27 - FPRAS dla zbiorów jednostajnych przy założeniu FPAUS

Tuesday, 6 February 2024 22:54

ε-jednostajna próbka przestrzeni Ω

X daje ε-jednostajną próbkę jeśli

dla każdego $S \subset \Omega$: $\left| \mathbb{P}[X \in S] - \frac{|S|}{|\Omega|} \right| \leqslant \varepsilon$

Fully Polynomial Almost Uniform Sampler - FPAUS

Mając problem $x \to \Omega(x)$, gdzie $\Omega(x)$ to (dobry) zbiór rozwiązań, mamy FPAUS jeśli potrafimy generować ε-jednostajną próbkę wielomianowo od: $|x|$ i $\ln \frac{1}{\varepsilon}$

Zliczanie zbiorów niezależnych w G

Zakładamy FPAUS dla zbiorów niezależnych G.

n - liczba wierzchołków w G

$e_1, \dots, e_k$ - krawędzie G

$G_i = (V, \{e_1, \dots, e_i\})$

G_0 = same wierzchołki

$G_k = G$

$$|\Omega(G)| = \frac{|\Omega(G)|}{|\Omega(G_{k-1})|} \cdot \frac{|\Omega(G_{k-1})|}{|\Omega(G_{k-2})|} \cdot \dots \cdot \frac{|\Omega(G_1)|}{|\Omega(G_0)|} \cdot |\Omega(G_0)|$$

zbiory niezależne

Chcemy aproksymować $\frac{|\Omega(G_i)|}{|\Omega(G_{i-1})|} = r_i$

Lemat:

Jeśli s_i jest $\left(\frac{\varepsilon}{2k}, \frac{\delta}{k}\right)$-aproksymacją r_i

to $W = s_k \cdot s_{k-1} \cdot \dots \cdot s_1 \cdot 2^n$ jest (ε, δ)-aproksymacją

Dowód:

$$\mathbb{P}\left[\left| \frac{W}{|\Omega(G)|} - 1 \right| \leqslant \varepsilon \right] = \mathbb{P}\left[1-\varepsilon \leqslant \frac{W}{|\Omega(G)|} \leqslant 1+\varepsilon \right]$$

$$= \mathbb{P}\left[1-\varepsilon \leqslant \frac{s_k \cdot \dots \cdot s_1}{r_k \cdot \dots \cdot r_1} \leqslant 1+\varepsilon \right]$$

$$\geqslant \mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{k} \left\{ 1-\frac{\varepsilon}{2k} \leqslant \frac{s_i}{r_i} \leqslant 1+\frac{\varepsilon}{2k} \right\} \right] \qquad \left(1+\frac{\varepsilon}{2k}\right)^k \leqslant e^{\frac{\varepsilon}{2}} \leqslant 1+\varepsilon$$

$$= \mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{k} \left\{ |s_i - r_i| \leqslant \frac{\varepsilon}{2k} \cdot r_i \right\} \right] \geqslant 1-\delta \qquad (0, \sim 2.5) \text{ ;)}$$

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{k} \left\{ |s_i - r_i| > \frac{\varepsilon}{2k} \cdot r_i \right\} \right] \leqslant \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}\left[|s_i - r_i| > \frac{\varepsilon}{2k} r_i \right]$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \frac{\delta}{k} = \delta \quad :)$$

Mając H, H' gdzie $H = H' + e$

i parametry $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2k}$; $\delta' = \frac{\delta}{2k}$ chcemy policzyć $R = \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}$ $\quad R \geqslant \frac{1}{2}$

Czyli chcemy Y takie: $\mathbb{P}[|Y - R| \leqslant \varepsilon' R] \geqslant 1-\delta'$

czyli $\mathbb{P}\left[\left| \frac{Y}{R} - 1 \right| \leqslant \varepsilon' \right] \geqslant 1-\delta'$

I - $\frac{\varepsilon'}{3}$-jednostajna próbka H'

$X_i = [I \in \Omega(H)]$ $\quad Y = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$ $\quad \mu = \mathbb{E}[Y]$

$$|\mu - R| = \left| \mathbb{P}[I \in \Omega(H)] - \frac{\Omega(H)}{\Omega(H')} \right| \leqslant \frac{\varepsilon'}{3} \qquad \mu \geqslant \frac{1}{3} \text{ ? ;)}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\varepsilon'}{3R} \leqslant \frac{\mu}{R} \leqslant 1 + \frac{\varepsilon'}{3R} \overset{R \geqslant \frac{1}{2}}{\Rightarrow} 1 - \frac{2}{3}\varepsilon' \leqslant \frac{\mu}{R} \leqslant 1 + \frac{2}{3}\varepsilon' \quad (I)$$

Chernoff $\quad m \geqslant \frac{3 \ln \frac{2}{\delta}}{\mu \varepsilon^2}$

W naszym przypadku $m \geqslant \frac{3 \ln \frac{2}{\delta'}}{\mu \left(\frac{\varepsilon'}{3}\right)^2}$ albo łatwiej $m \geqslant \frac{9 \ln \frac{2}{\delta'}}{\left(\frac{\varepsilon'}{3}\right)^2}$

Zatem $\mathbb{P}\left[|Y - \mu| \geqslant \frac{\varepsilon'}{6}\mu \right] \leqslant \delta'$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left[1 - \frac{\varepsilon'}{6} \leqslant \frac{Y}{\mu} \leqslant 1 + \frac{\varepsilon'}{6} \right] \geqslant 1-\delta' \quad (II)$$

$\Rightarrow$ Łączymy (I) i (II)

$$\mathbb{P}\left[\left(1 - \frac{\varepsilon'}{6}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon'\right) \leqslant \frac{\mu}{R} \cdot \frac{Y}{\mu} \leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon'}{6}\right)\left(1 + \frac{2}{3}\varepsilon'\right) \right] \geqslant 1-\delta'$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left[1-\varepsilon' \leqslant \frac{Y}{R} \leqslant 1+\varepsilon' \right] \geqslant 1-\delta' \quad \square$$