17 - Proces Poissona. Definicja I zdarzenia na odcinku

Friday, 19 January 2024 16:18

Definicja Proces Poissona z parametrem λ

$N(t)$ - funkcja zliczająca ilość wydarzeń w czasie $[0,t]$

1) $N(0)=0$

2) $N(t+s)-N(s) \sim N(t)$

Oraz dla rozłącznych przedziałów $[t_1,t_2]$ i $[t_3,t_4]$ rozkład na nich jest niezależny.

3) $$\lim_{t\to 0} \frac{\mathbb{P}[N(t)=1]}{t} = \lambda$$

4) $$\lim_{t\to 0} \frac{\mathbb{P}[N(t)\geq 2]}{t} = 0$$

Tak zdefiniowany proces z parametrem λ jest jednoznaczny

Rozkład na odcinkach

W procesie Poissona z parametrem λ:

$$P_n(t) = \mathbb{P}[N(t+s)-N(s)=n] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$P_n(t) \sim$ rozkład Poissona z parametrem λt

Dowód:

$$P_0(t)' = \lim_{h\to 0} \frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{P_0(t)\cdot P_0(h)-P_0(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} P_0(t)\frac{P_0(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0} P_0(t)\frac{-\mathbb{P}[N(h)\geq 1]}{h} = -P_0(t)\lambda$$

$$P_0(t)' = -P_0(t)\cdot\lambda \Rightarrow \frac{P_0(t)'}{P_0(t)} = -\lambda \Rightarrow \ln P_0(t) = -\lambda t + C$$

$$\Rightarrow P_0(t) = e^{-\lambda t + C} \quad P_0(0)=1 \Rightarrow C=0$$

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

$$P_n(t)' = \lim_{h\to 0}\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{n} P_{n-k}(t)P_k(h) - P_n(h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{P_n(t)(P_0(h)-1) + P_{n-1}(t)P_1(h) + \sum_{k=2}^{n} P_{n-k}(t)P_k(h)}{h} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

$$\Rightarrow P_n(t)' + \lambda P_n(t) = \lambda P_{n-1}(t) \Rightarrow e^{\lambda t}(P_n(t)' + \lambda P_n(t)) = e^{\lambda t}\cdot\lambda P_{n-1}(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{\lambda t}P_n(t) = e^{\lambda t}P_n(t)' + \lambda e^{\lambda t}P_n(t) = \lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t)$$

$P_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$ - indukcja

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{\lambda t}P_n(t) = \lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} \Rightarrow e^{\lambda t}P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} + C$$

$$P_n(0)=0 \Rightarrow P_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Rozkład na odcinkach definiuje proces

$N(t)$ $t\geq 0$ - stochastyczny proces zliczający

1) $N(0)=0$

2) Wydarzenia na rozłącznych przedziałach są niezależne

3) Liczba zdarzeń w przedziale długości t ma rozkład Poisson(λt)

Wtedy $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem λ

1 i 2 z def. procesu Poissona zachodzą.

3: $$\lim_{t\to 0}\frac{\mathbb{P}[N(t)=1]}{t} = \lim_{t\to 0} e^{-\lambda t}\cdot\frac{\lambda t}{t} = \lambda$$

4: $$\lim_{t\to 0}\frac{\mathbb{P}[N(t)\geq 2]}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sum_{k=2}^{\infty} e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{t\cdot k!} = 0$$