WIKIPEDIA

Hauptideal

Das **Hauptideal** ist ein Begriff aus der Ringtheorie, einem Teilgebiet der Algebra. Es stellt eine Verallgemeinerung der aus der Schulmathematik bekannten Teilmengen der ganzen Zahlen dar, die Vielfache einer Zahl sind. Beispiele für solche Teilmengen sind die geraden Zahlen oder die Vielfachen der Zahl 3.

Inhaltsverzeichnis

Definition

Ein **Hauptideal** eines Ringes R ist ein von einem einzigen Element $a \in R$ erzeugtes Ideal

$$(a) := (\{a\})\,.$$

Eigenschaften

Mit den Komplexprodukten

$$Ra := \{ra \mid r \in R\},$$
$$aR := \{ar \mid r \in R\}$$

und

$$RaR := \{ras \mid r, s \in R\}$$

gilt jeweils für das von $a \in R$ erzeugte

- *Haupt-Linksideal*

$$(a) = \{a_1 + \ldots + a_n \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } a_1, \ldots, a_n \in \{\pm a\} \cup Ra\},$$

- *Haupt-Rechtsideal*

$$(a) = \{a_1 + \ldots + a_n \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } a_1, \ldots, a_n \in \{\pm a\} \cup aR\},$$

- *(zweiseitige) Hauptideal*

$$(a) = \{a_1 + \cdots + a_n \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } a_i \in \{\pm a\} \cup Ra \cup aR \cup RaR\}.$$

Falls der Ring R ein Einselement 1 besitzt, folgt für das

- *Haupt-Linksideal*:

$$(a) = Ra,$$

- *Haupt-Rechtsideal*:

$$(a) = aR,$$

- *(zweiseitige) Hauptideal*:

$$(a) = \{a_1 + \cdots + a_n \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } a_i \in RaR\}.$$

Bemerkungen

- Es ist durchaus geläufig, mit RaR das von a erzeugte Hauptideal zu bezeichnen[1][2] (und nicht nur das darin enthaltene Komplexprodukt).
- In kommutativen Ringen stimmen alle drei Arten von Hauptidealen überein, im Allgemeinen jedoch nicht.
- Nicht jedes Ideal eines Ringes muss ein Hauptideal sein. Als Beispiel betrachten wir den kommutativen Ring $K[X,Y]$ aller Polynome in zwei Unbestimmten über einem Körper K. Das von den beiden Polynomen X und Y erzeugte Ideal (X,Y) besteht aus allen Polynomen aus $K[X,Y]$, deren Absolutglied gleich 0 ist. Dieses Ideal ist kein Hauptideal, denn wäre ein Polynom P ein Erzeuger von (X,Y), dann müsste P ein Teiler sowohl von X als auch von Y sein, was nur auf die konstanten Polynome ungleich 0 zutrifft. Diese sind aber in (X,Y) nicht enthalten.

Verwandter Begriff

Ein Integritätsring, in dem jedes Ideal ein Hauptideal ist, heißt Hauptidealring.

Literatur

- Siegfried Bosch: *Algebra*, 7. Auflage 2009, Springer-Verlag, ISBN 3-540-40388-4, doi:10.1007/978-3-540-92812-6
- Jens Carsten Jantzen, Joachim Schwermer: *Algebra*. Springer 2005, ISBN 3-540-21380-5, doi:10.1007/3-540-29287-X.
- Bernhard Hornfeck: *Algebra*. 3. Auflage. De Gruyter 1976, ISBN 3-11-006784-6
- Gisbert Wüstholz: *Algebra*. Vieweg, 2004, ISBN 3-528-07291-1, doi:10.1007/978-3-322-85035-5

Einzelnachweise

1. Principal ideal. Encyclopedia of Mathematics. URL: http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Principal_ideal&oldid=35049, abgerufen 12. April 2018
2. Louis H. Rowen: *Ring Theory*. Band 1. Academic Press Inc., Boston u. a. 1988, ISBN 0-125-99841-4 (*Pure and Applied Mathematics* 127), Seite 21