DOI:10.13255/j.cnki.jusst.2004.06.016
上 海 理 工 大 学 学 报
第26卷 第6期 J. University of Shanghai for Science and Technology Vol.26 No.6 2004

文章编号:1007-6735(2004)06-0561-04

遗传退火进化算法在背包问题中的应用

金慧敏, 马 良
(上海理工大学 管理学院,上海 200093)

摘要: 从增强算法收敛性和减少参数依赖性的角度出发,提出应用遗传退火进化算法求解背包问题.遗传退火进化算法结合了遗传算法和模拟退火算法的优点,并有效地克服了各自的弱点,使其在优化性能、优化效率和可靠性方面具有明显的优越性.阐明了用该算法求解背包问题的具体实现过程,并通过实际数值计算和结果比较表明,该算法优于遗传算法和模拟退火算法.

关键词: 背包问题; 遗传算法; 模拟退火算法; 遗传退火进化算法
中图分类号: O 22 **文献标识码:** A

Genetic annealing evolutionary algorithm applied to the knapsack problem

JIN Hui-min, MA Liang
(*College of Management, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai* 200093, *China*)

Abstract: From the viewpoint of intensifying convergence and reducing dependency of parameters, a genetic annealing evolutionary algorithm that can be applied for solving knapsack problem is proposed. The algorithm combines the advantages and avoids the disadvantages of genetic algorithm and simulated annealing algorithm. It has superiority in performance, efficiency and reliability. The detailed realization of the algorithm is illustrated. By series of numerical computation and comparison of the results, it can be found that the algorithm is better than the other two algorithms.

Key words: *knapsack problem*; *genetic algorithm*; *simulated annealing algorithm*; *genetic annealing evolutionary algorithm*

背包问题[1,2](Knapsack problem)是一个典型的NP完全问题,主要应用于管理中的资源分配、投资决策、装载问题的建模.其求解主要依靠一些启发式算法,如贪心算法;也可用全局优化方法,如遗传算法[3](Genetic Algorithm, GA)和模拟退火(Simulated Annealing, SA)算法[3]等.GA和SA算法在求解一些复杂优化问题中,显示了良好的求解特性.GA采用了生物进化论的思想,通过自然选择和适者生存的竞争策略来求解优化问题.虽然GA有较强的全局搜索性能,但它在实际应用中容易产生早熟收敛的问题,而且在进化后期搜索效率较低.SA算法起源于统计物理学方法,并首次被Kirkpatric等引入优化问题的求解.SA算法具有很好的局部搜索能力,但对参数的依赖性较强.遗传退火进化算法[4](Genetic Annealing Evolutionary Algorithm, GAEA)是将GA和SA算法相结合而构成的一种优化算法.GA的局部搜索能力较差,但把握搜索过程总体的能力较强;而SA算法搜索总体的能力较差,

收稿日期: 2004-02-06
作者简介: 金慧敏(1981-),女,硕士研究生.

但把握局部搜索的能力较强.因此,可利用 GAEA 处理背包问题.

1　背包问题描述

已知 n 个物件的重量及其价值分别为 w_j 和 c_j ($j=1,2,\cdots,n$),如何将它们装入总容量为 M 的背包,使得所选物品的总价值最大.变量

$$x_j=\begin{cases}0 & \text{不选择物品 } j \\ 1 & \text{选择物品 } j\end{cases}\quad (j=1,2,\cdots,n)$$

则该问题的模型可表示为

$$\max\quad f(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} g(X)=\sum_{j=1}^{n} w_j \cdot x_j - M \leqslant 0 \\ x_j \in \{0,1\} \quad (j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

可按如下3个步骤生成一个背包问题.

a. 50个系数 c_j, w_j 在区间(0,999)内随机产生;

b. M 的值按 $p\cdot\sum_{j=1}^{n} w_j$ 计算,其中 p 为区间[0.25,0.75]内的随机数;

c. 若所有 $w_j \leqslant M$ ($j=1,2,\cdots,50$)则结束操作;若存在 $w_j > M$,则返回到操作步骤a,b.

按以上步骤生成 2×51 的 $\boldsymbol{A}$ 矩阵,并用 MATLAB 实现.其中 $\boldsymbol{A}(1,1:50)$ 为价值系数 $R=[c_1, c_2,\cdots,c_{50}]$, $\boldsymbol{A}(2,1:50)$ 为重量系数 $Q=[w_1,w_2,\cdots,w_{50}]$,即 $c_j=\boldsymbol{A}(1,j)$, $w_j=\boldsymbol{A}(2,j)$. $\boldsymbol{A}(2,51)$ 为最大容量 M.

2　GA 及其实现

GA 是上世纪70年代初由 Holland 创建的一种概率搜索算法,它将问题的求解表示成"染色体"的适者生存过程,通过"染色体"群的一代代不断进化,包括复制、交叉和变异等操作,最终收敛到"最适应环境"的个体,从而求得问题的最优解或满意解.

背包问题的 GA 实现如下.

a. 初始化 GA 的控制参数:群体规模 $N_c=50$,选择概率 $P_c=0.08$,变异概率 $P_m=0.08$,遗传代数为500;

b. 随机产生初始种群 S,它是由0和1构成的 $N_c\times n$ 的矩阵;

c. 对现有群体实施如下操作:(a) 评价群体中每个个体的适应度函数值,并采用罚函数法计算,即

$$\mathrm{Val}(i)=\begin{cases} f(X) & \text{若 } X \text{ 可行} \\ -(f(X)+r\times g(X)) & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $\mathrm{Val}(i)$ 为第 i 个个体的适应度函数值, r 为罚系数,取0.1;(b) 实施选择复制操作,适应函数值大的个体的复制概率大;(c) 从现有解群中随机选出两个个体作为父代,对它们实施交叉操作;(d) 对交叉后的个体进行变异操作. 若达到遗传代数,算法结束,否则转c.

GA 通过选择复制和遗传因子的作用,使优化群体不断进化,最终收敛于最优状态.选择复制使适应度函数值大的个体有较大的复制概率,它能加快算法的收敛速度.交叉因子通过对两父代进行基因交换而搜索出更优的个体.变异操作能够给进化群体带来新的遗传基因,避免算法陷入局部极值点.

3　SA 算法及其实现

SA 算法是基于 Mente Carlo 迭代求解策略的一种随机寻优算法,其出发点是基于物理中固体物质的退火过程与一般组合优化问题之间的相似性.SA 算法在某一初温下,伴随温度参数的不断下降,结合概率突跳特性在解空间中随机寻找目标函数的全局最优解,即在局部优解中能概率跳出并最终趋于全局最优.背包问题的 SA 算法实现如下.

a. 初始化退火温度 t_0.

b. 随机产生初始种群 X.

c. 在温度 t_k 下执行如下操作:

(a) 在解 $N(X)\subseteq D$(D 为可行域)中产生新的可行解 X';随机选取物品 i,若 i 不在背包中,则将其装入背包,或在装入的同时从背包中随机取出另一物品 j;若 i 已经在背包中,则将其取出,并同时随机装入另一物品 j,即

$$x_i=1-x_i \quad \text{且(或)} \quad x_j=1-x_j \quad i\neq j$$

(b) 计算新解的评价函数 $f(X')$ 和原解的评价函数 $f(X)$ 的差值

$$\Delta f=\begin{cases} c_i & \text{将物品 } i \text{ 直接装入} \\ c_i-c_j & \text{将物品 } i \text{ 装入且 } j \text{ 取出} \\ c_j-c_i & \text{将物品 } i \text{ 取出且 } j \text{ 装入}\end{cases}$$

背包的重量差为

$$\Delta m=\begin{cases} w_i & \text{将物品 } i \text{ 直接装入} \\ w_i-w_j & \text{将物品 } i \text{ 装入且 } j \text{ 取出} \\ w_j-w_i & \text{将物品 } i \text{ 取出且 } j \text{ 装入}\end{cases}$$

其中 Δm 为当前背包重量 m 的增量.

(c) 接受准则为

$$p=\begin{cases}0 & 若\ m+\Delta m > M\\ 1 & 若\ m+\Delta m \leqslant M\ 且\ \Delta f > 0\\ \exp(\Delta f/t_k) & 否则\end{cases}$$

即依概率 $\min\{1, \exp(\Delta f/t_k)\}>$random 接收新解，random 是$[0,1)$间的随机数．重复 c 直至系统达到温度 t_k 下的平衡状态(实际上重复到预定的次数即可，此处设定为 $100n$ 次)．

d．按一定方式降温，本文采用 $t_k \leftarrow 0.87t_k$．

e．若满足终止条件 $t_k \geqslant t_f$(t_f 为终止温度，设为 0.1)，退火过程结束，否则转 c．

通过以上分析可知，在 SA 算法实现过程中，其退火温度 t_k 控制着求解过程向最小值的优化方向进行，同时又以概率 $\exp(\Delta f/t_k)$来接收劣质解，因此 SA 算法可跳出局部极小值点．只要初始温度足够高，退火过程足够慢，算法能收敛到全局最优解．

4　GAEA

4.1　GAEA 的构造出发点

4.1.1　优化机制的融合

理论上，GA 和 SA 算法均属基于概率分布机制的优化算法．不同的是，SA 算法通过赋予搜索过程一种时变且最终趋于零的概率突跳性，从而可有效避免陷入局部极小并最终趋于全局最优；GA 则通过概率意义下的基于“优胜劣汰”思想的群体遗传操作来实现优化．对选择优化机制上有如此差异的两种算法进行混合，有利于丰富优化过程中的搜索行为，增强全局和局部意义下的搜索能力和效率．

4.1.2　优化结构的互补

SA 算法采用串行优化结构，而 GA 采用群体并行搜索．两者相结合，能够使 SA 算法成为并行 SA 算法，提高其优化性能；同时 SA 算法作为一种自适应变概率的变异操作，增强和补充了 GA 进化能力．

4.1.3　优化操作的结合

SA 算法的状态产生和接受操作每一时刻仅保留一个解，缺乏冗余和历史搜索信息；而 GA 的复制操作能够在下一代中保留种群的优良个体，交叉操作能够使后代在一定程度上继承父代的优良模式，变异操作能够加强种群中个体的多样性．这些不同作用的优化操作相结合，丰富了优化过程中的领域搜索结构，增强了全空间的搜索能力．

4.1.4　优化行为互补

由于复制操作对当前种群外的解空间无搜索能力，种群中的每个个体分布“畸形”时交叉操作的进化能力有限，小概率变异操作很难增加种群的多样性．所以，若算法收敛准则设计不好，则 GA 经常会出现进化缓慢或“早熟”收敛的现象．另外，SA 算法的优化行为对退温历程具有很强的依赖性，而理论上的全局收敛对退温历程的限制条件很苛刻，因此 SA 算法优化时间性能较差．两种算法结合，SA 算法的两准则可控制算法收敛性以避免出现“早熟”收敛现象，并行化抽样过程可提高算法时间性能．

4.1.5　削弱参数选择的苛刻性

SA 算法和 GA 对参数有较强的依赖性，若选择不适，将严重影响优化性能．SA 算法的收敛条件导致参数选择较为苛刻，而 GA 的参数又没有明确的选择指导．GA 和 SA 算法结合，使算法各方面的搜索能力提高，因此对参数的选择不必过分严格．

4.2　GAEA 的特点

a．GAEA 是一个两层搜索结构．进程层次上，其在各温度下串行地依次进行 GA 和 SA 搜索．其中，SA 算法的初始解来自 GA 的进化结果；SA 算法经 Metropolis 抽样过程得到的解又成为 GA 进化的初始种群．空间层次上，GA 提供了并行搜索结构，使 SA 算法转化为并行 SA 算法．

b．GAEA 利用了不同的领域搜索结构．优化过程中，它包含了 GA 的复制、交叉和变异以及 SA 算法的状态产生函数．复制操作有利于产生优良模态的冗余信息，交叉操作有利于后代继承父代的优良模式，高温下的 SA 操作有利于优化过程中状态的全局大范围迁移，变异和低温下的 SA 操作有利于优化过程中状态的局部小范围趋化性移动，从而增强了算法在解空间中的搜索能力和效率．

c．GAEA 的搜索行为是可控的．控制初温，可控制算法的初始搜索行为；控制温度高低，可控制算法突跳能力的强弱，高温下的强突跳性有利于避免陷入局部极小，低温下的趋化性寻优有利于提高局部搜索能力；控制温度的下降速率，可控制突跳能力的下降幅度，影响搜索过程的平稳概率分布．这种可控性增强了克服 GA 易“早熟”收敛的能力．

d．GAEA 利用了双重准则．在设计算法时，抽样稳定准则可用以判定各温度下算法的搜索行为和性能，也是混合算法由 SA 算法切换到 GA 的条件；算法终止准则可用以判定算法优化性能的变化趋势和最终优化性能．两者结合可同时控制算法的优化性能和效率．

4.3 GAEA的实现

a. 给定算法参数：t_0、t_f、N_c、n、$\boldsymbol{A}$、P_c 和 P_m；

b. 初始化种群 S；

c. 在当前温度 t_k 下，执行如下操作.

(a) 评价当前种群的各个体，即计算适应度函数值 Val(i)；并令 $e(i,1:n)=s(i)$，$e(i,n+1)=$ Val(i)；(b) 执行GA的选择复制操作，适应度大的个体选择复制的概率大；(c) 执行GA的交叉操作，附带保优操作(即计算交叉后个体的适应度函数值 Val(i)，若 Val(i)$>e(i,n+1)$，则 $e(i,n+1)=$ Val(i))；(d) 执行GA的变异操作，附带保优操作，具体操作与(c)同；(e) 得到SA算法的初始种群 e，对种群中各个体进行SA算法搜索；(f) 由SA算法状态产生函数得到新个体 X'，方法同上文中的SA算法；(g) 依概率 $\min\{1,\exp(\Delta f/t_k)\}>$random 接收新个体；重复(f)、(g)直至系统达到温度 t_k 下的平衡状态(此处为循环到预定的次数 $100n$).

d. 按一定方式降温，本文采用 $t_k \leftarrow 0.87t_k$；

e. 若 $t_k>t_f$，退火过程结束，否则转 c.

GAEA结合了GA和SA算法的优点：在算法实现过程中GA利用SA算法得到的解作为初始种群，通过并行化遗传操作使种群得以进化；SA算法对GA得到的种群进一步优化，温度较高时表现出较强的概率突跳性，体现为对种群的“粗搜索”，温度较低时演化为趋化性局部搜索算法，体现为对种群的“细搜索”. 这种混合不仅是算法结构上的，而且是搜索机制和进化思想上的相互补充.

5 仿真研究

按前文所述产生一个 2×51 的 $\boldsymbol{A}$ 矩阵，即

$R=\{$72,490,651,833,883,489,359,337,267,441, 70,934,467,661,220,329,440,774,595,98,424, 37,807,320,501,309,834,851, 34,459,111, 253,159,858,793,145,651,856,400,285,405, 95,391,19,96,273,152,473,448,231 $\}$

$Q=\{$438,754,699,587,789,912,819,347,511, 287,541,784,676,198,572,914,988,4,355,569, 144,272,531,556,741,489,321, 84,194,483, 205,607,399,747,118,651,806, 9,607,121,370, 999,494,743,967,718,397,589,193,369$\}$

$M=\boldsymbol{A}(2,51)=11\ 258$

用GA和SA算法、GAEA在 $t_0=10,100$ 时对上述数据进行测试，其结果如表1所示.

表1 各种算法比较

Tab.1 Comparison of algorithms

算　法	最优个体	最优值
GA	101110000000111100110101010111110111011010000000111	14 865
SA($t_0=10$)	011111010101010001101010101101100110110110000000110	15 844
GAEA($t_0=10$)	011110010101110001101010101101000110110110100000110	16 102
SA($t_0=100$)	001110010101110001101010111111000110110110100000110	15 955
GAEA($t_0=100$)	011110010101110001101010101101000110110110100000110	16 102

在测试过程中，GA收敛速度最快，但从表1可知，其最优值最小，出现了所谓的“早熟”现象. SA算法在初温 $t_0=100$ 时比 $t_0=10$ 时最优值要大，确实了SA算法对参数的强依赖性. GAEA在初温 $t_0=100$ 和 $t_0=10$ 时，最优值相同，进一步表明GAEA对参数依赖性较小.

6 结束语

GAEA是基于GA和SA算法、但又优于两者的一种混合算法. 通过以上分析和对背包问题的应用可知，GAEA在优化性能(避免陷入局部极小的能力)和优化效率(解空间的搜索能力和范围)方面具有明显的优越性.

参考文献：

[1] 王小平，曹立明. 遗传算法——理论、应用与算法实现[M]. 西安：西安交通大学出版社，2002，136～140.

[2] 刘则毅，刘东毅，马逢时，等. 科学计算技术与Matlab[M]. 北京：科学出版社，2001，342～347.

[3] 吴志远，邵惠鹤，吴新余. 遗传退火进化算法[J]. 上海交通大学学报，1997，**31**(12)：69～71.

[4] 王凌. 智能优化算法[M]. 北京：清华大学出版社，2001，130～135.