Inhoud

1) Discrete kansvariabelen

1.0) Kansexperiment

*Een kansexperiment is een experiment waarvan de uitkomst niet op voorhand te bepalen valt.
*In deze samenvatting werken we met een fictief kansexperiment: We werpen een dobbelsteen…
--> Als je 1 gooit, krijg je 1 euro (= +1 euro)
--> Als je 6 gooit, moet je 1 euro weggeven (= -1 euro)
--> Als je 2, 3, 4 of 5 gooit krijg je 0 euro.

1.1) Terminologie

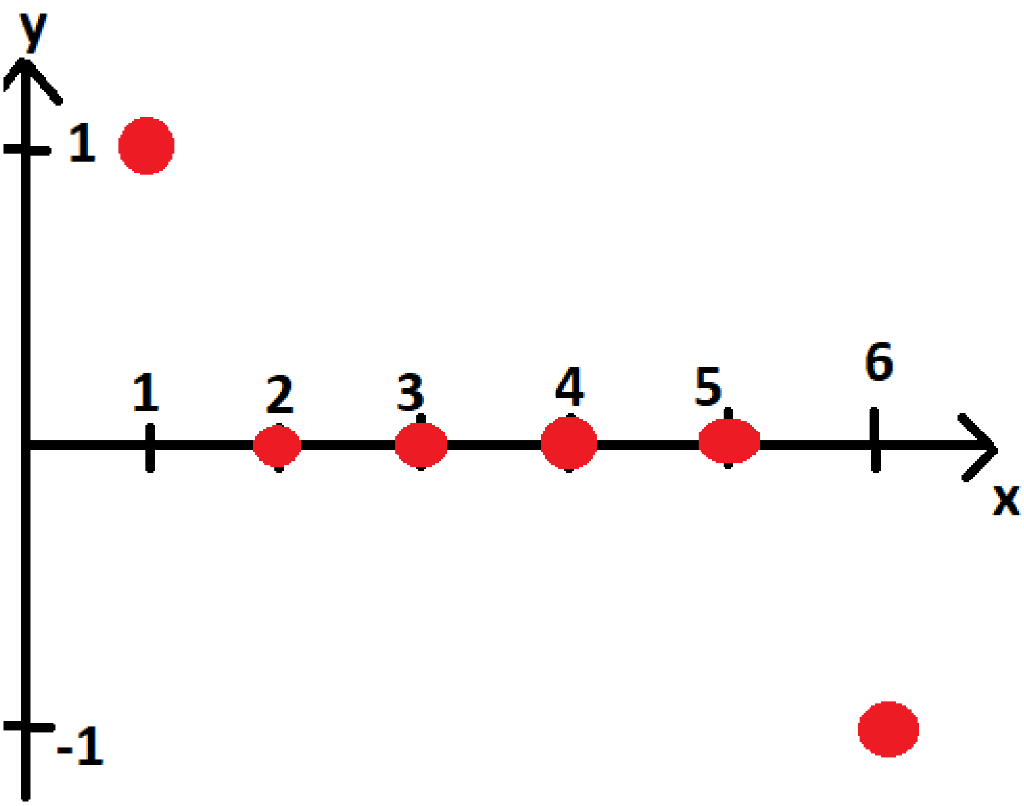
1.1.1) Kansvariabele (= toevalsvariabele)

*Kansvariabele X = functie die aan elke uitkomst in U een reëel getal koppelt.
--> Voor ons kansexperiment: X(1) = 1 (als je 1 gooit, krijg je 1 euro)
X(6) = -1 (als je 6 gooit, moet je 1 euro afgeven of krijg je -1 euro)
X(2) = 0
X(3) = 0
X(4) = 0
X(5) = 0

Als je 2, 3, 4 of 5 gooit krijg je 0 euro.

➔ Je ziet dus goed dat de kansvariabele X een functie is die aan elke uitkomst in U (1, 2, 3, 4, 5 of 6 gooien) een reëel getal toekent (nl. wat geld winnen en/of wat geld verliezen).

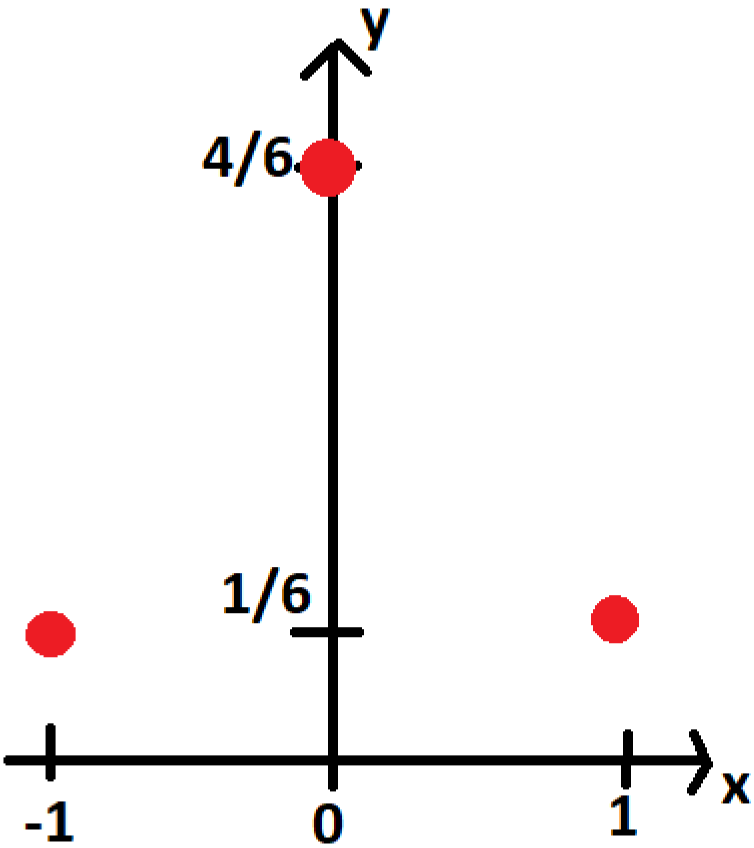
*Grafische voorstelling voor dit kansexperiment:



1.1.2) Kanfunctie f

*Kansfunctie f = functie die aan elke uitkomst in U een kans koppelt.
--> Voor ons kansexperiment:
U = {-1, 0, 1} *(we kunnen immers 1 euro verliezen, niks krijgen of 1 euro winnen)*
--> f(-1) = 1/6 (we hebben 1/6 kans om 6 te gooien en dus -1 euro te winnen)
--> f(1) = 1/6 (we hebben 1/6 kans om 1 te gooien en dus 1 euro te winnen)
--> f(0) = 4/6 (we hebben 4/6 kans om 2, 3, 4 of 5 te gooien en niks te winnen)

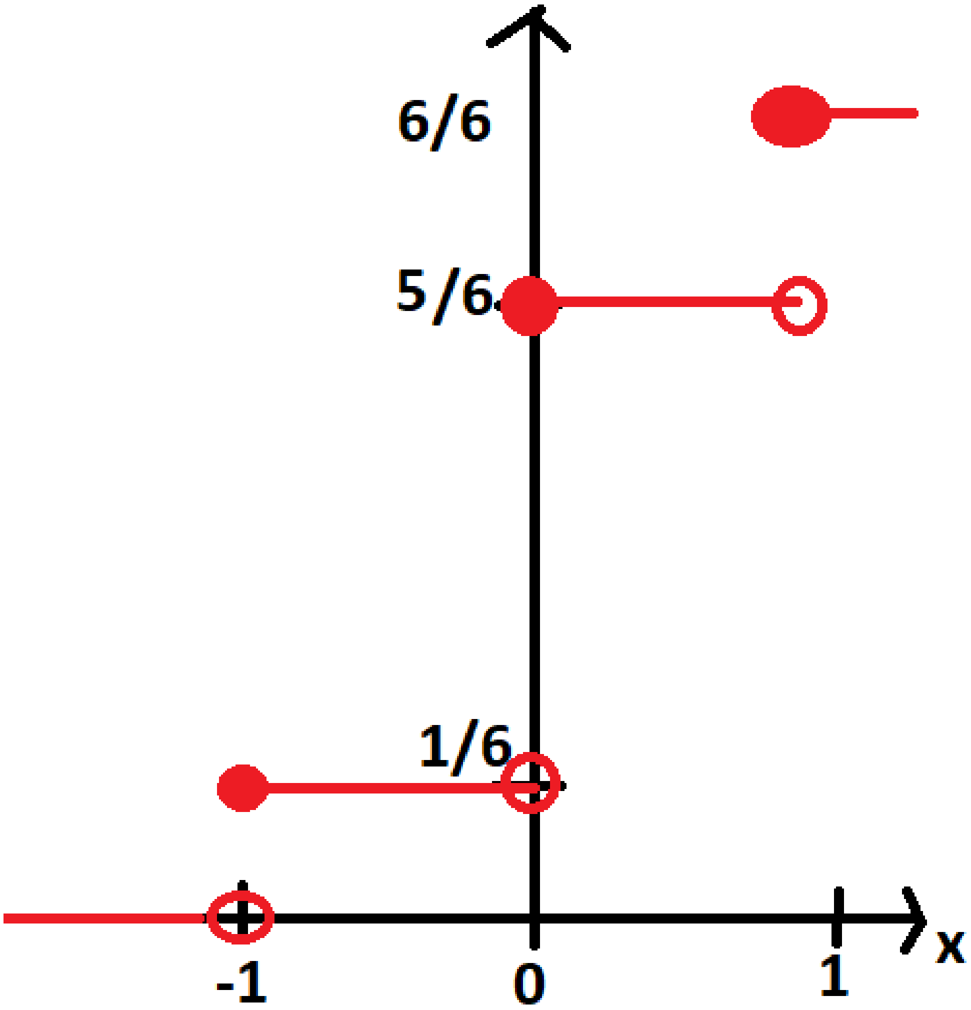
*Grafische voorstelling:



1.1.3) Verdelingsfunctie F

*Verdelingsfunctie F: functie die aan elke uitkomst in U van het kansexperiment een kans koppelt en haar voorgaande kans daarbij optelt.
→ De verdelingsfunctie is dus m.a.w. de kans dat die gebeurtenis of MINDER optreedt.
--> Voor ons experiment: F(-1) = 1/6
(je hebt immers 1/6 kans om 6 te gooien en dus 1 euro te verliezen)
F(0) = 5/6
(je hebt immers 5/6 kans om 0 euro OF minder te winnen (dus: 1 euro verliezen!))
F(1) = 6/6
(je hebt immers 6/6 kans om 1 euro OF minder te winnen)

*Grafische voorstelling:



1.1.4) Verwachtingswaarde E(x)

*Verwachtingswaarde E(X) = gemiddelde uitkomst die je mag verwachten van het kansexperiment.

--> E(x) = μ = uitkomst . kans + uitkomst(2) . kans(2) + …

→ Voor ons kansexperiment:

$E(X) = 1\,.\frac{1}{6} + (-1).\frac{1}{6} + 0\,.\frac{4}{6} = 0$

--> Je hebt immers 1/6 kans dat je 1 euro wint, 1/6 kans dat je 1 euro verliest en 4/6 kans dat je niks wint.

Interpretatie: gemiddeld win je 0 euro van ons kansspel.

Als E(X) = 0 spreken we van een **eerlijk** spel. Een kansspel is eerlijk als niemand gemiddeld gezien méér kan winnen t.o.v. de andere.

1.1.5) Spreidingsmaat 1: Variantie Var(X)

*De variantie Var(X) is de kwadratische afwijking t.o.v. het gemiddelde (= de verwachtingswaarde).

--> $Var(X) = (uitkomst - E(x))^2 . kans\ op\ uitkomst\ + \cdots$

→ Je doet dus de uitkomst (bv. 1 euro winnen) min de verwachtingswaarde, dat kwadrateer je en dan doe je dat maal de kans op elke uitkomst. Dit doe je voor elke uitkomst.

*Voor ons kansspel wordt dit dus:

$$(1-0)^2.\frac{1}{6}+(-1-0)^2.\frac{1}{6}+(0-0)^2.\frac{4}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}$$

Interpretatie: De variantie is een **spreidingsmaat**, spreidingsmaten vertellen ons hoe de uitkomsten t.o.v. het gemiddelde gespreid zitten. In dit geval is onze variantie 2/6, je hebt immers 1/6 kans om 1 euro te winnen maar ook 1/6 kans om een euro te verliezen.

1.1.6) Spreidingsmaat 2: standaardafwijking σ

*De standaardafwijking is de positieve vierkantswortel van de variantie:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$
$$= \sqrt{\frac{2}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

*De standaardafwijking is ook een spreidingsmaat.

1.2) Voorbeeldoefeningen

Oefening 1b: een bakje bevat vijf knikkers: drie witte en twee rode. We trekken aselect en tegelijk twee knikkers. X heeft als getalwaarde het aantal getrokken witte knikkers. Bepaal alle dingen.

<u>KANSFUNCTIE: functie die aan elke uitkomst in U een kans koppelt.</u>

$f(0) = f(0\ witte\ knikkers)$

--> Herhaling? X (je kan niet twéé knikkers tegelijk trekken)

--> Volgorde? X (alle knikkers hebben dezelfde waarde!)

➔ DUS: combinatie

$$f(0) = P(0) = \frac{gunstige\ mogelijkheden\ (=0\ witte\ knikkers\ paken)}{totale\ mogelijkheden\ (=we\ pakken\ er\ twee\ in\ totaal)}$$

$$= \frac{C_3^0 . C_2^2}{C_5^2}$$

→ We pakken 0 knikkers (= p = het aantal dat je neemt) uit een verzameling van 3 witte knikkers. Daarnaast pakken we 2 rode knikkers uit een verzameling van 2 rode knikkers. In totaal pakken we 2 knikkers uit een verzameling van 5.

$$= \frac{1}{10}\ (reken\ uit!)$$

$$f(1) = P(1) = \frac{C_3^1 . C_2^1}{C_5^2}$$
$$= \frac{6}{10} (reken\ uit!)$$

$f(2) = P(2) = \frac{3}{10}$ (je snapt de redenering nu wel)

<u>VERDELINGSFUNCTIE: functie die aan elke uitkomst in U een kans koppelt en de vorige kans daarbij optelt.</u>

$$F(0) = \frac{1}{10}$$

$F(1) = \frac{1}{10} + \frac{6}{10} = \frac{7}{10}$

--> We tellen de kans op 0 knikkers er ook dus nog bij op.

$F(2) = \frac{1}{10} + \frac{6}{10} + \frac{3}{10} = \frac{10}{10} = 1$

--> We tellen de kans op 0 en 1 knikkers er ook nog bij op.

VERWACHTINGSWAARDE: E(X) = µ

We berekenen de verwachtingswaarde (= gemiddelde uitkomst van de kansexperiment) door elke mogelijke gebeurtenis te vermenigvuldigen met zijn kans.

$$\mu = uitkomst\,.\,kans + \cdots$$
$$= \frac{1}{10}.\,0 + \frac{6}{10}.\,1 + \frac{3}{10}\,.\,2 = 1{,}2$$

→ Je pakt dus de kans die je hebt berekend bij je kansfunctie en je vermenigvuldigt deze met de uitkomst van je kansexperiment.

STANDAARDAFWIJKING σ:

Om de standaardafwijking te berekenen nemen we een tussenstop via de variantie.

$$Var(X) = (gebeurtenis - verwachtingswaarde)^2.\,kans_{op\ gebeurtenis}$$
$$= (0-1{,}2)^2.\frac{1}{10} + (1-1{,}2)^2.\frac{6}{10} + (2-1{,}2)^2.\frac{3}{10} = \frac{9}{25}$$

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \frac{3}{5}$$

OEFENING 2: We gooien een zuiver muntstuk driemaal op. De kansvariabele X heeft als getalwaarde het aantal keren kruis (= kop!). Bereken µ en σ.

$$\mu = kans\,.\,gebeurtenis + \cdots$$

→ Hiervoor moeten we eerst de kansen (kansfunctie) berekenen.

Stel we gooien de muntstuk driemaal op:

TOTALE MOGELIJKHEDEN: *1ste worp = 2 mogelijkheden (kop/munt)
*2de worp = 2 mogelijkheden (kop/munt)
*3de worp = 2 mogelijkheden (kop/munt)
→ EN-probleem: 2 x 2 x 2 = 8 mogelijkheden

GUNSTIGE MOGELIJKHEDEN: het aantal keren kruis (kop)

We schrijven de uitkomstenverzameling U op: K = kop // M = munt

{KKK, MMM, KKM, KMK, MKK, KMM, MKM, MMK}

GEEL = 3x kop

GROEN = 0x kop

ROOD = 2x kop

ROZE = 1x kop

Onze kansfuncties (kansen) worden dan: $P = \frac{gunstige\ mogelijkheden}{totale\ mogelijkheden}$

$f(0) = \frac{1}{8}$
$f(1) = \frac{3}{8}$
$f(2) = \frac{3}{8}$
$f(3) = \frac{1}{8}$

Nu kunnen we onze µ berekenen:
µ = gebeurtenis . kans + gebeurtenis' . kans' + …

$= 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1{,}5$

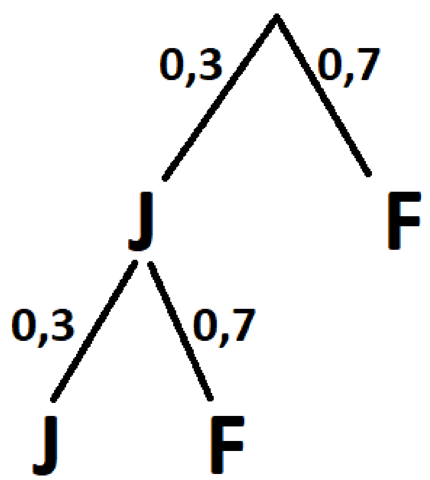
Nu kunnen we onze σ berekenen:

$$Var(X) = (gebeurtenis - \mu)^2 . kans\ op\ gebeurtenis + \cdots$$
$$= (0-1{,}5)^2 . \frac{1}{8} + (1-1{,}5)^2 . \frac{3}{8} + (2-1{,}5)^2 . \frac{3}{8} + (3-1{,}5)^2 . \frac{1}{8}$$
$$= 0{,}75 = \frac{3}{4}$$

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

OEFENING 4: Bij het opzoeken van onzuiverheden in een metaal gebruikt men een proef waarbij de kans om een bestaande fout te ontdekken gelijk is aan 0,7. Wordt een fout gevonden, dan stopt het onderzoek. Wordt geen fout gevonden, dan herhaalt men veiligheidshalve de proef een tweede keer, waarna het onderzoek stopt. Neem nu een stuk metaal dat onzuiverheden bevat en stel X de kansvariabele die als getalwaarde het aantal proeven heeft die bij het onderzoek uitgevoerd worden. Bereken µ en σ.

We kunnen een kansboom opmaken. Hierbij is J de kans dat het experiment aangeeft dat er géén fout is in het metaal (= juist), F is de kans dat het experiment aangeeft dat er een fout is in het metaal.



We hebben, zoals de opgave ons heeft verteld, 0,7 kans dat de test zegt dat ons metaal fout is. Dan hebben we dus 0,3 kans dat de test zegt dat ons metaal juist is.

Als de test zegt dat ons metaal fout is stopt de test. Als ze zegt dat ons metaal juist is wordt de test veiligheidshalve herhaald.

De kansvariabele X = het aantal testen dat we moeten uitvoeren. Houd ook in je achterhoofd dat ons metaal 'onzuiver (= fout)' is.
--> We kunnen maximaal 2 testen uitvoeren.
$f(1\ test) = 0{,}7$
$f(2\ testen) = 0{,}3\ .\ 0{,}7 + 0{,}3\ .\ 0{,}3 = 0{,}3$
→ Je kan de eerste test juist hebben (= 0,3) EN de tweede fout (= 0,7). Of je kan de eerste test juist hebben (= 0,3) EN de tweede test juist hebben (= 0,3).
We hebben een EN-probleem en vermenigvuldigen dus.

Nu kunnen we onze verwachtingswaarde en standaardafwijking berekenen.
E(x) = μ = gebeurtenis . kans + gebeurtenis' . kans + …
$= 1\ .\ 0{,}7 + 2\ .\ 0{,}3 = 1{,}3$

$Var(X) = (1 - 1{,}3)^2 . 0{,}7 + (2 - 1{,}3)^2 . 0{,}3 = 0{,}21$
$\sigma = \sqrt{Var(X)} = 0{,}46$

Oefening 6: Bij een bloedonderzoek naar syfilis bij de strijdkrachten van de Verenigde Staten is de kans op een positieve reactie van een individu 0,05. Om een groep van vijf personen te onderzoeken, voegt men hun vijf bloedmonsters samen en onderwerpt dit geheel aan de test. Is de reactie negatief, dan eindigt het onderzoek. Is de reactie positief, dan worden de vijf bloedstalen elk afzonderlijk aan de test onderworpen. De kansvariabele X heeft als getalwaarde het totaal aantal proeven dat we voor vijf personen moeten uitvoeren. Bereken μ en σ.

De kans op een positieve reactie op de test = 0,05 (dan heb je syfilis)
De kans op een negatieve reactie op de test is dus 0,95

Het minimale aantal testen is 1, immers geldt dat ze de 5 bloedmonsters bijeen gieten en alles samen testen.
Het maximale aantal testen is 6, immers geldt dat als de 1ste test een positieve reactie toont, alle strijdkrachten nog eens apart worden getest.

We moeten dus de kansen berekenen op 1 of 6 testen…
$f(1) = 0{,}95\ .\ 0{,}95\ .\ 0{,}95\ .\ 0{,}95\ .\ 0{,}95$
--> Er is 0,95 kans dat strijdkracht 1 géén syfilis heeft EN 0,95 kans dat strijdkracht 2 geen syfillis heeft EN 0,95 kans voor strijdkracht 3 …
$= 0{,}95^5 = 0{,}77$

$f(6) = ?$
--> Allereerst kunnen **alle** soldaten syfilis hebben, dan is f(6) = $0{,}05^5$.
--> OF **vier** soldaten kan syfilis hebben, is f(6) dan gelijk aan $0{,}95\ .\ 0{,}05^4$?

--> Bijna. De **gezonde soldaat** (0,95) kan op 5 plaatsen staan, ik verduidelijk.

G Z Z Z Z

Z G Z Z Z

1 2 3 4 5

Z Z G Z Z

Z Z Z G Z

Z Z Z Z G

De eerste soldaat kan gezond zijn of de tweede kan gezond zijn of de derde kan gezond zijn … de gezonde soldaat kan op plaats 1, 2, 3, 4 of 5 staan. We moeten dus MAAL 5 doen, want het is een OF-probleem en de vermenigvuldiging is een kortere schrijfwijze voor de optelling.

--> Als OF **vier soldaten** ziek zijn, dan is de kans $f(6) = 5 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05^4$

--> OF **drie soldaten** zijn ziek, wat is de kans dan?

--> Als drie soldaten ziek zijn, zijn er 2 gezond. Op hoeveel plaatsen kunnen de gezonde soldaten staan?

G	G	Z	Z	Z
G	Z	G	Z	Z
1	2	3	4	5
G	Z	Z	G	Z
G	Z	Z	Z	G
Z	G	G	Z	Z
Z	G	Z	G	Z
Z	G	Z	Z	G
Z	Z	G	G	Z
Z	Z	G	Z	G
Z	Z	Z	G	G

Zoals je hier ziet kunnen de soldaten op 10 verschillende plaatsen staan.
--> f(6) voor 3 zieke soldaten is dan: $10 \,.\, 0{,}05^3 . 0{,}95^2$

We vullen aan: $f(6) = 0{,}05^5 \; (alle\ soldaten\ ziek) + 5 \,.\, 0{,}05^4 \,.\, 0{,}95 + 10 \,.\, 0{,}05^3 \,.\, 0{,}95^2 + 10 \,.\, 0{,}05^2 . 0{,}95^3 + 5 \,.\, 0{,}05^4 = 0{,}226$
ter herinnering: f(1) = 0,77

Nu kunnen we onze µ berekenen.
µ = E(X) = kans . gebeurtenis + kans' . gebeurtenis' + …

$$E(X) = 6\,.\,0{,}226 + 1\,.\,0{,}77 = 2{,}126$$

Hieruit kunnen we onze variantie en standaardafwijking bepalen.

$$Var(X) = (gebeurtenis - verwachtingswaarde)^2.\,kans_{op\ gebeurtenis} + \cdots$$
$$= (1 - 2{,}126)^2.\,0{,}77 + (6 - 2{,}126)^2.\,0{,}226 = 4{,}36$$

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{4{,}36} = 2{,}09$$

OEFENING 8: Een patiënt meldt zich in het ziekenhuis. Na een reeks testen besluiten de artsen dat er 40% kans is dat de patiënt hepatitis heeft, 10% kans dat hij galstenen heeft, 45% kans dat hij levercirrose heeft en 5% kans dat hij kanker heeft. De kosten voor verdere behandeling zijn respectievelijk in euro weergegeven:

HEPATITIS	GALSTENEN	LEVERCIRROSE	KANKER
800	2500	1200	16000

Deze oefening is eigenlijk makkelijk.

Dus, we weten dat:

$$f(hepatitis) = 0{,}4$$
$$f(galstenen) = 0{,}1$$
$$f(levercirrose) = 0{,}45$$
$$f(kanker) = 0{,}05$$

Nu kunnen we de verwachtingswaarde µ berekenen. Ik herhaal de formule voor de duizendste keer:

$$\mu = E(X) = kans\,.\,gebeurtenis + kans'.\,gebeurtenis' + \cdots$$
$$= 0{,}4\,.\,800 + 0{,}1\,.\,2500 + 0{,}45\,.\,1200 + 0{,}05\,.\,16000$$
$$= 1910$$

Hoe moet je de verwachtingswaarde interpreteren? De patiënt zal gemiddeld 1910 euro moeten betalen, ongeacht wat hij heeft.

Hieruit kunnen we ook makkelijk onze standaardafwijking bepalen. Dit doe ik niet meer voor.

OEFENING 10: Bij een evaluatieproef worden drie vragen gesteld. Naast de vragen staan er respectievelijk 2, 3 en 4 mogelijke antwoorden opgesomd, waarvan één het juiste is. Er wordt een punt afgetrokken voor een verkeerd antwoord en er worden twee punten toegekend voor een juist antwoord. Je kiest lukraak voor elke vraag een antwoord. De kansvariabele heeft als getalwaarde je score. Bepaal µ en σ.

"Je kiest lukraak voor elke vraag een antwoord." = chique taal voor "je gokt."
--> Voor 0 juiste antwoorden is je score -3 (-1 -1 -1)
--> Voor 1 juist antwoord is je score 0
--> Voor 2 juiste antwoorden is je score 3
--> Voor 3 juiste antwoorden is je score 6
--> Wat zijn je kansen bij gokken bij een test? Je kan 0 vragen, 1 vraag, 2 vragen of 3 juist hebben.

--> We moeten dus op voorhand f(-3), f(0), f(3) en f(6) uitrekenen.

→ Voor vraag 1 heb je ½ kans op juist, vraag 3 = 1/3 kans, vraag 4 = ¼ kans

$f(-3) = \frac{1}{2}\ (1ste\ vraag\ fout).\frac{2}{3}(2de\ vraag\ fout).\frac{3}{4}(3de\ vraag\ fout) = \frac{1}{4}$

$f(0) = \frac{1}{2}(1ste\ vraag\ fout).\frac{2}{3}(2de\ vraag\ fout)\ .\frac{1}{4}(3de\ vraag\ juist) +$
$\frac{1}{2}(1ste\ vraag\ juist).\frac{2}{3}(2de\ vraag\ fout).\frac{3}{4}(3de\ vraag\ fout) +$
$\frac{1}{2}(1ste\ vraag\ fout).\frac{1}{3}(2de\ vraag\ juist).\frac{3}{4}(3de\ vraag\ fout) = \frac{11}{24}$

$f(3) =$ OF je hebt je 1ste en 2de vraag juist = $\frac{1}{2}\ .\frac{1}{3}\ .\frac{3}{4} = \frac{1}{8}$

OF je hebt je 1ste en 3de vraag juist = $\frac{1}{2}\ .\frac{2}{3}\ .\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

OF je hebt je 2de en 3de vraag juist = $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4} = \frac{1}{24}$

→ Alles + elkaar (OF-probleem) = 1/4

$f(6) = \frac{1}{2}(1ste\ vraag\ juist).\frac{1}{3}(2de\ vraag\ juist).\frac{1}{4}(3de\ vraag\ juist) = \frac{1}{24}$

Nu kunnen we makkelijk µ en σ berekenen…

$\mu = \ -3\ .\frac{1}{4} + 0\ .\frac{11}{24} + 3\ .\frac{1}{4} + 6\ .\frac{1}{24} = 0{,}25$

$Var(X) = (-3 - 0{,}25)^2.\frac{1}{4} + (0 - 0{,}25)^2.\frac{11}{24} + (3 - 0{,}25)^2.\frac{1}{4} + (6 - 0{,}25)^2.\frac{1}{24} = 5{,}9375$

$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{5{,}9375} = 2{,}44$

OEFENING 12: Onderzoek of het volgende spel eerlijk is: bij het gooien met een vervalste dobbelsteen is de kans op zes ogen gelijk aan ¼, de kans op één oog is 1/12 en zijn kansen op elk van de andere uitkomsten is gelijk aan 1/6. Een speler geeft een inzet van 4 euro, gooit eenmaal en krijgt voor elke oog 1 euro.

De inzet van de speler wordt gezien als een winst van -4 euro.

We weten dat een spel eerlijk is als de verwachtingswaarde µ gelijk is aan 0.

$\mu = E(X) = kans\ .gebeurtenis + kans'.gebeurtenis + \cdots$

--> voor elke oog krijgt de speler 1 euro:

➔ één oog = 1 euro --> kans = 1/12
twéé ogen = 2 euro
… --> kans = 1/6
zes ogen = 6 euro --> kans = ¼

$\mu = E(X) = \frac{1}{12}\ .1 + \frac{1}{6}.2 + \frac{1}{6}.3 + \frac{1}{6}.4 + \frac{1}{6}\ .5 + \frac{1}{4}.6 = 3{,}91$

→ Gemiddeld kan de speler dus 3,91 euro winst maken met dit spel. Echter moeten we µ nog aftrekken van de inzet van de speler, 4 euro.

$\mu = 3{,}91 - 4 = \ -0{,}09$

→ De speler zal gemiddeld 9 cent verlies maken met dit spel. Het spel is oneerlijk.

OEFENING 13: Voor een worp met een zuivere dobbelsteen moet een speler een inzet geven. Hij krijgt vijf euro terug als hij één gooit, 3 euro als hij twee ogen gooit en 1 euro als hij drie ogen gooit. In de andere gevallen krijgt hij niets terug. Hoe groot moet de inzet zijn voor een eerlijk spel?

Eerst berekenen we de verwachtingswaarde μ, a.d.h.v. de verwachtingswaarde weten we hoeveel hij moet inzetten voor een eerlijk spel.

$$\mu = kans\,.\,gebeurtenis + kans'.\,gebeurtenis' + \cdots$$
$$= \frac{1}{6}.5\ (hij\ krijgt\ 5\ euro\ terug\ als\ hij\ 1\ gooit)$$
$$\frac{1}{6}.3\ (hij\ krijgt\ 3\ euro\ als\ hij\ 2\ ogen\ gooit) + \frac{1}{6}.1\ (hij\ krijgt\ 1\ euro\ als\ hij\ 3\ ogen\ gooit)$$
$$= 1{,}5$$

De speler moet dus 1,5 euro inzetten zodat het spel eerlijk is.

OEFENING 16: Speler A gooit met 2 zuivere dobbelstenen. Hij krijgt van speler B 10 euro als hij minder dan zes ogen op twee stenen samen werpt. Anders moet A 5 euro betalen aan B. In wiens voordeel is dit spel.

Om te kijken in wiens voordeel dit spel is, moeten we de verwachtingswaarde berekenen. Om de verwachtingswaarde te kunnen berekenen, moeten we enkele kansen op voorhand berekenen.

Speler A gooit met 2 zuivere dobbelstenen.

Totale mogelijkheden:

--> Herhaling? TOEGESTAAN (je gooit met 2 dobbelstenen, je kan bv. 2x een zes gooien)

--> Volgorde? VAN BELANG (elk aantal ogen: 1,2 … heeft een andere waarde)

➔ $W_n^p = n^p$

--> n = aantal mogelijkheden = 6 (dobbelsteen heeft 6 vlakken)

--> p = aantal dat je kiest uit die n = 2 (je gooit met 2 dobbelstenen = 'je kiest' 2 ogen)

----> $6^2 = 36$

Gunstige mogelijkheden:

Elke mogelijkheid waarbij de som van de 2 dobbelstenen minder dan zes ogen is, is gunstig: 1 + 1, 1 + 2, 1 + 3, 1 + 4

2 + 1, 2 + 2, 2 + 3

3 + 1, 3 + 2

4 + 1

→ In totaal 10 mogelijkheden.

De kans voor A om 10 euro te winnen (door minder dan 6 te gooien) is dus:

$f(10) = \frac{10}{36}$

De kans voor A om -5 euro te winnen (door meer dan 6 te gooien) is dus:

$f(-5) = 1 - f(10) = 1 - \frac{10}{36} = \frac{26}{36}$

De verwachtingswaarde is dan:

μ = E(X) = kans . gebeurtenis + kans' . gebeurtenis' = $10\,.\,10/36 + (-5\,.26/36)$ = -5/6

→ Dit spel is dus in de voordeel van speler B, aangezien A gemiddeld 5/6 euro verlies zal maken!

2) Binomiale- en Poissonverdeling

2.1) De binomiale verdeling

2.2.1) Schema van Bernoulli

Een kansvariabele X is binomiaal verdeeld als het de schema van Bernoulli volgt:

✓ het deelexperiment heeft 2 mogelijke uitkomsten
  --> p = kans op succes
  = kans op de uitkomst waarvoor we belangstelling hebben
  --> q = kans op mislukking
  = kans op uitkomst waarvoor we GEEN belangstelling hebben.
  ➔ **q = 1 – p**

✓ De kansen p en q blijven hetzelfde voor elk deelexperiment.

✓ De deelexperimenten worden onafhankelijk van elkaar uitgevoerd
  --> Dit betekent dat we in het schema van Bernoulli enkel mogen werken met trekkingen met terugleggen. Trekkingen zonder terugleggen kunnen NIET specifiek berekend worden.

2.2.2) Definities

***Kansvariabele X** = succesvolle gebeurtenis = gebeurtenis waarvoor we belangstelling hebben

***Kansfunctie f(k)** = FORMULE: $f(k) = C_n^k \,.\, p^k \,.\, q^{n-k}$
 --> n = het aantal deelexperimenten = het aantal trekkingen
 --> k = het aantal successen (= uitkomst waarvoor we belangstelling hebben) uit die n deelexp.
 --> p = kans op succes (= kans op gebeurtenis waarvoor we belangstelling hebben)
 --> q = kans op mislukking (= kans op gebeurtenis waarvoor we GEEN belangstelling hebben)

***Verwachtingswaarde (= gemiddelde)** = FORMULE: $\mu = E(x) = n \,.\, p$
 --> n = het aantal deelexperimenten
 --> p = kans op succes = kans op de gebeurtenis waarvoor we belangstelling hebben

***Variantie Var(X)** = FORMULE: $Var(X) = n \,.\, p \,.\, q$
 --> n = het aantal deelexperimenten
 --> p = kans op succes = kans op de gebeurtenis waarvoor we belangstelling hebben
 --> q = kans op mislukking = kans op gebeurtenis waarvoor we GEEN belangstelling hebben

***Standaardafwijking σ** = FORMULE: $\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{n \,.\, p \,.\, q}$
 --> De standaardafwijking is net zoals de variantie een spreidingsmaat, het vertelt je hoe ver je kansen t.o.v. het gemiddelde weg zitten.

***Notatie binomiale verdeling:** $B(n, p)$

2.2) Poissonverdeling

*Een kansveriabele is Poissonverdeeld volgens P(λ) als volgende kansfunctie geldt:

$f(k) = \frac{e^{-\lambda} \,.\, \lambda^k}{k!}$ --> $\lambda = de\ verwachtingswaarde = de\ standaardafwijking$
 --> $k = het\ aantal\ successen$
 --> $e = het\ getal\ van\ Euler\ \approx 2{,}72$

*Je gebruikt de binomiale verdeling als je slechts een beperkt aantal gebeurtenissen hebt.
*Je gebruikt de Poissonverdeling als het aantal gebeurtenissen onbeperkt is.

2.3) Voorbeeldoefeningen

2.3.1) Binomiale verdeling

OEFENING 1: Voor welke waarden van p hebben alle gebeurtenissen in het schema van Bernoulli dezelfde kans?

Voor p = 1 en p = 0 hebben alle gebeurtenissen in het schema van Bernoulli dezelfde kans. Bij deze p-waarden horen respectievelijk de q-waarden q = 0 en q = 1. Zo hebben alle gebeurtenissen in Bernoulli dezelfde kans, nl. 100% (omdat p of q = 1).

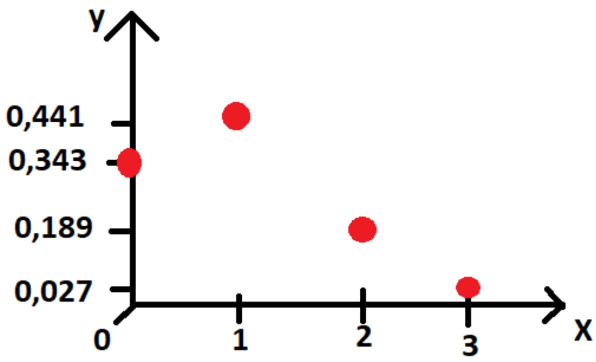
OEFENING 6: Geef de grafiek van de kansfunctie en de verdelingsfunctie van B(3; 0,3).

Uit de opgaven leiden we af dat n = #deelexperimenten = 3 en p = kans op succes = 0,3.
--> p = 0,3 ⇔ q = 1 – p = 0,7

Om de kansfunctie op te stellen berekenen we 4 kansen: f(0), f(1), f(2), f(3).

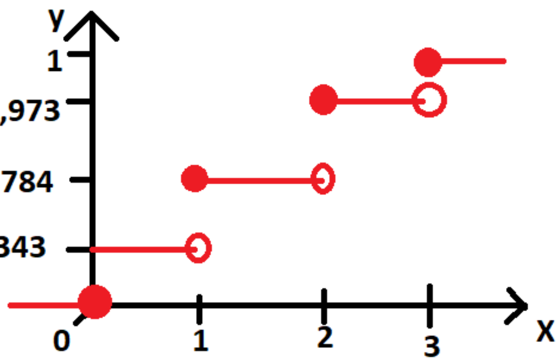
$f(k) = C_n^k \,. p^k \,. q^{n-k}$
$f(0) = C_3^0 \,. (0{,}3)^0 \,. 0{,}7^{3-0} = 0{,}343$
$f(1) = C_3^1 \,. (0{,}3)^1 \,. 0{,}7^{3-1} = 0{,}441$
$f(2) = C_3^2 \,. (0{,}3)^2 \,. 0{,}7^{3-2} = 0{,}189$
$f(3) = C_3^3 \,. (0{,}3)^3 \,. 0{,}7^{3-3} = 0{,}027$

Zet de gevonden punten uit in een grafiek. Als je de punten plot, heb je de kansfunctie.



De verdelingsfunctie is, zoals je weet, gedefinieerd als de kans op die gebeurtenis opgeteld met de voorgaande kansen.

$F(0) = 0{,}343$
$F(1) = 0{,}343 + 0{,}441 = 0{,}784$
$F(2) = 0{,}343 + 0{,}441 + 0{,}189 = 0{,}973$
$F(3) = 0{,}343 + 0{,}441 + 0{,}189 + 0{,}027 = 1$



OEFENING 10: Door een verkeerde regeling van de machines bij de fabricage zijn 10% van de afgewerkte stukken defect. We kiezen aselect tien stukken. Bereken de kans dat er ten hoogste drie defecte stukken zijn.
GEGEVEN:
p = kans op succes = kans op gebeurtenis waarvoor we belangstelling hebben = 10% = 0,10
--> dus: q = 90% = 0,90
n = #deelexperimenten = 10 ('we kiezen aselect tien stukken')

GEVRAAGD:
$f(ten\ hoogste\ 3\ defecte\ stukken) = F(3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$
--> De kans op ten hoogste 3 defecte stukken is gevraagd. We moeten dus de kans op 0, 1, 2 en 3 defecte stukken berekenen en met elkaar optellen. Dit komt overeen met de verdelingsfunctie F.

OPLOSSING:
formule: $f(k) = C_n^k \,.\, p^k \,.\, q^{n-k}$

$$f(0) = C_{10}^0 \,.\, 0{,}10^0 \,.\, 0{,}90^{10-0} = 0{,}3486$$
$$f(1) = C_{10}^1 \,.\, 0{,}10^1 \,.\, 0{,}90^{10-1} = 0{,}3874$$
$$f(2) = C_{10}^2 \,.\, 0{,}10^2 \,.\, 0{,}90^{10-2} = 0{,}1937$$
$$f(3) = C_{10}^3 \,.\, 0{,}10^3 \,.\, 0{,}90^{10-3} = 0{,}0573$$

$$F(3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 0{,}987$$

OEFENING 17: Bij een bepaalde boomsoort is de kans op een afwijkende bladvorm 0,09. In een park staan 20 dergelijke bomen. Bereken de kans dat er ten minste 2 zijn met een afwijkende bladvorm.
GEGEVEN:
p = kans op succes = kans op de gebeurtenis waarvoor we belangstelling hebben = 0,09
--> dus: q = 0,91
n = het aantal deelexperimenten = 20 (bomen)

GEVRAAGD:
Kans dat er ten minste 2 bomen zijn met een afwijkende bladvorm.
--> Ten minste 2 bomen = 2 bomen of meer.
--> dus: $f(2) + f(3) + \cdots + f(19) + f(20)$

Omdat dit te lang is om uit te rekenen doen we 100% (1) min de kans op géén afwijkende bladvorm (en dus 20 bomen normaal zijn) min de kans op één boom die een afwijkende bladvorm heeft.

1 – f(0) – f(1)

OPLOSSING:
formule: $f(k) = C_n^k \,.\, p^k \,.\, q^{n-k}$

$$f(0) = C_{20}^0 \,.\, 0{,}09^0 \,.\, 0{,}91^{20} = 0{,}1516$$
$$f(1) = C_{20}^1 \,.\, 0{,}09^1 \,.\, 0{,}91^{19} = 0{,}3000$$

$$1 - f(1) - f(2) = 1 - 0{,}1516 - 0{,}3000 = 0{,}5484$$

OEFENING 21: De kans dat in de loop van het jaar brand uitbreekt in een opslagplaats van een bepaald type is 0,03. Een verzekeringsmaatschappij heeft zeventien brandverzekeringscontracten voor dergelijke opslagplaatsen lopen. Bereken de kans dat het bedrijf in de loop van een jaar meer dan twee schadeclaims heeft.

GEGEVEN:
p = kans op succes = kans op gebeurtenis waarvoor we belangstelling hebben = brand = 0,03.
q = kans op mislukking = geen brand = 0,97.
n = het aantal deelexperimenten = 17 (opslagplaatsen)

GEVRAAGD:
Kans op meer dan 2 schadeclaims = kans op ten minste 3 schadeclaims = kans op 3 schadeclaims of hoger = $f(3) + f(4) + \cdots + f(17)$

Omdat dit te lang is op uit te rekenen doen we 100% min de kans op 0 schadeclaims, 1 schadeclaim en 2 schadeclaims: $1 - [f(0) + f(1) + f(2)]$

OPLOSSING:
formule: $f(k) = C_n^k \,.\, p^k \,.\, q^{n-k}$

$$f(0) = C_{17}^0 \,.\, 0{,}03^0 \,.\, 0{,}97^{(17-0)} = 0{,}596$$
$$f(1) = C_{17}^1 \,.\, 0{,}03^1 \,.\, 0{,}97^{17-1} = 0{,}313$$
$$f(2) = C_{17}^2 \,.\, 0{,}03^2 .\, 0{,}97^{17-2} = 0{,}078$$

$$f(0) + f(1) + f(2) = 0{,}596 + 0{,}313 + 0{,}078 = 0{,}987$$

$$1 - 0{,}987 = 0{,}013 = kans\ op\ MEER\ dan\ 2\ schadeclaims$$

OEFENING 28: We nemen aan dat 60% van de leerlingen slaagt op een proefwerk wiskunde. Geef de verwachtingswaarde van het aantal dat slaagt in een groep van 50 leerlingen. Geef ook de standaardafwijking.

GEGEVEN:
p = kans op succes = kans waarvoor we belangstelling hebben = slaagkans lln = 60% = 0,60
--> dan is q = faalkans lln = 0,40
n = het aantal deelexperimenten = 50 (leerlingen die een proefwerk afleggen)

GEVRAAGD:
μ, σ

OPLOSSING:
$$\mu = n \,.\, p = 50 \,.\, 0{,}60 = 30$$
$$\sigma = \sqrt{n \,.\, p \,.\, q} = \sqrt{50 \,.\, 0{,}60 \,.\, 0{,}40} = 2\sqrt{3}$$

OEFENING 34: De kans op een hevige aardbeving in de loop van een jaar in een zeker deel van China is 2 . 10^{-5}. Wat is de kans dat er in de loop van de volgende twee eeuwen ten minste één aardbeving voorkomt?

GEGEVEN:
p = kans op succes = kans op gebeurtenis waarvoor we belangstelling hebben = aardbeving = 2 . 10^{-5}
--> Let op: dit is de kans dat er in **één jaar** geen aardbeving gebeurt.
q = kans op mislukking = geen aardbeving = 1 – 2 . 10^{-5}
--> Let op: dit is de kans dat er in **één jaar** geen aardbeving gebeurt.

GEVRAAGD:
Kans dat er in de volgende twee eeuwen ten minste één aardbeving gebeurt.

We berekenen 1 (100%) min de kans dat er in 2 eeuwen 0 aardbevingen gebeuren in één jaar en doen dit dan x 200, aangezien we 2 eeuwen hebben (200 jaar!).

OPLOSSING:
De kans dat er een aardbeving in één jaar gebeurt is 2 . 10^{-5}
--> De kans dat er in 200 jaar ten minste één aardbeving gebeurt is dan: 200 . 2 . 10^{-5} = 0,0040

2.3.2) Poissonverdeling

OEFENING 4: Het gemiddeld aantal auto-ongevallen per maand op een bepaalde weg is 4. Bepaal de kans dat er volgende maand geen enkel ongeval gebeurt. Wat is de kans dat er volgend jaar minder dan 3 ongevallen gebeuren?

VRAAG JEZELF VOORAF: Hebben we te maken met een binomiale- of Poissonverdeling?
--> We hebben te maken met Poisson, omdat…

- ✓ Het aantal gebeurtenissen is onbeperkt (er staat geen beperking op auto-ongevallen)
- ✓ Er is géén kans op succes (p) gegeven (in tegenstelling tot bij binomiale)
- ✓ Er is een gemiddelde gegeven (in tegenstelling tot bij binomiale)

GEGEVEN:
$\mu = \lambda = het\ gemiddelde = de\ verwachtingswaarde = 4\ (ongevallen)$
X = het aantal ongevallen dat gebeuren.

GEVRAAGD:
$f(minder\ dan\ 3\ ongevallen) = f(0) + f(1) + f(2)$

OPLOSSING:
formule: $f(k) = \frac{e^{-\lambda} . \lambda^k}{k!}$

$f(0) = \frac{e^{-4} . 4^0}{0!} = 0{,}0183$
$f(1) = \frac{e^{-4} . 4^1}{1!} = 0{,}0736$
$f(2) = \frac{e^{-4} . 4^2}{2!} = 0{,}1465$

$f(0) + f(1) + f(2) = 0{,}2375$

OEFENING 11: Het aantal klanten dat per minuut een postkantoor binnenkomt is gemiddeld 0,6065. Bepaal de kans dat er in een bepaalde minuut precies 3 mensen komen.

GEGEVEN:
$\lambda = 0{,}6065\ (= gemiddeld\ aantal\ mensen\ per\ minuut)$

GEVRAAGD:
a) $f(3) \rightarrow kans\ in\ een\ bepaalde\ minuut\ precies\ 3\ mensen$

OPLOSSING:
formule Poisson: $f(k) = \frac{e^{-\lambda} .\ \lambda^k}{k!}$

a) $f(3) = \frac{e^{-0{,}6065} . 0{,}6065^3}{3!} = 0{,}0202$

2.4) [V] (hyper)geometrische verdeling

GEOMETRISCH: formule: $f(k) = p\ .\ q^{k-1}$ --> p = kans succes /// q = kans mislukking /// k = #success.

HYPERGEOMETRISCH: formule: $f(k) = \frac{C_{n_1}^k . C_{n_2}^{n-k}}{C_{n_1+n_2}^n}$ --> dit geldt voor trekkingen ZONDER terugleggen

3) De normale verdeling

-