13 - Losowe spacery w grafie.

Monday, 5 February 2024 17:02

Losowy spacer po $G=(V,E)$

Będąc w wierzchołku v o stopniu $d(v)$ jednostajnie wybieramy sąsiada

Nieokresowość

Tak zdefiniowany łańcuch jest nieokresowy iff G nie jest dwudzielny.

Rozkład stacjonarny

$\pi_v = \frac{d(v)}{2|E|}$ $\quad \pi_v = \sum_{u \in N(v)} \frac{d(u)}{2|E|} \cdot \frac{1}{d(u)}$

Czas przejścia

$h_{u,v}$ - oczekiwana liczba kroków aby przejść między u i v

Czas podróży między u i v

$h_{u,v} + h_{v,u}$ - symetryczny

Dla krawędzi $(u,v) \in E$ $\quad h_{u,v} + h_{v,u} \leqslant 2|E|$

- Rozważmy łańcuch na (skierowanych) krawędziach grafu G. Chodzenie po nim jest równoważne spacerowi po G.
- Rozkład nowego łańcucha jest jednostajny: graniczne prawdopodobieństwo przejścia krawędzią $u \to v$ jest równoważne znalezieniu się w wierzchołku u i wybranie $u \to v$.
- Zatem oczekiwany czas przejścia danej krawędzi to $2|E|$
- Zatem startując z wierzchołka v na przejście krawędzią $u \to v$ czekamy $\leqslant 2|E|$.
- Zatem $h_{u,v} + h_{v,u} \leqslant 2|E|$

Zatem cover-time grafu możemy ograniczyć przez $2|E|(|V|-1)$

Bierzemy drzewo rozpinające i cykl Eulera na skierowanych krawędziach tego drzewa. Niech $v_1, \dots, v_{2n}$ będzie ciągiem odwiedzonych wierzchołków.

$$\text{Cover-time} \leqslant \sum_{i=2}^{2n} h_{v_{i-1}, v_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} h_{\vec{e}} + h_{\overleftarrow{e}} \leqslant 2|E|(|V|-1)$$

Lepszy cover-time

- Cover-time można ograniczyć przez $H_n \cdot B$ gdzie $B = \max_{e \in E} h_e$.
- Startujemy w jakimś ustalonym wierzchołku u.
- Wprowadźmy sobie losową permutację wierzchołków $Z_1, \dots, Z_n$
- Niech T_j będzie krokiem spaceru w którym odwiedzimy wierzchołki $Z_1, \dots, Z_j$.
- Niech $Y_j = \mathbb{E}[T_j - T_{j-1} | Z_1, \dots, Z_j, X_1, \dots, X_{T_{j-1}}]$
- Wtedy $\text{Cover-time} \leqslant \mathbb{E}[T_1] + \sum_{j=2}^{n} Y_j$

$\mathbb{E}[T_1] \leqslant \frac{1}{n} \cdot 0 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) B = \left(1 - \frac{1}{n}\right) B$

$Y_j \leqslant \frac{1}{j} B + \left(1 - \frac{1}{j}\right) \cdot 0$ - Bo jeśli $X_{T_j} = Z_j$ to $T_j = T_{j-1}$:)

Zatem $\mathbb{E}[T_1] + \sum_{j=2}^{n} Y_j \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right) B + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} B = H_{n-1} \cdot B$

S-t osiągalność

Skoro oczekiwanie po $2|V||E|$ krokach pokryjemy graf, to po $2n^3 \geqslant 2 \cdot 2 \cdot |V| \cdot |E|$ z praw. $\geqslant \frac{1}{2}$ sprawdzimy czy dosięgniemy. Potrzebujemy $O(\log n)$ bitów pamięci.