

Einheitskreis

In der Mathematik ist der **Einheitskreis** der Kreis, dessen Radius die Länge 1 hat und dessen Mittelpunkt mit dem Koordinatenursprung eines kartesischen Koordinatensystems der Ebene übereinstimmt. Der Einheitskreis besteht also aus den Punkten (x, y) der Ebene, für die $x^2 + y^2 = 1$ gilt.

Inhaltsverzeichnis

Trigonometrische Zusammenhänge

Rationale Parametrisierung

Andere Normen

Weblinks

Trigonometrische Zusammenhänge

Liegt ein Punkt P auf dem Einheitskreis, dann kann man einen Winkel φ zu der x-Achse (Abszisse) definieren, unter dem P vom Ursprung des Koordinatensystems aus gesehen wird. Für die Koordinaten (x_p, y_p) von P gilt dann

$$x_p = \cos \varphi, \quad y_p = \sin \varphi \quad \text{und} \quad y_p/x_p = \tan \varphi.$$

Unter Zuhilfenahme der Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck lassen sich folgende Zusammenhänge aufstellen:

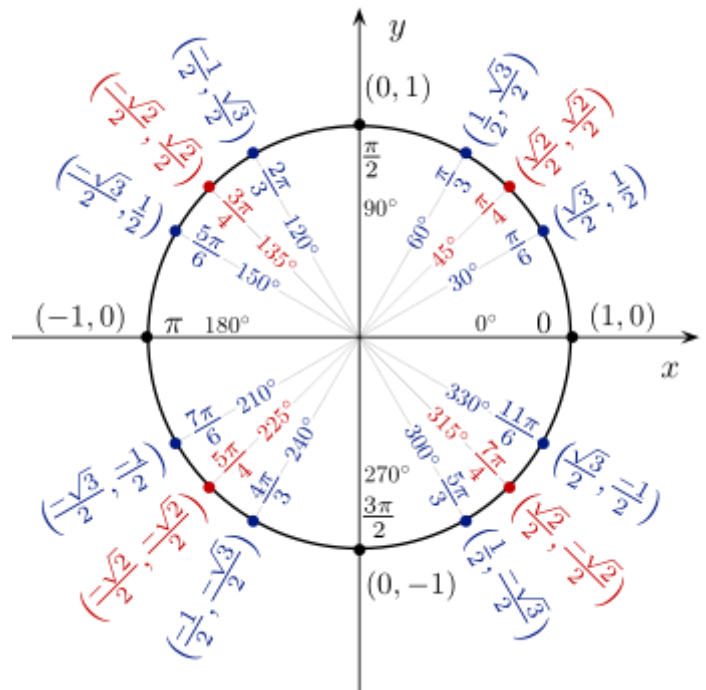
$$\sin \varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos \varphi = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

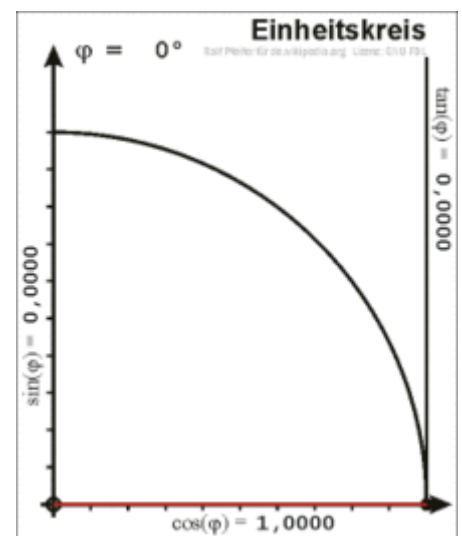
$$\tan \varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\cot \varphi = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$

Außerdem existieren noch die wenig gebräuchlichen Funktionen Sekans und Kosekans, die definiert sind als die Kehrwertfunktionen von Kosinus und Sinus.



Punkte auf dem Einheitskreis $(\cos \varphi, \sin \varphi)$



Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis (Animation)

Die orientierte Länge der Tangente an den Kreis, welche senkrecht auf der x-Achse steht, bis zum Scheitelpunkt des Winkels ist der Tangens von φ .

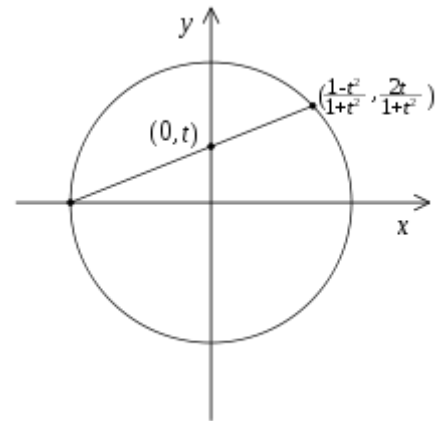
Der Einheitskreis kann auch über die Eulersche Identität dargestellt werden:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi).$$

Rationale Parametrisierung

Auch ohne Rückgriff auf trigonometrische Funktionen lassen sich alle Punkte des Einheitskreises finden. Sei t eine beliebige reelle Zahl. Ein Schnittpunkt der Geraden durch $(-1, 0)$ und $(0, t)$ mit dem Einheitskreis ist trivialerweise $(-1, 0)$. Der andere befindet sich bei $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$, und durchläuft, wenn t ganz \mathbb{R} durchläuft, den ganzen Kreis. Der Punkt $(-1, 0)$ wird dabei allerdings nur nach dem Grenzübergang $t \rightarrow \pm\infty$ erreicht.

Diese Parametrisierung ist für alle Körper geeignet. Für rationale $t = p/q$ erhält man aus ihr durch elementare Umformungen pythagoräische Tripel $(q^2 - p^2, 2pq, q^2 + p^2)$.



Rationale Parametrisierung

Andere Normen

Wird eine andere Norm als die euklidische Norm zur Abstandsmessung benutzt, so ist die Form des Einheitskreises im kartesischen Koordinatensystem eine andere. So ist zum Beispiel der Einheitskreis für die Maximumsnorm ein Quadrat mit den Ecken $(\pm 1, \pm 1)$ und der Einheitskreis für die Summennorm ein Quadrat mit den Ecken $(\pm 1, 0)$ und $(0, \pm 1)$.

Weblinks

Wikibooks: Trigonometrie (Schulmathematik) – Lern- und Lehrmaterialien

Commons: Unit circles – Sammlung von Bildern, Videos und Audiodateien

Wiktionary: Einheitskreis – Bedeutungserklärungen, Wortherkunft, Synonyme, Übersetzungen

- Einführung Sinus und Kosinus am Einheitskreis (Video)

Abgerufen von <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Einheitskreis&oldid=173545148>

Diese Seite wurde zuletzt am 1. Februar 2018 um 07:42 Uhr bearbeitet.

Der Text ist unter der Lizenz „Creative Commons Attribution/Share Alike“ verfügbar; Informationen zu den Urhebern und zum Lizenzstatus eingebundener Mediendateien (etwa Bilder oder Videos) können im Regelfall durch Anklicken dieser abgerufen werden. Möglicherweise unterliegen die Inhalte jeweils zusätzlichen Bedingungen. Durch die Nutzung dieser Website erklären Sie sich mit den Nutzungsbedingungen und der Datenschutzrichtlinie einverstanden.
Wikipedia® ist eine eingetragene Marke der Wikimedia Foundation Inc.