Formelsammlung Trigonometrie

 $\sqrt[n]{x}$ Dieser Artikel ist eine Formelsammlung zum Thema Trigonometrie. Es werden mathematische Symbole verwendet, die im ArtikelListe mathematischer Symbole erläutert werden.

Inhaltsverzeichnis

Dreieckberechnung

Winkelsumme

Sinussatz

Kosinussatz

Projektionssatz

Die Mollweideschen Formeln

Tangenssatz

Formeln mit dem halben Umfang

Flächeninhalt und Umkreisradius

In- und Ankreisradien

Höhen

Seitenhalbierende

Winkelhalbierende

Allgemeine Trigonometrie in der Ebene

Gegenseitige Darstellung

Vorzeichen der Winkelfunktionen

Wichtige Funktionswerte

Symmetrien

Phasenverschiebungen

Rückführung auf spitze Winkel

Darstellung durch den Tangens des halben Winkels

Additionstheoreme

Additionstheoreme für Arkusfunktionen

Doppelwinkelfunktionen

Winkelfunktionen für weitere Velfache

Halbwinkelformeln

Summen zweier trigonometrischer Funktionen (Identitäten)

Produkte der Winkelfunktionen

Potenzen der Winkelfunktionen

Sinus

Kosinus

Tangens

Umrechnung in andere trigonometrische Funktionen

Weitere Formeln für den Fall $\alpha + \beta + y = 180^{\circ}$

Sinusoid und Linearkombination mit gleicher Phase

Reihenentwicklung

Produktentwicklung

Zusammenhang mit der komplexen Exponentialfunktion

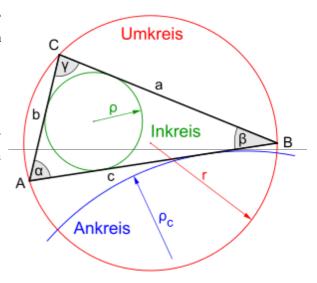
Sphärische Trigonometrie

Literatur, Weblinks

Dreieckberechnung

Die folgende Liste enthält die meisten bekannten **Formeln aus der Trigonometrie in der Ebene**. Die meisten dieser Beziehungen verwenden trigonometrische Funktionen

Dabei werden die folgenden Bezeichnungen verwendet: Das <u>Dreieck</u> ABC habe die Seiten a=BC, b=CA und c=AB, die <u>Winkel</u> α , β und γ bei den <u>Ecken</u> A, B und C. Ferner seien r der <u>Umkreisradius</u>, ρ der <u>Inkreisradius</u> und ρ_a , ρ_b und ρ_c die <u>Ankreisradien</u> (und zwar die Radien der Ankreise, die den Ecken A, B bzw. C gegenüberliegen) des Dreiecks ABC. Die Variable s steht für den halben Umfang des Dreiecks ABC: $s=\frac{a+b+c}{2}$. Schließlich wird die Fläche des Dreiecks ABC mit F bezeichnet. Alle anderen Bezeichnungen werden jeweils in den entsprechenden Abschnitten, in denen sie vorkommen, erläutert.



Winkelsumme

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}$$

Sinussatz

Formel 1:

$$rac{a}{\sinlpha}=rac{b}{\sineta}=rac{c}{\sin\gamma}=2r=rac{abc}{2F}$$

Formel 2:

wenn $\alpha = 90^{\circ}$

$$\sin eta = rac{b}{a}$$

$$\sin \gamma = \frac{c}{a}$$

wenn $\beta = 90^{\circ}$

$$\sin \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\sin \gamma = rac{c}{b}$$

wenn $\gamma=90^\circ$

$$\sin lpha = rac{a}{c}$$

$$\sin eta = rac{b}{c}$$

Kosinussatz

Formel 1:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \, \cos \alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \, \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \, \cos \gamma$$

Formel 2:

wenn $\alpha = 90^{\circ}$

$$\cos \beta = \frac{c}{a}$$

$$\cos \gamma = rac{b}{a}$$

wenn $\beta = 90^{\circ}$

$$\cos \alpha = \frac{c}{b}$$

$$\cos \gamma = \frac{a}{b}$$

wenn $\gamma = 90^{\circ}$

$$a^2 + b^2 = c^2$$
 (Satz des Pythagoras)

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c}$$

Projektionssatz

$$a = b \cos \gamma + c \cos \beta$$

$$b=c\,\cos\alpha+a\,\cos\gamma$$

$$c = a \cos \beta + b \cos \alpha$$

Die Mollweideschen Formeln

$$rac{b+c}{a}=rac{\cosrac{eta-\gamma}{2}}{\sinrac{lpha}{2}},\quad rac{c+a}{b}=rac{\cosrac{\gamma-lpha}{2}}{\sinrac{eta}{2}},\quad rac{a+b}{c}=rac{\cosrac{lpha-eta}{2}}{\sinrac{\gamma}{2}}$$

$$\frac{b-c}{a} = \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}, \quad \frac{c-a}{b} = \frac{\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}, \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

Tangenssatz

Formel 1:

$$rac{b+c}{b-c} = rac{ anrac{eta+\gamma}{2}}{ anrac{eta-\gamma}{2}} = rac{\cotrac{lpha}{2}}{ anrac{eta-\gamma}{2}}$$

Analoge Formeln gelten für $\frac{a+b}{a-b}$ und $\frac{a+c}{a-c}$:

$$rac{a+b}{a-b} = rac{ anrac{lpha+eta}{2}}{ anrac{lpha-eta}{2}} = rac{\cotrac{\gamma}{2}}{ anrac{lpha-eta}{2}}$$

$$rac{a+c}{a-c} = rac{ anrac{lpha+\gamma}{2}}{ anrac{lpha-\gamma}{2}} = rac{\cotrac{eta}{2}}{ anrac{lpha-\gamma}{2}}$$

Formel 2:

wenn $\alpha=90^\circ$

$$\tan \beta = \frac{b}{c}$$

$$an \gamma = rac{c}{b}$$

wenn $\beta = 90^{\circ}$

$$an lpha = rac{a}{c}$$

$$\tan \gamma = rac{c}{a}$$

wenn $\gamma=90^\circ$

$$an lpha = rac{a}{b}$$

$$\tan \beta = \frac{b}{a}$$

Formeln mit dem halben Umfang

Im Folgenden bedeutet $m{s}$ immer die Hälfte des Umfangs des Dreiecks $m{ABC}$, also $m{s}=rac{a+b+c}{2}$.

$$s-a=rac{b+c-a}{2}$$

$$s-b=\frac{c+a-b}{2}$$

$$s-c=\frac{a+b-c}{2}$$

$$(s-b) + (s-c) = a$$

$$(s-c)+(s-a)=b$$

$$(s-a) + (s-b) = c$$

$$(s-a)+(s-b)+(s-c)=s$$

$$\sinrac{lpha}{2}=\sqrt{rac{\left(s-b
ight)\left(s-c
ight)}{bc}}$$

$$\sinrac{eta}{2}=\sqrt{rac{\left(s-c
ight)\left(s-a
ight)}{ca}}$$

$$\sinrac{\gamma}{2}=\sqrt{rac{\left(s-a
ight) \left(s-b
ight) }{ab}}$$

$$\cosrac{lpha}{2}=\sqrt{rac{s\left(s-a
ight)}{bc}}$$

$$\cosrac{eta}{2}=\sqrt{rac{s\left(s-b
ight)}{ca}}$$

$$\cosrac{\gamma}{2}=\sqrt{rac{s\left(s-c
ight)}{ab}}$$

$$anrac{lpha}{2}=\sqrt{rac{\left(s-b
ight)\left(s-c
ight)}{s\left(s-a
ight)}}$$

$$anrac{eta}{2}=\sqrt{rac{\left(s-c
ight)\left(s-a
ight)}{s\left(s-b
ight)}}$$

$$anrac{\gamma}{2}=\sqrt{rac{\left(s-a
ight) \left(s-b
ight) }{s\left(s-c
ight) }}$$

$$s=4r\cosrac{lpha}{2}\cosrac{eta}{2}\cosrac{\gamma}{2}$$

$$s-a=4r\cosrac{lpha}{2}\sinrac{eta}{2}\sinrac{\gamma}{2}$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks wird hier mit F bezeichnet (nicht, wie heute üblich, mit A, um eine Verwechselung mit der Dreiecksecke A auszuschließen):

Den Umkreisradius des Dreiecks $m{ABC}$ bezeichnen wir mit $m{r}$.

(Es ist zu beachten, dass die hier benutzten Bezeichnungen r, ρ , ρ_a , ρ_b , ρ_c für den Umkreisradius, den Inkreisradius und die drei Ankreisradien von der vorwiegend im englischsprachigen Raum verbreiteten Bezeichnungsweise abweichen, bei der dieselben Größe R, r, r_a , r_b , r_c genannt werden.)

Heronsche Formel:

$$F = \sqrt{s\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)} = \frac{1}{4}\sqrt{\left(a+b+c\right)\left(b+c-a\right)\left(c+a-b\right)\left(a+b-c\right)}$$

$$F = \frac{1}{4}\sqrt{2\left(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)}$$

$$F = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ca\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

$$F = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c, \text{ wobel } h_a, h_b \text{ und } h_c \text{ die Längen der von } A, B \text{ bzw. } C \text{ ausgehenden Höhen des Dreiecks } ABC \text{ sind.}$$

$$F = 2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$F = \frac{abc}{4r}$$

$$F = \rho s = \rho_a\left(s-a\right) = \rho_b\left(s-b\right) = \rho_c\left(s-c\right)$$

$$F = \sqrt{\rho\rho_a\rho_b\rho_c}$$

$$F = 4\rho r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

Erweiterter Sinussatz:

$$egin{aligned} rac{a}{\sinlpha} &= rac{b}{\sineta} = rac{c}{\sin\gamma} = 2r = rac{abc}{2F} \ a &= 2r\,\sinlpha \ b &= 2r\,\sineta \ c &= 2r\,\sin\gamma \ r &= rac{abc}{4F} \end{aligned}$$

 $F = s^2 \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2}$

In- und Ankreisradien

In diesem Abschnitt werden Formeln aufgelistet, in denen der Inkreisradius ρ und die Ankreisradien ρ_a , ρ_b und ρ_c des Dreiecks ABC vorkommen.

$$\begin{split} & \rho = (s-a)\tan\frac{\alpha}{2} = (s-b)\tan\frac{\beta}{2} = (s-c)\tan\frac{\gamma}{2} \\ & \rho = 4r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = s\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} \\ & \rho = r\left(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1\right) \\ & \rho = \frac{F}{s} = \frac{abc}{4rs} \\ & \rho = \sqrt{\frac{(s-a)\left(s-b\right)\left(s-c\right)}{s}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b+c-a)\left(c+a-b\right)\left(a+b-c\right)}{a+b+c}} \\ & \rho = \frac{a}{\cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2}} = \frac{b}{\cot\frac{\gamma}{2} + \cot\frac{\alpha}{2}} = \frac{c}{\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2}} \end{split}$$

 $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = s^2 + \rho^2 + 4 \cdot \rho \cdot r$ [1]

Wichtige Ungleichung: $2\rho \le r$; Gleichheit tritt nur dann ein, wenn DreieckABC gleichseitig ist.

$$ho_a = s an rac{lpha}{2} = (s-b) \cot rac{\gamma}{2} = (s-c) \cot rac{eta}{2}$$
 $ho_a = 4r \sin rac{lpha}{2} \cos rac{eta}{2} \cos rac{\gamma}{2} = (s-a) \tan rac{lpha}{2} \cot rac{eta}{2} \cot rac{\gamma}{2}$
 $ho_a = r \left(-\cos lpha + \cos eta + \cos \gamma + 1
ight)$
 $ho_a = rac{F}{s-a} = rac{abc}{4r \left(s-a
ight)}$
 $ho_a = \sqrt{rac{s \left(s-b
ight) \left(s-c
ight)}{s-a}} = rac{1}{2} \sqrt{rac{\left(a+b+c
ight) \left(c+a-b
ight) \left(a+b-c
ight)}{b+c-a}}$

Die Ankreise sind gleichberechtigt: Jede Formel fü p_a gilt in analoger Form für ρ_b und ρ_c .

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c}$$

Höhen

Die Längen der von A, B bzw. C ausgehenden Höhen des DreiecksABC werden mit h_a , h_b und h_c bezeichnet.

$$egin{aligned} h_a &= b \sin \gamma = c \sin eta = rac{2F}{a} = 2r \sin eta \sin \gamma = 2r \left(\cos lpha + \cos eta \cos \gamma
ight) \ h_b &= c \sin lpha = a \sin \gamma = rac{2F}{b} = 2r \sin \gamma \sin lpha = 2r \left(\cos eta + \cos lpha \cos \gamma
ight) \ h_c &= a \sin eta = b \sin lpha = rac{2F}{c} = 2r \sin lpha \sin eta = 2r \left(\cos \gamma + \cos lpha \cos eta
ight) \end{aligned}$$

$$egin{align} h_a &= rac{a}{\coteta + \cot\gamma}; \quad h_b = rac{b}{\cot\gamma + \cotlpha}; \quad h_c = rac{c}{\cotlpha + \coteta} \ F &= rac{1}{2}ah_a = rac{1}{2}bh_b = rac{1}{2}ch_c \ rac{1}{h_a} + rac{1}{h_b} + rac{1}{h_c} = rac{1}{
ho} = rac{1}{
ho_a} + rac{1}{
ho_b} + rac{1}{
ho_c} \ \end{align}$$

Hat das Dreieck ABC einen rechten Winkel bei C (ist also $\gamma = 90^{\circ}$), dann gilt

$$h_c=rac{ab}{c}$$

$$h_a = b$$

$$h_b = a$$

Seitenhalbierende

Die Längen der von A, B bzw. C ausgehenden Seitenhalbierenden des DreiecksABC werden s_a , s_b und s_c genannt.

$$egin{aligned} s_a &= rac{1}{2} \sqrt{2 b^2 + 2 c^2 - a^2} = rac{1}{2} \sqrt{b^2 + c^2 + 2 b c \cos lpha} = \sqrt{rac{a^2}{4} + b c \cos lpha} \ s_b &= rac{1}{2} \sqrt{2 c^2 + 2 a^2 - b^2} = rac{1}{2} \sqrt{c^2 + a^2 + 2 c a \cos eta} = \sqrt{rac{b^2}{4} + c a \cos eta} \ s_c &= rac{1}{2} \sqrt{2 a^2 + 2 b^2 - c^2} = rac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + 2 a b \cos \gamma} = \sqrt{rac{c^2}{4} + a b \cos \gamma} \ s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 &= rac{3}{4} \left(a^2 + b^2 + c^2
ight) \end{aligned}$$

Winkelhalbierende

Wir bezeichnen mit w_{α} , w_{β} und w_{γ} die Längen der von A, B bzw. C ausgehenden Winkelhalbierenden im DreieckABC.

$$w_lpha = rac{2bc\cosrac{lpha}{2}}{b+c} = rac{2F}{a\cosrac{eta-\gamma}{2}} = rac{\sqrt{bc(b+c-a)(a+b+c)}}{b+c}$$

$$w_{eta} = rac{2ca\cosrac{eta}{2}}{c+a} = rac{2F}{b\cosrac{\gamma-lpha}{2}} = rac{\sqrt{ca(c+a-b)(a+b+c)}}{c+a}$$

$$w_{\gamma} = rac{2ab\cosrac{\gamma}{2}}{a+b} = rac{2F}{c\cosrac{lpha-eta}{2}} = rac{\sqrt{ab(a+b-c)(a+b+c)}}{a+b}$$

Allgemeine Trigonometrie in der Ebene

Gegenseitige Darstellung

Die trigonometrischen Funktionen lassen sich ineinander umwandeln oder gegenseitig darstellen. Es gelten folgende Zusammenhänge

$$an x = rac{\sin x}{\cos x}$$
 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ("Trigonometrischer Pythagoras")
 $1 + \tan^2 x = rac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
 $1 + \cot^2 x = rac{1}{\sin^2 x} = \csc^2 x$

(Siehe auch den AbschnittPhasenverschiebungen)

Mittels dieser Gleichungen lassen sich die drei vorkommenden Funktionen durch eine der beiden anderen darstellen:

$$\begin{split} \sin x &= \sqrt{1-\cos^2 x} & \text{ für } & x \in [0,\pi] = [0^\circ,180^\circ] \\ \sin x &= -\sqrt{1-\cos^2 x} & \text{ für } & x \in [\pi,2\pi] = [180^\circ,360^\circ] \\ \sin x &= \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} & \text{ für } & x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right] = [0^\circ,90^\circ] \cup [270^\circ,360^\circ] \\ \sin x &= -\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} & \text{ für } & x \in \left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right] = [90^\circ,270^\circ] \\ \cos x &= \sqrt{1-\sin^2 x} & \text{ für } & x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right] = [0^\circ,90^\circ] \cup [270^\circ,360^\circ] \\ \cos x &= -\sqrt{1-\sin^2 x} & \text{ für } & x \in \left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right] = [90^\circ,270^\circ] \\ \cos x &= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} & \text{ für } & x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right] = [0^\circ,90^\circ] \cup [270^\circ,360^\circ] \\ \cos x &= -\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} & \text{ für } & x \in \left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right] = [90^\circ,270^\circ] \\ \tan x &= \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x} & \text{ für } & x \in [0,\pi] = [0^\circ,180^\circ] \\ \tan x &= -\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x} & \text{ für } & x \in [\pi,2\pi] = [180^\circ,360^\circ] \\ \tan x &= \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} & \text{ für } & x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right] = [0^\circ,90^\circ] \cup [270^\circ,360^\circ] \\ \tan x &= \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} & \text{ für } & x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right] = [0^\circ,90^\circ] \cup [270^\circ,360^\circ] \\ \end{bmatrix} \end{split}$$

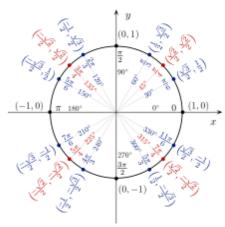
$$an x = -rac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$$
 für $x \in \left[rac{\pi}{2},rac{3\pi}{2}
ight] = \left[90^\circ,270^\circ
ight]$

Vorzeichen der Winkelfunktionen

$$\sin x > 0$$
 für $x \in]0^{\circ}, 180^{\circ}[$ $\sin x < 0$ für $x \in]180^{\circ}, 360^{\circ}[$ $\cos x > 0$ für $x \in [0^{\circ}, 90^{\circ}[\cup]270^{\circ}, 360^{\circ}]$ $\cos x < 0$ für $x \in]90^{\circ}, 270^{\circ}[$ $\tan x > 0$ für $x \in]0^{\circ}, 90^{\circ}[\cup]180^{\circ}, 270^{\circ}[$ $\tan x < 0$ für $x \in]90^{\circ}, 180^{\circ}[\cup]270^{\circ}, 360^{\circ}[$

Die Vorzeichen von cot, sec und csc stimmen überein mit denen ihrer Kehrwertfunktionertan, cos bzw. sin.

Wichtige Funktionswerte



Darstellung wichtiger Funktionswerte von Sinus und Kosinus auf dem Einheitskreis

α (°)	α (rad)	$\sin lpha$	$\cos lpha$	an lpha	$\cot lpha$
0°	0	0	1	0	±∞
15°	$\frac{\pi}{12}$	$rac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$rac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
18°	$\frac{\pi}{10}$	$rac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1 ight)$	$rac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$rac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
36°	$\frac{\pi}{5}$	$rac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$rac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$rac{1}{2}\sqrt{2}$	$rac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
54°	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)$	$rac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$rac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
72°	$\frac{2\pi}{5}$	$rac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$rac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1 ight)$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$rac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$
75°	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$rac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	±∞	0
108°	$\frac{3\pi}{5}$	$rac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$rac{1}{4}\left(1-\sqrt{5} ight)$	$-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$-\tfrac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
1:		$rac{1}{2}\sqrt{2}$	<u></u>		
1:		0		0	±∞
2'			0	±∞	0
3		0	1	0	±∞

Es sind noch viele weitere Werte darstellbar [2]

Symmetrien

Die trigonometrischen Funktionen haben einfache Symmetrien:

Phasenverschiebungen

$$anig(x+rac{\pi}{2}ig)=-\cot x \quad ext{bzw.} \quad an(x+90^\circ)=-\cot x$$
 $\cotig(x+rac{\pi}{2}ig)=-\tan x \quad ext{bzw.} \quad \cot(x+90^\circ)=-\tan x$

Rückführung auf spitze Winkel

$$\sin x = \sin(\pi - x)$$
 bzw. $\sin x = \sin(180^\circ - x)$
 $\cos x = -\cos(\pi - x)$ bzw. $\cos x = -\cos(180^\circ - x)$
 $\tan x = -\tan(\pi - x)$ bzw. $\tan x = -\tan(180^\circ - x)$

Darstellung durch den Tangens des halben Winkels

Mit der Bezeichnung $t= anrac{x}{2}$ gelten die folgenden Beziehungen für beliebigex

$$\sin x = rac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = rac{1-t^2}{1+t^2}, \ an x = rac{2t}{1-t^2}, \qquad \cot x = rac{1-t^2}{2t}, \ \sec x = rac{1+t^2}{1-t^2}, \qquad \csc x = rac{1+t^2}{2t}.$$

Additionstheoreme

$$\sin(x \pm y) = \sin x \, \cos y \pm \cos x \, \sin y^{[3]}$$
 $\cos(x \pm y) = \cos x \, \cos y \mp \sin x \, \sin y^{[3]}$
 $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \, \tan y} = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x \pm y)}$
 $\cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y + \cot x} = \frac{\cos(x \pm y)}{\sin(x \pm y)}$

Für x=y folgen hieraus die Doppelwinkelfunktionen für $y=\pi/2$ die Phasenverschiebungen

$$\sin(x+y)\cdot\sin(x-y)=\cos^2y-\cos^2x=\sin^2x-\sin^2y$$
 $\cos(x+y)\cdot\cos(x-y)=\cos^2y-\sin^2x=\cos^2x-\sin^2y$

Additionstheoreme für Arkusfunktionen

Für die Arkusfunktionen gelten folgende Additionstheorem [4]

Summanden	Summenformel	Gültigkeitsbereich
$\arcsin x + \arcsin y =$	$rcsinigg(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}igg)$	$xy \leq 0$ oder $x^2 + y^2 \leq 1$
	$\pi - rcsinigg(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}igg)$	$x>0$ und $y>0$ und $x^2+y^2>1$
	$-\pi - rcsinigg(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}igg)$	$x < 0$ und $y < 0$ und $x^2 + y^2 > 1$
$\arcsin x - \arcsin y =$	$rcsinigg(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}igg)$	$xy \geq 0$ oder $x^2 + y^2 \leq 1$
	$\pi - rcsinigg(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}igg)$	$x>0$ und $y<0$ und $x^2+y^2>1$
	$-\pi - rcsinigg(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}igg)$	$x < 0$ und $y > 0$ und $x^2 + y^2 > 1$
$\arccos x + \arccos y =$	$rccosigg(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}igg)$	$x+y\geq 0$
	$2\pi - rccosigg(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}igg)$	x+y < 0
$\arccos x - \arccos y =$	$-rccosigg(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}igg)$	$x+y\geq 0$
	$rccosigg(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}igg)$	x+y<0
$\arctan x + \arctan y =$	$\arctan\!\left(rac{x+y}{1-xy} ight)$	xy < 1
	$\pi + \arctanigg(rac{x+y}{1-xy}igg)$	x>0 und $xy>1$
	$-\pi + rctanigg(rac{x+y}{1-xy}igg)$	x < 0 und $xy > 1$
$\arctan x - \arctan y =$	$\arctan\!\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$	xy > -1
	$\pi + \arctanigg(rac{x-y}{1+xy}igg)$	x>0 und $xy<-1$
	$-\pi + rctanigg(rac{x-y}{1+xy}igg)$	x < 0 und $xy < -1$

Doppelwinkelfunktionen

$$\sin(2x)=2\sin x\;\cos x=rac{2\tan x}{1+ an^2 x}$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = rac{1 - an^2 x}{1 + an^2 x}$$

$$an(2x)=rac{2 an x}{1- an^2 x}=rac{2}{\cot x- an x}$$

$$\cot(2x)=rac{\cot^2x-1}{2\cot x}=rac{\cot x-\tan x}{2}$$

Winkelfunktionen für weitere Velfache

Die Formel für $\cos(nx)$ steht über $T_n(\cos x) = \cos(nx)^{[5]}$ mit den Tschebyschow-Polynomenin Beziehung.

$$\begin{aligned} &\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x \overset{[6]}{=} \\ &= \sin x \left(4\cos^2 x - 1 \right) \\ &\sin(4x) = 8\sin x \cos^3 x - 4\sin x \cos x \overset{[7]}{=} \\ &= \sin x \left(8\cos^3 x - 4\cos x \right) \\ &\sin(5x) = 5\sin x - 20\sin^3 x + 16\sin^5 x \overset{[8]}{=} \\ &= \sin x \left(16\cos^4 x - 12\cos^2 x + 1 \right) \\ &\sin(nx) = n \sin x \cos^{n-1} x - \binom{n}{3}\sin^3 x \cos^{n-3} x + \binom{n}{5}\sin^5 x \cos^{n-5} x - + \dots \overset{[9][10]}{=} \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j+1} \sin^{2j+1} x \cos^{n-2j-1} x \\ &= \sin x \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n-k-1}{k} 2^{n-2k-1} \cos^{n-2k-1} x \end{aligned}$$

$$&\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x \overset{[11]}{=} \\ &\cos(4x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 \overset{[12]}{=} \\ &\cos(5x) = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x \overset{[13]}{=} \\ &\cos(6x) = 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1 \overset{[14]}{=} \end{aligned}$$

$$&\cos(nx) = \cos^n x - \binom{n}{2}\sin^2 x \cos^{n-2} x + \binom{n}{4}\sin^4 x \cos^{n-4} x - + \dots \overset{[10][15]}{=} \end{aligned}$$

$$&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j} \sin^{2j} x \cos^{n-2j} x$$

$$an(3x) = rac{3 an x - an^3 x}{1 - 3 an^2 x}$$

$$an(4x) = rac{4 an^3x}{1-6 an^2x+ an^4x}$$

$$\cot(3x) = rac{\cot^3 x - 3\cot x}{3\cot^2 x - 1}$$

$$\cot(4x) = rac{\cot^4 x - 6\cot^2 x + 1}{4\cot^3 x - 4\cot x}$$

Halbwinkelformeln

Zur Berechnung des Funktionswertes des halben Arguments dienen die **Halbwinkelformeln** 10], welche sich mittels Substitution aus den Doppelwinkelformeln herleiten lassen:

$$\begin{split} \sin\frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \quad \text{für} \quad x \in [0,2\pi] \\ \cos\frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \quad \text{für} \quad x \in [-\pi,\pi] \\ \tan\frac{x}{2} &= \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \quad \text{für} \quad x \in [0,\pi[\cot\frac{x}{2}] = \frac{1+\cos x}{\sin x}] = \frac{\sin x}{1-\cos x} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \quad \text{für} \quad x \in [0,\pi[\cot\frac{x}{2}] = \frac{1+\cos x}{\sin x}] = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \quad \text{für} \quad x \in [0,\pi[\cot\frac{x}{2}] = \frac{1+\cos x}{\sin x}] = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \quad \text{für} \quad x \in [0,\pi[\cot\frac{x}{2}] = \frac{1+\cos x}{\sin x}] = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \quad \text{für} \quad x \in [0,\pi[\cot\frac{x}{2}] = \frac{1+\cos x}{\sin x}] = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \quad \text{für} \quad x \in [0,\pi[\cot\frac{x}{2}] = \frac{1+\cos x}{\sin x}] = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \quad \text{für} \quad x \in [0,\pi[\cot\frac{x}{2}] = \frac{1+\cos x}{\sin x}] = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \quad \text{für} \quad x \in [0,\pi[\cot\frac{x}{2}] = \frac{1+\cos x}{\sin x}] = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \quad \text{für} \quad x \in [0,\pi[\cot\frac{x}{2}] = \frac{1+\cos x}{\sin x}] = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \quad \text{für} \quad x \in [0,\pi[\cot\frac{x}{2}] = \frac{1+\cos x}{\sin x}] = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \quad \text{für} \quad x \in [0,\pi[\cot\frac{x}{2}] = \frac{1+\cos x}{\sin x}] = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \quad \text{für} \quad x \in [0,\pi[\cot\frac{x}{2}] = \frac{1+\cos x}{\sin x}] = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \quad \text{für} \quad x \in [0,\pi[\cot\frac{x}{2}] = \frac{1+\cos x}{\sin x}] = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \quad \text{für} \quad x \in [0,\pi[\cot\frac{x}{2}] = \frac{1+\cos x}{\sin x}] = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \quad \text{für} \quad x \in [0,\pi[\cot\frac{x}{2}] = \frac{1+\cos x}{\cos x}] = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \quad \text{für} \quad x \in [0,\pi[\cot\frac{x}{2}] = \frac{1+\cos x}{\cos x}] = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \quad \text{für} \quad x \in [0,\pi[\cot\frac{x}{2}] = \frac{1+\cos x}{\cos x}] = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \quad \text{für} \quad x \in [0,\pi[\cot\frac{x}{2}] = \frac{1+\cos x}{\cos x}] = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \quad \text{für} \quad x \in [0,\pi[\cot\frac{x}{2}] = \frac{1+\cos x}{\cos x}] = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \quad \text{für} \quad x \in [0,\pi[\cot\frac{x}{2}] = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}] = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \quad \text{für} \quad x \in [0,\pi[\cot\frac{x}{2}] = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}] = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \quad \text{für} \quad x \in [0,\pi[\cot\frac{x}{2}] = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}] = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} =$$

Außerdem gilt:

$$egin{aligned} anrac{x}{2} &= rac{ an x}{1+\sqrt{1+ an^2 x}} & ext{f\"ur} \quad x \in \left] -rac{\pi}{2}, rac{\pi}{2}
ight[\ \cotrac{x}{2} &= \cot x + \sqrt{1+\cot^2 x} & ext{f\"ur} \quad x \in \left] 0, \pi
brace \end{aligned}$$

Siehe auch: Halbwinkelsatz

Summen zweier trigonometrischer Funktionen (Identitäten)

Aus den <u>Additionstheoremen</u> lassen sich Identitäten ableiten, mit deren Hilfe die Summe zweier trigonometrischer Funktionen als Produkt dargestellt werden kann [10]

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\tan x + \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$$

$$\Rightarrow \tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x \cos y}$$

$$egin{aligned} \cot x + \cot y &= rac{\sin(y+x)}{\sin x \sin y} \ \cot x - \cot y &= rac{\sin(y-x)}{\sin x \sin y} \end{aligned}
ightarrow \cot x + \cot y = rac{\sin(y\pm x)}{\sin x \sin y}$$

Daraus ergeben sich noch Spezialfälle:

$$egin{split} \cos x + \sin x &= \sqrt{2} \cdot \sin \left(x + rac{\pi}{4}
ight) &= \sqrt{2} \cdot \cos \left(x - rac{\pi}{4}
ight) \ \cos x - \sin x &= \sqrt{2} \cdot \cos \left(x + rac{\pi}{4}
ight) &= -\sqrt{2} \cdot \sin \left(x - rac{\pi}{4}
ight) \end{split}$$

Produkte der Winkelfunktionen

Produkte der trigonometrischen Funktionen lassen sich mit folgenden Formeln berechne

$$\sin x \, \sin y = \frac{1}{2} \Big(\cos(x - y) - \cos(x + y) \Big)$$

$$\cos x \, \cos y = \frac{1}{2} \Big(\cos(x - y) + \cos(x + y) \Big)$$

$$\sin x \, \cos y = \frac{1}{2} \Big(\sin(x - y) + \sin(x + y) \Big)$$

$$\tan x \, \tan y = \frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} = -\frac{\tan x - \tan y}{\cot x - \cot y}$$

$$\cot x \, \cot y = \frac{\cot x + \cot y}{\tan x + \tan y} = -\frac{\cot x - \cot y}{\tan x - \tan y}$$

$$\tan x \, \cot y = \frac{\tan x + \cot y}{\cot x + \tan y} = -\frac{\tan x - \cot y}{\cot x - \tan y}$$

$$\sin x \, \sin y \, \sin z = \frac{1}{4} \Big(\sin(x + y - z) + \sin(y + z - x) + \sin(z + x - y) - \sin(x + y + z) \Big)$$

$$\cos x \, \cos y \, \cos z = \frac{1}{4} \Big(\cos(x + y - z) + \cos(y + z - x) + \cos(z + x - y) + \cos(x + y + z) \Big)$$

$$\sin x \, \sin y \, \cos z = \frac{1}{4} \Big(-\cos(x + y - z) + \cos(y + z - x) + \cos(z + x - y) - \cos(x + y + z) \Big)$$

$$\sin x \, \cos y \, \cos z = \frac{1}{4} \Big(\sin(x + y - z) - \sin(y + z - x) + \sin(z + x - y) + \sin(x + y + z) \Big)$$

Aus der Doppelwinkelfunktionfür $\sin(2x)$ folgt außerdem:

$$\sin x \; \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$$

Potenzen der Winkelfunktionen

Sinus

$$\begin{split} &\sin^2 x = \frac{1}{2} \, \left(1 - \cos(2x) \right)^{[10][16]} \\ &\sin^3 x = \frac{1}{4} \, \left(3 \sin x - \sin(3x) \right)^{[10][17]} \\ &\sin^4 x = \frac{1}{8} \, \left(\cos(4x) - 4 \cos(2x) + 3 \right)^{[10][18]} \\ &\sin^5 x = \frac{1}{16} \, \left(10 \, \sin x - 5 \sin(3x) + \sin(5x) \right)^{[19]} \\ &\sin^6 x = \frac{1}{32} \, \left(10 - 15 \, \cos(2x) + 6 \cos(4x) - \cos(6x) \right)^{[20]} \\ &\sin^n x = \frac{1}{2^n} \, \sum_{k=0}^n \, \binom{n}{k} \cos \left((n - 2k)(x - \frac{\pi}{2}) \right) \, ; \quad n \in \mathbb{N} \\ &\sin^n x = \frac{1}{2^n} \, \binom{n}{\frac{n}{2}} + \frac{2}{2^n} \, \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^{(\frac{n}{2}-k)} \, \binom{n}{k} \cos \left((n - 2k)x \right) ; \quad n \in \mathbb{N} \, \text{und} \, n \, \text{gerade} \\ &\sin^n x = \frac{2}{2^n} \, \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{(\frac{n-1}{2}-k)} \, \binom{n}{k} \sin \left((n - 2k)x \right) ; \quad n \in \mathbb{N} \, \text{und} \, n \, \text{ungerade} \end{split}$$

Kosinus

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \left(1 + \cos(2x) \right)^{[10][21]}$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4} \left(3\cos x + \cos(3x) \right)^{[10][22]}$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{8} \left(3 + 4\cos(2x) + \cos(4x) \right)^{[10][23]}$$

$$\cos^5 x = \frac{1}{16} \left(10\cos x + 5\cos(3x) + \cos(5x) \right)^{[24]}$$

$$\cos^6 x = \frac{1}{32} \left(10 + 15\cos(2x) + 6\cos(4x) + \cos(6x) \right)^{[25]}$$

$$\cos^n x = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos((n-2k)x); \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\cos^n x = \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n}{2}} + \frac{2}{2^n} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{k} \cos((n-2k)x); \quad n \in \mathbb{N} \text{ und } n \text{ gerade}$$

$$\cos^n x = rac{2}{2^n} \sum_{k=0}^{rac{n-1}{2}} inom{n}{k} \cos{((n-2k)x)}; \quad n \in \mathbb{N} ext{ und } n ext{ ungerade}$$

Tangens

$$\tan^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)}$$

Umrechnung in andere trigonometrische Funktionen

$$\sin(rccos x) = \cos(rcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$
 $\sin(rccot x) = \cos(rccot x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
 $\sin(rccot x) = \cos(rctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
 $\tan(rccot x) = \cot(rccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
 $\tan(rccos x) = \cot(rccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
 $\tan(rccot x) = \cot(rccos x) = \frac{1}{x}$

Weitere Formeln für den Fall $\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}$

Die folgenden Formeln gelten für beliebige ebene Dreiecke und folgen nach längeren Termumformungen aus $\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}$, solange die in den Formeln vorkommenden Funktionen wohldefiniert sind (letzteres betrifft nur die Formeln, in denen Tangens und Kotangens vorkommen).

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha \cdot \tan\beta \cdot \tan\gamma$$

$$\cot\beta \cdot \cot\gamma + \cot\gamma \cdot \cot\alpha + \cot\alpha \cdot \cot\beta = 1$$

$$\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2} = \cot\frac{\alpha}{2} \cdot \cot\frac{\beta}{2} \cdot \cot\frac{\gamma}{2}$$

$$\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} = 1$$

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$-\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + 1$$

$$\begin{aligned} &-\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}-1\\ &\sin(2\alpha)+\sin(2\beta)+\sin(2\gamma)=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\\ &-\sin(2\alpha)+\sin(2\beta)+\sin(2\gamma)=4\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma\\ &\cos(2\alpha)+\cos(2\beta)+\cos(2\gamma)=-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1\\ &-\cos(2\alpha)+\cos(2\beta)+\cos(2\gamma)=-4\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma+1\\ &\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+2\\ &-\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+2\\ &-\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma\\ &\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=-2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma\\ &-\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=-2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma+1\\ &-\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=-2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma+1\\ &-\sin^2(2\alpha)+\sin^2(2\beta)+\sin^2(2\gamma)=-2\cos(2\alpha)\sin(2\beta)\sin(2\gamma)\\ &-\cos^2(2\alpha)+\cos^2(2\beta)+\cos^2(2\gamma)=2\cos(2\alpha)\sin(2\beta)\sin(2\gamma)+1\\ &\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)+2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)=1\end{aligned}$$

Sinusoid und Linearkombination mit gleicher Phase

$$a\sin lpha + b\cos lpha = egin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} \sin \left(lpha + \arctan \left(rac{b}{a}
ight)
ight) &, ext{ für alle } a > 0 \ \sqrt{a^2 + b^2} \cos \left(lpha - \arctan \left(rac{a}{b}
ight)
ight) &, ext{ für alle } b > 0 \end{cases}$$
 $a\cos lpha + b\sin lpha = ext{sgn}(a)\sqrt{a^2 + b^2} \cos \left(lpha + \arctan \left(-rac{b}{a}
ight)
ight) ^{[26]}$ $a\sin(x+lpha) + b\sin(x+eta) = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(lpha - eta)} \cdot \sin(x+\delta),$

wobei $\delta = \operatorname{atan2}(a\cos\alpha + b\cos\beta, a\sin\alpha + b\sin\beta)$.

Allgemeiner ist

$$\sum_i a_i \sin(x+\delta_i) = a \sin(x+\delta),$$

wobei

$$a^2 = \sum_{i,j} a_i a_j \cos(\delta_i - \delta_j)$$

und

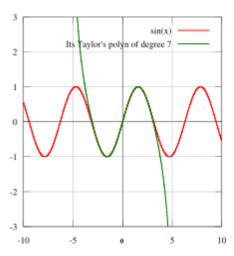
$$\delta = an2igg(\sum_i a_i\cos\delta_i, \sum_i a_i\sin\delta_iigg).$$

Reihenentwicklung

Wie auch sonst in der Analysis werden alle Winkel im Bogenmaß angegeben.

Man kann zeigen, dass der Kosinus die <u>Ableitung</u> des Sinus darstellt und die Ableitung des Kosinus der negative Sinus ist. Hat man diese Ableitungen, kann man die <u>Taylorreihe</u> entwickeln (am einfachsten mit dem Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$) und zeigen, dass die folgenden Identitäten für alle \boldsymbol{x} aus den <u>reellen Zahlen</u> gelten. Mit diesen Reihen werden die trigonometrischen Funktionen für komplexe Argumente definiert (\boldsymbol{B}_n bzw. $\boldsymbol{\beta}_n$ bezeichnet dabei die <u>Bernoulli-Zahlen</u>):

$$egin{aligned} \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} rac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \ &= x - rac{x^3}{3!} + rac{x^5}{5!} - rac{x^7}{7!} \pm \cdots \;, \qquad |x| < \infty \end{aligned} \ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} rac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \ &= 1 - rac{x^2}{2!} + rac{x^4}{4!} - rac{x^6}{6!} \pm \cdots \;, \qquad |x| < \infty \end{aligned}$$



Der Sinus (rot) verglichen mit seinem 7. Taylorpolynom (grün)

$$an x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n rac{2^{2n}(1-2^{2n})eta_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} rac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!} x^{2n-1} \ = x + rac{1}{3}x^3 + rac{2}{15}x^5 + rac{17}{315}x^7 + rac{62}{2835}x^9 + \cdots \qquad |x| < rac{\pi}{2}$$

$$egin{aligned} \cot x &= rac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} rac{(-1)^{n-1} 2^{2n} eta_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} = rac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} rac{2^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n-1} \ &= rac{1}{x} - rac{1}{3} x - rac{1}{45} x^3 - rac{2}{945} x^5 - rac{1}{4725} x^7 - \cdots, \qquad 0 < |x| < \pi \end{aligned}$$

Produktentwicklung

$$egin{align} \sin x &= x \prod_{k=1}^\infty \left(1 - rac{x^2}{k^2 \pi^2}
ight) \ \cos x &= \prod_{k=1}^\infty \left(1 - rac{4x^2}{(2k-1)^2 \pi^2}
ight) \ \sin(x) &= \prod_{n=-\infty}^\infty \left(rac{x + n\pi}{rac{\pi}{2} + n\pi}
ight) \ \cos(x) &= \prod_{n=-\infty}^\infty \left(rac{x + n\pi + rac{\pi}{2}}{rac{\pi}{2} + n\pi}
ight) \ \end{aligned}$$

$$an(x) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(rac{x+n\pi}{x+n\pi+rac{\pi}{2}}
ight) \ \csc(x) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(rac{rac{\pi}{2}+n\pi}{x+n\pi}
ight) \ \sec(x) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(rac{rac{\pi}{2}+n\pi}{x+n\pi+rac{\pi}{2}}
ight) \ \cot(x) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(rac{x+n\pi+rac{\pi}{2}}{x+n\pi}
ight)$$

Zusammenhang mit der komplexen Exponentialfunktion

Ferner besteht zwischen den Funktioner $\sin x$, $\cos x$ und der komplexen Exponentialfunktion $\exp(ix)$ folgender Zusammenhang:

$$\exp(\pm ix) = \cos x \pm i \sin x = e^{\pm ix}$$
 (Eulersche Formel)

Weiterhin wird $\cos x + i \sin x =: \operatorname{cis}(x)$ geschrieben. [29]

Auf Grund der oben genannten Symmetrien gilt weiter:

$$\cos x = rac{\exp(\mathrm{i}x) + \exp(-\mathrm{i}x)}{2}$$

$$\sin x = \frac{\exp(\mathrm{i}x) - \exp(-\mathrm{i}x)}{2\mathrm{i}}$$

Mit diesen Beziehungen können einige Additionstheoreme besonders einfach und elegant h**ge**leitet werden.

Sphärische Trigonometrie

Eine Formelsammlung für das <u>rechtwinklige</u> und das <u>allgemeine Dreieck</u> auf der Kugeloberfläche findet sich in einem eigenen Kapitel.

Literatur, Weblinks

Abramowitz-Stegun online (Formeln, Theorieteil – ohne den reinen abellenteil); eine html- oder pdf-Version kann (legal) heruntergeladen werden.

Einzelnachweise

- 1. Die Wurzel 2006/04+05, 104f., ohne Beweis
- 2. Joachim Mohr: Kosinus-, Sinus und Tangenswerte (http://kilchb.de/cosinuswerte.php) abgerufen am 1. Juni 2016
- 3. Otto Forster: Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Vränderlichen. vieweg 1983, Seite 87.
- 4. I.N.Bronstein, K.A. Semendjajew: *Taschenbuch der Mathematik* 19. Auflage, 1979. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig. S. 237.
- 5. Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, 22.3.15 (http://www.math.sfu.ca/~cbm/aands/page_7/6.htm), (s. a. oben "Weblinks")
- 6. Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. 4.3.27 (http://www.math.sfu.ca/~cbm/aands/page_2.htm), (s. a. oben "Weblinks")
- 7. Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, 4.3.29 (http://www.math.sfu.ca/~cbm/aands/page_2.htm), (s. a. oben "Weblinks")

- 8. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik Table of Integrals, Series, and Products Academic Press, 5th edition (1994). ISBN 0-12-294755-X 1.333.4
- 9. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, ebenda**1.331.3** (Bei dieser Formel enthält Gradshteyn/Ryzhik allerdings einen Vorzeichenfehler)
- 10. I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew <u>Taschenbuch der Mathematik</u> B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig. 19. Auflage 1979.**2.5.2.1.3**
- 11. Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. 4.3.28 (http://www.math.sfu.ca/~cbm/aands/page_72.htm), (s. a. oben "Weblinks")
- 12. Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. 4.3.30 (http://www.math.sfu.ca/~cbm/aands/page_2.htm), (s. a. oben "Weblinks")
- 13. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, ebenda 1.335.4
- 14. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, ebenda 1.335.5
- 15. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, ebenda 1.331.3
- 16. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, ebenda 1.321.1
- 17. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, ebenda 1.321.2
- 18. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, ebenda 1.321.3
- 19. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, ebenda 1.321.4
- 20. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, ebenda 1.321.5
- 21. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, ebenda 1.323.1
- 22. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, ebenda 1.323.2
- 23. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, ebenda 1.323.3
- 24. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, ebenda 1.323.4
- 25. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, ebenda 1.323.5
- 26. Weisstein, Eric W.: *Harmonic Addition Theorem.*(http://mathworld.wolfram.com/HarmonicAdditionTheorem.html) Abgerufen am 20. Januar 2018(englisch).
- 27. Milton Abramowitz and Irene A. Stegun **A.3.67** (http://www.math.sfu.ca/~cbm/aands/page_5.htm), (s. a. oben "Weblinks")
- 28. Milton Abramowitz and Irene A. Stegun <u>**4.3.70**</u> (http://www.math.sfu.ca/~cbm/aands/page_5.htm), (s. a. oben "Weblinks")
- 29. Herbert Amann, Joachim Escher: Analysis I, Birkhäuser Vrlag, Basel 2006, 3. Auflage, S. 292 und 298

Abgerufen von "https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Formelsammlung_rīgonometrie&oldid=178291083

Diese Seite wurde zuletzt am 13. Juni 2018 um 21:17 Uhr bearbeitet.

Der Text ist unter der Lizenz, Creative Commons Attribution/Share Alike verfügbar; Informationen zu den Urhebern und zum Lizenzstatus eingebundener Mediendateien (etwa Bilder oder Meos) können im Regelfall durch Anklicken dieser abgerufen werden. Möglicherweise unterliegen die Inhalte jeweils zusätzlichen Bedingungen. Durch die Nutzung dieser Website erklären Sie sich mit den Nutzungsbedingungen und der Datenschutzrichtlinie einverstanden. Wikipedia® ist eine eingetragene Marke der Wikimedia Foundation Inc.