

一种求解0-1背包问题的改进遗传算法

吕晓峰¹, 张勇亮², 马 羚²

LV Xiaofeng¹, ZHANG Yongliang², MA Ling²

1. 海军航空工程学院 兵器科学与技术系, 山东 烟台 264001

2. 海军航空工程学院 研究生管理大队, 山东 烟台 264001

1. Department of Armament Science and Technology, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai, Shandong 264001, China

2. Brigade of Graduate Student, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai, Shandong 264001, China

LV Xiaofeng, ZHANG Yongliang, MA Ling. Improved genetic algorithm to 0-1 knapsack problem. Computer Engineering and Applications, 2011, 47(34): 44-46.

Abstract: An improved Genetic Algorithm(GA) is proposed to solve 0-1 Knapsack Problem(KP) considering the deficiency of the Simple GA(SGA) that being easy to "precocity". A new way to decode is designed to ensure solutions workable according to the way of dual-structure coding, and to revise individuals without corresponding solutions in the population at the same time. And SGA is improved by the Simulated Annealing(SA) algorithm and improved elite selection operator. The advantage of the improved GA in the evolution efficiency and the ability to search the best solution is proved by the simulation results.

Key words: Genetic Algorithm(GA); Knapsack Problem(KP); decode way; Simulated Annealing(SA); elite selection

摘 要: 针对传统遗传算法(SGA)容易“早熟”的不足, 提出一种求解0-1背包问题(KP)的改进遗传算法。借鉴二重结构编码的解码处理方法设计了一种新解码方法, 在保证解可行性的同时修正种群中无对应可行解的个体; 采用模拟退火算法和改进的精英选择算子改进SGA。实例仿真结果验证了改进遗传算法在进化效率和最优解搜索能力上的优越性。

关键词: 遗传算法; 背包问题; 解码; 模拟退火; 精英选择

DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.2011.34.011 文章编号: 1002-8331(2011)34-0044-03 文献标识码: A 中图分类号: TP301.6

1 引言

背包问题(KP)是一个经典的组合优化问题, 属于NP-hard 难题^[1-2], 在预算控制、项目选择、材料切割和货物装载等领域有着广泛的应用。文献[3]对背包问题的一般性质和解的性质进行了研究。总体而言, 求解背包问题的方法可分为精确算法(如分支界限法、动态规划、回溯法等)和近似算法(如贪婪算法、蚁群算法、模拟退火法、遗传算法等)两大类。精确算法的优点是当 n 较小时一定可以求得最优解, 缺点是当 n 较大时因计算量太大而无法实现; 近似算法的优点是使计算复杂性大大降低, 其缺点是找到最优解的质量降低^[4]。文献[5-8]对分支界限法、动态规划、贪婪算法、递归、优化策略、蚁群算法、模拟退火法和遗传算法的基本思想、求解背包问题的操作步骤以及算法本身的优缺点等都进行了详细地介绍。另外, 文献[9]提出一种新的启发式求解算法——拟人算法来求解多维0-1背包问题, 通过对55个测试算例进行实算测试验证了该算法求解此问题的有效性; 文献[10]提出一种基于种群的全局搜索和基于个体的局部启发式搜索的结合体的文化基因算法, 在求解多约束0-1背包问题中的应用中较标准遗传算法搜索性能更优; 文献[11]提出一种混合二进制差异演化算法来求解0-1背包问题, 成功解决了差异演化算法直接求解离散优化问

题时的计算不封闭问题; 文献[12]提出运用改进的微粒群算法求解0-1背包问题, 并总结了相关参数选定、设计及实现的方法; 文献[13]提出了一种求解组合优化问题的改进型量子进化算法求解多维0-1背包问题, 提高了算法的寻优能力和收敛速度。

近似算法中的遗传算法(GA)以其高度的并行处理能力、强鲁棒性和全局搜索能力在求解0-1背包问题上已经显示出巨大优势。近年来, 利用遗传算法求解背包问题的研究相当活跃, 并取得了丰硕的成果。文献[4]提出了一种基于贪心算法的混合遗传算法; 文献[14]介绍了一种改进的遗传算法, 通过染色体编码方式的多样性及其旋转变换的进化方式, 提高了算法的全局搜索能力和收敛速度, 并在求解0-1背包问题中得到了验证; 文献[15]基于合作式共同进化计算模型, 提出了一种求解0-1背包问题的合作式共同进化遗传算法, 其收敛速度和求解问题的质量均优于传统单种群遗传算法; 文献[16]提出了一种基于随机化均匀设计的理论和方法随机化均匀设计遗传算法; 文献[17]提出两种求解背包问题的遗传算法: 一种是基于罚函数的基本遗传算法(SGA), 一种是基于二重结构编码、部分匹配交叉和逆位变异的改进遗传算法, 其中改进遗传算法较SGA优越; 文献[18-19]分别运用模拟退火和遗传算法相结合的方法求解0-1背包问题, 克服了各自的弱点, 提高

了算法的优化性能、优化效率和可靠性;另外文献[20]提出了精英选择算子对SGA进行改进的方法。

上述算法在进化效率或最优解搜索能力上都存在一些不足,因此,受二重结构编码的解码方法和可行解变换法思想的启发,同时借鉴文献[18-20]中SGA的改进方法,本文提出了一种新的改进遗传算法;并同文献[17]中的改进遗传算法进行比较,验证了其在解决0-1背包问题上的优越性。

2 背包问题

文献[17]中对背包问题的描述如下:

假设有 n 个物品,其重量用 $a_i(i=1, 2, \dots, n)$ 表示,价值为 c_i ,背包的最大容纳重量为 b 。如果物品 i 被选入背包时,定义变量 $x_i=1$,否则 $x_i=0$ 。考虑 n 个物品的选择与否,背包内物品的总重量为 $\sum_{i=1}^n a_i x_i$,物品的价值总量为 $\sum_{i=1}^n c_i x_i$,如何决定变量 x_i 的值使背包内物品价值总量为最大。这个问题解的总组合数有 2^n 个,其数学模型表示如下:

$$\begin{cases} \text{maximize} & \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \text{subject to} & \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b \end{cases} \quad (1)$$

3 改进遗传算法设计

3.1 编码和解码方法

(1)编码采用常见的二进制编码^[21]。

(2)解码时要考虑约束条件。借鉴二重结构编码^[17]的解码处理方法,按照从左到右的顺序处理所有物品,依次计算 $\text{sum}(i) = \sum_{j=1}^i a_j x_j (i=1, 2, \dots, n)$,若处理至第 i 个物品时有 $\text{sum}(i) > b$,即不满足约束条件,则令 $x_i=0$,直到处理完所有物品。其步骤如下:

① $i=1$, $\text{sum}(0)=0$;

②若 $x_i=0$,执行第④步,否则,执行第③步;

③若 $\text{sum}(i-1) + a_i \leq b$,则执行第④步,否则,令 $x_i=0$,执行第④步;

④ $i=i+1$,若 $i \leq n$,返回第②步,否则终止。

这种解码方法是多约束条件处理方法中可行解变换法^[21]的一种延伸,它对种群中无对应可行解(即不满足约束条件)的个体进行修正,修正后保证所有个体都对应有可行解,提高了算法的进化效率。

3.2 适应度函数

背包问题是一类求目标函数最大值的优化问题,且目标函数非负,则适应度函数可直接设为:

$$F(x) = \sum_{j=1}^n a_j x_j \quad (2)$$

3.3 选择算子

SGA通常采用比例选择算子。比例选择算子虽然对适应度高的个体具有相对高的选择概率,但是并不一定能够选择到最优秀个体并将其遗传进入下一代种群。同时交叉和变异操作在有可能创造优秀个体的同时也会将父代种群中优秀个体的遗传基因破坏,这将减缓算法的收敛速度、降低进化效率

并影响最优解搜索。因此,本文采用精英选择算子^[20]弥补SGA在选择运算中的不足。

精英选择算子^[20]是指将随机配对的父代个体单独进行交叉变异后,与形成的子代个体放在一起组成“家庭”,分别从每个“家庭”中选择最优的两个个体进入下一代种群。

这种选择方法虽然保留了每代的最优个体,提高了算法的收敛速度,但是由于每个“家庭”中最优的两个个体间的差异性较小,因此会降低种群的多样性,容易陷于局部最优解。因此,本文对其作了进一步改进,将“选取最优的两个个体进入下一代种群”改进为“选取‘家庭’中适应度最好和其他任一个个体进入下一代种群”,既保留了最优个体又保持了种群的多样性,有利于全局最优解的寻找。其具体步骤为:

(1)将第 t 代种群中的个体随机两两配对;

(2)每对个体分别交叉并变异 N 次,共产生 $2N$ 个子代个体;

(3)每对父代个体与各自产生的子代个体组成一个拥有 $(2+2N)$ 个个体的“家庭”,从中选取适应度最好和其他任一个个体进入第 $t+1$ 代种群,产生第 $t+1$ 代种群。

3.4 交叉和变异算子

由于采用二进制编码,因此本文采用均匀交叉算子^[21]和均匀变异算子^[21]。

3.5 模拟退火过程

模拟退火^[18-19]是基于Metropolis判别准则的选择策略,其在接受优质解的同时,有限度地接受劣质解,因此能够有效跳出局部最优解。其具体步骤为:

(1)在温度 T 内迭代 $\text{num}(\text{num} \in N^+)$ 次。

(2)在温度为 T 进行第 $ni(ni=1, 2, \dots, \text{num})$ 次迭代时,对于前半部分染色体,将其第1到 ni 位的基因全部变为0,第 $\text{chromlength}-ni$ (chromlength 为染色体长度)到 chromlength 位基因全部变为1;对于后半部分染色体,将其第1到 ni 位的基因全部变为1,第 $\text{chromlength}-ni$ (chromlength 为染色体长度)到 chromlength 位基因全部变为0,以此提高模拟退火算法的局部搜索能力。

(3)令函数差值 $\Delta f=f(i)-f(j)$ 。

(4)若 $\Delta f \leq 0$,则把个体 j 复制到下一代群体。

(5)否则生成接受概率 $p=\exp(\Delta f/T)$ (其中, $T=k*T_0$, k 为降温系数, T_0 为自定义的初始温度值,另外设终止温度为 T_f)和 $[0, 1]$ 之间的随机数 rand 。若 $\text{rand} < p$,则同样把个体 j 复制到下一代群体,否则,把个体 i 复制到下一代群体。

(6)为了避免最优个体进化的倒退,若退火操作后种群中的最优个体对应的解小于其前代最优解,则保留前代最优个体。改进遗传算法的基本流程如图1所示。

4 实例仿真

物品的数量 n 、背包的最大承重量 b 、重量 A 和价值 C 分别为:

$$n=50, b=1000$$

$$A=\{a_i\}=\{80, 82, 85, 70, 72, 70, 82, 75, 78, 45, 49, 76, 45, 35, 94, 49, 76, 79, 84, 74, 76, 63, 35, 26, 52, 12, 56, 78, 16, 52, 16, 42, 18, 46, 39, 80, 41, 41, 16, 35, 70, 72, 70, 66, 50, 55, 25, 50, 55, 40\}$$

$$C=\{c_i\}=\{200, 208, 198, 192, 180, 180, 168, 176, 182,$$

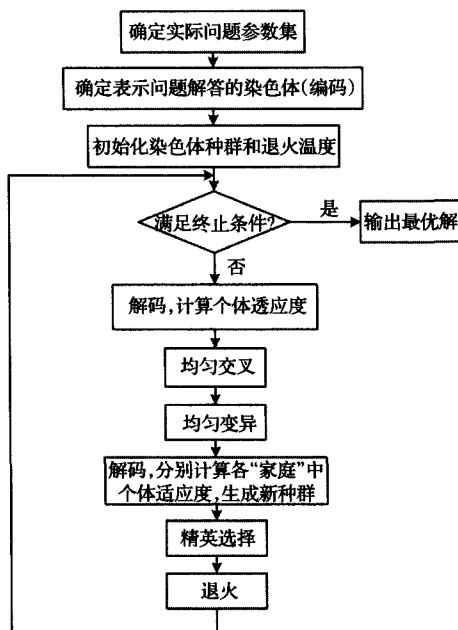


图1 改进遗传算法的基本流程图

168, 187, 138, 184, 154, 168, 175, 198, 184, 158, 148, 174, 135, 126, 156, 123, 145, 164, 145, 134, 164, 134, 174, 102, 149, 134, 156, 172, 164, 101, 154, 192, 180, 180, 165, 162, 160, 158, 155, 130, 125}

实验环境: CPU AMD Athlon 64 X2 Dual Core Processor 4400+ 2.30 GHz, 内存2 GB, Windows XP, 开发程序为Matlab 7.8。

参数设置: 本文算法的种群规模 $popsiz = 200$, 交叉概率 $p_c = 0.8$, 变异概率 $p_m = 0.03$, 精英选择算子中的 $N = 14$, 染色体长度 $chromlength = 50$, 初始温度 $T_0 = 10$, 降温系数 $k = 0.8$, 退火终止温度 $T_f = 0.0015$, 每个温度内的迭代次数 $num = 25$, 退火次数 $n = 40$; 文献[17]算法 $popsiz = 200$, $p_c = 0.6$, $p_m = 0.1$, 遗传代数 $G = 300$ 。以上参数都是经过实验得到的。

本文算法与文献[17]算法相比较, 运行结果如表1所示。

表1 仿真实验结果

方法	运行次数	最优解	最差解	平均值	达到最优解的频率/(%)	物品平均总重量
本文算法	20	3 966	3 936	3 964.5	95	1 000
文献[17]算法	20	3 833	3 573	3 676.8	5	994.9

本文算法和文献[17]算法的进化过程分别如图2和图3所示。

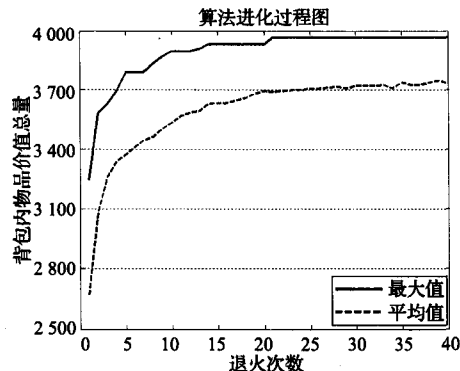


图2 本文算法的进化过程图

通过运行结果和进化过程的对比可以看出, 在解决0-1背包问题上, 本文算法的进化效率高, 最优解搜索能力强; 文献[17]算法局部搜索能力差且不能得到全局最优解。

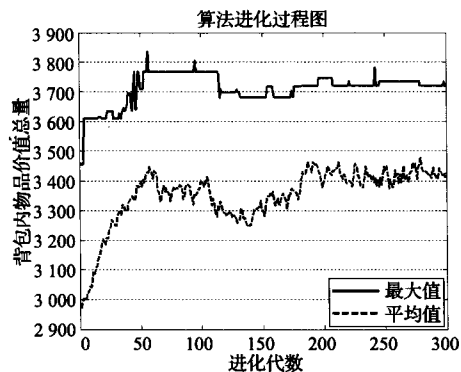


图3 文献[17]算法的进化过程图

通过以上本文改进遗传算法运算, 得到此0-1背包问题的最优解的编码形式为:

```

0→0→0→0→0→0→0→0→0→0→1→1→0→1→1→
0→1→0→0→0→0→0→0→0→1→1→0→1→1→0→
1→1→1→1→1→1→1→0→1→1→1→1→1→0→0→
0→1→1→1→1→1→1→0→1
  
```

本文算法最优解中背包内的物品价值总量为3 966, 较文献[17]算法得到的3 833增加了133, 提高约4.69%; 其历代最优解中物品价值总量的平均值为3 964.5, 较文献[17]算法得到的3 676.8增加287.7, 提高约7.82%; 本文算法中最优解的物品平均总重量为1 000, 较文献[17]算法中得到的994.9增加5.1, 提高约0.51%。

总之, 在解决此类0-1背包问题上, 本文算法在进化效率和最优解搜索能力上较文献[17]算法更为优越。同时与文献[19]算法相比, 本文算法的迭代次数为 $40 \times (25 + 14) = 1 560$, 文献[19]算法的迭代次数为 $26 \times 100 = 2 600$ (其中26为退火次数), 因此本文算法的进化效率更高。

5 结论

(1) 采用新解码方法并经过模拟退火算法和改进的精英选择算子改进后的遗传算法, 克服了传统遗传算法容易“早熟”的不足;

(2) 在解决0-1背包问题中, 本文算法在进化效率和最优解搜索能力上具有优越性;

(3) 本文算法可推广到解决作业调度等组合优化问题的遗传算法的改进中。

参考文献:

- [1] Han K H, Kim J H. Genetic quantum algorithm and its application to combinatorial optimization problem[C]//Proceedings of the 2000 Congress on Evolutionary Computation, Piscataway, 2000, 2: 1354-1360.
- [2] Han K H, Park K H, Lee C H, et al. Parallel quantum-inspired genetic algorithm for combinatorial optimization problem[C]//Proceedings of the 2001 IEEE Congress on Evolutionary Computation, 2001: 1422-1429.
- [3] 梁开福. 背包问题的性质研究[J]. 数学理论与应用, 2000, 20(2): 23-27.
- [4] 宋海生. 求解多限制0-1背包问题的混合遗传算法[J]. 计算机工程, 2009, 35(13): 4-10.

(下转63页)

选取搜索到最佳位置 P_g 的那个粒子(设为最优粒子)为研究对象,此时有: $P_i = P_g$ 。

设最优粒子从最佳位置 P_g 的一端飞行到另一端的速度为 $V(0)$, $V(0)$ 远小于 $v[R_g]$ 。

由文献[8]可知,当取 $c_1 + c_2 = 2(\omega + 1)$, 且 $r_1 = r_2 = 1$ 时, PSO算法经过一定迭代次数后会进入临界稳定状态,这时有: $P_i = P_g$, $V(t+1) = -V(t)$, 且

$$c_1(P_i - X(t)) + c_2(P_g - X(t)) = (-1 - \omega)V(t) \quad (10)$$

显然 R_g 内的最优粒子有: $r_1 \in (0, 1)$, $r_2 \in (0, 1)$, $c_1 + c_2 \leq 2(\omega + 1)$, 在以后的迭代过程中,根据公式(10)有

$$(-1 - \omega)V(t) < c_1 r_1 (P_i - X(t)) + c_2 r_2 (P_g - X(t)) \leq 0 \quad (11)$$

由收敛的PSO算法的性质可知, $V(t)$ 是依概率1下降趋于0的,即便有小概率事件使得 $|V(t+1)| > |V(t)|$ 。根据公式(11)可知,在以后的迭代中 $|V(t)|$ 也不会大于 $|V(0)|$ 。由此可得,在 R_g 内,当PSO算法的粒子速度 V 远小于 $v[R_g]$ 时,粒子在后期的迭代过程中不可能跳出 R_g ,也就不可能进入其他更好的局部极值领域,更不可能进入最优区域 $R_{e,M}$,因此无法搜索到最优解。

综上所述,PSO算法不满足条件2,不能保证收敛到全局最优解。

证毕。

定理2指出了收敛的PSO是不满足条件2的,不能以概率1收敛于最优解,即当出现定理2所述的情况时,PSO算法是不能收敛于最优解的,但并不是意味着PSO算法在其他情况下都不能收敛于最优解。

5 结论

PSO算法是随机搜索算法,其粒子速度 $V(t)$,随着 t 的增加,其 $V(t)$ 依概率1递减,当粒子还没有搜索到最优区域时,粒子的速度可能就变得很小甚至趋于0,因此粒子已经失去了动力,不可能跳出局部极值区域,寻找到更优的解。也就是说粒子在搜索空间 S 中飞行,不可能把搜索空间 S 的每一个角落都搜索到。

参考文献:

- [1] Kennedy J, Eberhart R C. Particle swarm optimization[C]// Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks, Perth Australia, 1995: 1942-1948.
- [2] Solis F, Wets R. Minimization by random search techniques[J]. Mathematics of Operations Research, 1981, 6: 19-30.
- [3] 曾建潮, 崔志. 一种保证全局收敛的PSO算法[J]. 计算机研究与发展, 2004, 41(8): 1333-1338.
- [4] 郝武伟, 曾建潮. 基于聚类分析的随机微粒群算法[J]. 计算机工程与应用, 2010, 46(8): 40-44.
- [5] 张勇, 巩敦卫, 张婉秋. 一种基于单纯形法的改进微粒群优化算法及其收敛性分析[J]. 自动化学报, 2009, 35(3): 289-298.
- [6] 谢铮桂, 钟少丹, 韦玉科. 改进的粒子群优化算法及收敛性分析[J]. 计算机工程与应用, 2011, 47(1): 46-49.
- [7] 李宁. 粒子群优化算法的理论分析与应用研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2006.
- [8] 李宁, 孙德宝, 邹彤, 等. 基于差分方程的PSO算法粒子运动轨迹分析[J]. 计算机学报, 2006, 29(11): 2052-2061.

(上接46页)

- [5] 田烽男, 王于. 求解0-1背包问题算法综述[J]. 软件导刊, 2009, 8(1): 59-61.
- [6] 周斌, 张莹, 黄志军. 0-1背包问题算法分析与研究[J]. 研究与开发, 2009, 309: 35-39.
- [7] 秦玲. 蚁群算法的改进与应用[D]. 江苏扬州: 扬州大学, 2004.
- [8] 金慧敏, 马良. 遗传退火进化算法在背包问题中的应用[J]. 上海理工大学学报, 2004, 26(6): 561-564.
- [9] 陈端兵, 黄文奇. 一种求解多维0-1背包问题的拟人算法[J]. 计算机工程与应用, 2006, 42(2): 17-19.
- [10] 刘漫丹. 文化基因算法在多约束背包问题中的应用[J]. 计算技术与自动化, 2007, 26(4): 61-67.
- [11] 邓长寿. 混合二进制差异演化算法解0-1背包问题[J]. 计算机工程与设计, 2010, 31(8): 1795-1798.
- [12] 李昶. 微粒群算法求解背包问题综述[J]. 电脑知识与技术, 2007, 19: 194-195.
- [13] 张宗飞. 求解组合优化问题的改进型量子进化算法[J]. 计算机工

程与设计, 2010, 31(17): 3891-3894.

- [14] 苑立伟. 改进遗传算法及其在背包问题中的应用[J]. 系统工程与电子技术, 2005, 27(4): 718-747.
- [15] 刘娜, 钟求喜. 求解0-1背包问题的共同进化遗传算法[J]. 计算机科学, 2001, 28(9): 102-105.
- [16] 周本达, 陈明华, 任哲. 一种求解0-1背包问题的新遗传算法[J]. 计算机工程与应用, 2009, 45(30): 45-52.
- [17] 王小平, 曹立明. 遗传算法理论应用与软件实现[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2006: 136-140.
- [18] 金慧敏, 马良. 遗传退火进化算法在背包问题中的应用[J]. 上海理工大学学报, 2004, 26(6): 561-564.
- [19] 张盛意. 基于改进模拟退火的遗传算法求解0-1背包问题[J]. 微电子学与计算机, 2011, 28(2): 61-64.
- [20] 江建. 精英自适应混合遗传算法及其实现[J]. 计算机工程与应用, 2009, 45(27): 34-35.
- [21] 周明, 孙树栋. 遗传算法原理及应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999.