Interpolacja

Tuesday, 30 January 2024 22:18

Problem

Mamy $(x_0, y_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$

Chcemy znaleźć $W(x)$ który to spełnia (stopnia n)

Interpolacja Lagrange'a

Znajdźmy wielomiany $P_0, \dots, P_{n-1}$

$$P_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$W(x) = \sum_{i=0}^{n-1} P_i(x) \cdot y_i$$

$$P_i = \frac{\prod_{i \neq s} (x - x_s)}{\prod_{i \neq s} (x_i - x_s)}$$

Interpolacja Newtona

$$R_i(x) = \prod_{s=0}^{i-1} (x - x_s)$$

Chcemy wyrazić W w bazie R_i

$$W_0 = y_0$$

$$W_1 = W_0 + \alpha_1 R_1$$

$$\vdots$$

$$W_n = W_{n-1} + \alpha_n R_n$$

Algorytm Neville'a

Chcemy znaleźć współczynniki do Newtona

$$c[i,i] = f(x_i) = y_i$$

$$c[i,j] = \frac{c[i+1,j] - c[i,j-1]}{x_j - x_i}$$

$$\alpha_i = c[0,i]$$

$f(x_0) = y_0 = c[0,0]$

$f(x_1) = y_1 = c[1,1]$

$f(x_2) = y_2 = c[2,2]$

$\vdots$

$y_n = c[n,n]$

$$c[0,1] = \frac{c[1,1] - c[0,0]}{x_1 - x_0}$$

$$c[1,2] = \frac{c[2,2] - c[1,1]}{x_2 - x_1}$$

$$c[0,2] = \frac{c[1,2] - c[0,1]}{x_2 - x_0}$$

Funkcje sklejane

Zamiast przybliżać funkcję jednym wielomianem przybliżmy każdy przedział $[x_i, x_{i+1})$ innym

$n+1$ węzłów $x_0, \dots, x_n$

Szukamy g takiej, że na każdym przedziale g jest wielomianem stopnia k

$g \in C^{k-1}$ (ma ciągłą $k-1$ pochodną)

Cubic splines $k = 3$

$$g_{i-1}(x_i) = y_i = g_i(x_i)$$

$$g'_{i-1}(x_i) = g'_i(x_i)$$

$$g''_{i-1}(x_i) = g''_i(x_i)$$

$4n-2$ równania $4n$ niewiadomych

$$g''(x_0) = 0$$

$$g''(x_n) = 0 \quad :)$$