Wiskunde – schema discrete wiskunde – Abdellah

(1) ALGEMENE TELPROBLEMEN	
OF-probleem	Probleem bestaat uit mogelijkheid 1 OF mogelijkheid 2 = beide mogelijkheden OPTELLEN
EN-probleem	Probleem bestaat uit mogelijkheid 1 EN mogelijkheid 2 = beide mogelijkheden VERMENIGVULDIGEN
Ladenprincipe van Dirichlet	Definitie: Als n objecten worden verdeeld in m verzamelingen, waarbij n > m, dan bevat minstens één van die verzamelingen minstens twéé elementen.
	Voorbeeld: Neem aan dat er in België 20 001 jongeren (= n) zijn en er 20 000 scholen (= m) bestaan, omdat n > m zijn we er zeker van dat minstens twéé jongeren naar dezelfde school gaan.
De faculteit	Definitie: $5! = 5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1$ --> Let op: $0! = 1! = 1$ Rekenregel: $5! = 5\,.\,4!$ (handig om te vereenvoudigen)
(2) COMBINATIELEER	
Definitie van n en p	Definities: *n = het aantal mogelijkheden dat je hebt = het aantal dingen waaruit je kan kiezen. → *Uit je n mogelijkheden vraag je af of je mag herhalen. Mag ik uit die n mogelijkheden één ding 2x kiezen?* *p = het aantal dingen dat je hebt = het aantal keren dat je uit die n mogelijkheden moet kiezen. → *Uit je p dingen vraag je af of de volgorde van belang is. Als ik mijn dingen uit die n mogelijkheden in een andere volgorde kies, heb ik dan iets anders?*
	Voorbeeld: VRAAG: Een vlag moet bestaan uit drie verticale banen van verschillend gekleurde stof. Er zijn zes kleuren beschikbaar. Hoeveel vlaggen kan je samenstellen? → n = het aantal mogelijkheden dat je hebt = zes kleuren beschikbaar. --> *Herhaling mogelijk? Mag ik 2 dezelfde kleuren gebruiken? Neen, de vlag moet bestaan uit VERSCHILLENDE kleuren.* → p = het aantal keren dat je moet kiezen = drie verschillende kleuren. --> *Volgorde van belang? Maakt het uit als ik de drie kleuren verwissel? Ja, omdat je bij een andere kleurencombinatie een andere vlag hebt!*
Schema telproblemen	(zie schema hieronder)

		HERHALING MOGELIJK?	
		JA	NEE
VOLGORDE VAN BELANG?	JA	$W_n^p = n^p$ $P_n^{p,q,r\ldots} = \frac{n!}{p!\,q!\,r!\ldots!}$ (herhalingen voorgeschrev.)	$V_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ (n ≠ p) $P_n = n!$ (n = p)
	NEE	$D_n^p = C_{n+p-1}^p$	$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$

(3) BINOMIUM VAN NEWTON	
Definities en voorbeeld	$(x+a)^3 = 1x^3 + 3xa^2 + 3xa^2 + 1a^3$ --> Rechterlid = *binomiale ontwikkeling van het linkerlid* --> <u>Binomiaalgetallen</u> = *Coëfficiënten van het rechterlid (1, 3, 3, 1)*
Formule voor het binomium van Newton	$\boldsymbol{(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} c_n^k \, x^{n-k} \, a^k}$ --> c is natuurlijk een combinatie: $c_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ --> Je begint voor k = 0, je telt steeds één bij k op. --> n = je gegeven macht = constant tijdens het binomium van Newton.
	VOORBEELD: $(2x+y)^4 = c_4^0(2x)^{4-0}\,y^0 + c_4^1\,(2x)^{4-1}y^1 + c_4^2\,(2x)^{4-2}y^2 + c_4^3(2x)^{4-3}y^3 + c_4^4(2x)^{4-4}y^4$ $= 1\,.\,16x^4 + 4\,.\,8x^3y + 6\,.\,4x^2y^2 + 4\,.\,4xy^3 + 1\,.\,y^4$ $= 16x^4 + 32x^3y + 24x^2y + 8xy^3 + y^4$ Je begint vanaf k = 0, telt steeds één bij k op en je hebt steeds n = 4.
Eigenschappen van binomiaalgetallen	**EIGENSCHAP 1: Binomiaalgetallen staan in de driehoek van Pascal symmetrisch t.o.v. elkaar.** $C_n^p = C_n^{n-p}$ *(om dit te bewijzen start je vanuit het rechterlid)* **EIGENSCHAP 2: Elk binomiaalgetal in de driehoek van Pascal is de som van de 2 getallen daarboven.** $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$ *(om dit te bewijzen start je vanuit het rechterlid)*
Driehoek van Pascal	Aan de hand van de eigenschappen van binomiaalgetallen moet je de driehoek van Pascal kunnen opstellen. $(x + a)^0$ I 1 $(x + a)^1$ I 1 1 $(x + a)^2$ I 1 2 1 $(x + a)^3$ I 1 3 3 1 $(x + a)^4$ I 1 4 6 4 1 $(x + a)^5$ I 1 5 10 10 5 1 $(x + a)^6$ I 1 6 15 20 15 6 1 $(x + a)^7$ I 1 7 21 35 35 21 7 1 $(x + a)^8$ I 1 8 28 56 70 56 28 8 1 $(x + a)^n$ I …………………………………………………………………………… De driehoek van Pascal is niets meer dan een gevolg van het binomium van Newton (zie formule). Je ziet hier perfect de 2 eigenschappen van binomiaalgetallen terug: symmetrie en de som van 2 vorige getallen.