Wektory i wartości własne

Tuesday, 30 January 2024 12:18

Wektory i wartości własne

$$Ax = \lambda x$$

x jest wektorem własnym, λ wartością własną.

x jest wektorem własnym dla wartości λ jeśli $(A - I\cdot\lambda)x = 0$

Jeśli λ jest w.w to $A - \lambda I$ jest osobliwa

Zbiór wartości własnych - widmo macierzy

moduł największej - promień spektralny

Wielomian charakterystyczny

$W(t) = \det(A - tI)$ - wartości własne to jego pierwiastki

Page Rank

Strony to stany Łańcucha Markowa

Szukamy rozkładu stacjonarnego $vP = v$

który jest wektorem własnym dla $\lambda = 1$

Diagonalizowalność

Macierz jest diagonalizowalna jeśli ma n niezależnych wektorów własnych.

$A = P^{-1}DP$ P - odwracalna, D - diagonalna

Przy potęgowaniu macierz zachowuje się jak największa wartość własna (ew. postać Jordana)

$$A^n = (P^{-1}DP)^n = P^{-1}D^nP$$

Sprzężenie

Jeśli P jest odwracalna to $P^{-1}AP$ ma te same wartości własne co macierz A.

Macierze Hermitowskie

Macierz symetryczna $A = A^T$

Macierz Hermitowska $A = A^H = \overline{A^T}$

Jeśli macierz jest Hermitowska to jej w.w są rzeczywiste, a wektory własne ortogonalne.

x, y - wektory własne dla λ, μ

$$\langle \lambda x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle = (Ax)^H y = x^H A y$$

$$= \langle x, Ay\rangle = \langle x, \mu y\rangle$$

Zatem $\lambda \langle x, y\rangle = \mu \langle x, y\rangle \Rightarrow (\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0$

Biorąc $x = y$ oraz $\mu = \bar{\lambda}$ wynika $\lambda = \bar{\lambda}$.

Dla $\lambda \neq \mu \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0$.

Iteracja prosta

$v = \sum_i \alpha_i x_i$ x_i - baza ortonormalna wektorów własnych

$Av = \sum_i \alpha_i \lambda_i x_i$ $|\lambda_1| > |\lambda_2| \cdots > |\lambda_N|$

$A^n v = \sum_i \alpha_i \lambda_i^n x_i$

$A^n v$ zbiega (kierunek) do x_1

$v_0 = v$

$$v_{k+1} = \frac{Av_k}{\|Av_k\|}$$

$\lim_{k\to\infty} v_k = x_i$ jeśli istnieje dominująca wartość własna

Iteracja odwrotna

to samo ale z macierzą A^{-1} daje minimalną wartość własną.

Nie szukamy explicite A^{-1}. Rozwiązujemy $\underset{\overset{\parallel}{A}}{LU}\, v_{k+1} = v_k$

Przesunięcie

λ jest wartością własną A, to $\lambda - \mu$ jest wartością własną $A - \mu I$

Wniosek: iteracja odwrotna na macierzy $A - \mu I$ znajduje wartość najbliższą μ

Deflacja

Znajdujemy x_1, zastępujemy $v \leftarrow v - \langle v, x_1\rangle \cdot x_1$

Mało stabilne, teoretycznie działa

Metoda QR

Niech $A = QR$ Q - baza ortonormalna, R - górnotrójkątna.

$Q^{-1}\underset{\parallel}{A}Q$ ma te same wartości własne co A

$Q^{-1}QRQ = RQ \Rightarrow QR$ ma te same wartości w. co RQ

$A_0 = A$

$A_k = Q_k R_k$

$A_{k+1} = R_k Q_k$

Zmierza do macierzy diagonalnej :)

$A_k - \mu I = Q_k R_k$

$A_{k+1} = R_k Q_k + \mu I$

Przyśpiesza zbieżność :)