

# Ordnung eines Gruppenelementes

Im mathematischen Teilgebiet der Gruppentheorie versteht man unter der **Ordnung eines Gruppenelementes** oder **Elementordnung** eines Elements  $g$  einer Gruppe  $(G, \cdot)$  die kleinste natürliche Zahl  $n > 0$ , für die  $g^n = e$  gilt, wobei  $e$  das neutrale Element der Gruppe ist. Gibt es keine derartige Zahl, so sagt man,  $g$  habe *unendliche Ordnung*. Elemente endlicher Ordnung werden auch Torsionselemente genannt. Die Ordnung wird manchmal mit  $\text{ord}(g)$  oder  $\text{o}(g)$  bezeichnet.

Die Potenz  $g^n$  eines Gruppenelementes  $g$  ist dabei für natürliche Hochzahlen  $n \geq 0$  induktiv definiert:

- $g^0 := e$
- $g^{k+1} := g^k \cdot g$  für alle natürlichen  $k \geq 0$

Die Zahl  $\exp(G) := \text{kgV}\{\text{ord}(g) \mid g \in G\}$  wird, wenn sie endlich ist, Gruppenexponent genannt.

## Eigenschaften

- Nach dem Satz von Lagrange haben alle Elemente einer endlichen Gruppe eine endliche Ordnung, die ein Teiler der Gruppenordnung d. h. der Anzahl der Elemente der Gruppe, ist.
- Umgekehrt existiert in einer endlichen Gruppe nach dem Satz von Cauchy zu jedem Primteiler  $p$  der Gruppenordnung ein Element, das die Ordnung  $p$  hat. Für zusammengesetzte Teiler ist keine allgemeine Aussage möglich (während zum trivialen Teiler 1 das neutrale Element  $e = e^1$  gehört).
- Die Ordnung eines Elementes ist gleich der Ordnung der Untergruppe, die von diesem Element erzeugt wird.
- Es gilt  $g^d = e$  genau dann, wenn  $d$  ein Vielfaches der Ordnung  $\text{ord}(g)$  des Elements  $g$  ist.
- In abelschen Gruppen ist die Ordnung des Produktes  $g \cdot h$  ein Teiler des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Ordnungen von  $g$  und  $h$ . In nichtabelschen Gruppen ist keine derartige Aussage möglich; beispielsweise hat das Element  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  der Gruppe  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  unendliche Ordnung, obwohl es das Produkt der Elemente  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  mit der Ordnung 4 und  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  mit der Ordnung 6 ist.

## Literatur

- J. C. Jantzen, J. Schwermer: *Algebra*. Springer, Berlin/Heidelberg 2006, ISBN 3-540-21380-5

Abgerufen von [https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Ordnung\\_eines\\_Gruppenelementes&oldid=153421965](https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Ordnung_eines_Gruppenelementes&oldid=153421965)

Diese Seite wurde zuletzt am 12. April 2016 um 22:13 Uhr bearbeitet.

Der Text ist unter der Lizenz „Creative Commons Attribution/Share Alike“ verfügbar; Informationen zu den Urhebern und zum Lizenzstatus eingebundener Mediendateien (etwa Bilder oder Videos) können im Regelfall durch Anklicken dieser abgerufen werden. Möglicherweise unterliegen die Inhalte jeweils zusätzlichen Bedingungen. Durch die Nutzung dieser Website erklären Sie sich mit den Nutzungsbedingungen und der Datenschutzrichtlinie einverstanden.  
Wikipedia® ist eine eingetragene Marke der Wikimedia Foundation Inc.