5 - Ideał, Pierścień ilorazowy Z_p/W

Wednesday, 19 June 2024 19:37

Pierścień

Zbiór R z działaniem $+, \cdot$:

- $(R,+)$ jest grupą przemienną
- $(R\setminus\{0\}, \cdot)$ jest pół-grupą przemienną
- Mnożenie jest rozdzielne względem dodawania

Ciało

Każdy element $R\setminus\{0\}$ jest odwracalny.

Ideał

$I \subseteq R$:

- $x, y \in I \Rightarrow x+y \in I$
- $x \in I, a \in R \Rightarrow xa \in I$

Przykład: (a) w $\mathbb{Z}$

(a) w dowolnym pierścieniu - ideał główny.

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ - ideał generowany przez $a_1, \ldots, a_n$.

Pierścień ilorazowy

Mając ideał I pierścienia R możemy zdefiniować relację równoważności $\sim$: $x \sim y \Leftrightarrow x-y \in I$

Zbiór jej klas abstrakcji jest pierścieniem (ilorazowym) R/I

Twierdzenie

Niech $\mathbb{F}$ będzie ciałem, g wielomianem nad $\mathbb{F}$.

$\mathbb{F}[X]/(g)$ jest ciałem iff g jest nierozkładalny.

- Jeśli $g = a \cdot b$ dla nie-stałych a, b to w $\mathbb{F}[X]/(g)$ $a \cdot b = 0$. $\deg a, \deg b < \deg g$ zatem są dzielnikami $0 \Rightarrow$ nie ma odwrotności.

- $\mathbb{F}[X]/(g)$ jest pierścieniem, zatem wystarczy pokazać, że każdy element różny od 0 jest odwracalny. $\gcd(a, g) = 1$, bo inaczej g byłby rozkładalny. Zatem dla pewnych $s, t \in \mathbb{F}[X]/(g)$: $s \cdot a + t \cdot g = 1$. $\square$