}^{n+1} U_j$

Więc od pewnego momentu wszystkie kule idą do pierwszej urny.