WIKIPEDIA

Faktorgruppe

Die **Faktorgruppe** oder **Quotientengruppe** ist eine Gruppe, die mittels einer Standardkonstruktion aus einer gegebenen Gruppe G unter Zuhilfenahme eines Normalteilers $N \trianglelefteq G$ gebildet wird. Sie wird mit G/N bezeichnet und ist die Menge der Nebenklassen.

Inhaltsverzeichnis

Konstruktion

Beispiele

- Beispiel $\mathbb{Z}_6$
- Restklassengruppe der additiven Gruppe der ganzen Zahlen
- Faktorgruppe nach Kernen von Homomorphismen

Universelle Eigenschaft der Faktorgruppe

Konstruktion von Gruppen

- Kommutatorgruppe
- Relationen

Siehe auch

Literatur

Konstruktion

Die Elemente von G/N sind die Nebenklassen bezüglich N, also

$$G/N := \{gN : g \in G\}.$$

Die innere Verknüpfung $\circ\colon G/N \times G/N \to G/N$ wird definiert als

$$(gN) \circ (hN) := (gh)N.$$

Man kann mit Hilfe der Normalteilereigenschaft von N zeigen, dass diese Verknüpfung wohldefiniert ist und dass $(G/N, \circ)$ eine Gruppe ist. Diese Gruppe heißt *Faktorgruppe* von G nach N. Das neutrale Element von G/N ist N und das zu gN inverse Element ist durch $g^{-1}N$ gegeben.

Das Produkt $(gN) \circ (hN) = (gh)N$ stimmt mit dem Komplexprodukt $(gN) \cdot (hN)$ überein. Umgekehrt kann man zeigen, dass eine Untergruppe U einer Gruppe $(G, \cdot)$ ein Normalteiler ist, wenn für alle $g, h \in G$ die Gleichheit $(gU) \cdot (hU) = (gh)U$ gilt.

In abelschen Gruppen ist jede Untergruppe Normalteiler. Somit lässt sich dort nach jeder Untergruppe die Faktorgruppe bilden, welche dann wiederum abelsch ist.

Die Ordnung der Faktorgruppe G/N ist gerade die Anzahl der Nebenklassen von N. Diese Anzahl wird *Index* von N in G genannt und mit $(G : N)$ bezeichnet. Ist G eine endliche Gruppe, so gilt nach dem Satz von Lagrange $(G : N) = |G/N| = \frac{|G|}{|N|}$.

Beispiele

Beispiel $\mathbb{Z}_6$

Sei $\mathbb{Z}$ die Gruppe der ganzen Zahlen mit der Addition als Gruppenoperation und sei $6\mathbb{Z}$ die Untergruppe von $\mathbb{Z}$, die aus allen Vielfachen von 6 besteht. Die Gruppe $\mathbb{Z}$ ist abelsch und somit ist jede Untergruppe ein Normalteiler. Die Faktorgruppe $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ besteht nun aus allen Nebenklassen der Untergruppe $6\mathbb{Z}$, diese sind:

$6\mathbb{Z}+0=\{\dots,-18,-12,-6,0,6,12,18,\dots\}$

$6\mathbb{Z}+1=\{\dots,-17,-11,-5,1,7,13,19,\dots\}$

$6\mathbb{Z}+2=\{\dots,-16,-10,-4,2,8,14,20,\dots\}$

$6\mathbb{Z}+3=\{\dots,-15,-9,-3,3,9,15,21,\dots\}$

$6\mathbb{Z}+4=\{\dots,-14,-8,-2,4,10,16,22,\dots\}$

$6\mathbb{Z}+5=\{\dots,-13,-7,-1,5,11,17,23,\dots\}$

Dies sind alle Nebenklassen von $6\mathbb{Z}$, wie man leicht sehen kann, da sie die Gruppe $\mathbb{Z}$ partitionieren und $6\mathbb{Z}+6=6\mathbb{Z}+0$, $6\mathbb{Z}+7=6\mathbb{Z}+1$, $6\mathbb{Z}+8=6\mathbb{Z}+2$ und so weiter. Da die Operation in $\mathbb{Z}$ die Addition ist, nennt man die Addition der Nebenklassen auch Addition und es gilt beispielsweise $(6\mathbb{Z}+3)+(6\mathbb{Z}+4)=6\mathbb{Z}+7=6\mathbb{Z}+1$. Schreibt man abkürzend

$$[0]=6\mathbb{Z}+0,\quad [1]=6\mathbb{Z}+1,\quad [2]=6\mathbb{Z}+2,\quad [3]=6\mathbb{Z}+3,\quad [4]=6\mathbb{Z}+4,\quad [5]=6\mathbb{Z}+5,$$

so besteht $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ aus den 6 Elementen $[0],[1],[2],[3],[4],[5]$ und ergibt sich folgende Verknüpfungstabelle für die Faktorgruppe $\mathbb{Z}_6$

$+$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$
$[1]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$	$[0]$
$[2]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$	$[0]$	$[1]$
$[3]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[4]$	$[4]$	$[5]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[5]$	$[5]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$

Damit hat man ein Verfahren mit dem man Untergruppen wie Z_6 konstruieren kann. Ersetzt man 6 durch eine beliebige ganze Zahl so erhält man:

Restklassengruppe der additiven Gruppe der ganzen Zahlen

Die Gruppe $(\mathbb{Z},+)$ ist eine abelsche Gruppe. Für jedes $n\in\mathbb{N}$ ist $(n\mathbb{Z},+)$ eine Untergruppe und insbesondere ein Normalteiler von $(\mathbb{Z},+)$. Die Faktorgruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ wird *Restklassengruppe modulo* n genannt und kurz mit $\mathbb{Z}_n$ bezeichnet. Sie hat genau n Elemente.

Ihre Elemente werden als

$$[k]_n := [k] := k+n\mathbb{Z} = \{k+m\ :\ m\in n\mathbb{Z}\} = \{k+nz\ :\ z\in\mathbb{Z}\}$$

geschrieben und heißen *Kongruenzklassen bezüglich der Addition modulo* n. Es ist also

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}.$$

Die innere Verknüpfung von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ wird üblicherweise wieder mit $+$ bezeichnet. In $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ gilt beispielsweise

$$[3]_5 + [4]_5 = [3] + [4] = [2] = [2]_5,$$

da $3 + 4 = 7 = 2 + 5$, also $(3 + 4) + 5\mathbb{Z} = 2 + 5\mathbb{Z}$.

Faktorgruppe nach Kernen von Homomorphismen

Seien G und H zwei Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist der Kern von φ ein Normalteiler von G und daher kann die Faktorgruppe $G/\ker\varphi$ gebildet werden. Nach dem Homomorphiesatz für Gruppen ist diese Faktorgruppe isomorph zum Bild von φ, das eine Untergruppe von H ist.

Universelle Eigenschaft der Faktorgruppe

Ist H ein Normalteiler von G, dann ist die Abbildung $\pi : G \to G/H$ mit $g \mapsto gH$ mit Kern H ein Epimorphismus, also ein surjektiver Homomorphismus. Die universelle Eigenschaft besagt nun, dass zu jedem Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to G'$ mit $H \subseteq ker(\varphi)$ genau ein Gruppenhomomorphismus $\varphi' : G/H \to G'$ mit $\varphi = \varphi' \circ \pi$ existiert.

Beispiel: Sei $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ die natürliche Projektion der ganzen Zahlen auf die Restklassengruppe modulo 6. Sei $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ Gruppenhomomorphismus.Dann liegt $6\mathbb{Z}$ im Kern von φ und $\varphi' : \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ergibt sich zu:

$\varphi'([0]_6) = [0]_3$

$\varphi'([1]_6) = [1]_3$

$\varphi'([2]_6) = [2]_3$

$\varphi'([3]_6) = [0]_3$

$\varphi'([4]_6) = [1]_3$

$\varphi'([5]_6) = [2]_3.$

Konstruktion von Gruppen

Durch den Übergang zur Faktorgruppe erreicht man, das sämtliche Elemente des Normalteilers auf das neutrale Element abgebildet werden. dadurch kann man das Bestehen gewisser Identitäten erzwingen.

Kommutatorgruppe

Die von allen Kommutatoren erzeugte Gruppe $[G, G]$ ist ein Normalteiler der Gruppe G. In der Faktorgruppe $G/[G, G]$ werden daher alle Kommutatoren trivial, das heißt die Faktorgruppe ist abelsch. Man nennt dies die Abelisierung der Gruppe.

Relationen

Allgemeiner kann man das Bestehen beliebiger Gleichungen (Relationen) in einer Gruppe erzwingen. Kommen in den gewünschten Gleichungen Elemente $x_1, \ldots, x_n$ vor, so betrachte in der freien Gruppe F_n über n Elementen den kleinsten Normalteiler N, der alle Ausdrücke in $x_1, \ldots, x_n$ enthält, die gleich dem neutralen Element sein sollen. Die Faktorgruppe F_n/N leistet das Verlangte. Genaueres entnehme man dem Artikel "Präsentation einer Gruppe".

Siehe auch

- Korrespondenzsatz (Gruppentheorie): Untergruppen in einer Faktorgruppe
- Quotientenabbildung: Abbildung $G \to G/N$
- Restklassenring: Analoge Konstruktion für Ringe

Literatur

- Kurt Meyberg: *Algebra.* Band 1. 2. Auflage. Carl Hanser, München u. a. 1980, ISBN 3-446-13079-9.
- Jens Carsten Jantzen, Joachim Schwermer: *Algebra.* Springer, Berlin u. a. 2006, ISBN 3-540-21380-5.