WIKIPEDIA

Noetherscher Ring

In der Algebra werden bestimmte Strukturen (Ringe und Moduln) **noethersch** genannt, wenn sie *keine* unendliche Schachtelung von immer größeren Unterstrukturen enthalten können. Der Begrffist nach der MathematikerinEmmy Noether benannt.

Inhaltsverzeichnis

Noethersche Moduln

Es sei R ein unitärer Ring (d. h. ein Ring mit Einselement). Ein R-Linksmodul M heißt *noethersch*, wenn er eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

- Jeder Untermodul ist endlich erzeugt.
- (Aufsteigende Kettenbedingung) Jede unendliche aufsteigende Kette

  $$N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \cdots$$

  von Untermoduln wird stationär, d. h., es gibt einen Index n, so dass

  $$N_n = N_{n+1} = N_{n+2} = \cdots$$

- (Maximalbedingung für Untermoduln) Jede nichtleere Menge von Untermoduln vo$M$ hat ein maximales Element bezüglich Inklusion.

Beispiele

- Jeder endliche Modul ist noethersch.
- Jeder endlich erzeugte Modul über einem noetherschen Ring ist noethersch.
- Jede endliche direkte Summe noetherscher Moduln ist noethersch.
- $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$ ist **nicht** noethersch als $\mathbb{Z}$-Modul.

Eigenschaften

- Jeder surjektive Endomorphismus ist ein Automorphismus.
- Für eine kurze exakte Sequenz $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ sind äquivalent:

1. M_2 ist noethersch.

2. M_1, M_3 sind noethersch.

- Ist V ein Vektorraum, so ist V genau dann noethersch, wenn er endlich-dimensional ist. In diesem Fall ist der Modul auch artinsch.
- Ist R linksnoethersch, das Jacobson-Radikal $J = \operatorname{Rad}(R)$ nilpotent und R/J halbeinfach, dann ist R auch linksartinsch.
- Über einem noetherschen Ring ist jeder endlich erzeugte Modul auch endlich präsentiert (die Umkehrung gilt immer).
- Die endlich erzeugten Moduln über einem noetherschen Ring bilden eine abelsche Kategorie; die Voraussetzung, dass der Ring noethersch ist, ist dabei essentiell.

Noethersche Ringe

Ein Ring R heißt

- *linksnoethersch*, wenn er als R-Linksmodul noethersch ist;
- *rechtsnoethersch*, wenn er als R-Rechtsmodul noethersch ist;
- *noethersch*, wenn er links- und rechtsnoethersch ist.

Bei kommutativen Ringen sind alle drei Begriffe identisch und äquivalent dazu, dass alle Ideale in R endlich erzeugt sind.

Beispiele

- Artinsche Ringe sind noethersch.
- $\mathbb{Z}$ ist noethersch aber nicht artinsch.
- Quotienten und Lokalisierungen noetherscher Ringe sind noethersch.
- Hauptidealringe oder allgemeiner Dedekindringe sind noethersch.
- Ist R ein noetherscher Ring, so ist auch der Polynomring $R[X]$ noethersch (Hilbertscher Basissatz).
- Daraus folgt, dass allgemein endlich erzeugte Algebren über einem noetherschen Ring wieder noethersch sind. Insbesondere sind endlich erzeugte Algebren über Körpern noethersch.
- Der Polynomring $\mathbb{C}[X_1, X_2, \ldots]$ in unendlich vielen Unbestimmten ist nicht noethersch, da das Ideal, das von allen Unbestimmten erzeugt wird, nicht endlich erzeugt ist.
- Der Matrizenring $\begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$ ist rechtsnoethersch, aber weder linksartinsch noch linksnoethersch.

Eigenschaften

- Ist in einem Ring das Nullideal Produkt maximaler Ideale, so ist der Ring genau dann noethersch, wenn er artinsch ist.
- In einem noetherschen Ring gibt es nur endlich viele minimale Primideale.

Siehe auch

- Noetherscher Raum

Literatur

- Nicolas Bourbaki: *Algèbre commutative.* Band 8/9: *Chapitre 8: Dimension. Chapitre 9: Anneaux locaux noethériens complets.* Masson, Paris 1983, ISBN 2-225-78716-6 (*Éléments de mathématique*).
- David Eisenbud: *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry.* Corrected 3rd printing. Springer-Verlag, New York NY 1999, ISBN 0-387-94268-8 (*Graduate Texts in Mathematics* 150), (engl.).