

# Index (Gruppentheorie)

Im mathematischen Teilgebiet der Gruppentheorie ist der **Index** einer Untergruppe ein Maß für die relative Größe zur gesamten Gruppe.

## Inhaltsverzeichnis

**Definition**

**Eigenschaften**

**Topologische Gruppen**

**Siehe auch**

**Literatur**

**Einzelnachweise**

## Definition

Es sei  $G$  eine Gruppe und  $U$  eine Untergruppe. Dann sind die Menge  $G/U$  der Linksnebenklassen und die Menge  $U \backslash G$  der Rechtsnebenklassen gleichmächtig. Ihre Mächtigkeit ist der Index von  $U$  in  $G$  und wird mit  $(G:U)$ , manchmal auch  $[G:U]$  oder  $|G:U|$ , bezeichnet.

## Eigenschaften

- Es gilt  $(G:1) = |G|$ . (Dabei bezeichnet  $|G|$  die Ordnung von  $G$ .)
- Der Index ist multiplikativ d. h. ist  $U$  eine Untergruppe von  $G$  und  $V$  eine Untergruppe von  $U$ , so gilt

$$(G:V) = (G:U) \cdot (U:V).$$

- Der Spezialfall  $V = 1$  wird oft als Satz von Lagrange (nach J.-L. Lagrange) bezeichnet:

Für eine Gruppe  $G$  und eine Untergruppe  $U$  gilt:

$$|G| = (G:U) \cdot |U|.$$

Im Fall von endlichen Gruppen kann man den Index einer Untergruppe also als

$$(G:U) = \frac{|G|}{|U|}$$

berechnen.

- Ist  $N \triangleleft G$  ein Normalteiler, so ist der Index von  $N$  in  $G$  gerade die Ordnung der Faktorgruppe  $G/N$ , also

$$(G:N) = |G/N|.$$

- Eine Untergruppe vom Index 2 ist ein Normalteiler, da von den zwei (Links)nebenklassen die eine die Untergruppe selbst und die andere deren Komplement ist.
- Allgemeiner: Ist  $U$  eine Untergruppe von  $G$  und  $p > 1$  ihr Index, der zugleich der kleinste Teiler der Ordnung  $|G|$  ist, dann ist  $U$  ein Normalteiler in  $G$ .

# Topologische Gruppen

---

Im Kontext von topologischen Gruppenspielen Untergruppen von endlichem Index eine Sonderrolle:

- Eine Untergruppe von endlichem Index ist genau dann offen, wenn sie abgeschlossen ist. (Offene Untergruppen sind stets abgeschlossen.)
- Jede offene Untergruppe einer kompakten Gruppe hat endlichen Index.

## Siehe auch

---

- Der Index des Zentralisators eines Gruppenelements entspricht der Mächtigkeit seiner Konjugationsklasse.<sup>[1]</sup>
- In der Galoistheorie ist durch die Galoiskorrespondenz ein Zusammenhang zwischen den relativen Indizes von Untergruppen der Galoisgruppe und den relativen Graden von Körpererweiterungen gegeben.<sup>[2]</sup>

## Literatur

---

Index in der Gruppentheorie:

- Thomas W. Hungerford: *Algebra*. 5. Auflage. Springer, New York 1989, ISBN 0-387-90518-9 S. 38 ff.

In topologischen Gruppen:

- Lew Pontrjagin: *Topologische Gruppen* Teubner, Leipzig 1957 (russisch: *Непрерывные группы*. Übersetzt von Viktor Ziegler).

## Einzelnachweise

---

1. Hungerford (1989), S. 89
2. Hungerford (1989), S. 247

---

Abgerufen von „[https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Index\\_\(Gruppentheorie\)&oldid=139557367](https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Index_(Gruppentheorie)&oldid=139557367)“

---

Diese Seite wurde zuletzt am 7. März 2015 um 21:17 Uhr bearbeitet.

Der Text ist unter der Lizenz „Creative Commons Attribution/Share Alike“ verfügbar; Informationen zu den Urhebern und zum Lizenzstatus eingebundener Mediendateien (etwa Bilder oder Videos) können im Regelfall durch Anklicken dieser abgerufen werden. Möglicherweise unterliegen die Inhalte jeweils zusätzlichen Bedingungen. Durch die Nutzung dieser Website erklären Sie sich mit den Nutzungsbedingungen und der Datenschutzrichtlinie einverstanden. Wikipedia® ist eine eingetragene Marke der Wikimedia Foundation Inc.