Wartości szczególne i PCA

Tuesday, 30 January 2024 14:47

Problem

Podejrzewamy, że $a_1, \dots, a_n$ są kombinacją liniową $v_1, \dots, v_d$ $d \leq n$

Przybliżanie macierzy A macierzą rzędu d.

Rozkład SVD

Szukamy $\underset{\|x\|=1}{\arg\max} \|Ax\|$.

Okazuje się, że $A^T A x = \lambda x$ – x jest wektorem własnym $A^T A$

Załóżmy, że A jest kwadratowa i nieosobliwa

wektory własne $A^T A$ to baza ortonormalna $v_1, \dots, v_n$

$A^T A v_i = \lambda_i v_i$

$v_1, \dots, v_n$ – prawe wektory szczególne

$\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$ – wartości szczególne

$u_1, \dots, u_n$ – lewe wektory szczególne

$u_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A \cdot v_i$

$\|A v_i\| = \sqrt{v_i^T A^T A v_i} = \sqrt{v_i^T \cdot \lambda_i v_i} = \sqrt{\lambda_i}$

$V = [v_1, \dots, v_n]$ V^T – przejście do nowej bazy

Σ – diagonala z $\sqrt{\lambda}$ – skalowanie

$U = [u_1, \dots, u_n]$ – powrót do starej bazy.

$A = U \Sigma V^T$

Jeśli A osobliwa to niektóre $\lambda_i = 0$, dalej działa

Jak niekwadratowa to odpowiednie macierze uzupełniamy dowolnymi ortonormalnymi do bazy i działa

Jak znaleźć SVD?

Szukamy wektorów własnych $A^T A$ – słaba stabilność!

PCA

Przybliżamy zbiór wektorów mniejszym zbiorem wektorów