19 - Scalanie i rozdzielanie procesów Poissona

Saturday, 20 January 2024 13:28

Procesy Poissona $N_1(t)$ i $N_2(t)$ są niezależne jeśli $N_1(x)$ i $N_2(y)$ są niezależne dla każdego x, y

Łączenie procesów Poissona

Niech $N_1(t)$, $N_2(t)$ będą niezależnymi procesami Poissona o parametrach λ_1, λ_2.

Wtedy $N_1(t) + N_2(t)$ jest procesem Poissona z parametrem $\lambda_1 + \lambda_2$.

1: $N_1(0) + N_2(0) = 0$

2: Wydarzenia na rozłącznych przedziałach są niezależne

3: Rozkład ilości zdarzeń na przedziale dł. t w $N_1(t)$ ma rozkład Poissona z parametrem λ_1, a w $N_2(t)$ z λ_2.

Suma zmiennych o rozkładzie Poissona ma rozkład Poissona.

W szczególności, międzyczasy nowego procesu możemy wyrazić jako minimum zmiennych wykładniczych.

Zatem międzyczasy to zmienna wykładnicza z parametrem $\lambda_1 + \lambda_2$

Konkretne wydarzenie zaszło w $N_1(t)$ z p. $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$

Rozdzielanie procesów Poissona

Niech $N(t)$ będzie procesem Poissona z parametrem λ

Dla każdego zdarzenia z prawdopodobieństwem p przypisujemy je do $N_1(t)$, a z $1-p$ do $N_2(t)$.

Wtedy $N_1(t)$, $N_2(t)$ są niezależnymi procesami Poissona o parametrach $p\lambda$ i $(1-p)\lambda$

1: $N_1(0) = 0$

2: Rozłączne przedziały mają niezależny rozkład zależący tylko od długości przedziału.

3: $$\mathbb{P}[N_1(t) = k] = \sum_{j=k}^{\infty} \mathbb{P}[N_1(t) = k \mid N(t) = j]\, \mathbb{P}[N(t) = j]$$

$$= \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k} p^k (1-p)^{j-k} \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

$$= \frac{p^k (\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t} \sum_{j=k}^{\infty} \frac{(1-p)^{j-k} (\lambda t)^{j-k}}{(j-k)!} = \frac{(p\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t} \cdot e^{(1-p)\lambda t}$$

$$= \frac{(p\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-p\lambda t}$$