Eliminacja Gaussa

Monday, 29 January 2024 22:35

Układ równań liniowych

$Ax = b$ – i-ty rząd to i-te równanie

0 rozwiązań (nadokreślony)
∞ rozwiązań (niedookreślony)
1 :)

Twierdzenie Kroneckera-Capellego

$\mathbb{K}$ - ciało
$A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ $b \in \mathbb{K}^n$

Niech $r := \text{rank}[A]$, $s := \text{rank}[A|b]$

- Układ $Ax = b$ posiada rozwiązanie $\Leftrightarrow s = r$
- Rozwiązanie jest jednoznaczne $\Leftrightarrow r = n$
- Rozwiązania to przestrzeń $n-r$ wymiarowa

$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1} b$

Eliminacja Gaussa

- Bierzemy macierz $[A|b]$
- idziemy po wierszach i:
  - normalizujemy (przekątna 1)
  - odejmujemy wyraz z przekątnej od niższych wierszy
- Dostaliśmy w $O(n^3)$ operacji macierz górnotrójkątną.
- Od dołu robimy diagonalną w $O(n^2)$

- Odjęcie i-tego wiersza od j-tego ze współczynnikiem c to przemnożenie przez macierz $T_{i,j,c}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & & i \end{array} \\ j & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \cdots & -c & & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$T_{i,j,c}^{-1} = T_{i,j,-c}$

Rozkład LU

$[a_1, a_2, \dots, a_n]$

$[T_{i,j,c}]$

$T_{i,j,c}$ używane w rozkładzie są dolnotrójkątne

$L_k \cdots L_1 \cdot A = U \Rightarrow A = L_1^{-1} \cdots L_k^{-1} \cdot U = LU$

for $i = 1 \dots n$:
  $p = A_{i,i}$
  for $j = i+1 \dots n$
    $y = A_{j,i}$
    $L_{j,i} = \frac{y}{p}$
    $A_j -= A_i \cdot L_{j,i}$

Mając $A = LU$ mamy $Ax = LUx = b$

rozwiązujemy układ w $O(n^2)$ dla różnych b.

Pivoting

Przed odejmowaniem swapujemy wiersze, aby el. na przekątnej miał max. wartość bezwzględną.

- Dużo lepsza stabilność
- W rozkładzie LU przy swapie i-tej i j-tej kolumny swapujemy L_i i L_j (oraz U_i i U_j i ew. b)

$LU = PA$ gdzie P to macierz permutacji

Zastosowania

Odwrotność macierzy

$AX = B$ – rozbijamy B na kolumny

$Ax_1 = e_1 \dots Ax_n = e_n$

Wyznacznik

- swap wierszy (kolumn?) zmienia znak wyznacznika
- przemnożenie wiersza przez stałą zwiększa wyznacznik.
- dodanie do wiersza wielokrotności innego nie zmienia
- wyznacznik dolno/górnotrójkątnej to iloczyn diagonali
- robimy Gaussa i utrzymujemy ilość swapów i mnożenia.