Model Solowa z funkcją produkcji Cobba-Douglasa

Wednesday, 4 June 2025 15:56

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} E(t)^{1-\alpha}$$

$MPK = \frac{\partial F}{\partial K} = \alpha K^{\alpha-1} E^{1-\alpha} = \omega_K$ - krańcowy prod. kapitału

$MPL = \frac{\partial F}{\partial L} = (1-\alpha) K^{\alpha} A^{1-\alpha} L^{-\alpha} = \omega_L$ - krańcowy prod. pracy

Liczba pracujących rośnie ze stopą wzrostu n:

$$L(t) = L_0 e^{nt}$$

Postęp naukowy rośnie ze stopą wzrostu g:

$$A(t) = A_0 e^{gt}$$

$I(t) = S(t) = sY(t)$ - inwestycje to oszczędności według stopy oszczędności s.

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t)$$

$k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$ - techniczne uzbrojenie pracy

$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)}$ - wydajność pracy

$k_E(t) = \frac{k(t)}{A(t)}$ - kapitał na jednostkę efektywnej pracy

$y_E(t) = \frac{y(t)}{A(t)}$ - produkt na jednostkę efektywnej pracy

$$\dot{k}(t) = \frac{\dot{K}(t)L(t) - K(t)\dot{L}(t)}{L(t)^2} = \frac{sY(t) - \delta K(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{L(t)} n$$

$$\dot{k}(t) = s\,y(t) - k(t)(\delta + n + g)$$

Po podstawieniu z Cobba-Douglasa:

$$\dot{k}(t) = s A_0^{1-\alpha} \cdot e^{(1-\alpha)gt} k(t)^{\alpha} - (\delta + n) k(t)$$

Po rozwiązaniu równania różniczkowego:

$$k_E^* = \left(\frac{s}{\delta + g + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$y_E^* = \left(\frac{s}{\delta + g + n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Złota reguła akumulacji Phelpsa

Chcemy w zrównoważonej gospodarce zmaksymalizować konsumpcję per capita

$C(t) = (1-s) Y(t)$ - konsumpcja to pozostałość z produkcji po inwestycjach

$$c_E(t) = \frac{C(t)}{E(t)} = (1-s)\, y_E(t)$$

Zatem $c_E^* = (1-s)\, y_E^* = (1-s)\left(\frac{s}{\delta + n + g}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$

Optymalizując względem s otrzymujemy że najlepsze jest: $s = \alpha$.