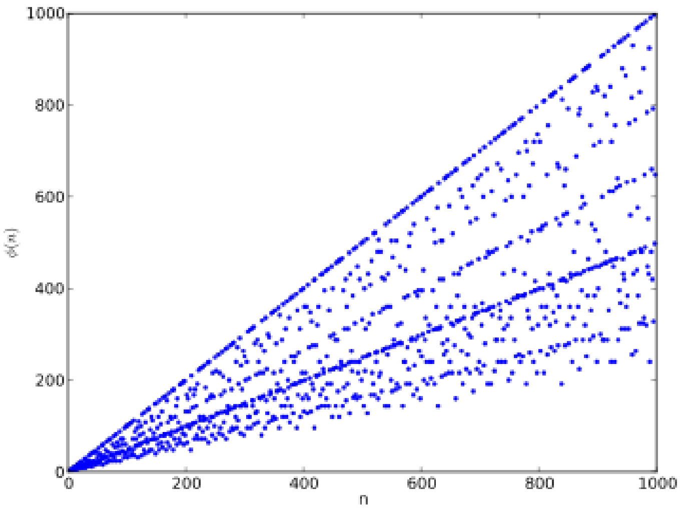
WIKIPEDIA

Eulersche Phi-Funktion

Die **eulersche Phi-Funktion** (andere Schreibweise: *Eulersche φ-Funktion*, auch *eulersche Funktion* genannt) ist eine zahlentheoretische Funktion. Sie gibt für jede natürliche Zahl n an, wie viele zu n teilerfremde natürliche Zahlen es gibt, die nicht größer als n sind:



Die ersten tausend Werte der Funktion

$$\varphi(n) \ := \ \left|\{a \in \mathbb{N} \,|\, 1 \le a \le n \land \operatorname{ggT}(a,n) = 1\}\right|$$

Dabei bezeichnet $\operatorname{ggT}(a,n)$ den größten gemeinsamen Teiler von a und n. Außerdem wird hier und im ganzen weiteren Artikel unter der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen die Menge der *positiven* ganzen Zahlen verstanden, sodass also stets $0 \notin \mathbb{N}$ gilt.

Die Phi-Funktion ist benannt nach Leonhard Euler.

Inhaltsverzeichnis

Beispiele

- Die Zahl 1 ist als Sonderfall des *leeren Produkts* (weder Primzahl noch zusammengesetzte Zahl) auch zu sich selber teilerfremd, also ist $\varphi(1) = 1$.
- Die Zahl 6 ist zu genau zwei der sechs Zahlen von 1 bis 6 teilerfremd (nämlich zu 1 und zu 5), also ist $\varphi(6) = 2$.
- Die Zahl 13 ist als Primzahl zu jeder der zwölf Zahlen von 1 bis 12 teilerfremd (aber natürlich *nicht* zu 13), also ist $\varphi(13) = 12$.

Die ersten 99 Werte der Phi-Funktion lauten:

\v	+0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9
0+		1	1	2	2	4	2	6	4	6
10+	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18
20+	8	12	10	22	8	20	12	18	12	28
30+	8	30	16	20	16	24	12	36	18	24
40+	16	40	12	42	20	24	22	46	16	42
50+	20	32	24	52	18	40	24	36	28	58
60+	16	60	30	36	32	48	20	66	32	44
70+	24	70	24	72	36	40	36	60	24	78
80+	32	54	40	82	24	64	42	56	40	88
90+	24	72	44	60	46	72	32	96	42	60

Eigenschaften

Multiplikative Funktion

Die Phi-Funktion ist eine multiplikative zahlentheoretische Funktion, sodass für teilerfremde Zahlen und n

\varphi (m\cdot

gilt. Ein Beispiel dazu:

{\displaystyle \varphi

Eigenschaften

Die Funktion ordnet jeder natürlichen Zahl n die Anzahl \v der Einheiten im Restklassenring {\r zu, also die Ordnung der primen Restklassengruppe.

Denn ist \overlin eine Einheit, also \overline so gibt es ein \overlir mit \overli was äquivalent zu ab\equiv 1\ also zur Existenz einer ganzen Zahl mit ab+nx=1\ ist. Nach dem Lemma von Bézout ist dies äquivalent zur Teilerfremdheit von und n.

\v ist für n> stets eine gerade Zahl.

Ist die Anzahl der Elemente im Bild {\m die nicht größer als n sind, dann gilt \lim

Das Bild der Phi-Funktion besitzt also die natürliche Dichte 0.

Erzeugende Funktion

Die Dirichlet-erzeugende Funktion der Phi-Funktion hängt mit der riemannschen Zetafunktion zusammen:

\sum _{{n=1}}^{\infty } {\frac {\varphi (n)}

Berechnung

Primzahlen

Da eine Primzahl nur durch 1 und sich selbst teilbar ist, ist sie zu den Zahlen 1 bis p- teilerfremd. Weil sie größer als 1 ist, ist sie außerdem *nicht* zu sich selbst teilerfremd. Es gilt daher

\varphi

Potenz von Primzahlen

Eine Potenz mit einer Primzahl als Basis und einer natürlichen Zahl als Exponent hat nur den einen Primfaktor Daher hat nur mit Vielfachen von einen von 1 verschiedenen gemeinsamen Teiler. Im Bereich von 1 bis sind das die Zahlen

{\displaystyle 1\cdot p,\;2\cdot

Das sind p Zahlen, die nicht teilerfremd zu sind. Für die eulersche -Funktion gilt deshalb

$$\varphi (p^{k})=p^{k}-p^{{k-1}}=p^{{k-1}}(p-1)=p^{{k}}\left(1-{\frac 1{p}}\right).$$

Beispiel:

$$\varphi (16)=\varphi (2^{4})=2^{4}-2^{3}=2^{3}\cdot (2-1)=2^{4}\cdot \left(1-{\frac 12}\right)=8$$

Allgemeine Berechnungsformel

Der Wert der eulerschen Phi-Funktion lässt sich für jede natürliche Zahl n aus deren kanonischer Primfaktorzerlegung

n=\prod _{{p\mid

berechnen:

\varphi (n)=\prod _{{p\mid n}}p^{{k_{p}-1}}(p-1)=n\prod _{{p\mid n}}\left(1-{\frac {1}{p}}\right) ,

wobei die Produkte über alle Primzahlen , die Teiler von n sind, gebildet werden. Diese Formel folgt direkt aus der Multiplikativität der Phi-Funktion und der Formel für Primzahlpotenzen.

Beispiel:

\varphi (72)=\varphi (2^{3}\cdot 3^{2})=2^{{3-1}}\cdot (2-1)\cdot

oder

\varphi(72) = 72 \cdot (1 - \tfrac{1} .

Durchschnittliche Größenordnung

Mit der riemannschen Zetafunktion , dem Landau-Symbol und {\displa gilt:

$${\displaystyle \sum _{n=1}^{N}\varphi (n)={\frac {1}{2\zeta (2)}}N^{2}+{\mathcal {O}}(N\log N)={\frac {3}{\pi ^{2}}}N^{2}+{\mathcal {O}}(N\log N)}$$

Wegen ${\displaystyle \sum _{n=1}^{N}{\tfrac {6}{\pi ^{2}}}n={\tfrac {6}{\pi ^{2}}}}$ sind diese beiden Summen asymptotisch gleich:

{\displaystyle \lim _{N\to \infty }{\frac {\sum _{n=1}^{N}\varphi (n)}{\sum _{n=1}^{N}{\frac {6}{\pi ^{2}}}n}}=\lim _{N\to \infty }{\frac {{\frac {3}{\pi ^{2}}}+{\mathcal {O}}

Man sagt dazu auch:

- Die *durchschnittliche Größenordnung* von \v ist {.

Fourier-Transformation

Die eulersche Phifunktion ist die diskrete Fourier-Transformation des ggT, ausgewertet an der Stelle 1.[1]

$${\displaystyle {\begin{aligned}{\mathcal {F}}\left\{\mathbf {x} \right\}[m]&=\sum \limits _{k=1}^{n}x_{k}\cdot e^{{-2\pi i}{\frac {mk}{n}}},\quad \mathbf {x_{k}} =\left\{\operatorname {ggT} (k,n)\right\}\quad {\text{für }}\,k\in \left\{1,\dotsc ,n\right\}\\\varphi (n)&={\mathcal {F}}\left\{\mathbf {x} \right\}[1]=\sum \limits _{k=1}^{n}\operatorname {ggT} (k,n)e^{{-2\pi i}{\frac {k}{n}}}\end{aligned}}}$$

Der Realteil davon ergibt die Gleichung

{\displaystyle \varphi (n)=\sum \limits _{k=1}^{n}\operatorname {ggT} (k,n)\cos \left(2\pi {\frac

Weitere Beziehungen

- Es gilt {\displays \varphi, für ungerade n sogar {\display.
- Für n\g gilt:

  {\displaystyle \sum _{1\leq j\leq n-1 \atop

- Für alle natürlichen Zahlen n gilt:[2]

  \sum_{d > 0 \atop d | n}

  Beispiel: Für n=10(ist die Menge T(n):=\{t\in\N: t|n\} der positiven Teiler von n durch

  T(100) = T(2^2\cdot 5^2) = \{2^m\cdot 5^n: m \in \{0,1,2\}, n \in \{0,1,2\}\} = \

  gegeben. Addition der zugehörigen |T(100)| = (2+1)(2+1) = 9 Gleichungen

\begin{align
\varphi(1)&
\varphi(2)&
\varphi(4)&
\varphi(5)&
\varphi(10)&
\varphi(20)&
\varphi(25)&
\varphi(50)&
\varphi(100
\end{align}

ergibt:

{\displaystyle {\begin{aligned}\sum _{d>0 \atop d|100}\varphi (d)&=\varphi (1)+\varphi (2)+\varphi (4)+\varphi (5)+\varphi (10)+\varphi (20)+\varphi (25)+\varphi (50)+\varphi (100)\\&=1+1+2+4+4+8+20+20+40=100\end{aligned}}}

Bedeutung

Eine wichtige Anwendung findet die Phi-Funktion im Satz von Fermat-Euler:

Wenn zwei natürliche Zahlen a und teilerfremd sind, ist ein Teiler von a^{{\var

\operatorname {ggT}

Etwas anders formuliert:

\operatorname {ggT}(a,m)=1\Rightarrow

Ein Spezialfall (für Primzahlen) dieses Satzes ist der kleine fermatsche Satz:

p\nmid

p\nmid a\Rightarrow a^{{p-

Der Satz von Fermat-Euler findet unter anderem Anwendung beim Erzeugen von Schlüsseln für das RSA-Verfahren in der Kryptographie.

Weblinks

- Eric W. Weisstein: *Totient Function*. In: *MathWorld* (englisch).
- Folge der Funktionswerte \va Folge A000010 in OEIS
- Die ersten 100.000 Werte der Phi-Funktion (OEIS)
- Phi-Rechner (englisch)
- Florian Luca, Herman te Riele: *and σ: from Euler to Erdös.* Nieuw Archief voor Wiskunde, März 2011, PDF.
- Video: *Die Eulersche Phi-Funktion*. Pädagogische Hochschule Heidelberg (PHHD) 2012, zur Verfügung gestellt von der Technischen Informationsbibliothek (TIB), doi:10.5446/19894.

Einzelnachweise

1. Wolfgang Schramm: *The Fourier transform of functions of the greatest common divisor* (http://www.integers-ejcnt.org/vol8.html) In: University of West Georgia, Karls-Universität Prag (Hrsg.): *Integers Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*. 8, 2008, S. A50. Abgerufen am 24. Oktober 2015.
2. Buchmann: *Einführung in die Kryptographie.* Theorem 3.8.4.