9 - Problem kolekcjonera kuponów

Sunday, 4 February 2024 11:33

Niech X będzie liczbą potrzebnych kuponów

$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X > n\ln n + cn] = 1 - e^{-e^{-c}} \to 0$ e^{-c} - szybko maleje

$e^{-e^{-c}} \approx e^{-0} \approx 1$;)

Pokażemy, że w modelu Poissona działa i że asymptotycznie Poisson dobrze aproksymuje.

Każdy kupon do zdobycia - Poisson z parametrem $\ln n + c$

Szansa, że nie zdobyliśmy: $e^{-\ln n - c} = \frac{e^{-c}}{n}$

Szansa, że wszystkie zdobyliśmy: $\left(1 - \frac{e^{-c}}{n}\right)^n \approx e^{-e^{-c}}$

Niech $\mathcal{E}$ będzie zdarzeniem, że żadna urna niepusta.

Wiemy, że $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\mathcal{E}] = e^{-e^{-c}}$

Będziemy chcieli pokazać, że $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\mathcal{E} \mid X = n\log n + cn] = e^{-e^{-c}}$

$m = n\ln n + cn$

$$\mathbb{P}[\mathcal{E}] = \mathbb{P}[\mathcal{E} \cap |X-m| \leq \sqrt{2m\ln m}] + \mathbb{P}[\mathcal{E} \cap |X-m| > \sqrt{2m\ln m}]$$

$$= \mathbb{P}[\mathcal{E} \mid |X-m| \leq \sqrt{2m\ln m}] \cdot \mathbb{P}[|X-m| \leq \sqrt{2m\ln m}] + \mathbb{P}[\mathcal{E} \mid |X-m| > \sqrt{2m\ln m}] \cdot \mathbb{P}[|X-m| > \sqrt{2m\ln m}]$$

Pokażemy $\mathbb{P}[|X-m| > \sqrt{2m\ln m}] = o(1)$

Z Chernoffa $\mathbb{P}[X \geq x] \leq \frac{e^{-\lambda}(\lambda e)^x}{x^x} = e^{-\lambda + x - x\ln\frac{x}{\lambda}}$ $x > \lambda$

$$\mathbb{P}[X \geq m + \sqrt{2m\ln m}] \leq \exp\left[-m + (m + \sqrt{2m\ln m}) - (m + \sqrt{2m\ln m})\ln\left(1 + \sqrt{\tfrac{2\ln m}{m}}\right)\right]$$

$$= \exp\left[\sqrt{2m\ln m} - (m + \sqrt{2m\ln m})\ln\left(1 + \sqrt{\tfrac{2\ln m}{m}}\right)\right]$$

$\ln(1+z) \geq z - \frac{z^2}{2}$ na jednej stronie i pochodna

$$\leq \exp\left[\sqrt{2m\ln m} - (m + \sqrt{2m\ln m})\left(\sqrt{\tfrac{2\ln m}{m}} - \tfrac{\ln m}{m}\right)\right]$$

$$= \exp\left[\sqrt{2m\ln m} - \sqrt{2m\ln m} + \ln m - 2\ln m + \frac{2\ln m}{\sqrt{m}}\right]$$

$= o(1)$

Analogicznie dla $X \leq m - \sqrt{2m\ln m}$

Zatem:

$$\mathbb{P}[\mathcal{E}] = \mathbb{P}[\mathcal{E} \mid |X-m| \leq \sqrt{2m\ln m}] \cdot \mathbb{P}[|X-m| \leq \sqrt{2m\ln m}] + o(1)$$

$$= \mathbb{P}[\mathcal{E}] = \mathbb{P}[\mathcal{E} \mid X-m \leq \sqrt{2m\ln m}](1 - o(1)) + o(1)$$

Chcemy pokazać: $\mathbb{P}[\mathcal{E} \mid |X-m| \leq \sqrt{2m\ln m}] - \mathbb{P}[\mathcal{E} \mid X = m] = o(1)$

$\mathbb{P}[\mathcal{E} \mid k]$ jest monotoniczne względem k

$$\mathbb{P}[\mathcal{E} \mid |X-m| \leq \sqrt{2m\ln m}] \leq \mathbb{P}[\mathcal{E} \mid X = m + \sqrt{2m\ln m}]$$

$$\mathbb{P}[\mathcal{E} \mid X = m] \geq \mathbb{P}[\mathcal{E} \mid X = m - \sqrt{2m\ln m}]$$

$\Downarrow$

$$\mathbb{P}[\mathcal{E} \mid |X-m| \leq \sqrt{2m\ln m}] - \mathbb{P}[\mathcal{E} \mid X = m] \leq \mathbb{P}[\mathcal{E} \mid X = m + \sqrt{2m\ln m}] - \mathbb{P}[\mathcal{E} \mid X = m - \sqrt{2m\ln m}]$$

Wystarczy pokazać $\mathbb{P}[\mathcal{E} \mid X = m + \sqrt{2m\ln m}] - \mathbb{P}[\mathcal{E} \mid X = m - \sqrt{2m\ln m}] = o(1)$

Jest to równoważne temu, że po $m - \sqrt{2m\ln m}$ była pusta urna, a po $2\sqrt{2m\ln m}$ kulach była już zajęta: z union bounda $\leq \frac{2\sqrt{2m\ln m}}{n} = o(1)$