WIKIPEDIA

Index (Gruppentheorie)

Im mathematischen Teilgebiet der Gruppentheorie ist der **Index** einer Untergruppe ein Maß für die relative Größe zur gesamten Gruppe.

Inhaltsverzeichnis

Definition

Es sei G eine Gruppe und U eine Untergruppe. Dann sind die Menge G/U der Linksnebenklassen und die Menge $U\backslash G$ der Rechtsnebenklassen gleichmächtig. Ihre Mächtigkeit ist der Index von U in G und wird mit $(G\colon U)$, manchmal auch $[G\colon U]$ oder $|G\colon U|$, bezeichnet.

Eigenschaften

- Es gilt $(G\colon 1) = |G|$. (Dabei bezeichnet $|G|$ die Ordnung von G.)
- Der Index ist multiplikativ, d. h. ist U eine Untergruppe von G und V eine Untergruppe von U, so gilt

  $$(G\colon V) = (G\colon U)\cdot(U\colon V).$$

- Der Spezialfall $V = 1$ wird oft als Satz von Lagrange (nach J.-L. Lagrange) bezeichnet:

  Für eine Gruppe G und eine Untergruppe U gilt:

  $$|G| = (G\colon U)\cdot|U|.$$

  Im Fall von endlichen Gruppen kann man den Index einer Untergruppe also als

  $$(G\colon U) = \frac{|G|}{|U|}$$

  berechnen.

- Ist $N \triangleleft G$ ein Normalteiler, so ist der Index von N in G gerade die Ordnung der Faktorgruppe G/N, also

  $$(G\colon N) = |G/N|.$$

- Eine Untergruppe vom Index 2 ist ein Normalteiler, da von den zwei (Links)nebenklassen die eine die Untergruppe selbst und die andere deren Komplement ist.
- Allgemeiner: Ist U eine Untergruppe von G und $p > 1$ ihr Index, der zugleich der kleinste Teiler der Ordnung $|G|$ ist, dann ist U ein Normalteiler in G.

Topologische Gruppen

Im Kontext von topologischen Gruppen spielen Untergruppen von endlichem Index eine Sonderrolle:

- Eine Untergruppe von endlichem Index ist genau dann offen, wenn sie abgeschlossen ist. (Offene Untergruppen sind stets abgeschlossen.)
- Jede offene Untergruppe einer kompakten Gruppe hat endlichen Index.

Siehe auch

- Der Index des Zentralisators eines Gruppenelements entspricht der Mächtigkeit seiner Konjugationsklasse.[1]
- In der Galoistheorie ist durch die Galoiskorrespondenz ein Zusammenhang zwischen den relativen Indizes von Untergruppen der Galoisgruppe und den relativen Graden von Körpererweiterungen gegeben.[2]

Literatur

Index in der Gruppentheorie:

- Thomas W. Hungerford: *Algebra*. 5. Auflage. Springer, New York 1989, ISBN 0-387-90518-9, S. 38 ff.

In topologischen Gruppen:

- Lew Pontrjagin: *Topologische Gruppen*. Teubner, Leipzig 1957 (russisch: *Nepreryvnye gruppy*. Übersetzt von Viktor Ziegler).

Einzelnachweise

1. Hungerford (1989), S. 89
2. Hungerford (1989), S. 247