WIKIPEDIA

Idealoperator

In der abstrakten Algebra ist ein **Ideal** eine Teilmenge einer algebraischen Struktur mit mindestens einer multiplikativen zweistelligen Operation, die abgeschlossen bezüglich Produkten mit Elementen aus der gesamten Struktur ist.

Die Ideale gleichen Typs auf einer gegebenen algebraischen Struktur bilden stets ein *Hüllensystem*, das **Idealsystem** genannt wird. Zu jedem Idealsystem ist immer ein entsprechender *Hüllenoperator* gegeben (und umgekehrt), das ist der zugehörige **Idealoperator**.

Zur einfacheren Darstellung wird hier nur der kommutative Fall beschrieben. Verzichtet man auf die Kommutativität der Multiplikation, dann handelt es sich im Folgenden jedoch um *Linksideale*, und vertauscht man bei *jedem* Produkt den linken und den rechten Faktor, ergeben sich entsprechend *Rechtsideale*. *Zweiseitige Ideale* oder einfach nur *Ideale* sind sowohl Links- als auch Rechtsideale. Bei Kommutativität besteht kein Unterschied zwischen diesen drei Arten von Idealen.

Inhaltsverzeichnis

Ringideale

Zahlentheoretische Untersuchungen von Zahlenbereichen, bei denen eine eindeutige Primfaktorzerlegung von Elementen nicht mehr gegeben war, führten zur Entwicklung der „klassischen“ Idealtheorie für kommutative Ringe.

Definition

Ist $(R,+,\cdot)$ ein Ring, dann ist ein *(dedekindsches) Ideal* oder *d-Ideal* die Trägermenge $A_d \subseteq R$ einer Untergruppe von $(R,+)$, für die gilt:

$$\forall r \in R \; \forall a \in A_d : \quad r \cdot a \in A_d.$$

Eigenschaften

- Die Ideale eines Rings sind genau die Kerne der Ringhomomorphismen des Ringes.
- Die Ideale eines Rings bilden jeweils ein Hüllensystem, so dass die Ideale durch den zugehörigen Hüllenoperator $(\ )_d$ gegeben sind.

Bemerkungen

- Es entstanden weitere Idealbegriffe für Ringe, aber auch für andere algebraische Strukturen wie Verbände, Halbgruppen, Halbringe usw., die (mindestens) eine assoziative zweistellige Operation besitzen.
- Es gibt auch Ideale bei algebraischen Strukturen mit nicht assoziativen zweistelligen Operationen, beispielsweise Lie-Algebren.
- Der Begriff des Verbandsideals wurde auch für beliebige halbgeordnete Mengen zum Ordnungsideal verallgemeinert.
- In der Regel lässt man den Index weg, wenn klar ist, um welchen Hüllenoperator es sich handelt.

Allgemeine Idealoperatoren

Da in der Regel nur die jeweilige assoziative zweistellige Operation entscheidend für die Faktorisierung ist (der nicht assoziative Fall wird im Folgenden nicht behandelt), ist es für eine allgemeine Idealtheorie ausreichend, Halbgruppen zu betrachten:

Gegeben sei im Folgenden stets eine kommutative multiplikative Halbgruppe $(S,\cdot)$, und es sei

$$\cdot : \mathfrak{P}(S) \times \mathfrak{P}(S) \to \mathfrak{P}(S), (A,B) \mapsto A \cdot B := \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\},$$

die Komplexmultiplikation über $(S,\cdot)$, wobei $\mathfrak{P}(S) := \{A \mid A \subseteq S\}$ die Potenzmenge von S ist.

$(\mathfrak{P}(S), \cup, \cap, \cdot)$ bildet dann einen unter anderem kommutativen, assoziativen, vollständigen multiplikativen Verband mit einem Nullelement $\emptyset$.

Definition

Es soll nun

$$(\ )_{x^*} : \mathfrak{P}(S) \to \mathfrak{P}(S), A \mapsto (A)_{x^*},$$

ein Hüllenoperator auf S sein, mit der Eigenschaft, dass

$$\begin{aligned}&\forall A \in \mathfrak{P}(S) :\\ &S \cdot (A)_{x^*} \subseteq (A)_{x^*}.\end{aligned}$$

$(\ )_{x^*}$ wird dann ein *x^*-Idealoperator* oder kurz *x^*-Operator auf* $(S,\cdot)$ genannt, $\mathfrak{I}_{x^*} := \{(A)_{x^*} \mid A \in \mathfrak{P}(S)\}$ ist das *x^*-Idealsystem* bzw. *x^*-System zu* $(\ )_{x^*}$, ein $A_{x^*} \in \mathfrak{I}_{x^*}$ heißt *x^*-Ideal* und $(A)_{x^*}$ ist das *von* $A \in \mathfrak{P}(S)$ *erzeugte x^*-Ideal*. $(a_1, \cdots, a_n)_{x^*} := (\{a_1, \cdots, a_n\})_{x^*}$ bezeichnet das *von* $a_1, \cdots, a_n \in S, n \in \mathbb{N}$, *erzeugte x^*-Ideal* und $(a)_{x^*}$ ist das *von* $a \in S$ *erzeugte x^*-Hauptideal*.

Bemerkung

- $\emptyset$ ist gewöhnlich kein Ideal, weil es aber für die Idealarithmetik von Vorteil ist, soll hier auch $(\emptyset)_{x^*} = \bigcap \mathfrak{I}_{x^*}$ ein unechtes x^*-Hauptideal sein, falls $(\emptyset)_{x^*} = \emptyset$.
- Zur Unterscheidung von Idealen und beliebigen Teilmengen von S werden im Folgenden die Ideale, im Gegensatz zu beliebigen Teilmengen, mit einem entsprechenden Index versehen.

Idealverbände

Auf $\mathfrak{I}_{x^*}$ sind zwei zweistellige Operationen

$$\begin{aligned}\vee_{x^*}: \mathfrak{I}_{x^*} \times \mathfrak{I}_{x^*} \to \mathfrak{I}_{x^*}, (A_{x^*}, B_{x^*}) \mapsto A_{x^*} \vee_{x^*} B_{x^*} := (A_{x^*} \cup B_{x^*})_{x^*},\\ \wedge_{x^*}: \mathfrak{I}_{x^*} \times \mathfrak{I}_{x^*} \to \mathfrak{I}_{x^*}, (A_{x^*}, B_{x^*}) \mapsto A_{x^*} \wedge_{x^*} B_{x^*} := (A_{x^*} \cap B_{x^*})_{x^*},\end{aligned}$$

gegeben, so dass $(\mathfrak{I}_{x^*}, \vee_{x^*}, \wedge_{x^*})$ einen vollständigen Verband bildet, den *Verband der x^*-Ideale von* $(S, \cdot)$. Dabei ist $\vee_{x^*}$ die *x^*-Idealverbindung*, $\wedge_{x^*}$ der *x^*-Idealdurchschnitt*.

Wie für alle Hüllensysteme gilt auch für jedes x^*-Idealsystem:

$$\begin{aligned}&\forall A, B \in \mathfrak{P}(S):\\ &A_{x^*} \wedge_{x^*} B_{x^*} = A_{x^*} \cap B_{x^*}.\end{aligned}$$

Algebraische Idealoperatoren

$(\mathfrak{I}_{x^*}, \vee_{x^*}, \wedge_{x^*})$ ist genau dann algebraisch, wenn $(\ )_{x^*}$ *algebraisch* ist, also

$$\begin{aligned}&\forall a \in S\ \forall A \in \mathfrak{P}(S):\\ &A \neq \emptyset \text{ und } a \in (A)_{x^*} \implies \exists a_1, \cdots, a_n \in A; n \in \mathbb{N}: a \in (a_1, \cdots, a_n)_{x^*}.\end{aligned}$$

Bezeichnet $|A|$ die Mächtigkeit der Menge A, so existiert mit

$$(\ )_{x^*_s}: \mathfrak{P}(S) \to \mathfrak{P}(S), A \mapsto (A)_{x^*_s} := \bigcup\{(N)_{x^*} \mid N \subseteq A, |N| \in \mathbb{N}_0\},$$

immer ein algebraischer x^*-Idealoperator zu $(\ )_{x^*}$.

x-Idealoperatoren

Die *x^*-Idealmultiplikation*

$$\cdot_{x^*}: \mathfrak{I}_{x^*} \times \mathfrak{I}_{x^*} \to \mathfrak{I}_{x^*}, (A_{x^*}, B_{x^*}) \mapsto A_{x^*} \cdot_{x^*} B_{x^*} := (A_{x^*} \cdot B_{x^*})_{x^*},$$

besitzt zwar die für Ideale charakteristische Eigenschaft

$$\begin{aligned}&\forall A_{x^*}, B_{x^*} \in \mathfrak{I}_{x^*}:\\ &B_{x^*} \cdot_{x^*} A_{x^*} \subseteq A_{x^*},\end{aligned}$$

sie bietet aber im Allgemeinen noch nicht genügend Eigenschaften, um $(S, \cdot)$ gut untersuchen zu können. Als gut geeignet für eine allgemeine Idealtheorie hat sich hingegen die folgende Klasse von x^*-Idealoperatoren erwiesen.

Definition

So genannte *x-Idealoperatoren* bzw. *x-Operatoren* $(\ )_x$ sind x^*-Idealoperatoren, bei denen *Translationen*

$$\begin{aligned}&\forall t \in S:\\ &\vartheta_t: S \to S, a \mapsto \vartheta_t(a) := a \cdot t,\end{aligned}$$

„*stetig*“ sind wie bei topologischen Abschlussoperatoren:

$$\begin{aligned}&\forall t \in S\ \forall A \in \mathfrak{P}(S):\\ &\vartheta_t\big((A)_x\big) \subseteq \big(\vartheta_t(A)\big)_x\end{aligned}$$

mit $\vartheta_t(A) := \{\vartheta_t(a) \mid a \in A\} = A \cdot \{t\}$ für jedes $t \in S$ und alle $A \in \mathfrak{P}(S)$.

Eigenschaften

- Mit jedem x-Idealoperator $(\ )_x$ ist auch $(\ )_{x_s}$ ein x-Idealoperator.
- Für jeden x-Idealoperator $(\ )_x$ auf $(S, \cdot)$ folgt sogar

$$\forall A, B \in \mathfrak{P}(S) :$$
$$(A)_x \cdot B \subseteq (A \cdot B)_x.$$

- Die zweiseitigen x-Ideale einer Halbgruppe $(S, \cdot)$ sind genau die Kerne von bestimmten Halbgruppenhomomorphismen von $(S, \cdot)$, und es gilt

$$\forall A, B \in \mathfrak{P}(S) :$$
$$(A)_x \cdot_x (B)_x = (A \cdot B)_x.$$

- Ein zweiseitiges x-Idealsystem bildet einen (kommutativen,) assoziativen, quasiganzen und vollständigen multiplikativen Verband $(\mathfrak{I}_x, \vee_x, \wedge_x, \cdot_x)$.
- Ebenso ist $(\mathfrak{I}_{x_s}, \vee_{x_s}, \wedge_{x_s}, \cdot_{x_s})$ für zweiseitige x-Ideale ein solcher multiplikativer Verband, der zudem stets algebraisch ist.

Bemerkungen

- Ein beliebiger x^*-Idealoperator induziert stets einen x-Idealoperator, so dass auch x-Idealoperatoren sehr allgemeiner Natur sind.
- Ein anderer, abstrakter Ansatz für eine allgemeine Idealtheorie ist die Beschreibung von Idealsystemen durch entsprechende multiplikative Verbände.
- In der Regel können Begriffe aus der „klassischen" Idealtheorie, wie Maximalideal, Primideal usw., problemlos für x-Ideale übernommen werden.

r-Idealoperatoren

Definition

Ein *r-Idealoperator* $(\ )_r$ auf $(S, \cdot)$ ist ein x-Idealoperator, der zusätzlich *translationsabgeschlossenen* ist, also

$$\forall t \in S\ \forall A_r \in \mathfrak{I}_r :$$
$$\vartheta_t(A_r) \in \mathfrak{I}_r,$$

und für den auch noch gilt:

$$\forall a \in S :$$
$$(a)_r = \{a\} \cup \vartheta_a(S).$$

Eigenschaften

- Für jeden translationsabgeschlossenen x-Idealoperator $(\ )_x$ auf $(S, \cdot)$ folgt sogar

$$\forall t \in S\ \forall A \in \mathfrak{P}(S) :$$
$$\vartheta_t\big((A)_x\big) = \big(\vartheta_t(A)\big)_x.$$

- Besitzt $(S, \cdot)$ ein Einselement 1, dann ist jeder translationsabgeschlossene x-Idealoperator $(\ )_x$ auf $(S, \cdot)$ bereits ein r-Idealoperator und

$$\forall a \in S:$$
$$(1)_x = S \text{ und } (a)_x = \vartheta_a(S) = S \cdot \{a\}.$$

- $(\ )_{r_s}$ ist ebenfalls ein r-Idealoperator.
- Jedes zweiseitige r-Hauptideal ist ein *Multiplikationsideal*, das heißt

$$\forall a \in S\ \forall A_r \in \mathfrak{I}_r:$$
$$A_r \subset (a)_r \iff \exists B_r \in \mathfrak{I}_r : B_r \cdot_r (a)_r = A_r \neq (a)_r.$$

- Ein zweiseitiges $(a)_r$ ist in $(\mathfrak{I}_r, \vee_r, \wedge_r, \cdot_r)$ *kürzbar*, also

$$\forall a \in S\ \forall A_r, B_r \in \mathfrak{I}_r:$$
$$A_r \cdot_r (a)_r = B_r \cdot_r (a)_r \implies A_r = B_r,$$

wenn $a \in S$ in $(S, \cdot)$ kürzbar ist.

Bemerkung

- r-Idealsysteme weisen alle wesentlichen Eigenschaften der d-Idealsysteme von Ringen auf, weshalb sie eine gute Untersuchung der Teilbarkeitsverhältnisse in $(S, \cdot)$ erlauben.

Literatur

- H. Prüfer: *Untersuchungen über die Teilbarkeitseigenschaften von Körpern.* J. reine angew. Math. **168** (1932), 1–36.
- K. E. Aubert: *Theory of x-ideals.* Acta Math. **107** (1962), 1–52.
- I. Fleischer: *Equivalence of x-systems and m-lattices*, in: Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, 33. Contributions to Lattice Theory, Szeged, 1980. North-Holland, Amsterdam-Oxford-New York, 1983, S. 381–400.
- P. Lorenzen: *Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie*. Math. Z. **45** (1939), 533–553.
- M. Ward, R.P. Dilworth: *The lattice theory of ova.* Ann. Math. **40** (1939), 600–608.
- L. Fuchs: *Teilweise geordnete algebraische Strukturen*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1966.
- G. Birkhoff: *Lattice Theory*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 3. Auflage 1973.