Układy równań - metody iteracyjne

Tuesday, 30 January 2024 21:23

Sztuczka $I + A + A^2 \dots = (I-A)^{-1}$

Chcemy rozwiązać $Ax = b$

$Qx = (Q-A)x + b$ - dla dowolnej Q :)

$Qx_{n+1} = (Q-A)x_n + b$

$\Downarrow$

$x_{n+1} = Q^{-1}(Q-A)x_n + Q^{-1}b$

$C = Q^{-1}(Q-A)$ $b' = Q^{-1}b$

$x_{n+1} = Cx_n + b'$

x_0 :)

$x_1 = Cx_0 + b'$

$x_2 = Cx_1 + b' = C^2x_0 + Cb' + b'$

$x_n = C^n x_0 + (I + C + \dots + C^n)b'$ $x_0 = 0$:)

$x_n = (I + C + \dots + C^n)b'$

x_n zbieżne jeśli $\rho(Q^{-1}(Q-A)) < 1$

Metoda Jacobiego

Q - diagonalna z przekątną jak A

$A = D + R$ D - przekątna, R - reszta

$x_{n+1} = D^{-1}(b - Rx_n)$ $x_{n+1} = Q^{-1}(Q-A)x_n + Q^{-1}b$

zbieżne jeśli $\rho(D^{-1}R) < 1$ (wtedy $D^{-1}A$ - źle)

Metoda Gaussa-Seidella

Q - dolnotrójkątna część A

$A = L + U$ U - górnotrójkątna, zera na przekątnej

$x_{n+1} = L^{-1}(b - Ux_n)$

Zbieżne jeśli A ma dominującą przekątną lub

A jest symetryczna i dodatnio określona