Równania nieliniowe

Tuesday, 30 January 2024 15:16

Twierdzenie Darboux

$f(a) \leq y \leq f(b)$

to istnieje $x \in [a,b]: f(x) = y$

Twierdzenie Lagrange'a

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ różniczkowalna

to istnieje $x \in [a,b]: f'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Wzór Taylora

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (x-a)^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + R_{n+1}(x,a)$$

$$R_{n+1}(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{n+1!} (x-a)^{n+1}$$

Bisekcja

Szukamy $f(x) = 0$.

Jeśli $f(a) \cdot f(b) < 0$ to w $[a,b]$ jest pierwiastek

```
while (stop(p, q))
    s = (p+q)/2
    if f(p)f(s) < 0
        q = s
    else
        p = s
```

$$Q_{n+1} - P_{n+1} \leq \frac{1}{2}(Q_n - P_n)$$

$e_{n+1} \approx \frac{1}{2} e_n$ – błąd

Zbieżność liniowa – liniowo wiele cyfr znaczących.

Metoda Newtona

Szukamy $f(x) = 0$ mając pewne przybliżenie x_n

$$f(x^*) = f(x_n) + (x^* - x_n) f'(x_n) + R_2$$

$$0 = f(x_n) + (x^* - x_n) f'(x_n)$$

$$\Downarrow$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$f'(x_n) \neq 0$ i jesteśmy blisko pierwiastka

$$e_n = x_n - x^*$$

$$e_{n+1} = x_{n+1} - x^* = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - x^* = e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Z szeregu Taylora w x_n:

$$= \frac{f'(x_n) e_n - f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{R_2(x^*, x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f^{(2)}(x_n)}{2 f'(x_n)} e_n^2 \approx C \cdot e_n^2$$

Zbieżność kwadratowa - dla k cyfr log iteracji

Metoda siecznych

Nie potrafimy explicite liczyć pochodnej

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

$$\Downarrow$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

metoda Newtona

$$e_{n+1} \approx C e_n \cdot e_{n-1} \Rightarrow e_n \approx e_{n-1}^{\phi}$$

Metoda punktu stałego

Chcemy $f(x) = x$

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Nie zawsze zbieżna. Jeśli f jest zwężające to zbieżność liniowa względem parametru zwężania.