20 - warunkowe czasy pojawianie się zdarzeń w procesie Poissona

Saturday, 20 January 2024 18:45

Jeśli w danym przedziale czasu pojawiło się jedno zdarzenie, to rozkład czasu pojawienia się jest jednostajny

X_1 - czas oczekiwania na zdarzenie w procesie Poissona z par. λ

$$\mathbb{P}[X_1 < s \mid N(t)=1] = \frac{\mathbb{P}[X_1 < s \cap N(t)=1]}{\mathbb{P}[N(t)=1]}$$

$$= \frac{\mathbb{P}[X_1 < s \cap N(t)-N(s)=0]}{\mathbb{P}[N(t)=1]} = \frac{\mathbb{P}[N(s)=1]\cdot \mathbb{P}[N(t)-N(s)=0]}{\mathbb{P}[N(t)=1]}$$

$$= \frac{e^{-\lambda s}\frac{\lambda s}{1!}\cdot e^{-\lambda(t-s)}\frac{(\lambda(t-s))^0}{0!}}{e^{-\lambda t}\cdot \frac{\lambda t}{1!}} = \frac{\lambda s\cdot e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}\cdot \lambda t} = \frac{s}{t}$$

Jeśli w danym przedziale wypadło n zdarzeń to ich czasy pojawienia się mają taki sam rozkład jak statystyka pozycyjna n niezależnych zmiennych o rozkładzie jednostajnym (na takim samym przedziale)

- Statystyka pozycyjna n niezależnych zmiennych o rozkładzie jednostajnym na $[0,t]$:
- Niech $\mathcal{E}$ będzie zdarzeniem $Y_{(1)} \le s_1, \dots, Y_{(n)} \le s_n$
- Dla permutacji σ, niech $\mathcal{E}_\sigma$ będzie zdarzeniem

  $X_{\sigma(1)} \le s_1,\ X_{\sigma(1)} \le X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(n-1)} \le X_{\sigma(n)},\ X_{\sigma(n)} \le s_n$
- Zdarzenia $\mathcal{E}_\sigma$ są rozłączne jeśli $X_{\sigma(i)} \neq X_{\sigma(i+1)}\ \forall_{1\le i<n}$
- Jednak zdarzenia w których co najmniej dwie zmienne przyjmują tę samą wartość są miary 0.
- Wszystkie $\mathcal{E}_\sigma$ są tak samo prawdopodobne (symetria)

  Oprócz tego $\mathcal{E} = \bigcup_{\sigma\in S_n} \mathcal{E}_\sigma$, zatem:
- $\mathbb{P}[\mathcal{E}] = n!\ \mathbb{P}[X_1 \le s_1 \cap X_1 \le X_2 \cap \dots \cap X_n \le s_n]$

$$\mathbb{P}[X_1 \le s_1 \cap \dots \cap X_n \le s_n] = \int_{u_1=0}^{s_1}\int_{u_2=u_1}^{s_2}\cdots\int_{u_n=u_{n-1}}^{s_n}\left(\frac{1}{t}\right)^n du_n \cdots du_1$$

- Czasy pojawienia się $n+1$ kolejnych zdarzeń w procesie Poissona z parametrem λ: $S_1 \le S_2 \le \dots \le S_{n+1}$
- Niech $T_1 = S_1,\ T_i = S_i - S_{i-1}$
- $\mathbb{P}[S_1 \le s_1 \cap \dots \cap S_n \le s_n \cap N(t)=n]$

$$= \mathbb{P}\Big[T_1 \le s_1 \cap T_2 \le s_2 - T_1 \cap \dots \cap \Big(T_n \le s_n - \sum_{i=1}^{n-1} T_i\Big) \cap T_{n+1} > t - \sum_{i=1}^{n} T_i\Big]$$

$$= \int_{t_1=0}^{s_1}\int_{t_2=0}^{s_2-t_1}\cdots\int_{t_n=0}^{s_n-\sum^{n-1} t_i}\int_{t_{n+1}=t-\sum^{n} t_i}^{\infty} \lambda^{n+1} e^{-\lambda\sum^{n+1} t_i}\, dt_{n+1}\cdots dt_1$$

$$\int_{t_{n+1}=t-\sum^n t_i}^{\infty} \lambda^{n+1} e^{-\lambda\sum t_i}\, dt_{n+1} = -\lambda^n e^{-\lambda\sum^{n+1} t_i}\Big|_{t-\sum^n t_i}^{\infty} = \lambda^n e^{-\lambda t}$$

- $\mathbb{P}[S_1 \le s_1 \cap \dots \cap S_n \le s_1 \mid N(t)=n] = \frac{\mathbb{P}[S_1 \le s_1 \cap \dots \cap S_n \le s_n \cap N(t)=n]}{\mathbb{P}[N(t)=n]}$

$$= \frac{\lambda^n e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda t)^n}{n!}}\int_{t_1=0}^{s_1}\cdots\int_{t_n=0}^{s_n-\sum^{n-1} t_i} dt_n\cdots dt_1 = n!\left(\frac{1}{t}\right)^n \int_{t_1=0}^{s_1}\cdots\int_{t_n=0}^{s_n-\sum^{n-1} t_i} dt_n\cdots dt_1$$