# Ortogonalność i QR

Monday, 29 January 2024 23:28

## Normy wektorów

$\vec{x}$

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$\|x\|_\infty = \max |x_i|$

## Norma macierzy

$\|A\| = \max\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}$

$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le m} \sum_{i=1}^{n} |A_{ij}|$ – max suma kolumny

$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{m} |A_{ij}|$ – max suma wiersza

$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda}$ – $\lambda$ to największa wartość własna $A^TA$

$K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ – współczynnik uwarunkowania

Błąd w rozkładzie LU proporcjonalny do $\frac{\max|U_{i,j}|}{\max|U_{i,j}|}$

## Iloczyn skalarny

$x, y \in \mathbb{K}^n$

$\langle x, y \rangle = x^T y = \sum x_i y_i$

$\langle x, x \rangle = \sum x_i^2 \geq 0$

## Nadokreślone układy

Chcemy zminimalizować $\|Ax^* - b\|_2$

Wtedy $x^*$ spełnia $A^TAx^* = A^Tx^*$

## Dodatniookreśloność

A jest dodatniookreślona

$\forall_x \; x^TAx > 0$ $\qquad x^TAx = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_i x_j$

dodatnio półokreślona

$\forall_x \; x^TAx \geq 0$

Dla każdej macierzy A $A^TA$ dodatnio półokreślona

Jeśli rank $A = n$ to $A^TA$ dodatnio określona

## Rozkład Choleskyego

$Ax = b$ A jest symetryczna i dodatnio określona

Rozkład LU taki, że $U = L^T$

$A_{i,j} = \sum_{k=1}^{j} L_{i,k} \cdot L^T_{k,j} = \sum_{k=1}^{j} L_{i,k} \cdot L_{j,k}$

$L_{i,j} \cdot L_{j,j} = A_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{i,k} \cdot L_{j,k}$

$L_{i,j} = \frac{A_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{i,k} L_{j,k}}{L_{j,j}}$ $\quad j < i$

$L_{i,i} = \sqrt{A_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,k}^2}$

## Rozkład QR

$v_1, \dots, v_n$ – ortonormalny

$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad i \neq j$

$\langle v_i, v_i \rangle = 1$

Jeśli $v_1, \dots, v_n$ jest bazą to $x = \sum \langle x, v_i \rangle \cdot v_i$

Macierz ortogonalna $Q^T \cdot Q = I$

Dla kwadratowych iloczyn ortogonalnych jest ortogonalny.

Zachowuje normę, długości wektorów i kąty

$A = QR$ Q – ortogonalna, R – górnotrójkątna

## Algorytm Grama Schmidta

$a_1, \dots, a_n$ – kolumny A

Chcemy takie ortonormalne $q_1, \dots, q_n$

$\text{span}\{a_1\} = \text{span}\{q_1\}$

$\vdots$

$\text{span}\{a_1, \dots, a_n\} = \text{span}\{q_1, \dots, q_n\}$

$Q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}$

$Q_2 = \frac{a_2 - \langle a_2, Q_1 \rangle Q_1}{\|a_2\|}$

$\vdots$

$Q_n = \frac{a_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle a_n, q_j \rangle \cdot q_j}{\|a_n\|}$

Wyrzucamy $Q_i$ ze wszystkich pozostałych od razu po obliczeniu.

$A = QR \Rightarrow R = Q^TA$ $\qquad R = \begin{bmatrix} \langle q_1, a_1 \rangle & \langle q_1, a_2 \rangle & \cdots \\ 0 & \langle q_2, a_2 \rangle & \cdots \\ & & \langle q_n, a_n \rangle \end{bmatrix}$

$R_{i,j} = \langle q_i, a_j \rangle$

$A^TAx = A^Tb \qquad A = QR$

$R^TQ^TQRx = R^TQ^Tb$

$R^TRx = R^TQ^Tb$

$Rx = Q^Tb$

## Odbicia Householdera

$Q_1 x = \|x\| e_1$ $\qquad Q_1$ – odbicie symetryczne x na $\|x\|e_1$

$u = \|x\| e_1 - x$

$v = \frac{u}{\|u\|}$

$Q_1 = I - 2vv^T$

Rekurencja na mniejszej macierzy $Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2' \end{bmatrix}$