Optymalizacja nieograniczona

Tuesday, 30 January 2024 16:01

Problem

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

chcemy znaleźć ekstremum

Jedna zmienna

Ekstremum spełnia $f'(x) = 0$

$f''(x) > 0$ - minimum

$f''(x) < 0$ - maksimum

$f''(x) = 0$ - nie wiadomo

Wyszukiwanie ternarne

Dla funkcji bitonicznych

```
While (!stop(p,q))
    r = p + (q-p)/3
    s = q - (q-p)/3
    if f(r) < f(s)
        q = s
    else
        p = r
```

Złoty podział:

Nie dzielimy na 3:

$r = q - (q-p)\cdot\phi$

$s = p + (q-p)\cdot\phi$

Optymalne $\phi = 0.61\ldots$

Gradient

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]$$

Warunek konieczny ekstremum:

$\nabla f(x^*) = 0$

Hesjan

$$H_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \ddots & \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

Wzór Taylora (wielu zmiennych)

$$f(x) \approx f(x_0) + \nabla f(x_0)\cdot(x - x_0) + (x - x_0)^T H_f(x_0)(x - x_0)$$

Jeśli $\nabla f(x_0) = 0$

Jeśli $H_f(x_0)$ dodatnio określona - minimum

Jeśli $H_f(x_0)$ ujemnie określona - maksimum

Jeśli $H_f(x_0)$ nieosobliwa - punkt siodłowy

Jeśli $H_f(x_0)$ osobliwa - cokolwiek

Gradient descent

$$x_{k+1} = x_k - \nabla f(x_k)\cdot t$$