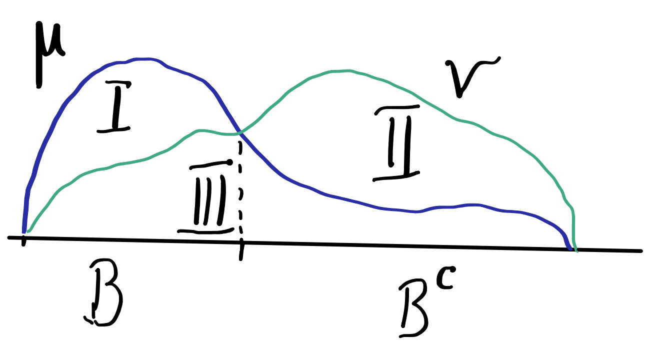
23 - Norma całkowitego wachania. Sprzęganie rozkładów.

Tuesday, 6 February 2024 00:02

Norma całkowitego wachania

μ, ν – rozkłady prawdopodobieństwa nad skończonym zbiorem S

$$\|\mu-\nu\|_{TV} = \max_{A \subseteq S} |\mu(A)-\nu(A)|$$



$\mathrm{I}+\mathrm{III} = \mathrm{II}+\mathrm{III} = 1$

$\|\mu-\nu\|_{TV} = \mathrm{I} = \mathrm{II}$

$B = \{x \in S : \mu(x) \geq \nu(x)\}$ ← nie powinno być $\{x\}$?

$\mu(A)-\nu(A) \leq \mu(A \cap B) - \nu(A \cap B) \leq \mu(B)-\nu(B)$

$\nu(A)-\mu(A) \leq \nu(A \cap B^c) - \mu(A \cap B^c) \leq \nu(B^c) - \mu(B^c)$

$$\|\mu-\nu\|_{TV} = \frac{1}{2}\sum_{x \in S}|\mu(x)-\nu(x)| = \frac{1}{2}\left[\mu(B)-\nu(B)+\nu(B^c)-\mu(B^c)\right]$$

$$\|\mu-\nu\|_{TV} = \frac{1}{2}\sup\left\{\sum_{x\in S} f(x)\big(\mu(x)-\nu(x)\big) : \max_{x \in S} |f(x)| \leq 1\right\}$$

Jeśli $|f(x)| \leq 1$

$$\frac{1}{2}\sum_{x\in S} f(x)\big(\mu(x)-\nu(x)\big) \leq \frac{1}{2}\sum_{x \in S}\left|f(x)\big(\mu(x)-\nu(x)\big)\right| \leq \frac{1}{2}\sum_{x\in S}|\mu(x)-\nu(x)| = \|\mu-\nu\|_{TV}$$

Niech $f^*(x) = \begin{cases} 1 : x \in B \\ -1 : x \in B^c \end{cases}$. f^* świadczy równość.

Czas mieszania

P – macierz przejścia łańcucha, S – zbiór stanów, π – rozkład stacjonarny

$P^t(x,\cdot)$ – rozkład X_t przy założeniu $X_0 = x$

$\Delta_x(t) = \|P^t(x,\cdot)-\pi\|_{TV}$ $\quad \Delta(t) = \max_{x\in S}\Delta_x(t)$

$\tau_x(\varepsilon) = \min\{t : \Delta_x(t) \leq \varepsilon\}$ $\quad \tau_{mix}(\varepsilon) = \max_{x \in S}\tau_x(\varepsilon)$

$\tau_{mix} = \tau_{mix}\left(\frac{1}{4}\right)$

Sprzęganie rozkładów

μ, ν – rozkłady nad skończonym zbiorem S

Sprzęganie $X \sim \mu$ i $Y \sim \nu$ to para (X, Y) taka że X ma rozkład μ i Y ma rozkład ν.

Niech (X,Y) będzie sprzęganiem μ i ν.

Wtedy $\|\mu-\nu\|_{TV} \leq \mathbb{P}[X \neq Y]$ (I)

Dodatkowo istnieje sprzęganie, gdzie zachodzi równość. (II)

Dowód (I)

$\mu(A)-\nu(A) = \mathbb{P}[X \in A] - \mathbb{P}[Y \in A]$

$\leq \mathbb{P}[X \in A \cap Y \notin A] \leq \mathbb{P}[X \neq Y]$

$\nu(A)-\mu(A) = \mathbb{P}[Y \in A] - \mathbb{P}[X \in A] \leq \mathbb{P}[Y \in A \cap X \notin A] \leq \mathbb{P}[X \neq Y]$

Zatem $\|\mu-\nu\|_{TV} \leq \mathbb{P}[X \neq Y]$

(II)

Wróćmy do oznaczeń na pola z rysunku:

Z prawdopodobieństwem $\mathrm{III} = 1 - \|\mu-\nu\|_{TV}$ X i Y dostają tę samą wartość z rozkładem $\frac{1}{\mathrm{III}}\min(\mu(x), \nu(x))$

W przeciwnym przypadku X wybiera z B z rozkładem $\frac{\mu(x)-\nu(x)}{1-\mathrm{III}}$

Oraz Y wybiera z B^c z rozkładem $\frac{\nu(x)-\mu(x)}{1-\mathrm{III}}$