Model Mankina-Romera-Weila

Wednesday, 4 June 2025 20:08

Model długookresowy z dwoma kapitałami

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} H(t)^{\beta} E(t)^{1-\alpha-\beta}$$

Produkcja zależy od kapitału rzeczowego K, kapitału ludzkiego H oraz efektywnej pracy E.

$E = AL$ – efektywna praca rozbija się na postęp naukowo-tech. A oraz liczbę pracujących L

$A(t) = A_0 e^{gt}$ – stopa wzrostu A to g

$L(t) = L_0 e^{nt}$ – stopa wzrostu L to n

$$\dot{K}(t) = s_K Y(t) - \delta_K K(t)$$

Przyrost kapitału rzeczowego to inwestycje w ten kapitał – deprecjacja

$$\dot{H}(t) = s_H Y(t) - \delta_H H(t)$$

$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)}$ – wydajność pracy

$k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$ – techniczne uzbrojenie pracy

$h(t) = \frac{H(t)}{L(t)}$ – kapitał ludzki na pracującego

Różnice w wersji „efektywnej"

$$y_E(t) = \frac{Y(t)}{E(t)} = \frac{K(t)^{\alpha} H(t)^{\beta} E(t)^{1-\alpha-\beta}}{E(t)} = \left(\frac{K(t)}{E(t)}\right)^{\alpha} \left(\frac{H(t)}{E(t)}\right)^{\beta}$$

$$y_E(t) = k_E(t)^{\alpha} \cdot h_E(t)^{\beta}$$

$$\dot{k}_E = \frac{\dot{K}E - K\dot{E}}{E^2} = \frac{\dot{K}}{E} - k_E(n+g) = \frac{s_K Y - \delta_K K}{E} - k_E(n+g)$$

$$\dot{k}_E = s_K y_E - k_E(\delta_K + n + g)$$

Analogicznie:

$$\dot{h}_E = s_H y_E - h_E(\delta_H + n + g)$$

Zatem aby gospodarka była zrównoważona należy rozwiązać następujący układ równań:

$$\begin{cases} \dot{k}_E(t) = s_K k_E(t)^{\alpha} h_E(t)^{\beta} - k_E(t)(\delta_K + n + g) \\ \dot{h}_E(t) = s_H k_E(t)^{\alpha} h_E(t)^{\beta} - h_E(t)(\delta_H + n + g) \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest:

$$k_E^* = \left(\frac{s_K}{\delta_K + g + n}\right)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}} \cdot \left(\frac{s_H}{\delta_H + g + n}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}$$

$$h_E^* = \left(\frac{s_H}{\delta_H + g + n}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{s_K}{\delta_K + g + n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}$$

$$y_E^* = \left(\frac{s_K}{\delta_K + g + n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} + \left(\frac{s_H}{\delta_H + g + n}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}$$

Złota reguła akumulacji kapitału

$C = (1 - s_K - s_H) Y$, zatem

$$C_E^* = (1 - s_K - s_H) \left(\frac{s_K}{\delta_K + g + n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{s_H}{1-\alpha-\beta}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}$$

Optymalizując konsumpcję:

$s_K = \alpha$

$s_H = \beta$