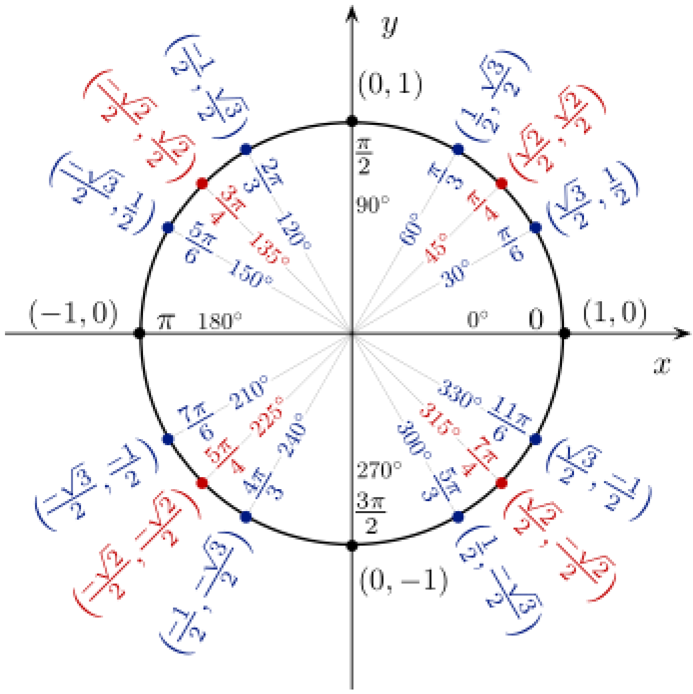
WIKIPEDIA

# Einheitskreis

In der Mathematik ist der **Einheitskreis** der Kreis, dessen Radius die Länge 1 hat und dessen Mittelpunkt mit dem Koordinatenursprung eines kartesischen Koordinatensystems der Ebene übereinstimmt. Der Einheitskreis besteht also aus den Punkten $(x, y)$ der Ebene, für die $x^2 + y^2 = 1$ gilt.



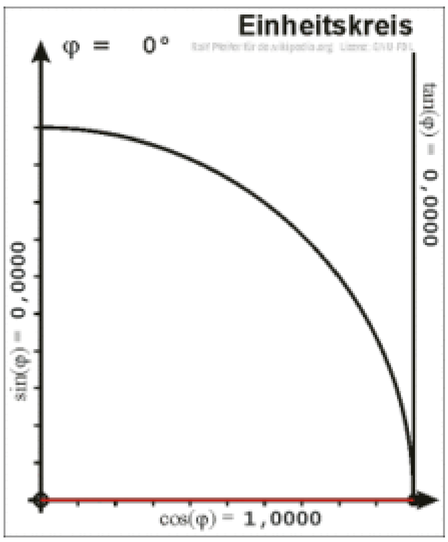

Punkte auf dem Einheitskreis $(\cos\varphi, \sin\varphi)$

## Inhaltsverzeichnis



## Trigonometrische Zusammenhänge

Liegt ein Punkt $P$ auf dem Einheitskreis, dann kann man einen Winkel $\varphi$ zu der x-Achse (Abszisse) definieren, unter dem $P$ vom Ursprung des Koordinatensystems aus gesehen wird. Für die Koordinaten $(x_p, y_p)$ von $P$ gilt dann




Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis (Animation)

$$x_p = \cos\varphi,\ y_p = \sin\varphi \text{ und } y_p/x_p = \tan\varphi.$$

Unter Zuhilfenahme der Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck lassen sich folgende Zusammenhänge aufstellen:

$$\sin\varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos\varphi = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan\varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\cot\varphi = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$

Außerdem existieren noch die wenig gebräuchlichen Funktionen Sekans und Kosekans, die definiert sind als die Kehrwertfunktionen von Kosinus und Sinus.

Die orientierte Länge der Tangente an den Kreis, welche senkrecht auf der x-Achse steht, bis zum Scheitelpunkt des Winkels ist der Tangens von $\varphi$.

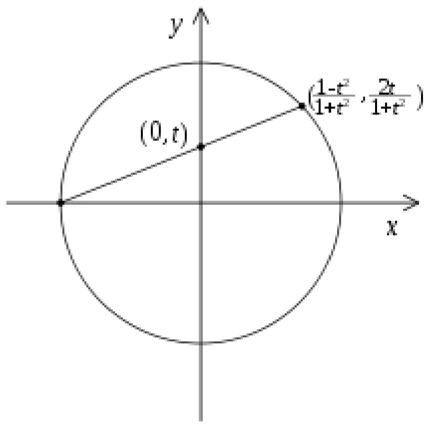
Der Einheitskreis kann auch über die Eulersche Identität dargestellt werden:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi).$$

# Rationale Parametrisierung

Auch ohne Rückgriff auf trigonometrische Funktionen lassen sich alle Punkte des Einheitskreises finden. Sei $t$ eine beliebige reelle Zahl. Ein Schnittpunkt der Geraden durch $(-1,0)$ und $(0,t)$ mit dem Einheitskreis ist trivialerweise $(-1,0)$. Der andere befindet sich bei $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$, und durchläuft, wenn $t$ ganz $\mathbb{R}$ durchläuft, den ganzen Kreis. Der Punkt $(-1,0)$ wird dabei allerdings nur nach dem Grenzübergang $t \to \pm\infty$ erreicht.

Diese Parametrisierung ist für alle Körper geeignet. Für rationale $t = p/q$ erhält man aus ihr durch elementare Umformungen pythagoräische Tripel $(q^2 - p^2, 2pq, q^2 + p^2)$.



Rationale Parametrisierung

# Andere Normen

Wird eine andere Norm als die euklidische Norm zur Abstandsmessung benutzt, so ist die Form des Einheitskreises im kartesischen Koordinatensystem eine andere. So ist zum Beispiel der Einheitskreis für die Maximumsnorm ein Quadrat mit den Ecken $(\pm 1, \pm 1)$ und der Einheitskreis für die Summennorm ein Quadrat mit den Ecken $(\pm 1, 0)$ und $(0, \pm 1)$.

# Weblinks

**Wikibooks: Trigonometrie (Schulmathematik)** – Lern- und Lehrmaterialien
**Commons: Unit circles** – Sammlung von Bildern, Videos und Audiodateien
**Wiktionary: Einheitskreis** – Bedeutungserklärungen, Wortherkunft, Synonyme, Übersetzungen

- Einführung Sinus und Kosinus am Einheitskreis (Video)