5 - Chernoff dla specjalnych zmiennych. Set balancing

Thursday, 1 February 2024 22:49

Zmienne przyjmujące wartość 1 i -1

$X_1, \dots, X_n$ $\mathbb{P}[X_i = -1] = \mathbb{P}[X_i = 1] = \frac{1}{2}$

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ Wtedy dla każdego $a > 0$ $\mathbb{P}[X \geq a] \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}$

Dowód

$M_{X_i}(t) = \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} e^{t}$

$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$ $e^{-t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^k}{k!}$ $(2k)! \geq 2^k k!$

$M_{X_i}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{2^k \cdot k!} = e^{\frac{t^2}{2}}$

$M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2} \cdot n}$

Zatem $\mathbb{P}[X \geq a] \leq \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{ta}} = \frac{e^{\frac{t^2}{2} \cdot n}}{e^{ta}} = e^{\frac{t^2}{2} n - ta}$

Dla $t = \frac{a}{n}$ $\dots \leq e^{\frac{a^2}{2n^2} \cdot n - \frac{a}{n} \cdot a} = e^{-\frac{a^2}{2n}}$

Przez symetrię $\mathbb{P}[X \leq a] \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}$

Zatem $\mathbb{P}[|X| \geq a] \leq 2 e^{-\frac{a^2}{2n}}$

Zmienne przyjmujące wartości w $\{0,1\}$

Niech $Y_i = \frac{1}{2}(X_i + 1)$ gdzie $\mathbb{P}[X_i = 1] = \mathbb{P}[X_i = -1] = \frac{1}{2}$

$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ $\mathbb{E}[Y] = \frac{n}{2}$

1) Dla każdego $a > 0$

$\mathbb{P}[Y > \mu + a] \leq e^{-\frac{2a^2}{n}}$

2) Dla każdego $\delta > 0$

$\mathbb{P}[Y > (1+\delta)\mu] \leq e^{-\mu \delta^2}$

Dowód:

1) $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} X_i + 1 = \frac{1}{2} X + \frac{n}{2}$

$\mathbb{P}[Y \geq \mu + a] = \mathbb{P}[\frac{1}{2}(X+n) \geq \mu + a] = \mathbb{P}[X \geq 2a] \leq e^{-\frac{(2a)^2}{2n}} = e^{-\frac{2a^2}{n}}$

2) $\mathbb{P}[Y \geq (1+\delta)\mu] = \mathbb{P}[\frac{1}{2} X \geq \delta\mu] = \mathbb{P}[X \geq 2\delta\mu] \leq e^{-\frac{(2\delta\mu)^2}{2n}} = e^{-\frac{n\delta^2}{2}} = e^{-\mu\delta^2}$

Przez symetrię

$\mathbb{P}[Y \leq \mu - a] \leq e^{-\frac{2a^2}{n}}$

$\mathbb{P}[Y \leq (1-\delta)\mu] \leq e^{-\mu\delta^2}$

Set balancing

Mamy n obiektów, każdy ma m binarnych cech

Chcemy podzielić na dwa zbiory, aby najbardziej zaburzona cecha była jak najmniejsza.

$A \in \{0,1\}^{n \times m}$, $b \in \{-1,1\}^m$

Chcemy zminimalizować $\max_{1 \leq i \leq n} (Ab)_i$ wybieramy b

Wylosujmy współrzędne wektora b losowo

$\mathbb{P}[b_i = -1] = \mathbb{P}[b_i = 1] = \frac{1}{2}$

Z dużym prawdopodobieństwem $\max_{1 \leq i \leq n} (Ab)_i \leq \sqrt{4m \ln n}$ (1)

Ustalmy wiersz macierzy A (i) i wyrażenie $\sum_{j=1}^{m} A_{ij} b_j$

Niech k będzie liczbą niezerowych wartości w i-tym wierszu A.

Odpowiadające im wyrazy to Y_j: $\mathbb{P}[Y_j = -1] = \mathbb{P}[Y_j = 1] = \frac{1}{2}$

Niech $Y = \sum_{j=1}^{m} A_{ij} \cdot b_{ij}$. Wtedy:

$\mathbb{P}[|Y| \geq \sqrt{4m \ln n}] \leq 2 e^{-\frac{4m \ln n}{2k}} \leq 2 e^{-2 \ln n} \leq \frac{2}{n^2}$

Zatem z Union-bounda, szansa, że (1) nie zachodzi jest nie większa niż $\frac{2}{n}$.