WIKIPEDIA

Ordnung eines Gruppenelementes

Im mathematischen Teilgebiet der Gruppentheorie versteht man unter der **Ordnung eines Gruppenelementes** oder **Elementordnung** eines Elements g einer Gruppe $(G,\cdot)$ die kleinste natürliche Zahl $n>0$, für die $g^n=e$ gilt, wobei e das neutrale Element der Gruppe ist. Gibt es keine derartige Zahl, so sagt man, g habe *unendliche Ordnung*. Elemente endlicher Ordnung werden auch Torsionselemente genannt. Die Ordnung wird manchmal mit $\operatorname{ord}(g)$ oder $\operatorname{o}(g)$ bezeichnet.

Die Potenz g^n eines Gruppenelementes g ist dabei für natürliche Hochzahlen $n\geq 0$ induktiv definiert:

- $g^0 := e$
- $g^{k+1} := g^k \cdot g$ für alle natürlichen $k\geq 0$

Die Zahl $\exp(G) := \operatorname{kgV}\{\operatorname{ord}(g) \mid g\in G\}$ wird, wenn sie endlich ist, Gruppenexponent genannt.

Eigenschaften

- Nach dem Satz von Lagrange haben alle Elemente einer endlichen Gruppe eine endliche Ordnung, die ein Teiler der Gruppenordnung, d. h. der Anzahl der Elemente der Gruppe, ist.
- Umgekehrt existiert in einer endlichen Gruppe nach dem Satz von Cauchy zu jedem Primteiler p der Gruppenordnung ein Element, das die Ordnung p hat. Für zusammengesetzte Teiler ist keine allgemeine Aussage möglich (während zum trivialen Teiler 1 das neutrale Element $e=e^1$ gehört).
- Die Ordnung eines Elementes ist gleich der Ordnung der Untergruppe, die von diesem Element erzeugt wird.
- Es gilt $g^d=e$ genau dann, wenn d ein Vielfaches der Ordnung $\operatorname{ord}(g)$ des Elements g ist.
- In abelschen Gruppen ist die Ordnung des Produktes $g\cdot h$ ein Teiler des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Ordnungen von g und h. In nichtabelschen Gruppen ist keine derartige Aussage möglich; beispielsweise hat das Element $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ der Gruppe $SL_2(\mathbf{Z})$ unendliche Ordnung, obwohl es das Produkt der Elemente $\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ mit der Ordnung 4 und $\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}$ mit der Ordnung 6 ist.

Literatur

- J. C. Jantzen, J. Schwermer: *Algebra.* Springer, Berlin/Heidelberg 2006, ISBN 3-540-21380-5.