

Model Solowa jest długookresowy, a współczynnik kapitałochłonności ewoluuje.

$$Y(t) = F(K(t), E(t))$$

Produkcja dana jest neoklasycznym funkcją wzrostu zależną od kapitału K i efektywnej pracy E .

$E = A \cdot L$ - gdzie A to naukowo-techniczne uzbrojenie pracy, a L to liczba pracujących.

Ważne! Inaczej

$$MPK \equiv \frac{\partial F}{\partial K} - \text{krańcowy produkt kapitału}$$

$$MPL \equiv \frac{\partial F}{\partial L} - \text{krańcowy produkt pracy}$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} MPK = 0, \quad \lim_{K \rightarrow 0^+} MPK = +\infty$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} MPL = 0, \quad \lim_{L \rightarrow 0^+} MPL = +\infty$$

Dodatkowo:

$$\frac{\partial MPK}{\partial K} < 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial MPL}{\partial L} < 0 \quad \text{Im większa skala tym mniejsza efektywność}$$

Funkcja produkcji jest jednorodna 1. st.

$$F(\gamma K, \gamma E) = \gamma F(K, E)$$

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t)$$

Przyrost kapitału zależy od inwestycji I i deprecjacji kapitału K ze współczynnikiem δ .

$$I(t) = S(t) - \text{inwestycje są tożsame z oszczędnościami } S$$

$$S(t) = s Y(t) - \text{oszczędności stanowią } s\text{-ty część produkcji}$$

$$n = \frac{\dot{L}}{L} - \text{stopa wzrostu liczby pracujących}$$

$$L(t) = L_0 \cdot e^{nt}$$

$$g = \frac{\dot{A}}{A} - \text{stopa wzrostu postępu technicznego}$$

$$A(t) = A_0 \cdot e^{gt}$$

Równowaga Modelu

Zdefiniujmy dwie wartości na których będziemy pracować

$$k(t) = \frac{K(t)}{L(t)} - \text{techniczne uzbrojenie pracy}$$

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)} - \text{wydajność pracy}$$

oraz

$$k_E(t) = \frac{k(t)}{A(t)} - \text{kapitał na jednostkę efektywnej pracy}$$

$$y_E(t) = \frac{y(t)}{A(t)} - \text{produkt na jednostkę efektywnej pracy}$$

Pozwala to zdefiniować intensywną funkcję produkcji:

$$f(k_E(t)) = f\left(\frac{K(t)}{E(t)}\right) = \frac{F(K, E)}{E(t)} = y_E(t)$$

$$I(t) = s Y(t) - \text{inwestycje to oszczędności}$$

$$\dot{K}(t) = s Y(t) - \delta K(t)$$

$$\text{Różniczkując } k_E(t) = \frac{K(t)}{E(t)}:$$

$$\dot{k}_E(t) = \frac{\dot{K}(t)}{E(t)} - (g+n) k_E(t) \quad \text{zatem:}$$

$$\dot{k}_E(t) = \frac{s Y(t) - \delta K(t)}{E(t)} - (g+n) k_E(t) = s y_E - (g+n+\delta) k_E(t)$$

$$\dot{k}_E(t) = s y_E(t) - (g+n+\delta) k_E(t) - \text{równanie Solowa}$$

Równanie Solowa wyraża zmianę kapitału na jednostkę efektywnej pracy jako kombinację produktu na jednostkę efektywnej pracy i kapitału na jednostkę efektywnej pracy

Równowaga następuje gdy $\dot{k}(t \geq t_0) = 0$

Dzieje się tak gdy:

$$s y_E(t) = (g+n+\delta) k_E(t)$$