21 - rozkład normalny

Saturday, 20 January 2024 22:03

Standardowy rozkład normalny

$Z \sim N(0,1)$

Dystrybuanta

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Gęstość

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Unormowanie

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dy\, dx \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr$$

$$= 2\pi \cdot -e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_0^{\infty} = 2\pi \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

Funkcja błędu

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z} e^{-x^2} dx$$

Wtedy:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$$

Wartość oczekiwana i wariancja

$\mathbb{E}[Z] = 0$, ponieważ ϕ jest parzysta

$$\operatorname{Var}(Z) = \mathbb{E}[Z^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

Ogólna zmienna rozkładu normalnego

$Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ – zmienna o rozkładzie normalnym o średniej μ i wariancji σ^2

Dystrybuanta

$$F_Z(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\left(\frac{\mu - x}{\sigma}\right)^2}{2}} dx$$

Gęstość

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2}{2}}$$

Liniowa transformacja

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Niech $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, wtedy $Z \sim N(0,1)$

$$\mathbb{P}[Z \leq z] = \mathbb{P}[X \leq \sigma z + \mu] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\sigma z + \mu} e^{-\frac{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}{2}} dx$$

$$t := \frac{x-\mu}{\sigma} \quad dt = \frac{1}{\sigma} dx \Rightarrow = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Sygnał z szumem

Dostajemy z kanału wiadomość $S + Y$

$S \in \{-1, 1\}$, $Y \sim N(0, \sigma^2)$

Odkodowywanie: $\operatorname{sgn}(S+Y)$

Prawdopodobieństwo błędu:

$$\mathbb{P}[Y \leq -1 \mid S = 1] + \mathbb{P}[Y \geq 1 \mid S = -1]$$

$$\mathbb{P}[Y \leq -1] = \mathbb{P}\left[\frac{Y-0}{\sigma} \leq \frac{-1-0}{\sigma}\right] = \Phi\left(-\frac{1}{\sigma}\right)$$

$$\mathbb{P}[Y \geq 1] = 1 - \mathbb{P}\left[\frac{Y-0}{\sigma} \leq \frac{1-0}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

$$\Phi(-\alpha) = 1 - \Phi(\alpha)$$

P. błędu $2\left(1 - \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right)$

Funkcja tworząca momenty

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

$$M_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot e^{-\frac{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(z\sigma + \mu)} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{t\mu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz\sigma - \frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{t\mu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t\sigma - z)^2}{2} + \frac{t^2\sigma^2}{2}} dz$$

$$= e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

Suma zmiennych o rozkładzie normalnym ma rozkład normalny

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \quad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

Wtedy $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t) = e^{t\mu_1 + \frac{t^2\sigma_1^2}{2} + t\mu_2 + \frac{t^2\sigma_2^2}{2}}$$

$$= e^{t(\mu_1 + \mu_2) + \frac{t^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{2}}$$