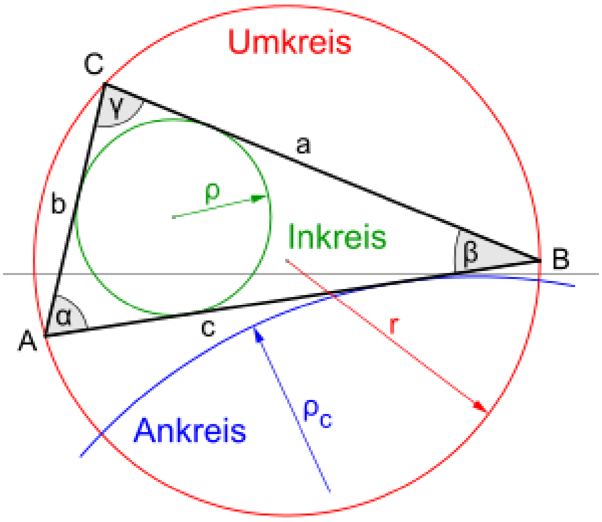
Formelsammlung Trigonometrie

$\sqrt[n]{x}$ Dieser Artikel ist eine Formelsammlung zum Thema Trigonometrie. Es werden mathematische Symbole verwendet, die im Artikel Liste mathematischer Symbole erläutert werden.

Inhaltsverzeichnis

Einzelnachweise

Dreieckberechnung



Die folgende Liste enthält die meisten bekannten **Formeln aus der Trigonometrie in der Ebene**. Die meisten dieser Beziehungen verwenden trigonometrische Funktionen.

Dabei werden die folgenden Bezeichnungen verwendet: Das Dreieck ABC habe die Seiten $a = BC$, $b = CA$ und $c = AB$, die Winkel α, β und γ bei den Ecken A, B und C. Ferner seien r der Umkreisradius, ρ der Inkreisradius und ρ_a, ρ_b und ρ_c die Ankreisradien (und zwar die Radien der Ankreise, die den Ecken A, B bzw. C gegenüberliegen) des Dreiecks ABC. Die Variable s steht für den halben Umfang des Dreiecks ABC: $s = \frac{a+b+c}{2}$. Schließlich wird die Fläche des Dreiecks ABC mit F bezeichnet. Alle anderen Bezeichnungen werden jeweils in den entsprechenden Abschnitten, in denen sie vorkommen, erläutert.

Winkelsumme

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Sinussatz

Formel 1:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r = \frac{abc}{2F}$$

Formel 2:

wenn $\alpha = 90^\circ$

$$\sin\beta = \frac{b}{a}$$

$$\sin\gamma = \frac{c}{a}$$

wenn $\beta = 90^\circ$

$$\sin\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\sin\gamma = \frac{c}{b}$$

wenn $\gamma = 90^\circ$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c}$$

Kosinussatz

Formel 1:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\ \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\gamma$$

Formel 2:

wenn $\alpha = 90^\circ$

$$\cos\beta = \frac{c}{a}$$

$$\cos\gamma = \frac{b}{a}$$

wenn $\beta = 90^\circ$

$$\cos\alpha = \frac{c}{b}$$

$$\cos\gamma = \frac{a}{b}$$

wenn $\gamma = 90^\circ$

$a^2 + b^2 = c^2$ (Satz des Pythagoras)

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c}$$

Projektionssatz

$$a = b\ \cos\gamma + c\ \cos\beta$$

$$b = c\ \cos\alpha + a\ \cos\gamma$$

$$c = a\ \cos\beta + b\ \cos\alpha$$

Die Mollweideschen Formeln

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad \frac{c+a}{b} = \frac{\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}, \quad \frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

$$\frac{b-c}{a} = \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}, \quad \frac{c-a}{b} = \frac{\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}, \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

Tangenssatz

Formel 1:

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\frac{\beta+\gamma}{2}}{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{\cot\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

Analoge Formeln gelten für $\frac{a+b}{a-b}$ und $\frac{a+c}{a-c}$:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\cot\frac{\gamma}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\tan\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\tan\frac{\alpha-\gamma}{2}} = \frac{\cot\frac{\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\gamma}{2}}$$

Formel 2:

wenn $\alpha = 90^\circ$

$$\tan\beta = \frac{b}{c}$$

$$\tan\gamma = \frac{c}{b}$$

wenn $\beta = 90^\circ$

$$\tan\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\tan\gamma = \frac{c}{a}$$

wenn $\gamma = 90^\circ$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\tan\beta = \frac{b}{a}$$

Formeln mit dem halben Umfang

Im Folgenden bedeutet s immer die Hälfte des Umfangs des Dreiecks ABC, also $s = \frac{a+b+c}{2}$.

$$s-a = \frac{b+c-a}{2}$$

$$s-b=\frac{c+a-b}{2}$$

$$s-c=\frac{a+b-c}{2}$$

$$(s-b)+(s-c)=a$$

$$(s-c)+(s-a)=b$$

$$(s-a)+(s-b)=c$$

$$(s-a)+(s-b)+(s-c)=s$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{bc}}$$

$$\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)\,(s-a)}{ca}}$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)}{ab}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s\,(s-a)}{bc}}$$

$$\cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{s\,(s-b)}{ca}}$$

$$\cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{s\,(s-c)}{ab}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{s\,(s-a)}}$$

$$\tan\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)\,(s-a)}{s\,(s-b)}}$$

$$\tan\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)}{s\,(s-c)}}$$

$$s=4r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$s-a=4r\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

Flächeninhalt und Umkreisradius

Der Flächeninhalt des Dreiecks wird hier mit F bezeichnet (nicht, wie heute üblich, mit A, um eine Verwechselung mit der Dreiecksecke A auszuschließen):

Den Umkreisradius des Dreiecks ABC bezeichnen wir mit r.

(Es ist zu beachten, dass die hier benutzten Bezeichnungen r, ρ, ρ_a, ρ_b, ρ_c für den Umkreisradius, den Inkreisradius und die drei Ankreisradien von der vorwiegend im englischsprachigen Raum verbreiteten Bezeichnungsweise abweichen, bei der dieselben Größe R, r, r_a, r_b, r_c genannt werden.)

Heronsche Formel:

$$F = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\,(b+c-a)\,(c+a-b)\,(a+b-c)}$$

$$F = \frac{1}{4}\sqrt{2\left(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)}$$

$$F = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ca\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

$F = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$, wobei h_a, h_b und h_c die Längen der von A, B bzw. C ausgehenden Höhen des Dreiecks ABC sind.

$$F = 2r^2 \sin\,\alpha\,\sin\,\beta\,\sin\,\gamma$$

$$F = \frac{abc}{4r}$$

$$F = \rho s = \rho_a\,(s-a) = \rho_b\,(s-b) = \rho_c\,(s-c)$$

$$F = \sqrt{\rho\rho_a\rho_b\rho_c}$$

$$F = 4\rho r \cos\frac{\alpha}{2}\,\cos\frac{\beta}{2}\,\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$F = s^2 \tan\frac{\alpha}{2}\,\tan\frac{\beta}{2}\,\tan\frac{\gamma}{2}$$

Erweiterter Sinussatz:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r = \frac{abc}{2F}$$

$$a = 2r\,\sin\alpha$$

$$b = 2r\,\sin\beta$$

$$c = 2r\,\sin\gamma$$

$$r = \frac{abc}{4F}$$

In- und Ankreisradien

In diesem Abschnitt werden Formeln aufgelistet, in denen der Inkreisradius ρ und die Ankreisradien ρ_a, ρ_b und ρ_c des Dreiecks ABC vorkommen.

$$\rho = (s-a)\tan\frac{\alpha}{2} = (s-b)\tan\frac{\beta}{2} = (s-c)\tan\frac{\gamma}{2}$$

$$\rho = 4r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = s\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}$$

$$\rho = r\left(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1\right)$$

$$\rho = \frac{F}{s} = \frac{abc}{4rs}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{a+b+c}}$$

$$\rho = \frac{a}{\cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2}} = \frac{b}{\cot\frac{\gamma}{2} + \cot\frac{\alpha}{2}} = \frac{c}{\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2}}$$

$$a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = s^2 + \rho^2 + 4 \cdot \rho \cdot r$$ [1]

Wichtige Ungleichung: $2\rho \leq r$; Gleichheit tritt nur dann ein, wenn Dreieck ABC gleichseitig ist.

$$\rho_a = s\tan\frac{\alpha}{2} = (s-b)\cot\frac{\gamma}{2} = (s-c)\cot\frac{\beta}{2}$$

$$\rho_a = 4r\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = (s-a)\tan\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}$$

$$\rho_a = r\left(-\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + 1\right)$$

$$\rho_a = \frac{F}{s-a} = \frac{abc}{4r\,(s-a)}$$

$$\rho_a = \sqrt{\frac{s\,(s-b)(s-c)}{s-a}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(c+a-b)(a+b-c)}{b+c-a}}$$

Die Ankreise sind gleichberechtigt: Jede Formel für ρ_a gilt in analoger Form für ρ_b und ρ_c.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c}$$

Höhen

Die Längen der von A, B bzw. C ausgehenden Höhen des Dreiecks ABC werden mit h_a, h_b und h_c bezeichnet.

$$h_a = b\sin\gamma = c\sin\beta = \frac{2F}{a} = 2r\sin\beta\sin\gamma = 2r\left(\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma\right)$$

$$h_b = c\sin\alpha = a\sin\gamma = \frac{2F}{b} = 2r\sin\gamma\sin\alpha = 2r\left(\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma\right)$$

$$h_c = a\sin\beta = b\sin\alpha = \frac{2F}{c} = 2r\sin\alpha\sin\beta = 2r\left(\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\right)$$

$$h_a = \frac{a}{\cot\beta + \cot\gamma}; \qquad h_b = \frac{b}{\cot\gamma + \cot\alpha}; \qquad h_c = \frac{c}{\cot\alpha + \cot\beta}$$

$$F = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c$$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c}$$

Hat das Dreieck ABC einen rechten Winkel bei C (ist also $\gamma = 90°$), dann gilt

$$h_c = \frac{ab}{c}$$

$$h_a = b$$

$$h_b = a$$

Seitenhalbierende

Die Längen der von A, B bzw. C ausgehenden Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC werden s_a, s_b und s_c genannt.

$$s_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + bc\cos\alpha}$$

$$s_b = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + a^2 + 2ca\cos\beta} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + ca\cos\beta}$$

$$s_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma} = \sqrt{\frac{c^2}{4} + ab\cos\gamma}$$

$$s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

Winkelhalbierende

Wir bezeichnen mit w_α, w_β und w_γ die Längen der von A, B bzw. C ausgehenden Winkelhalbierenden im Dreieck ABC.

$$w_\alpha = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b + c} = \frac{2F}{a\cos\frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{\sqrt{bc(b+c-a)(a+b+c)}}{b+c}$$

$$w_\beta = \frac{2ca\cos\frac{\beta}{2}}{c + a} = \frac{2F}{b\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{ca(c+a-b)(a+b+c)}}{c+a}$$

$$w_\gamma = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a + b} = \frac{2F}{c\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\sqrt{ab(a+b-c)(a+b+c)}}{a+b}$$

Allgemeine Trigonometrie in der Ebene

Gegenseitige Darstellung

Die trigonometrischen Funktionen lassen sich ineinander umwandeln oder gegenseitig darstellen. Es gelten folgende Zusammenhänge

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$ („Trigonometrischer Pythagoras“)

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \csc^2 x$$

(Siehe auch den AbschnittPhasenverschiebungen)

Mittels dieser Gleichungen lassen sich die drei vorkommenden Funktionen durch eine der beiden anderen darstellen:

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} \quad \text{für} \quad x \in [0, \pi] = [0^\circ, 180^\circ]$$

$$\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} \quad \text{für} \quad x \in [\pi, 2\pi] = [180^\circ, 360^\circ]$$

$$\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \quad \text{für} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] = [0^\circ, 90^\circ] \cup [270^\circ, 360^\circ]$$

$$\sin x = -\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \quad \text{für} \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] = [90^\circ, 270^\circ]$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} \quad \text{für} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] = [0^\circ, 90^\circ] \cup [270^\circ, 360^\circ]$$

$$\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} \quad \text{für} \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] = [90^\circ, 270^\circ]$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \quad \text{für} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] = [0^\circ, 90^\circ] \cup [270^\circ, 360^\circ]$$

$$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \quad \text{für} \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] = [90^\circ, 270^\circ]$$

$$\tan x = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x} \quad \text{für} \quad x \in [0, \pi] = [0^\circ, 180^\circ]$$

$$\tan x = -\frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x} \quad \text{für} \quad x \in [\pi, 2\pi] = [180^\circ, 360^\circ]$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \quad \text{für} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] = [0^\circ, 90^\circ] \cup [270^\circ, 360^\circ]$$

$$\tan x = -\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \qquad \text{für} \qquad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] = [90^\circ, 270^\circ]$$

Vorzeichen der Winkelfunktionen

$$\sin x > 0 \quad \text{für} \quad x \in \,]0^\circ, 180^\circ[$$

$$\sin x < 0 \quad \text{für} \quad x \in \,]180^\circ, 360^\circ[$$

$$\cos x > 0 \quad \text{für} \quad x \in [0^\circ, 90^\circ[\, \cup \,]270^\circ, 360^\circ]$$

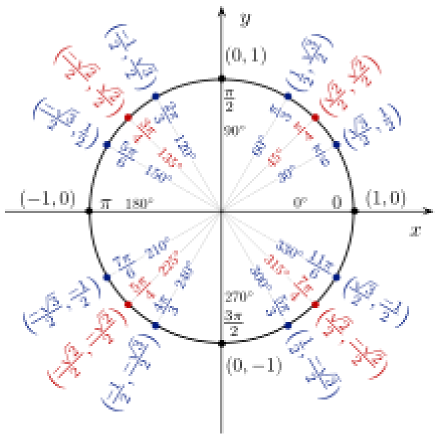
$$\cos x < 0 \quad \text{für} \quad x \in \,]90^\circ, 270^\circ[$$

$$\tan x > 0 \quad \text{für} \quad x \in \,]0^\circ, 90^\circ[\, \cup \,]180^\circ, 270^\circ[$$

$$\tan x < 0 \quad \text{für} \quad x \in \,]90^\circ, 180^\circ[\, \cup \,]270^\circ, 360^\circ[$$

Die Vorzeichen von **cot**, **sec** und **csc** stimmen überein mit denen ihrer Kehrwertfunktionen **tan**, **cos** bzw. **sin**.

Wichtige Funktionswerte



Darstellung wichtiger Funktionswerte von Sinus und Kosinus auf dem Einheitskreis

α (°)	α (rad)	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$0°$	0	0	1	0	$\pm\infty$
$15°$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$18°$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$36°$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
$54°$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
$72°$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$
$75°$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm\infty$	0
$108°$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{5}\right)$	$-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$
$120°$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
[illegible]	[illegible]	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	0	[illegible]	0	$\pm\infty$
[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	$\pm\infty$	0
[illegible]	[illegible]	0	1	0	$\pm\infty$

Es sind noch viele weitere Werte darstellbar.[2]

Symmetrien

Die trigonometrischen Funktionen haben einfache Symmetrien:

$\sin (-x) = - \sin x$
$\cos (-x) = + \cos$
$\tan (-x) = - \tan x$
$\cot (-x) = - \cot x$
$\sec (-x) = + \sec$
$\csc (-x) = - \csc x$

Phasenverschiebungen

`\sin \left(x+{\frac {\pi }{2}}\right)=\cos x\;\quad {\text{bzw.}}\quad \sin \left(x+90^{{\circ`

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \quad \text{bzw.} \quad \cos(x+90°) = -\sin x$$

$$\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\cot x \quad \text{bzw.} \quad \tan(x+90^\circ) = -\cot x$$

$$\cot\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\tan x \quad \text{bzw.} \quad \cot(x+90^\circ) = -\tan x$$

Rückführung auf spitze Winkel

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin(\pi - x) &\text{bzw.}\quad \sin x &= \sin(180^\circ - x) \\ \cos x &= -\cos(\pi - x) &\text{bzw.}\quad \cos x &= -\cos(180^\circ - x) \\ \tan x &= -\tan(\pi - x) &\text{bzw.}\quad \tan x &= -\tan(180^\circ - x) \end{aligned}$$

Darstellung durch den Tangens des halben Winkels

Mit der Bezeichnung $t = \tan\frac{x}{2}$ gelten die folgenden Beziehungen für beliebiges x

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \qquad \cot x = \frac{1-t^2}{2t},$$

$$\sec x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \qquad \csc x = \frac{1+t^2}{2t}.$$

Additionstheoreme

$$\sin(x \pm y) = \sin x\ \cos y \pm \cos x\ \sin y$$ [3]

$$\cos(x \pm y) = \cos x\ \cos y \mp \sin x\ \sin y$$ [3]

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x\ \tan y} = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x \pm y)}$$

$$\cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x} = \frac{\cos(x \pm y)}{\sin(x \pm y)}$$

Für $x = y$ folgen hieraus die Doppelwinkelfunktionen, für $y = \pi/2$ die Phasenverschiebungen

$$\sin(x+y)\cdot\sin(x-y) = \cos^2 y - \cos^2 x = \sin^2 x - \sin^2 y$$

$$\cos(x+y)\cdot\cos(x-y) = \cos^2 y - \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 y$$

Additionstheoreme für Arkusfunktionen

Für die Arkusfunktionen gelten folgende Additionstheoreme[4]

Summanden	Summenformel	Gültigkeitsbereich
$\arcsin x + \arcsin y =$	$\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$	$xy \leq 0$ oder $x^2 + y^2 \leq 1$
	$\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$	$x > 0$ und $y > 0$ und $x^2 + y^2 > 1$
	$-\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$	$x < 0$ und $y < 0$ und $x^2 + y^2 > 1$
$\arcsin x - \arcsin y =$	$\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right)$	$xy \geq 0$ oder $x^2 + y^2 \leq 1$
	$\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right)$	$x > 0$ und $y < 0$ und $x^2 + y^2 > 1$
	$-\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right)$	$x < 0$ und $y > 0$ und $x^2 + y^2 > 1$
$\arccos x + \arccos y =$	$\arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$	$x + y \geq 0$
	$2\pi - \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$	$x + y < 0$
$\arccos x - \arccos y =$	$-\arccos\left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$	$x + y \geq 0$
	$\arccos\left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$	$x + y < 0$
$\arctan x + \arctan y =$	$\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$	$xy < 1$
	$\pi + \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$	$x > 0$ und $xy > 1$
	$-\pi + \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$	$x < 0$ und $xy > 1$
$\arctan x - \arctan y =$	$\arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$	$xy > -1$
	$\pi + \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$	$x > 0$ und $xy < -1$
	$-\pi + \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$	$x < 0$ und $xy < -1$

Doppelwinkelfunktionen

$$\sin(2x) = 2\sin x\ \cos x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{2}{\cot x - \tan x}$$

$$\cot(2x) = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x} = \frac{\cot x - \tan x}{2}$$

Winkelfunktionen für weitere Vielfache

Die Formel für $\cos(nx)$ steht über $T_n(\cos x) = \cos(nx)$ [5] mit den Tschebyschow-Polynomen in Beziehung.

$$\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$$ [6]

$$= \sin x\left(4\cos^2 x - 1\right)$$

$$\sin(4x) = 8\sin x\ \cos^3 x - 4\sin x\ \cos x$$ [7]

$$= \sin x\left(8\cos^3 x - 4\cos x\right)$$

$$\sin(5x) = 5\sin x - 20\sin^3 x + 16\sin^5 x$$ [8]

$$= \sin x\left(16\cos^4 x - 12\cos^2 x + 1\right)$$

$$\sin(nx) = n\ \sin x\ \cos^{n-1} x - \binom{n}{3}\sin^3 x\ \cos^{n-3} x + \binom{n}{5}\sin^5 x\ \cos^{n-5} x\ -\ +\ \ldots$$ [9][10]

$$= \sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j+1}\sin^{2j+1} x\ \cos^{n-2j-1} x$$

$$= \sin x \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} (-1)^k \binom{n-k-1}{k} 2^{n-2k-1}\cos^{n-2k-1} x$$

$$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$$ [11]

$$\cos(4x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$ [12]

$$\cos(5x) = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$$ [13]

$$\cos(6x) = 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1$$ [14]

$$\cos(nx) = \cos^n x - \binom{n}{2}\sin^2 x\ \cos^{n-2} x + \binom{n}{4}\sin^4 x\ \cos^{n-4} x\ -\ +\ \ldots$$ [10][15]

$$= \sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^j \binom{n}{2j}\sin^{2j} x\ \cos^{n-2j} x$$

$$\tan(3x) = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$ [10]

$$\tan(4x) = \frac{4\tan x - 4\tan^3 x}{1 - 6\tan^2 x + \tan^4 x}$$ [10]

$$\cot(3x) = \frac{\cot^3 x - 3\cot x}{3\cot^2 x - 1}$$ [10]

$$\cot(4x) = \frac{\cot^4 x - 6\cot^2 x + 1}{4\cot^3 x - 4\cot x}$$ [10]

Halbwinkelformeln

Zur Berechnung des Funktionswertes des halben Arguments dienen die **Halbwinkelformeln**[10], welche sich mittels Substitution aus den Doppelwinkelformeln herleiten lassen:

$$\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \quad \text{für} \quad x \in [0, 2\pi]$$

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \quad \text{für} \quad x \in [-\pi, \pi]$$

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \quad \text{für} \quad x \in [0, \pi[$$

$$\cot\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1-\cos x} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \quad \text{für} \quad x \in]0, \pi]$$

Außerdem gilt:

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\tan x}{1+\sqrt{1+\tan^2 x}} \quad \text{für} \quad x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[$$

$$\cot\frac{x}{2} = \cot x + \sqrt{1+\cot^2 x} \quad \text{für} \quad x \in]0, \pi[$$

Siehe auch: Halbwinkelsatz

Summen zweier trigonometrischer Funktionen (Identitäten)

Aus den Additionstheoremen lassen sich Identitäten ableiten, mit deren Hilfe die Summe zweier trigonometrischer Funktionen als Produkt dargestellt werden kann:[10]

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \tan x + \tan y &= \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} \\ \tan x - \tan y &= \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$

$$\left.\begin{aligned}\cot x+\cot y&=\frac{\sin(y+x)}{\sin x\sin y}\\ \cot x-\cot y&=\frac{\sin(y-x)}{\sin x\sin y}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \cot x\pm\cot y=\frac{\sin(y\pm x)}{\sin x\sin y}$$

Daraus ergeben sich noch Spezialfälle:

$$\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

Produkte der Winkelfunktionen

Produkte der trigonometrischen Funktionen lassen sich mit folgenden Formeln berechnen:[10]

$$\sin x\ \sin y=\frac{1}{2}\Big(\cos(x-y)-\cos(x+y)\Big)$$

$$\cos x\ \cos y=\frac{1}{2}\Big(\cos(x-y)+\cos(x+y)\Big)$$

$$\sin x\ \cos y=\frac{1}{2}\Big(\sin(x-y)+\sin(x+y)\Big)$$

$$\tan x\ \tan y=\frac{\tan x+\tan y}{\cot x+\cot y}=-\frac{\tan x-\tan y}{\cot x-\cot y}$$

$$\cot x\ \cot y=\frac{\cot x+\cot y}{\tan x+\tan y}=-\frac{\cot x-\cot y}{\tan x-\tan y}$$

$$\tan x\ \cot y=\frac{\tan x+\cot y}{\cot x+\tan y}=-\frac{\tan x-\cot y}{\cot x-\tan y}$$

$$\sin x\ \sin y\ \sin z=\frac{1}{4}\Big(\sin(x+y-z)+\sin(y+z-x)+\sin(z+x-y)-\sin(x+y+z)\Big)$$

$$\cos x\ \cos y\ \cos z=\frac{1}{4}\Big(\cos(x+y-z)+\cos(y+z-x)+\cos(z+x-y)+\cos(x+y+z)\Big)$$

$$\sin x\ \sin y\ \cos z=\frac{1}{4}\Big(-\cos(x+y-z)+\cos(y+z-x)+\cos(z+x-y)-\cos(x+y+z)\Big)$$

$$\sin x\ \cos y\ \cos z=\frac{1}{4}\Big(\sin(x+y-z)-\sin(y+z-x)+\sin(z+x-y)+\sin(x+y+z)\Big)$$

Aus der Doppelwinkelfunktion für $\sin(2x)$ folgt außerdem:

$$\sin x\ \cos x=\frac{1}{2}\sin(2x)$$

Potenzen der Winkelfunktionen

Sinus

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2x)\right)$$ [10][16]

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}\left(3\sin x - \sin(3x)\right)$$ [10][17]

$$\sin^4 x = \frac{1}{8}\left(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3\right)$$ [10][18]

$$\sin^5 x = \frac{1}{16}\left(10\sin x - 5\sin(3x) + \sin(5x)\right)$$ [19]

$$\sin^6 x = \frac{1}{32}\left(10 - 15\cos(2x) + 6\cos(4x) - \cos(6x)\right)$$ [20]

$$\sin^n x = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos\left((n-2k)(x - \frac{\pi}{2})\right); \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\sin^n x = \frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{n}{2}} + \frac{2}{2^n}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}(-1)^{(\frac{n}{2}-k)}\binom{n}{k}\cos\left((n-2k)x\right); \quad n \in \mathbb{N} \text{ und } n \text{ gerade}$$

$$\sin^n x = \frac{2}{2^n}\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{(\frac{n-1}{2}-k)}\binom{n}{k}\sin\left((n-2k)x\right); \quad n \in \mathbb{N} \text{ und } n \text{ ungerade}$$

Kosinus

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2x)\right)$$ [10][21]

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\left(3\cos x + \cos(3x)\right)$$ [10][22]

$$\cos^4 x = \frac{1}{8}\left(3 + 4\cos(2x) + \cos(4x)\right)$$ [10][23]

$$\cos^5 x = \frac{1}{16}\left(10\cos x + 5\cos(3x) + \cos(5x)\right)$$ [24]

$$\cos^6 x = \frac{1}{32}\left(10 + 15\cos(2x) + 6\cos(4x) + \cos(6x)\right)$$ [25]

$$\cos^n x = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos((n-2k)x); \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\cos^n x = \frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{n}{2}} + \frac{2}{2^n}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{k}\cos\left((n-2k)x\right); \quad n \in \mathbb{N} \text{ und } n \text{ gerade}$$

$$\cos^n x = \frac{2}{2^n} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{k} \cos\left((n-2k)x\right); \quad n \in \mathbb{N} \text{ und } n \text{ ungerade}$$

Tangens

$$\tan^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)}$$

Umrechnung in andere trigonometrische Funktionen

$$\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\sin(\arctan x) = \cos(\operatorname{arccot} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\sin(\operatorname{arccot} x) = \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\tan(\arcsin x) = \cot(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\tan(\arccos x) = \cot(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\tan(\operatorname{arccot} x) = \cot(\arctan x) = \frac{1}{x}$$

Weitere Formeln für den Fall α +β + γ = 180°

Die folgenden Formeln gelten für beliebige ebene Dreiecke und folgen nach längeren Termumformungen aus $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, solange die in den Formeln vorkommenden Funktionen wohldefiniert sind (letzteres betrifft nur die Formeln, in denen Tangens und Kotangens vorkommen).

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha \cdot \tan\beta \cdot \tan\gamma$$

$$\cot\beta \cdot \cot\gamma + \cot\gamma \cdot \cot\alpha + \cot\alpha \cdot \cot\beta = 1$$

$$\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2} = \cot\frac{\alpha}{2} \cdot \cot\frac{\beta}{2} \cdot \cot\frac{\gamma}{2}$$

$$\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} = 1$$

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$-\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + 1$$

$$-\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}-1$$

$$\sin(2\alpha)+\sin(2\beta)+\sin(2\gamma)=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$-\sin(2\alpha)+\sin(2\beta)+\sin(2\gamma)=4\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

$$\cos(2\alpha)+\cos(2\beta)+\cos(2\gamma)=-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1$$

$$-\cos(2\alpha)+\cos(2\beta)+\cos(2\gamma)=-4\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma+1$$

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+2$$

$$-\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+1$$

$$-\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=-2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma+1$$

$$-\sin^2(2\alpha)+\sin^2(2\beta)+\sin^2(2\gamma)=-2\cos(2\alpha)\ \sin(2\beta)\ \sin(2\gamma)$$

$$-\cos^2(2\alpha)+\cos^2(2\beta)+\cos^2(2\gamma)=2\cos(2\alpha)\ \sin(2\beta)\ \sin(2\gamma)+1$$

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)+2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\ \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\ \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)=1$$

Sinusoid und Linearkombination mit gleicher Phase

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\alpha+\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right) & \text{, für alle } a>0\\ \sqrt{a^2+b^2}\cos\left(\alpha-\arctan\left(\frac{a}{b}\right)\right) & \text{, für alle } b>0\end{cases}$$

$$a\cos\alpha+b\sin\alpha=\operatorname{sgn}(a)\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(\alpha+\arctan\left(-\frac{b}{a}\right)\right)$$ [26]

$$a\sin(x+\alpha)+b\sin(x+\beta)=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos(\alpha-\beta)}\cdot\sin(x+\delta),$$

wobei $\delta=\operatorname{atan2}(a\cos\alpha+b\cos\beta,a\sin\alpha+b\sin\beta)$.

Allgemeiner ist

$$\sum_i a_i\sin(x+\delta_i)=a\sin(x+\delta),$$

wobei

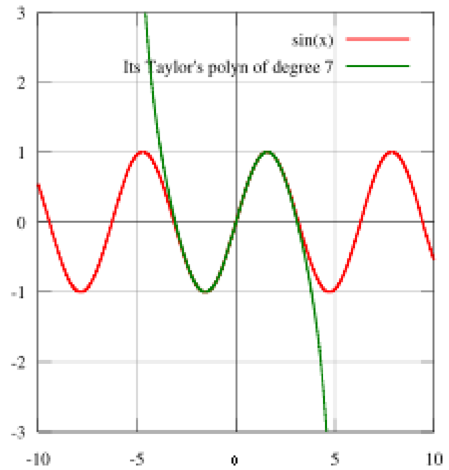
$$a^2=\sum_{i,j}a_ia_j\cos(\delta_i-\delta_j)$$

und

$$\delta = \operatorname{atan2}\left(\sum_i a_i \cos\delta_i, \sum_i a_i \sin\delta_i\right).$$

Reihenentwicklung

Wie auch sonst in der Analysis werden alle Winkel im Bogenmaß angegeben.



Der Sinus (rot) verglichen mit seinem 7. Taylorpolynom (grün)

Man kann zeigen, dass der Kosinus die Ableitung des Sinus darstellt und die Ableitung des Kosinus der negative Sinus ist. Hat man diese Ableitungen, kann man die Taylorreihe entwickeln (am einfachsten mit dem Entwicklungspunkt $x = 0$) und zeigen, dass die folgenden Identitäten für alle x aus den reellen Zahlen gelten. Mit diesen Reihen werden die trigonometrischen Funktionen für komplexe Argumente definiert (B_n bzw. β_n bezeichnet dabei die Bernoulli-Zahlen):

$$\begin{aligned}\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots, \qquad |x| < \infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots, \qquad |x| < \infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan x &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}(1-2^{2n})\beta_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!} x^{2n-1} \\ &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \cdots \qquad |x| < \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$ [27]

$$\begin{aligned}\cot x &= \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} \beta_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n-1} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \frac{1}{4725}x^7 - \cdots, \qquad 0 < |x| < \pi\end{aligned}$$ [28]

Produktentwicklung

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

$$\cos x = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right)$$

$$\sin(x) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{x + n\pi}{\frac{\pi}{2} + n\pi}\right)$$

$$\cos(x) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{x + n\pi + \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} + n\pi}\right)$$

$$\tan(x) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{x + n\pi}{x + n\pi + \frac{\pi}{2}} \right)$$
$$\csc(x) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\frac{\pi}{2} + n\pi}{x + n\pi} \right)$$
$$\sec(x) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\frac{\pi}{2} + n\pi}{x + n\pi + \frac{\pi}{2}} \right)$$
$$\cot(x) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{x + n\pi + \frac{\pi}{2}}{x + n\pi} \right)$$

Zusammenhang mit der komplexen Exponentialfunktion

Ferner besteht zwischen den Funktionen $\sin x$, $\cos x$ und der komplexen Exponentialfunktion $\exp(\mathrm{i}x)$ folgender Zusammenhang:

$$\exp(\pm \mathrm{i}x) = \cos x \pm \mathrm{i} \sin x = e^{\pm \mathrm{i}x}$$ (Eulersche Formel)

Weiterhin wird $\cos x + \mathrm{i} \sin x =: \operatorname{cis}(x)$ geschrieben.[29]

Auf Grund der oben genannten Symmetrien gilt weiter:

$$\cos x = \frac{\exp(\mathrm{i}x) + \exp(-\mathrm{i}x)}{2}$$

$$\sin x = \frac{\exp(\mathrm{i}x) - \exp(-\mathrm{i}x)}{2\mathrm{i}}$$

Mit diesen Beziehungen können einige Additionstheoreme besonders einfach und elegant hergeleitet werden.

Sphärische Trigonometrie

Eine Formelsammlung für das rechtwinklige und das allgemeine Dreieck auf der Kugeloberfläche findet sich in einem eigenen Kapitel.

Literatur, Weblinks

- Abramowitz-Stegun online (Formeln, Theorieteil – ohne den reinen Tabellenteil); eine html- oder pdf-Version kann (legal) heruntergeladen werden.

Einzelnachweise

1. Die Wurzel 2006/04+05, 104**f.**, ohne Beweis
2. Joachim Mohr: *Kosinus-, Sinus und Tangenswerte* (http://kilchb.de/cosinuswerte.php) abgerufen am 1. Juni 2016
3. Otto Forster: *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen.* vieweg 1983, Seite 87.
4. I.N.Bronstein, K.A. Semendjajew: *Taschenbuch der Mathematik* 19. Auflage, 1979. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig. S. 237.
5. Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, **22.3.15** (http://www.math.sfu.ca/~cbm/aands/page_776.htm), (s. a. oben „Weblinks“)
6. Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, **4.3.27** (http://www.math.sfu.ca/~cbm/aands/page_72.htm), (s. a. oben „Weblinks“)
7. Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, **4.3.29** (http://www.math.sfu.ca/~cbm/aands/page_72.htm), (s. a. oben „Weblinks“)

8. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, 5th edition (1994). ISBN 0-12-294755-X **1.333.4**
9. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, ebenda **1.331.3** (Bei dieser Formel enthält Gradshteyn/Ryzhik allerdings einen Vorzeichenfehler)
10. I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig. 19. Auflage 1979. **2.5.2.1.3**
11. Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, **4.3.28** (http://www.math.sfu.ca/~cbm/aands/page_72.htm), (s. a. oben „Weblinks“)
12. Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, **4.3.30** (http://www.math.sfu.ca/~cbm/aands/page_72.htm), (s. a. oben „Weblinks“)
13. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, ebenda **1.335.4**
14. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, ebenda **1.335.5**
15. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, ebenda **1.331.3**
16. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, ebenda **1.321.1**
17. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, ebenda **1.321.2**
18. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, ebenda **1.321.3**
19. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, ebenda **1.321.4**
20. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, ebenda **1.321.5**
21. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, ebenda **1.323.1**
22. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, ebenda **1.323.2**
23. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, ebenda **1.323.3**
24. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, ebenda **1.323.4**
25. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, ebenda **1.323.5**
26. Weisstein, Eric W.: *Harmonic Addition Theorem.* (http://mathworld.wolfram.com/HarmonicAdditionTheorem.html) Abgerufen am 20. Januar 2018 (englisch).
27. Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, **4.3.67** (http://www.math.sfu.ca/~cbm/aands/page_75.htm), (s. a. oben „Weblinks“)
28. Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, **4.3.70** (http://www.math.sfu.ca/~cbm/aands/page_75.htm), (s. a. oben „Weblinks“)
29. Herbert Amann, Joachim Escher: Analysis I, Birkhäuser Verlag, Basel 2006, 3. Auflage, S. 292 und 298
