# 24 - Sprzęganie łańcuchów Markowa. Lemat o monotoniczności. Geometryczna zbieżność.

Tuesday, 6 February 2024 11:59

## Sprzęganie łańcuchów

$S$ - zbiór stanów, $P$ - macierz przejścia

$X, Y$ - łańcuchy zadane macierzą przejścia $P$.

$Z_t = (X_t, Y_t)$ - sprzęganie łańcuchów $X$ i $Y$:

- $\mathbb{P}[X_{t+1} = x' \mid Z_t = (x,y)] = P_{x,x'}$
- $\mathbb{P}[Y_{t+1} = y' \mid Z_t = (x,y)] = P_{y,y'}$ dla $x, x', y, y' \in S$, $t \geq 0$

- $X$ i $Y$ mogą (i będą) zależne
- Jeśli raz się spotkają, to zawsze są razem.

## Lemat o sprzęganiu

$\mathbb{P}[X_T \neq Y_T \mid X_0 = x, Y_0 = y] \leq \varepsilon$ Dla każdego $x, y$

to $T_{mix}(\varepsilon) \leq T$

Dowód

Ustalamy dowolny $X_0$, $Y_0$ wylosowany z rozkładu $\pi$

$$\mathbb{P}[X_T \in A] \geq \mathbb{P}[Y_T \in A \cap X_T = Y_T] = 1 - \mathbb{P}[Y_T \notin A \cup X_T \neq Y_T]$$
$$\geq 1 - \mathbb{P}[Y_T \notin A] - \mathbb{P}[X_T \neq Y_T] \geq \mathbb{P}[Y_T \in A] - \varepsilon = \pi(A) - \varepsilon$$

$$\mathbb{P}[X_T \in S-A] \geq \mathbb{P}[Y_T \in S-A \cap X_T = Y_T] = 1 - \mathbb{P}[Y_T \notin S-A \cup X_T \neq Y_T]$$
$$\geq 1 - \mathbb{P}[Y_T \notin S-A] - \mathbb{P}[X_T \neq Y_T] = \mathbb{P}[Y_T \in S-A] - \varepsilon = \pi(S-A) - \varepsilon$$

Zatem: $1 - \mathbb{P}[X_T \in A] = \mathbb{P}[X_T \in S-A] \geq 1 - \pi(A) - \varepsilon$

$\Rightarrow \pi(A) + \varepsilon \geq \mathbb{P}[X_T \in A] \geq \pi(A) - \varepsilon$ $\square$

## Lemat o monotoniczności

$\Delta_x(t+1) \leq \Delta_x(t)$ zatem $\Delta(t+1) \leq \Delta(t)$

Dla zbioru stanów $S$ i macierzy przejścia $P$

Weźmy takie sprzęganie $(X_t, Y_t)$ rozkładów $P^t(x, \cdot)$ i $\pi$

że $\| P^t(x,\cdot) - \pi \|_{TV} = \mathbb{P}[X_t \neq Y_t]$ oraz

jeśli $X_t = Y_t$ to $X_{t+1} = Y_{t+1}$:

Jeśli $X_t = Y_t$ to przechodzą razem według $P$

W przeciwnym przypadku według $P$ ale niezależnie.

Wtedy: $\mathbb{P}[X_t \neq Y_t] \geq \mathbb{P}[X_{t+1} \neq Y_{t+1}]$

$\| P^t(x,\cdot) - \pi \|_{TV} = \mathbb{P}[X_t \neq Y_t]$

$\geq \mathbb{P}[X_{t+1} \neq Y_{t+1}] = \| P^{t+1}(x,\cdot) - \pi \|_{TV}$ $\square$

## Twierdzenie o geometrycznej zbieżności

$P$ - macierz przejścia

Istnieje $\alpha \in (0,1)$ i $C > 0$ takie, że $\forall_n$

$$\Delta(n) = \max_{x \in S} \| P^n(x,\cdot) - \pi \| \leq C\alpha^n$$

Lemat $r \geq 1$ takie, że $P^r_{x,y} > 0$

W granicy $\lim_{r \to \infty} P^r_{x,y} = \pi_y$ ;)

Dowód:

- Weźmy $r$ z poprzedniego lematu i rozpatrzmy $P^r$
- $m_y = \min_{x \in S} P^r_{x,y}$ — minimalna szansa na wejście do $y$
- $m = \sum_{y \in S} m_y$
- Konstruujemy sprzęganie łańcuchów takie, że:

$\mathbb{P}[X_t = Y_t = y] \geq m_y$

Wtedy $\mathbb{P}[X_t = Y_t] \geq m$, zatem $\mathbb{P}[X_t \neq Y_t] \leq (1-m)^t$

Rzucamy monetą z szansą $m$:

Jeśli tak to idziemy oboma na raz do $y$ z p. $\frac{m_y}{m}$

Jeśli nie to Jeśli nie to z "reszty" idziemy gdzieś żeby się zgadzało

$\alpha = (1-m)^{\frac{1}{r}}$ $\quad C = \alpha^{-r}$

$n = rt + j$

$$\Delta_x(n) \leq \Delta_x(rt) \leq (1-m)^t = \alpha^{rt} = \alpha^{n-j} \leq C\alpha^n$$ ;)