28 - Path coupling. FPAUS na zbiorach niezależnych z delta <= 4

Wednesday, 7 February 2024   11:19

Jak próbkować? Łańcuchem Markowa

1. Robimy łańcuch którego rozkładem stacjonarnym jest π
2. Pokazujemy, że po m krokach zbiega do π
3. Próbkujemy $X_m, X_{2m}, \dots$

Próbkowanie zbiorów niezależnych

- Mamy zbiór niezależny
- Losujemy wierzchołek - próbujemy dodać lub usuwamy.
- nie wiadomo jakie m wybrać

Path coupling

$\Delta(G) \leq 4$

Chcemy FPAUS dla $\Omega(G)$

Krok:

Mamy $I \in \Omega(G)$

Dla danej krawędzi $\overset{e}{(u,v)}$ i $p \in \{1,2,3\}$

$p=1$: $I' = I \setminus \{u,v\}$

$p=2$: $I' = (I \setminus \{u\}) \cup \{v\}$

$p=3$: $I' = (I \setminus \{v\}) \cup \{u\}$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ - idziemy. Jeśli nie to nic.

$I' = K_e^p(I)$

Dla $I, J \in \Omega(G)$, takich, że $J = I \cup \{x\}$

Chcemy pokazać: $\mathbb{E}\left[\left|K_e^p(I) \triangle K_e^p(J)\right|\right] \leq 1$ (I)

Dlaczego?

xor zbiorów

Sprzęgamy łańcuchy (X_t, Y_t):

Losujemy jednostajnie p i e: $X_{t+1} = K_e^p(X_t)$, $Y_{t+1} = K_e^p(X_t)$

Wystarczy pokazać $\mathbb{E}[d_{t+1} \mid d_t] \leq d_t$

- $d_t = |X_t \triangle Y_t|$:
  - Jeśli $d_t = 0$ to $X_t = Y_t \Rightarrow X_{t+1} = Y_{t+1}$
  - Jeśli $d_t = 1$ to (I) to zachodzi
  - Jeśli $d_t > 1$ to robimy „ścieżkę" między X_t i Y_t

$X_t \setminus Y_t = \{x_1, \dots, x_s\}$

$Y_t \setminus X_t = \{y_1, \dots, y_t\}$

$Z_0 = X_t$

$Z_1 = X_t \setminus \{x_0\}$

$\vdots$

$Z_s = X_t \cap Y_t$

$Z_{s+1} = (X_t \cap Y_t) \cup \{y_s\}$

$\vdots$

$Z_{s+t} = Z_{d_t} = Y_t$

Mamy $|Z_{i-1} \triangle Z_i| = 1 \Rightarrow \mathbb{E}[K(Z_{i-1}) \triangle K(Z_i)] \leq 1$ (I)

$$d_{t+1} = |X_{t+1} \triangle Y_{t+1}| = |K(X_t) \triangle K(Y_t)|$$

$$= |K(Z_0) \triangle K(Z_{d_t})| \leq \sum_{k=1}^{d_t} |K(Z_{i-1}) \triangle K(Z_i)| \leq d_t$$

Wróćmy do (I)

$I, J \in \Omega(G)$ $J = I + \{x\}$

e, p wylosowane jednostajnie

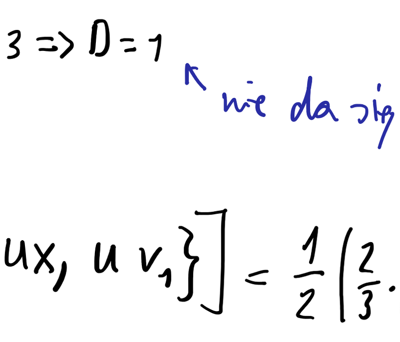
- $D = |K(I) \triangle K(J)|$

Niech $e = \{u, v\}$

- Jeśli $u, v \notin N(x) \Rightarrow D = 1$
- BSO $u \in N(x)$

$V = V_i \Rightarrow D \leq 1$

1. $|N(u) \cap I| \geq 2$



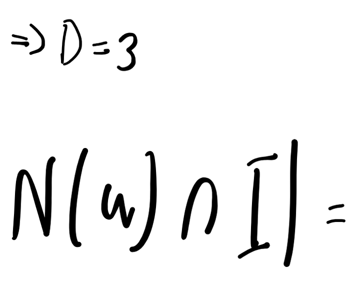
$V = X$:

$P=1$: $K(I) = I \setminus \{u,v\}$

$P=2$: $K(I) = I \setminus \{u\} \cup \{v\}$

$P=3$: $K(I) = I \setminus \{v\} \cup \{u\}$

2. $|N(u) \cap I| = 1$



$P=1 \Rightarrow D=0$

$P=2 \Rightarrow D=0$

$P=3 \Rightarrow D=1$

nie da się dodać u

$V = V_1$

$P=1 \Rightarrow D=1$

$P=2 \Rightarrow D=1$

$P=3 \Rightarrow D=3$

$$\mathbb{E}[D \mid e \in \{ux, uv_1\}] = \frac{1}{2}\overbrace{\left(\frac{2}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 1\right)}^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\overbrace{\left(\frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 3\right)}^{\frac{5}{3}} = 1$$

3. $|N(u) \cap I| = 0$

$V = X \Rightarrow D = 0$

$V = V_i$

$P=1 \Rightarrow D=1$

$P=2 \Rightarrow D=1$

$P=3 \Rightarrow D=2$

$$\mathbb{E}[D \mid e \in \{ux, uv_i\}] = \frac{1}{\Delta}\cdot 0 + \frac{\Delta - 1}{\Delta}\left(\frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 2\right)$$

$$= \frac{4}{3}\,\frac{\Delta}{\Delta - 1} \leq 1 \; :)$$