Wiskunde – samenvatting analyse – cyclometrische functies – examen M4 – made by Abdellah

---

(Y) VOORWOORD
Dit is de samenvatting wiskunde ter voorbereiding voor de toets van cyclometrische functies en het examen wiskunde.

(X) INHOUDSTAFEL
Over twéé pagina's

(Z) Foutje?
Dat kan, meldt fouten aan Abdellah.

# Samenvatting wiskunde - analyse – cyclometrische functies –

# Inhoud

# 1) Inverse van goniometrische functies

We hebben in module 2 en in de bundel van irrationale functies al inverse relaties bestudeerd.

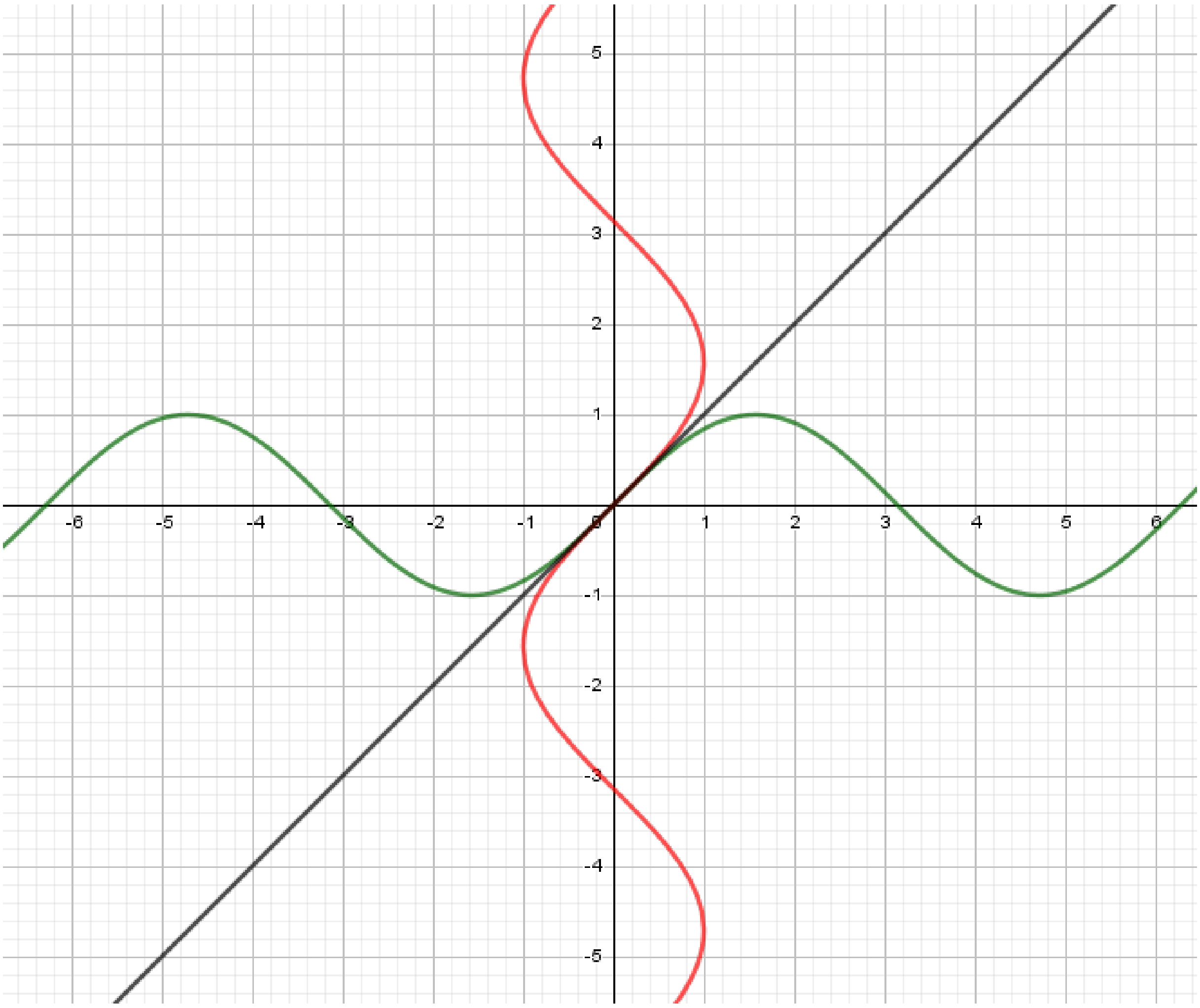
## 1.1) Definitie inverse relatie

De inverse relatie is het omgekeerde van een functie.
--> Zoals we bij irrationale functies hebben gezien is de inverse relatie van het worteltrekken de machtsverheffing, dit zijn immers twéé omgekeerde bewerkingen.

Zo hebben goniometrische functies ook hun eigen inverse relatie, die we nader in deze samenvatting zullen bestuderen. De inverse functies van goniometrische functies noemen we cyclometrische functies.

## 1.2) Inverse relatie van y = sin(x) opstellen

*Grafisch stelde je de inverse relatie voor door de functie te spiegelen t.o.v. de eerste bissectrice (= de rechte y = x).



Hierboven heb ik de grafiek y = sin x (groen) gespiegeld t.o.v. de eerste bissectrice, dan verkrijg je de roze curve. De roze curve is de inverse relatie van onze sinusfunctie. Een probleem is echter dat dit geen functie is, één x-waarde heeft immers verschillende y-waarden. Later lossen we dit probleem op.

*Algebraïsch stel je de inverse relatie op door je y en x van plaats te wisselen en opnieuw af te zonderen naar y.
--> Zo hebben we: $y = \sin(x)$
--> inverse relatie: $x = \sin(y)$
➔ Om terug af te zonderen naar y moet je de omgekeerde bewerking van de sinus nemen, jij weet natuurlijk hoe dat moet. Ja, dat moet met de [SHIFT] [SINUS]. Natuurlijk gaan we die bewerking niet shiftsinus noemen, je rekenmachine noemt die bewerking arcsin (of asin), wat staat voor arcsinus. **Wij gaan de omgekeerde bewerking van de sinus boogsinus of Bgsin noemen.**
⇔ $Bgsin(x) = y$
⇔ $y = Bgsin(x)$

Jij kent de omgekeerde bewerking van de sinus eigenlijk al. Als je bijvoorbeeld een goniometrische vergelijking oplost en een hoekgrootte zoekt, gebruik jij de [SHIFT] [SINUS]-functie op je rekenmachine. Dan heb je onbewust gebruik gemaakt van de boogsinusfunctie.

Stel je hebt: $\sin(x) = 0{,}4$. Dan gebruik je de shift-sinus-functie. Wat je wiskundig doet is…

$\sin(x) = 0{,}4 \Leftrightarrow x = Bgsin(0{,}4) = 0{,}41\ radialen = 23{,}58°$

Zo bestaan ook de boogcosinus-, boogtangens- en boogcotangensfunctie.

Laten we deze fantastische functies, die ons in staat stellen hoekgroottes te vinden, onderzoeken!

# 1.3) Eigenschap van de inverse relatie

Zoals je weet geldt voor de inverse relatie deze belangrijke eigenschap:
(1) $dom\ f = ber\ f^{-1} \qquad en \qquad ber\ f = dom\ f^{-1}$

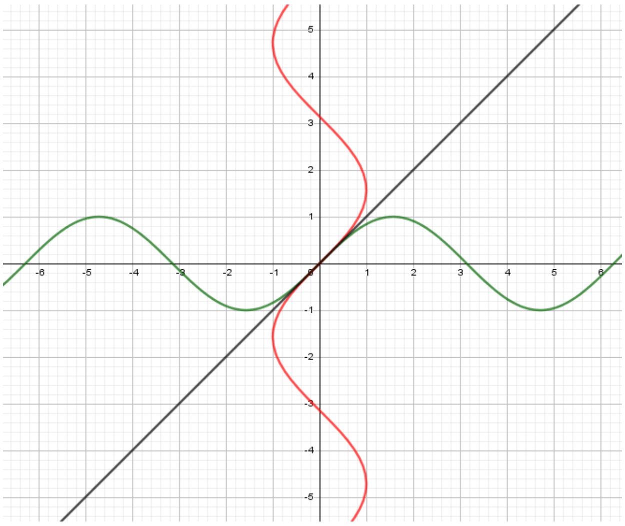
Zo geldt voor de sinusfunctie: $dom = \mathbb{R}$ en $ber = [-1{,}1]$
--> Voor de boogsinusfunctie geldt: $dom = [-1{,}1]\ en\ ber = \mathbb{R}$
--> We zullen het bereik van de boogsinusfunctie in het volgend onderdeeltje wel moeten beperken.

# 2) Elementaire cyclometrische functies

We hebben in deel 1 van de samenvatting al kennisgemaakt met de boogsinusfunctie.

## 2.1) Boogsinusfunctie

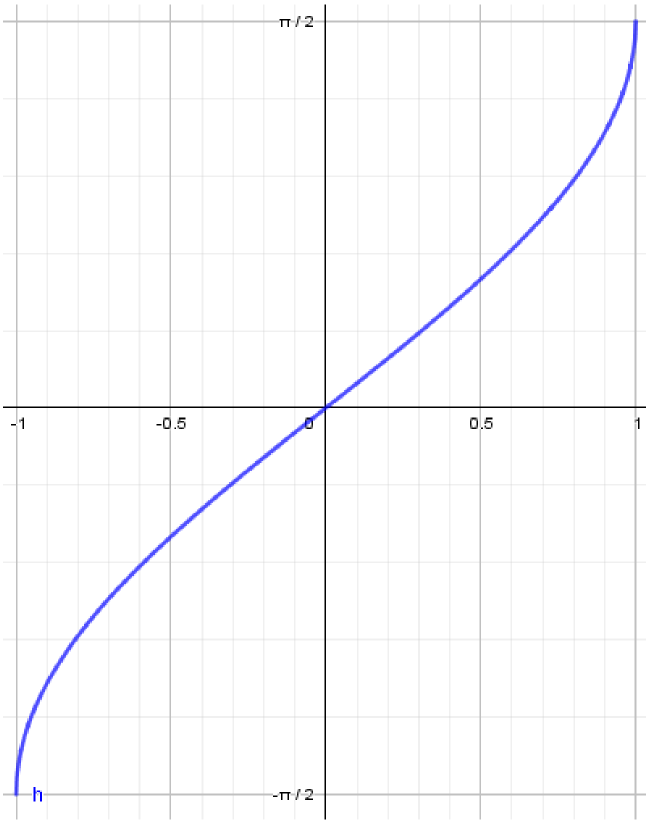
### 2.1.1) Beperken van het bereik van y = Bgsin(x)



We zagen ook het probleem met deze grafiek, de boogsinusfunctie (roze curve) is géén functie. We moeten het bereik dus beperken zodat we een functie krijgen.

We beperken het bereik van de boogsinusfunctie tot $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, dit zijn de extremawaarden van de sinusfunctie.

Dan verkrijgen we deze grafiek…



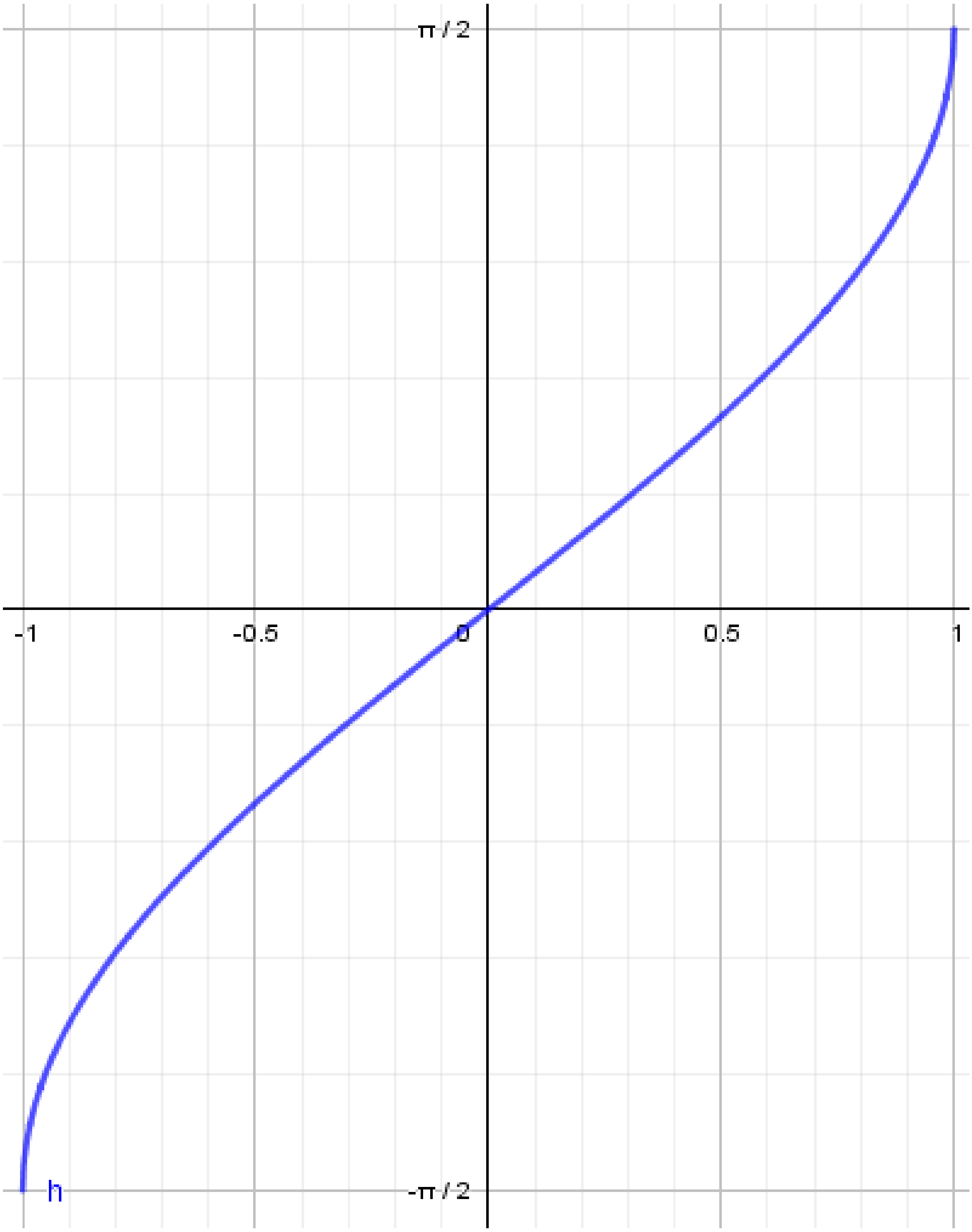

Dit is de uiteindelijke boogsinusfunctie. Het is best wel logisch dat de functie is beperkt tot bereik $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Herinner jezelf de basisdoel van een functie: je stopt er een x-waarde in en je krijgt er een y-waarde uit. Hier is dat net hetzelfde.

Als je Bgsin(1,1) invoert in je rekenmachine krijg je MATH ERROR. Nu weet je waarom, de goniometrische cirkel gaat maar tot 1 én de boogsinus van 1,1 is niet gedefinieert.

## 2.1.2) Bespreking van y = Bgsin (x)

### *2.1.2.1) Grafiek*



### 2.1.2.2) Definitie

| | | |
|---|---|---|
| $Bgsin\colon \quad [-1{,}1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ <br> $x \rightarrow y = Bgsin\, x$ | $y = Bgsin\, x \quad \Leftrightarrow$ | $\left(x = \sin y \quad \text{en} \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right)$ |

Kan je letterlijk op de grafiek aflezen: de boogsinus gaat van -1 tot 1 op de x-as en het bereik is beperkt van $-\frac{\pi}{2}$ tot $\frac{\pi}{2}$ op de x-as.

### 2.1.2.3) Asymptoten

Omdat de functie $y = \sin(x)$ geen asymptoten heeft, heeft zijn inverse relatie $y = Bgsin(x)$ natuurlijk ook géén asymptoten.

Wil je de redenen weten waarom?

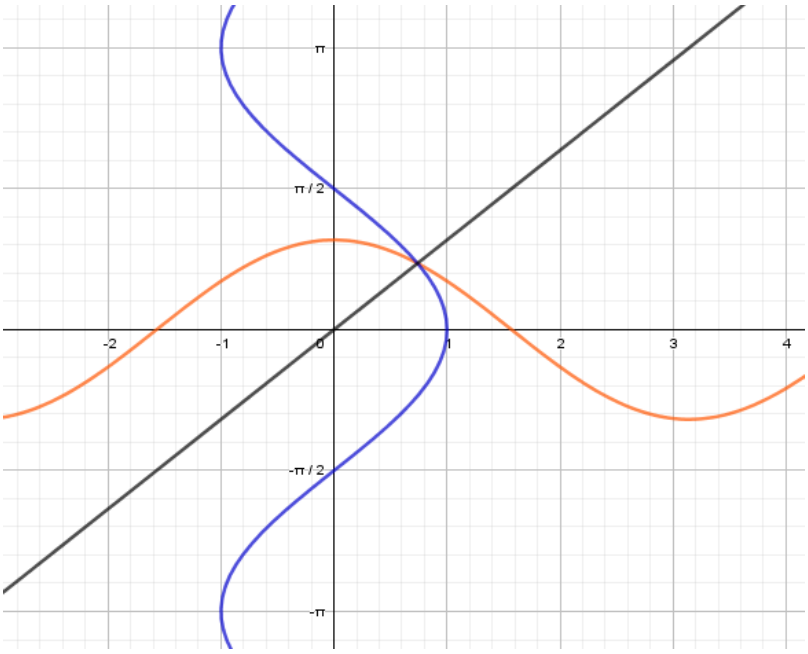
(1) Géén V.A. omdat de functie voor geen enkele x-waarde naar $\pm\infty$ zal gaan. Het bereik is immers beperkt van $-\frac{\pi}{2}$ tot $\frac{\pi}{2}$.

(2) Géén H.A. en S.A. kan niet omdat het domein is beperkt tot [-1, 1].

--> $\lim_{x\to\pm\infty} Bgsin(x)$ gaat niet omdat de boogsinus maar tot x = 1 kan gaan, zeker en vast niet tot en met x = oneindig.

# 2.2) Boogcosinusfunctie

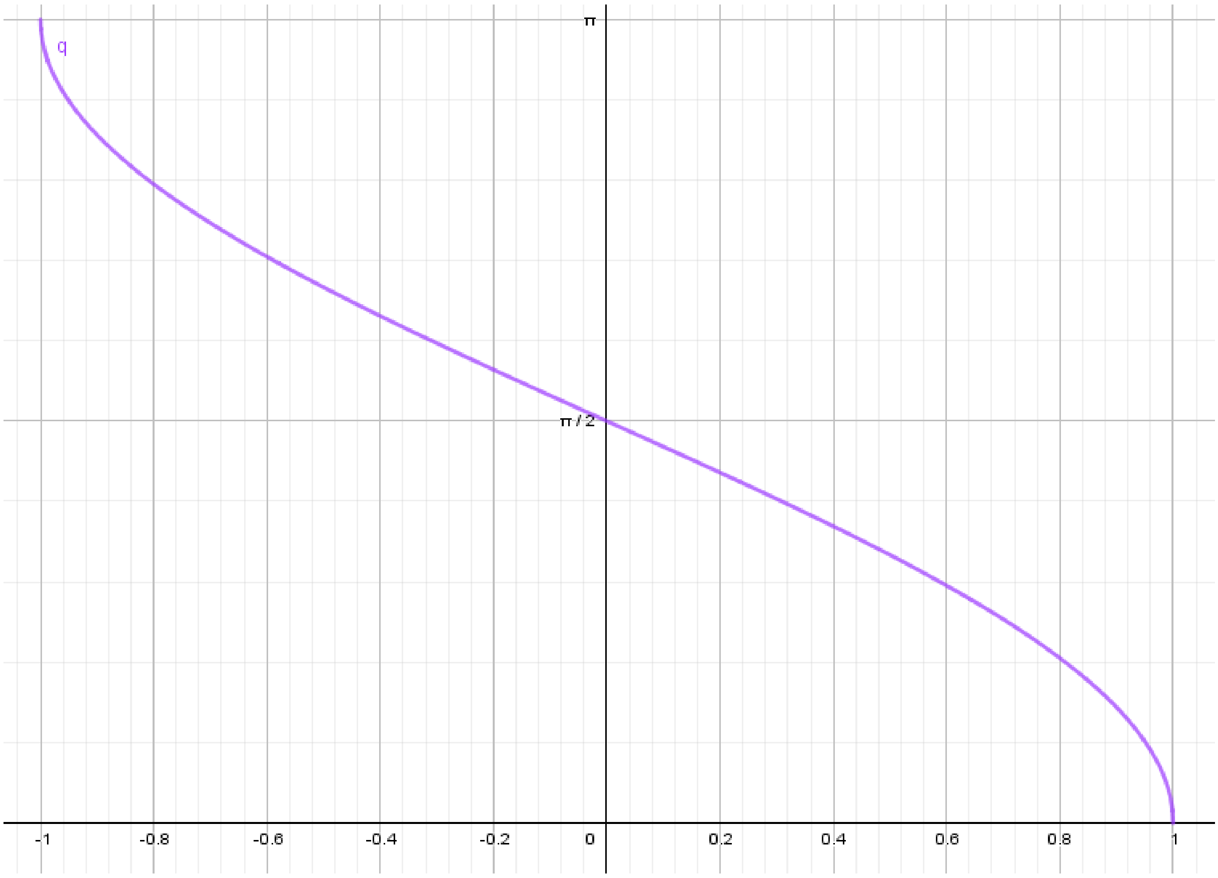
## 2.2.1) Inverse van de cosinusfunctie + bereik beperken




Zoals je ziet is de inverse van de cosinusfunctie ook géén functie. Daarom beperken we het bereik van de cosinusfunctie tot volgend interval: $[0, \pi]$.

Dit is logisch. Als je Bgcos(1)/shift-cosinus 1 invoert in je rekenmachine krijg je 0 radialen. Voer je Bgcos(-1) in in je rekenmachine krijg je $\pi$ radialen. Dit komt overeen met het minimum en maximum van de cosinusfunctie zelf.

## 2.2.2) Grafiek




## 2.2.3) Definitie

$$Bgcos: \quad [-1,1] \to [0,\pi] \qquad y = Bgcos\, x \quad \Leftrightarrow \quad (x = \cos y \quad \text{en} \quad 0 \le y \le \pi)$$
$$x \quad \to y = Bgcos\, x$$

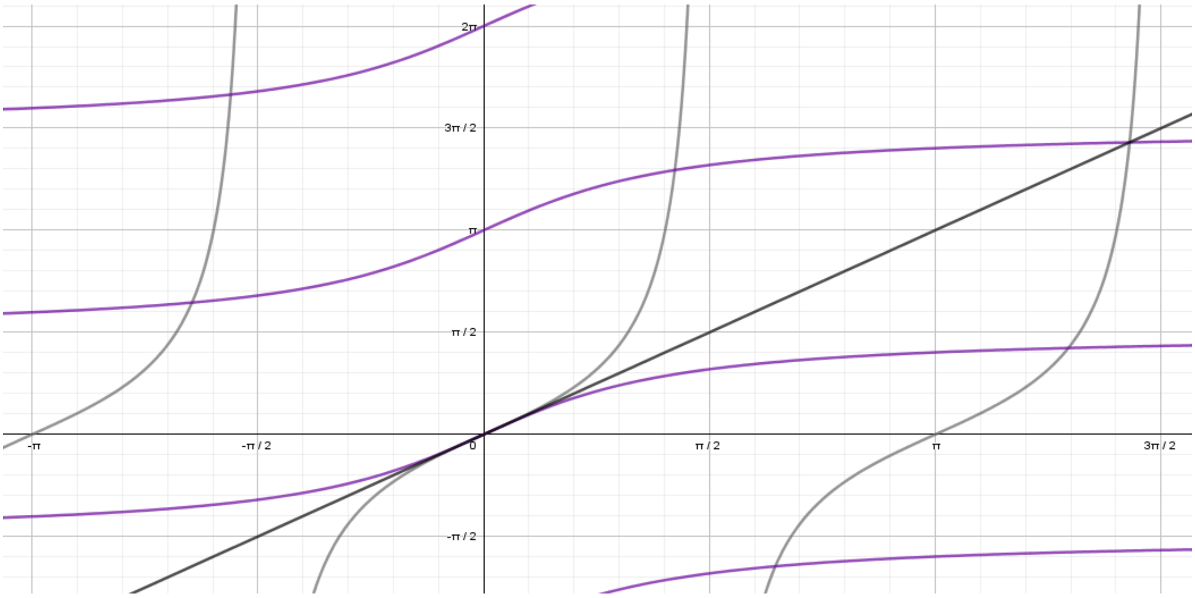
## 2.2.4) Asymptoten

Omdat de cosinusfunctie géén asymptoten heeft, heeft de boogcosinusfunctie natuurlijk ook geen asymptoten.

Redenering: Omdat het domein en bereik beperkt zijn, zijn er géén asymptoten mogelijk.
--> V.A.: $\lim_{x \to a} f(x)$ zal nooit naar $\pm\infty$ gaan omdat het bereik is beperkt tot $[0,\pi]$
--> H.A./S.A.: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ kan nooit omdat het domein is beperkt tot [-1, 1]

# 2.3) Boogtangensfunctie

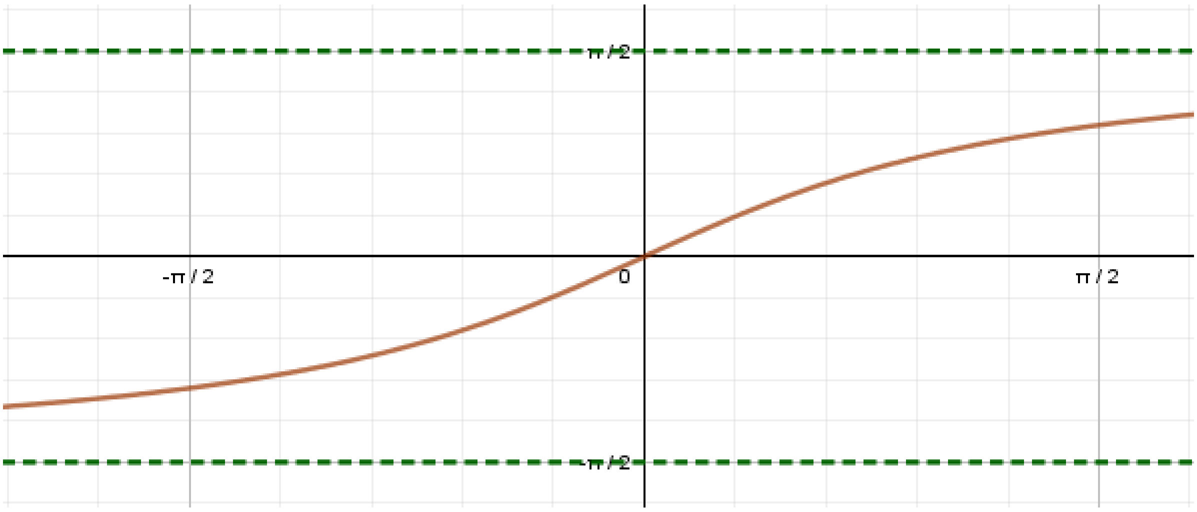
## 2.3.1) Inverse van tangensfunctie + bereik beperken




Grijze kromme = tangensfunctie
Paarse kromme = inverse van tangensfunctie

Zoals je op de bovenstaande afbeelding kan zien is de inverse van de tangensfunctie ook géén functie omdat één x-waarde verschillende y-waardes heeft. We zullen het bereik van onze inverse tangensfunctie (boogtangensfunctie) dus beperken tot $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Merk om dat dit tussen de waarden van de asymptoten van de tangensfunctie zit.

## 2.3.2) Grafiek




Het domein is hier, in tegenstelling tot de andere cyclometrische functies die we tot nu toe hebben gedefinieerd, wél héél $\mathbb{R}$. Dit komt doordat de tangensfunctie niet beperkt is tot de straal van de goniometrische cirkel maar verder kan gaan dan de straal van de G.C.!

Merk direct de horizontale asymptoten op: $y = \pm \frac{\pi}{2}$

## 2.3.3) Definitie

$$Bgtan: \quad \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \qquad y = Bgtan\, x \quad \Leftrightarrow \quad \left(x = \tan x \quad \text{en} \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right)$$
$$x \to y = Bgtan\, x$$

## 2.3.4) Asymptoten

Als we de functie $y = \tan x$ in één periode-interval bekijken, bv.: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, dan merken we twéé asymptoten op, namelijk…
V.A.: $x = -\frac{\pi}{2}$ *(voor x naar -∞)* en $x = \frac{\pi}{2}$ *(voor x naar +∞)*
De tangens van 90° is immers zinledig aangezien de cosinus van $\frac{\pi}{2}$ 0 wordt, zoals je ook kan afleiden uit de boogcosinusfunctie.

We weten dat de boogtangensfunctie de inverse is van de tangensfunctie en de inverse bepaalde je door x en y van plaats te wisselen. Dat doen we dan ook met de asymptoten, nietwaar?
H.A.: $y = -\frac{\pi}{2}$ en $y = \frac{\pi}{2}$

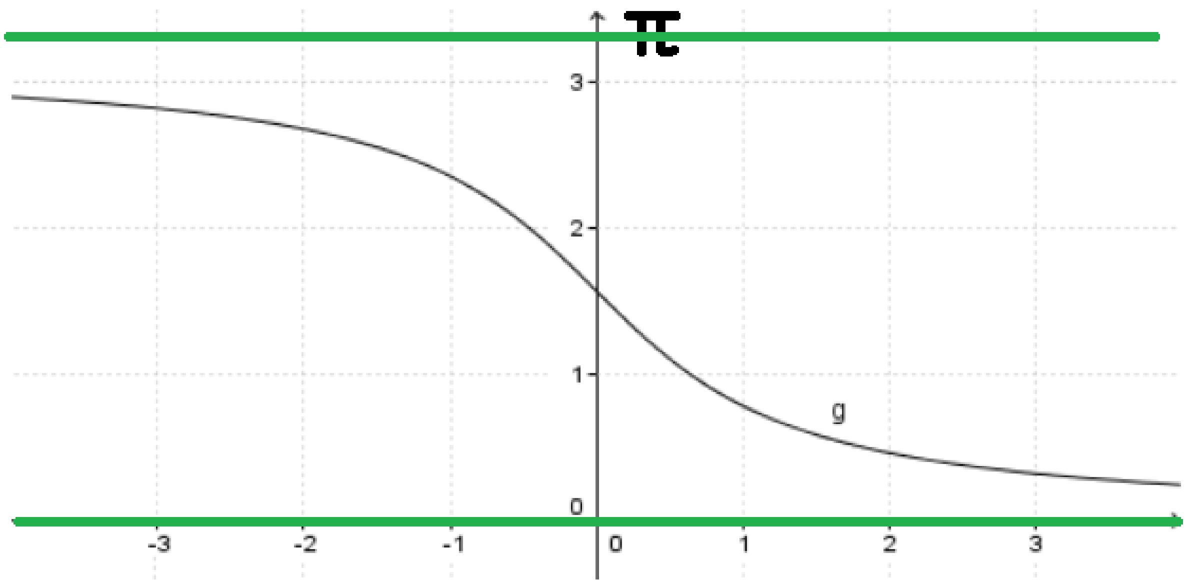
Zoals je op de grafiek zag zijn dit ook de asymptoten van de boogtangensfunctie.

# 2.4) Boogcotangensfunctie

Dit is de laatste cyclometrische functie die we leren!

## 2.4.1) Grafiek

Omdat je nu wel weet hoe het gaat sla ik de inverse over. We beperken het bereik van de boogcotangensfunctie tot het interval $[0, \pi]$, dit ligt tussen de 2 asymptoten van de cotangensfunctie.




Merk op dat het domein van de boogcontangensfunctie ook $\mathbb{R}$ is. De cotangens is immers ook niet gelimiteerd tot de straal van de goniometrische cirkel.

Merk ook direct twéé horizontale asymptoten op: $y = 0$ en $y = \pi$.

### 2.4.2) Definitie

$$\begin{array}{llll} Bgcot: & \mathbb{R} \rightarrow\ ]0,\pi[ & y = Bgcot\ x \quad \Leftrightarrow & (x = \cot x \quad \text{en} \ \ 0 \leq y \leq \pi) \\ & x \ \rightarrow \ y = Bgcot\ x & & \end{array}$$

### 2.4.3) Asymptoten

Je al dat we voor de inverse functie te bepalen de y en x van plaats verwisselen. Zullen we dat ook voor de asymptoten doen? Waarom niet.

De cotangensfunctie (y = cot x) heeft twéé verticale asymptoten in één periode-interval…
V.A.: $x = 0 \quad en \quad x = \pi$

Nu is de boogcotangensfunctie (y = Bgcot x) de inverse van de cotangensfunctie…
H.A.: $y = 0 \quad en \quad y = \pi$

De uitgebreide uitleg voor waarom V.A. en S.A. niet bestaan in de cotangensfunctie verloopt volledig analoog aan die van de tangensfunctie en bespreek ik hier daarom niet. Zoek zelf uit!

## 2.5) Belangrijke opmerkingen

*Het interval waarin we elke gonio-/cyclometrische functie hebben beperkt noemen we de hoofd-waarden van de cyclometrische functie.
*Cyclometrische functies zijn continu in elk punt van hun domein.

# 3) Eigenschappen cyclometrische functies

## 3.1) Rekenregels

### 3.1.1) Opheffing

*Zoals je weet heft plus min op (1-1 = 0), heft de worteltrekking de machtsverheffing op. Zo heffen de sinus en de boogsinus elkaar ook op.
*Er geldt steeds:
(1) $\sin(Bgsin\ x) = x$
(2) $\tan(Bgtan\ x) = x$
(3) $\cos(Bgcos\ x) = x$
(4) $\cot(Bgcot\ x) = x$

*Typ in je rekenmachine: $\sin(Bgsin\ \ 1)$, dan kom je normaal 1 uit.

LET OP: het omgekeerde geldt niet altijd! Dus niet $Bg\sin(\sin x) = x$

### 3.1.2) Rekenregels

#### *3.1.2.1) Rekenregels*

Er zijn enkele rekenregels die je goed vanbuiten moet weten.

(1) $\cos(Bgsin\ x) = \sqrt{1-x^2}$
(2) $\sin(Bgcos\ x) = \sqrt{1-x^2}$
(3) $\tan(Bg\cot x) = \frac{1}{x}$
(4) $\cot(Bg\tan x) = \frac{1}{x}$

#### *3.1.2.2) (VERDIEPING) Bewijs van die rekenregels*

We bewijzen enkel rekenregel (1), de rest verloopt analoog.

(1) $\cos(Bgsin\ x) = \sqrt{1-x^2}$
We beginnen vanaf het linkerlid
--> Hulponbekende: y = Bgsin x ⇔ x = sin(y)
➔ DUS: $\cos(y) = +\sqrt{1-sin^2(y)}$
--> Uit onze hulponbekende volgt: $\cos(Bgsin\ x) = \sqrt{1-x^2}$

We hebben het bewezen!

### 3.1.3) Voorbeeldoefeningen op deze eigenschappen

**<u>Oefening 1 in de cursus – kolom 1:</u>**
a) $Bgsin\ 1 =$ ___
--> Om deze oefening op te lossen voer je gewoon de [SHIFT][SINUS] in in je rekenmachine. De boogsinus is immers gelijk aan de arcsinus, de inverse van de sinus.

$= \frac{\pi}{2}$

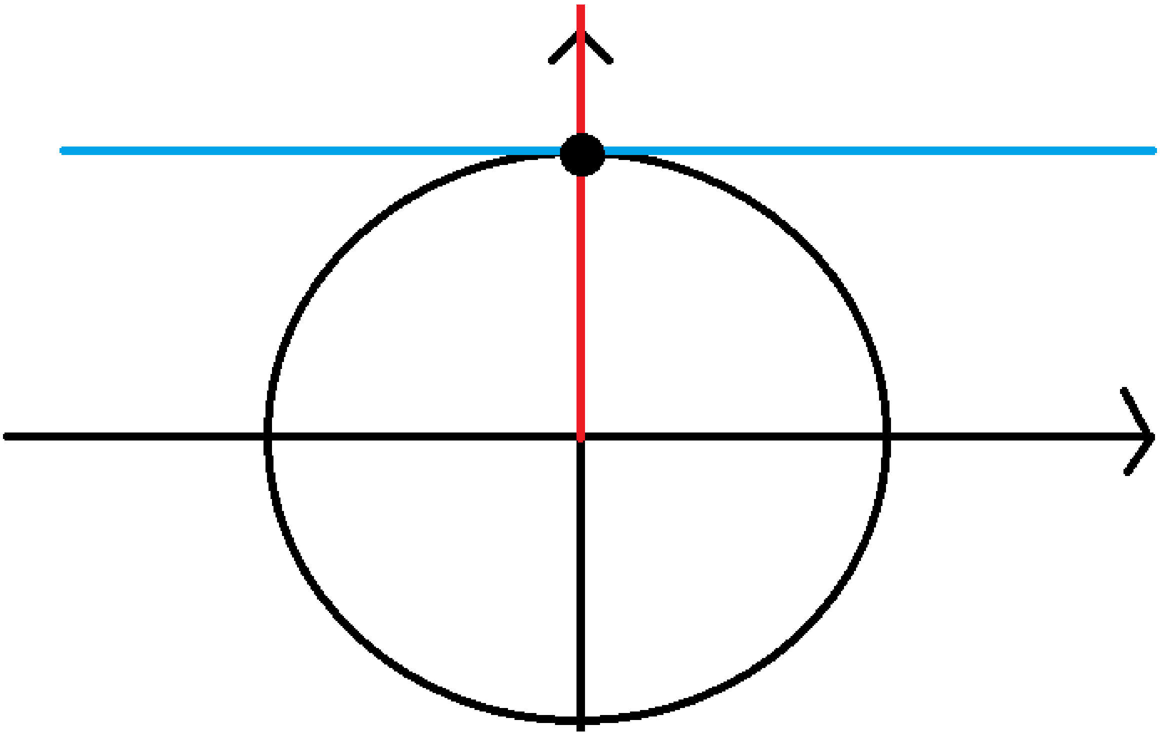
Dit soort oefeningen zou geen probleem moeten zijn

g) $Bgcot\ 0 =$ ____

--> Let op: je hebt op je rekenmachine géén knop voor de cotangens.

--> Een veelgemaakte fout is dat men dan gaat zeggen: $Bgcot\ 0 = \frac{1}{Bgtan\ 0}$, dit mag niet! Cot = 1/tan maar de boogcotangens is niet 1/boogtangens!

--> Je zult voor deze oefening een beetje grafisch moeten gaan redeneren. Jep, via de goniometrische cirkel.



--> Zoals je normaal gezien zou moeten weten lees je de cotangens af op het snijpunt met je hoek en de rechte aan het uiteinde van je cirkel evenwijdig met de x-as. Nu, wanneer wordt de cotangens 0? Als de x-waarde van dit snijpunt 0 is. Je ziet duidelijk dat dit pas bereikt wordt bij 90° oftewel beter bekend als $\frac{\pi}{2}$.

Het antwoord is dus: $Bgcot\ 0 = \frac{\pi}{2}$.

h) $Bgcot(-\sqrt{3}) =$ _____

--> Dit is moeilijker af te lezen op de goniometrische cirkel. Echter kan je al ergens starten…

--> $\tan x = \frac{1}{\cot x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

--> $Bgtan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}\ rad$

--> Formules voor antisupplementaire hoeken: $\tan\left(\pi - \left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) = -\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

--> Dit is je hoekgrootte voor de boogcotangens! Je antwoord is: $\frac{5\pi}{6}$.

**Oefening 1 in de cursus – kolom 2:**

i) $\sin\left(Bgcos\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ --> dit is letterlijk een formule die we hebben gezien.

$$= \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

j) $\tan\left(Bgcos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$ --> tan kan je schrijven als sin/cos

$= \frac{\sin\left(Bgcos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)}{\cos\left(Bgcos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)}$ --> Dit zijn letterlijk 2 rekenregels

$$= \frac{\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}}{-\frac{1}{4}} = -\sqrt{15}$$

l) $\sin(Bgtan\ \sqrt{7})$

Om deze (soort) oefeningen te maken moet je volgende formules kennen:

$1 + tan^2x = \frac{1}{cos^2x} \Leftrightarrow cos^2x = \frac{1}{1+tan^2x}$

$1 + cot^2x = \frac{1}{sin^2x} \Leftrightarrow sin^2x = \frac{1}{1+cot^2x}$

$\sin(Bgtan\ \sqrt{7})$, je weet nu hoe je de sinus anders kan schrijven, namelijk: $sin^2x = \frac{1}{1+cot^2x}$, dus de sinus is de wortel hiervan.

$\sqrt{\frac{1}{1+cot^2(Bgtan\ \sqrt{7})}}$ is je nieuwe uitdrukking.

Je kent een formule voor cotangens en Bgtan, cot(Bgtan x) wordt 1/x.

$= \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2}}$ --> kwadraat niet vergeten omdat je cotangens in het kwadraat staat!

$$= \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{7}}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{8}{7}}} = \sqrt{\frac{7}{8}}$$

Dit typ je nu in in je rekenmachine, dit is $\frac{\sqrt{14}}{4}$. Je hebt de oefening opgelost!

## Let op: op de toets moet je tussenstappen schrijven, je mag dus niet zomaar het getal ingeven in je rekenmachine en dan het antwoord geven.

p) $\cos\left(Bgtan\left(\frac{3}{4}\right) + Bgsin\ \left(\frac{4}{5}\right)\right)$

--> Dit is een optellingsformule die in je formuleblad staat.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\ .\cos\beta - \sin\alpha\ .\sin\beta$$

$$\cos\left(Bgtan\left(\frac{3}{4}\right) + Bgsin\ \left(\frac{4}{5}\right)\right)$$

$$= \cos\left(Bgtan\left(\frac{3}{4}\right)\right).\cos\left(Bgsin\ \left(\frac{4}{5}\right)\right) - \sin\left(Bgtan\left(\frac{3}{4}\right)\right)\ .\sin\left(Bgsin\ \left(\frac{4}{5}\right)\right)$$

We lossen alles apart op voor de ordelijkheid:

$\cancel{(1)\cos\left(Bgtan\left(\frac{3}{4}\right)\right)}$

--> De cosinus kan je herschrijven als $\sqrt{\frac{1}{1+tan^2x}}$

Dus: $\sqrt{\frac{1}{1+tan^2\left(Bgtan\left(\frac{3}{4}\right)\right)}} = \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{4}{5}$

$\cancel{(2)\cos\left(Bgsin\left(\frac{4}{5}\right)\right)}$

We kennen een formule voor cos(Bgsin), namelijk $\sqrt{1-x^2}$

--> Dus: $\cos\left(Bgsin\left(\frac{4}{5}\right)\right) = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$

$\cancel{(3)\sin\left(Bgtan\left(\frac{3}{4}\right)\right)}$

Je kan de sinus herschrijven als $\sqrt{\frac{1}{1+cot^2x}}$

--> Dus: $\sqrt{\frac{1}{1+cot^2\left(Bgtan\left(\frac{3}{4}\right)\right)}}$

--> Voor cot(Bgtan) kennen we ook een formule, namelijk 1/x.

--> Dus: $\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{\frac{3}{4}}\right)^2}}$ (niet vergeten kwadraat omdat je cot² hebt!)

$= \frac{3}{5}$

$\cancel{(4)\sin\left(Bgsin\left(\frac{4}{5}\right)\right)}$

De sinus en boogsinus heffen, zoals je al weet, elkaar op.

$\sin\left(Bgsin\left(\frac{4}{5}\right)\right) = \frac{4}{5}$

We hebben ons probleem dus zeer fel vereenvoudigd, we kunnen het herleiden tot en met dit…

$$\cos\left(Bgtan\left(\frac{3}{4}\right)\right).\cos\left(Bgsin\left(\frac{4}{5}\right)\right) - \sin\left(Bgtan\left(\frac{3}{4}\right)\right).\sin\left(Bgsin\left(\frac{4}{5}\right)\right)$$

$$= \frac{4}{5}.\frac{3}{5} - \frac{3}{5}.\frac{4}{5} = 0$$

En we zijn klaar!

n) $\sin\left(2Bgtan\frac{1}{2}\right)$

--> Nu heb je een 2 voor jouw boogtangens, echter hebben we een verdubbelingsformule op onze formuleblad die deze 2 wegwerkt.

→ $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$

$= 2\sin\left(Bgtan\frac{1}{2}\right).\cos\left(Bgtan\frac{1}{2}\right)$

--> Nu zit je met je sinus en boogtangens en cosinus en boogtangens. Inmiddels weet je echter al hoe je dit moet wegwerken. Je doet dit met de formule…

$\sin x = \sqrt{\frac{1}{1+cot^2x}}$ en $\cos x = \sqrt{\frac{1}{1+tan^2x}}$

$= \sqrt{\frac{1}{1+cot^2\left(Bgtan\frac{1}{2}\right)}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+tan^2\left(Bgtan\frac{1}{2}\right)}}$

--> Je kent de formule voor cot(Bgtan), dit is 1/x.

--> Je weet dat tan(Bgtan) elkaar opheft.

$= \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$ (vergeet je kwadraten niet over te nemen!)

$= \sqrt{\frac{1}{1+2^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$

$= \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{4}}} = \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{5}{4}}} = \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} = 0{,}4$

o) $\cos\left(2Bgsin\frac{3}{5}\right)$

--> Op ons formuleblad staat een handige verdubbelingsformule: cos 2x = 1 – 2sin² x

$= 1 - 2\,sin^2\left(Bgsin\frac{3}{5}\right)$

--> Zoals je weet heffen de sinus en boogsinus elkaar op. Kwadraat niet vergeten!

$= 1 - 2 \,.\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$

Nu heb ik een soort van alle moeilijke oefeningen van oefening 1 besproken. Als je deze snapt zou de rest moeten lukken!

## NIET VERGETEN:

$$\sin(Bgcos\ x) = \cos(Bgsin\ x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\tan(Bgcot\ x) = \cot(Bgtan\ x) = \frac{1}{x}$$

$$sin^2x = \frac{1}{1+cot^2x} \Leftrightarrow \sin x = \sqrt{\frac{1}{1+cot^2x}}$$

$$cos^2x = \frac{1}{1+tan^2x} \Leftrightarrow \cos x = \sqrt{\frac{1}{1+cot^2x}}$$

# 4) Limieten en afgeleiden bij cyclometrische functies

## 4.1) Limieten

Limieten bij cyclometrische functies verlopen op analoge wijze als met andere functies. We herhalen hier hoe je limieten uitrekent.

### 4.1.1) Limieten uitrekenen: x --> getal

(1) Je vult je x-waarde altijd als eerst in en kijkt of je een onbepaalde waarde (MATH ERROR) of niet uitkomt. Als je een bepaalde waarde uitkomt is dit je uitkomst. Anders mag hel beginnen.

(2) Kom je 0/0 of oneindig/oneindig uit?

--> Hier komt onze goede vriend L'hôpital terug. Je moet L'Hôpital uitvoeren, dus teller en noemer apart afleiden.

--> De rekenregels voor afgeleiden bij cyclometrische functies zijn als volgt:

(1) $D\big(Bgsin\,(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(2) $D\big(Bgcos\,(x)\big) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $D\big(Bgtan\,(x)\big) = \frac{1}{1+x^2}$

(4) $D\big(Bgcot(x)\big) = -\frac{1}{1+x^2}$

(3) Kom je een getal/0, bv.: 8/0 uit? Je pakt een getal kortbij je x-waarde en checkt de teken van teller en noemer apart na. Je functie zal + of – oneindig naderen.

### 4.1.2) Limieten uitrekenen: x --> +- ∞

(1) Heb je geen breuk? Dan moet je + of - ∞ gewoon invullen. Soms moet je echter redeneren i.p.v. berekenen.

--> Bv.: $\lim\limits_{x \to -\infty} \text{Bgcot}\, x$

→ Wanneer gaat de boogcotangens naar – oneindig? Dit is bij een asymptoot.

==> De boogcotangens heeft 2 verticale asymptoten, namelijk y = 0 en y = $\pi$

--> Je weet uit de grafiek dat als x – oneindig nader y het getal $\pi$ nadert.

→ Dit is dus ook je antwoord.

(2) Heb je een breuk? Dan moet je dezelfde rekenregels als bij rationale functies volgen.

--> graad teller > graad noemer ==> x zal + of – oneindig naderen.

--> graad teller = graad noemer ==> vereenvoudigen.

--> graad teller < graad noemer ==> limiet zal 0 naderen.

Dit wordt allemaal duidelijk in de voorbeeldoefeningen.

## 4.2) Voorbeeldoefeningen

a) $\lim\limits_{x \to 1} Bg\tan x = \text{Bgtan}\,1 = \frac{\pi}{4}$

(dit was gewoon invullen)

b) $\lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} Bgsin\,\sqrt{x-3} = Bgsin\,\sqrt{3-3} = Bgsin\,0 = 0$

--> Ookal staat er het rechterlimiet (x>3), je begint met 3 in te vullen. Enkel en alleen indien je een onbepaalde vorm uitkomt ga je groter dan 3 gaan!

h) $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\cot x}{Bgsin\,x} = \frac{0}{0}$

--> Nu moet je L'Hôpital gebruiken. Dit betekent teller en noemer apart afleiden.

--> Herinner jezelf de afgeleide van cotangens ==> $Dcot\;x = -\frac{1}{sin^2 x}$

$$= (H) \frac{-\frac{1}{sin^2 x}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = -\frac{1}{sin^2 x} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{1}\;(delen\;door\;breuk = maal\;omgekeerde) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{sin^2 x}$$

➔ Nu vul je 0 opnieuw in: $\frac{\sqrt{1-x^2}}{sin^2 x} = \frac{1}{0}$

--> Je komt nu een getal/0 uit. Nu moet je een getal kortbij 0, kleiner dan 0 (vanwege de <-teken) pakken en het teken van teller en noemer apart nachecken.

--> We pakken bv.: -0,1.

➔ Dus: $\frac{\sqrt{1-x^2}}{sin^2 x} = \frac{\sqrt{1-(-0{,}1)^2}}{sin^2(-0{,}1)} = \frac{+}{+} = +$

--> Onze limiet gaat dus $+\infty$ naderen.

i) $\lim_{x \to -\infty} Bgtan\,x$

--> Je kan deze oefening niet zomaar met de rekenregels oplossen. Je moet deze oefening oftewel beredeneren oftewel numeriek opzoeken.

--> <u>Werkwijze 1: numeriek opzoeken van limieten</u>

- ∞ is geen reëel getal, je zal het dus ook niet zo kunnen ingeven in je rekenmachine. Echter kan je - ∞ wél benaderen.

--> Stel ik vul -1000 in, in Bgtan x, dan krijg ik -1,5679…

--> Stel ik vul -1000000000000 in mijn limiet in, dan krijg ik -1,5707…

==> -100000000000 is toch wel kortbij min oneindig. Nu, omdat je zo goed bent in getallen, weet jij dat $\pi = 3{,}14$. 1,57 is daar de helft van, ons antwoord is dus $\frac{\pi}{2}$.

--> <u>Werkwijze 2: inzicht</u>

--> Je kent de verticale asymptoten van de tangensfunctie: $x = -\frac{\pi}{2}$ en $x = \frac{\pi}{2}$

➔ Je weet dat als y $-\infty$ nadert x naar $-\frac{\pi}{2}$ gaat.

--> Bij de boogtangensfunctie worden dit horizontale asymptoten: $y = -\frac{\pi}{2}$ en $y = \frac{\pi}{2}$

➔ Analoog met de tangensfunctie: als x $-\infty$ nadert gaat y naar $-\frac{\pi}{2}$.

==> $-\frac{\pi}{2}$ is het antwoord op deze vraag!

l) $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} Bgtan \frac{1}{\sqrt{x}}$

--> DUS: $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} Bgtan \frac{1}{\sqrt{x}} = MATH\;ERROR$

--> Maar huh? Je hebt geen 0/0 noch oneindig/oneindig noch getal/0?!

--> L'Hôpital kan niet, Horner zeker niet en teller/noemer apart nachecken kan ook niet.

We kunnen de limiet echter wél numeriek opzoeken. Ze hebben immers de rechterlimiet gevraagd. We vullen een getal kortbij 0, groter dan 0 in (bv.: 0,0000000001).

--> $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} Bgtan \frac{1}{\sqrt{x}} = Bgtan \frac{1}{\sqrt{0{,}0000000001}} = 1{,}5707 \ldots$

--> Je weet dat 1,57 = 3,14/2. Deze limiet nadert dus $\frac{\pi}{2}$.

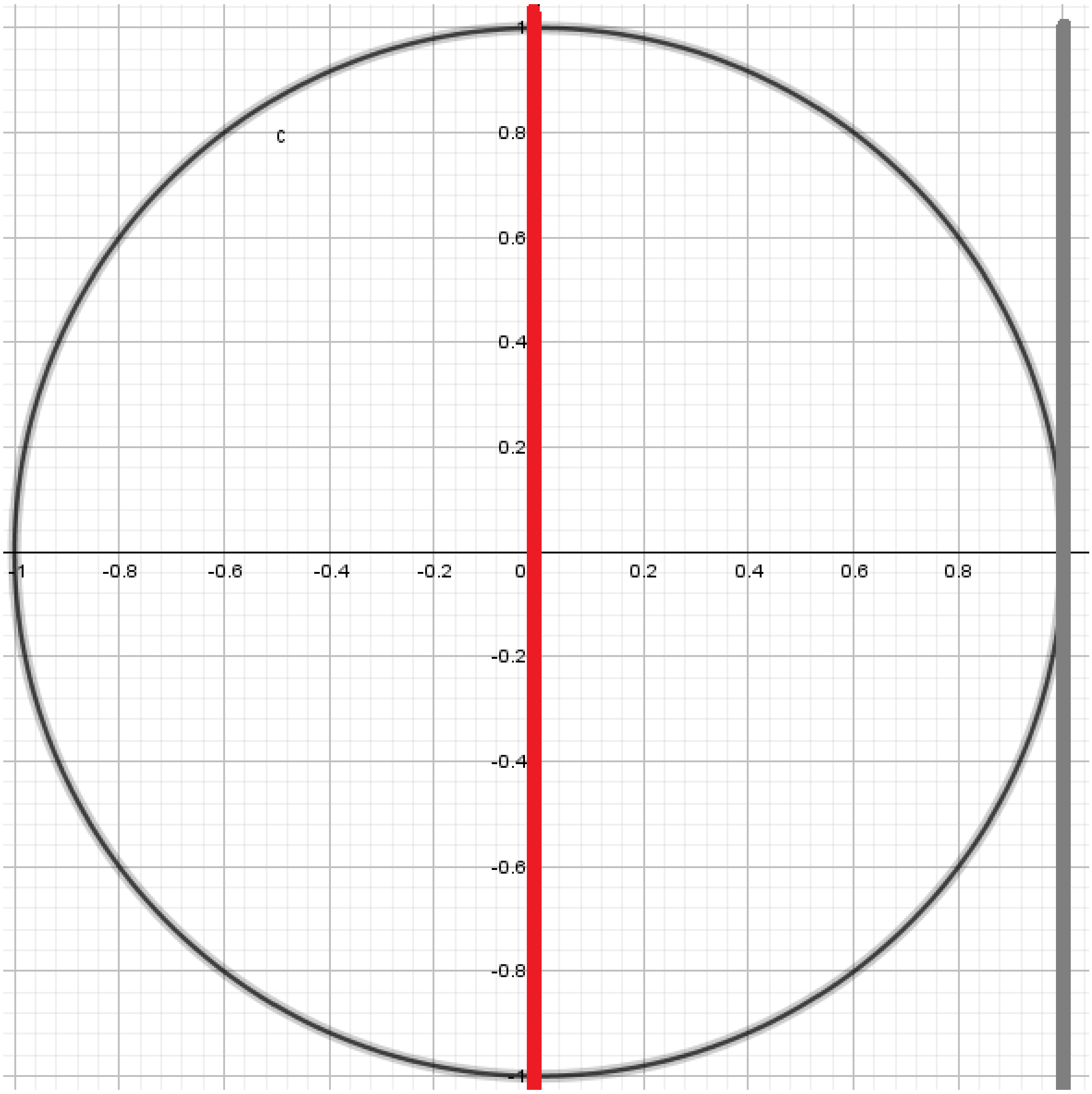
n) $\lim_{x \to 0} Bgtan \left( \frac{3 \sin x}{x \sqrt{x}} \right) = Bgtan \left( \frac{0}{0} \right) = MATH\ ERROR$

--> Je kan geen L'hôpital gebruiken aangezien de 0/0 in je Boogtangens zit.

--> Je kan de limiet numeriek opzoeken, we nemen x = 0,00000000001

--> $\lim_{x \to 0} Bgtan \left( \frac{3 \sin 0{,}00000001}{0{,}0000001 \sqrt{0{,}0000001}} \right) = 1{,}57 \ldots$

➔ $1{,}57 = \frac{3{,}14}{2} = \frac{\pi}{2}$




Merk op de goniometrische cirkel op dat de rechte die door x = 0 gaat 90° heeft (= $\frac{\pi}{2}$), de tangens van 90° is niet gedefinieerd, daarom kom je bij 90° telkens MATH ERROR uit.

q) $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{Bgcos\ x}{Bgsin\ x - \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{-\pi} = -1$

t) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{2(1+x)}{\pi+2Bg\sin x} = \frac{0}{0}$

--> Voordat ik begin met afleiden schrijf ik onze teller ander…

$\frac{2+2x}{\pi+2Bg\sin x}$

--------------L'Hôpital------> $\frac{0+2}{0+2.\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)} = \frac{2}{\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{2} = \sqrt{1-x^2}$

--> We vullen -1 nu in: $\sqrt{1-(-1)^2} = \sqrt{0} = 0$

Merk op dat je deze limiet ook numeriek kon benaderen, vul eens -0,99999 in? :)

u) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{Bgcos\, x}{\sqrt{1-x}} = \frac{0}{0}$

--> Dus: L'hôpital!

$= \frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{1-x}}} = -\frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{0}{0}$

--> Nog eens L'hôpital: $-\frac{\frac{2.1}{2\sqrt{1-x}}}{\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}} = \frac{4\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x}} = \frac{0}{0}$

➔ Je gaat er duidelijk niet geraken met L'hôpital, we zoeken de limiet numeriek op.

--> We vullen een getal in de buurt van 1, kleiner dan 1 in…

$\frac{Bgcos\,(0{,}9999)}{\sqrt{1-0{,}9999}} = 1{,}4142\ldots$

--> Dit getal is gelijk aan $\sqrt{2}$.

x) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{1}{Bgsin(2x)} - \frac{1}{x}\right)$

Deze oefening valt zowel inzichtelijk als numeriek als algebraïsch op te lossen.

--> Inzichtelijk herinner je jezelf de definitie van limieten, we <u>benaderen</u> een bepaald getal. Wat doet deze uitdrukking als x 0 langs de positieve kant benadert?

--> Wel, je kan dit zelfs énkel aan de uitdrukking $\frac{1}{x}$ zien. Als x in het oneindige 0 benadert, bv. het getal 0,0000001. Dan wordt de breuk $\frac{1}{x}$ oneindig groot.

--> Echter heb je daar een min voor, je doet dus min iets oneindig groot.

--> Een getal min iets oneindig groot = - oneindig, je limiet gaat naar $-\infty$.

--> Numeriek kan je opnieuw een x-waarde groter dan 0 invullen. Vul je bijvoorbeeld 0,00001 in krijg je het getal -50 000, als je een kleiner getal kortbij 0 invoert krijg je nog een kleiner getal … zo zie je numeriek dat je limiet naar - ∞ gaat.

--> Algebraïsch zet je jouw uitdrukking éérst op gelijke noemers.

--> Dus: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{x-Bgsin\,(2x)}{Bgsin(2x)\,.x}\right)$

--> 0/0, je moet L'hôpital uitvoeren: $\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}.2\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\right).2x+Bgsin(2x).1} = -\frac{1}{0}$

--> Bij een getal/0 moet je een waarde kortbij je gegeven waarde (0), groter dan 0 invullen. We vullen 0,1 in en checken de teken van teller en noemer apart na.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{x-Bgsin\,(2x)}{Bgsin(2x)\,.x}\right) = \frac{0{,}1-Bgsin\,(2.0{,}1)}{Bgsin(2.0{,}1)\,.0{,}1} = \frac{-}{+} = -\infty$

# 4.2) Afgeleiden

## 4.2.1) Rekenregels afleiden cyclometrische functies

Er bestaan 4 rekenregels voor het afleiden van cyclometrische functies die je vanbuiten moet kennen…

(1) $D(Bgsin\ x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(2) $D(Bgcos\ x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $D(Bgtan\ x) = \frac{1}{1+x^2}$

(4) $D(Bgcot\ x) = -\frac{1}{1+x^2}$

Vergeet niet de kettingregel uit te voeren als je bijvoorbeeld Bgsin 2x moet afleiden!

Ook mag je de afgeleiden van de normale goniometrische functies niet vergeten…

$D(\sin x) = \cos x$

$D(\cos x) = -\sin x$

$D \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$D \cot x = -\frac{1}{\sin^2\ x}$

## 4.2.2) Voorbeeldoefeningen

**Oefening 3 in de cursus:**

a) $f(x) = Bgsin(7x)$

--> $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(7x)^2}} \cdot 7$ (KETTINGREGEL NIET VERGETEN!!!)

$= \frac{7}{\sqrt{1-49x^2}}$

b) $f(x) = Bgsin\sqrt{1-x^2}$

--> $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (0-2x)$ **(TWEE KEER KETTINGREGEL TOEPASSEN!!!)**

→ 2x kettingregel omdat je jouw boogsinus afleidt, wat in je boogsinus zit en daarna ook nog je wortel!

$= \cdots$

$= \frac{-2x}{\sqrt{2-x^2}.lxl}$

e) $f(x) = Bgtan(3x-1)$

--> $f'(x) = \frac{1}{1+(3x+1)^2} \cdot (3-0) = \frac{1}{1+9x^2+6x+1^2} \cdot 3 = \frac{3}{2+9x^2+6x} = \frac{3}{9x^2+6x+2}$

**(NIET VERGETEN DE KETTINGREGEL TOE TE PASSEN!!!!!!)**

f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ Bgtan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)$

--> $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot D\left(Bgtan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)\right)$ $(D(k\,.f) = k\,.Df)$, een constant mag voor de afgeleide!

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)^2} \cdot \frac{\frac{1}{cos^2x}.\sqrt{2}-\tan x\,.0}{\left(\sqrt{2}\right)^2}$$ **(KETTINGREGEL TOEGEPAST: QUÖTIENTREGEL WANT WE HEBBEN EEN BREUK!!!)**

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1+\frac{tan^2x}{2}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{cos^2x}-0}{2}$$ (beetje vereenvoudigen…)

$$= \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{1+\frac{tan^2x}{2}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2\,cos^2x}$$ (beetje vereenvoudigen…)

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{tan^2x}{2}\right).2cos^2x}$$ (1/2 = constant getal, getal mag voor de afgeleide)

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{tan^2x}{2}\right).cos^2x}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2}{2}+\frac{tan^2x}{2}\right).cos^2x}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2+tan^2x}{2}\right).cos^2x}$$

$$= \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{(2+tan^2x).cos^2x}$$ (delen door een breuk = maal het omgekeerde, 2 gaat naar boven!)

$$= 1 \,. \frac{1}{\left(2+\frac{sin^2x}{cos^2x}\right).cos^2x}$$ (tan = sin/cos)

$$= \frac{1}{2cos^2x+\frac{sin^2x\,\cancel{cos^2x}}{\cancel{cos^2x}}}$$ (haakjes distributief uitwerken + schrappen)

$$= \frac{1}{2\,cos^2x+sin^2x}$$

$$= \frac{1}{2\,cos^2x+(1-cos^2x)}$$ ($sin^2$ + $cos^2$ = 1 --> grondformule van de goniometrie)

$$= \frac{1}{2cos^2x+1-cos^2x}$$ (nu gaan we aftrekken)

$$= \frac{1}{cos^2x+1}$$ (dit is je afgeleide!)

g) $f(x) = \frac{1}{1+cos^2x} - Bgtan(\cos x)$

--> Dit moet je zien als een soort van veeltermfunctie, je leidt elke term apart af (= somregel afgeleiden)

--> Om de overzichtelijkheid te bewaren leid ik eerst het paarsgekleurde deel af en daarna het blauwgekleurde deel.

→ PAARS: $f'(x) = \frac{0\,.(1+cos^2x)-1\,.(0+2\cos x\,.(-\sin x)}{(1+cos^2x)^2}$ (KETTINGREGEL NIET VERGETEN!)

$$= \frac{0-1\,.(2\cos x\,.(-\sin x))}{(1+cos^2x)^2}$$

$$= \frac{-2\cos x\,.(-\sin x)}{(1+cos^2x)^2}$$

$$= \frac{2\cos x\,.\sin x}{(1+cos^2x)^2}$$

→ BLAUW: $f'(x) = \frac{1}{1+cos^2x} \,.(-\sin x)$ (KETTINGREGEL NIET VERGETEN!!!)

We hebben dus: $f'(x) = \frac{2\cos x \,.\sin x}{(1+cos^2 x)^2} - \frac{-\sin x}{1+cos^2 x}$

--> Om de aftrekking uit te voeren, zetten we op gelijke noemers.

$$= \frac{2\cos x \,.\sin x}{(1+cos^2 x)^2} - \frac{-\sin x \,.(1+cos^2 x)}{(1+cos^2 x)^2}$$

--> Wacht eens even? – en – wordt plus.

$$= \frac{2\cos x \,.\sin x}{(1+cos^2 x)^2} + \frac{\sin x \,.(1+cos^2 x)}{(1+cos^2 x)^2}$$

$$= \frac{2\cos x \,.\sin x + \sin x \,.(1+cos^2 x)}{(1+cos^2 x)^2}$$

--> We brengen onzen sinus x binnen de haakjes.

$$= \frac{2\cos x \,.\sin x + \sin x + cos^2 x \,.\sin x}{(1+cos^2 x)^2}$$

$$= \frac{\sin x\,[2\cos x + 1 + cos^2 x]}{(1+cos^2 x)^2}$$ (sin x afzonderen)

$$= \frac{\sin x\,(1+\cos x)^2}{(1+cos^2 x)^2}$$ [(a²+2ab+b²) = a² + b² omgekeerd toegepast]

--> Dit is onze afgeleide!

h) $f(x) = Bgtan\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)$

--> $f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)^2} \cdot \frac{(0-\cos x)\,.\cos x - [(1-\sin x)\,.(-\sin x]}{cos^2 x}$ (KETTINGREGEL!!!)

$$= \frac{1}{1+\frac{(1-\sin x)^2}{cos^2 x}} \cdot \frac{-cos^2 x - [(-\sin x) + sin^2 x]}{cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1^2 - 2.\sin x + sin^2 x}{cos^2 x}} \cdot \frac{-cos^2 x + \sin x - sin^2 x}{cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\frac{cos^2 x}{cos^2 x} + \frac{1-2\sin x + sin^2 x}{cos^2 x}} \cdot \frac{-cos^2 x + \sin x - sin^2 x}{cos^2 x}$$

$$= \frac{\cancel{cos^2 x}}{cos^2 x + 1 - 2\sin x + sin^2 x} \cdot \frac{-cos^2 x + \sin x - sin^2 x}{\cancel{cos^2 x}}$$

$$= \frac{-cos^2 x + \sin x - sin^2 x}{cos^2 x + 1 - 2\sin x + sin^2 x} = \frac{-cos^2 x + \sin x - sin^2 x}{cos^2 x - 2\sin x + \sin^2 x + 1}$$

$$= \frac{-cos^2 x + \sin x - sin^2 x}{(1 \cancel{- sin^2 x}) - 2\sin x \cancel{+ \sin^2 x} + 1} = \frac{-(1 - sin^2 x) + \sin x - sin^2 x}{-2\sin x + 1}$$

$$= \frac{-1 \cancel{+ sin^2 x} + \sin x \cancel{- sin^2 x}}{-2\sin x + 2} = \frac{-1+\sin x}{2 - 2\sin x} = \frac{-1+\sin x}{2(1-\sin x)} = \frac{\cancel{-1+\sin x}}{-2\cancel{(-1+\sin x)}} = -\frac{1}{2}$$

i) $f(x) = Bgsin(\cos x)$

--> $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-cos^2 x}} \,.(-\sin x)$

$$= \frac{-\sin x}{\sqrt{1-cos^2 x}}$$ (dit antwoord is hetzelfde als die van de verbetersleutel)

k) $f(x) = x^2.Bgtan\, x + Bgtan\, x - x$

$$= 2x\,.Bgtan\, x + x^2.\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} - 1$$ (power-, som- en productregel!)

$$= 2x\,.Bgtan\, x + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2}{1+x^2}$$

$= 2x\,.\,Bgtan\,x + \frac{x^2+1-1-x^2}{1+x^2} = 2x\,.\,Bgtanx + \frac{0}{1+x^2}$

$= 2x\,.\,Bgtan\,x = jouw\ afgeleide!$

j) $f(x) = \sqrt{1-4x^2}\,.\,Bgsin(2x)$

--> $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-4x^2}}\,.(-8x).\,Bgsin(2x) + \sqrt{1-4x^2}\,.\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\,.\,2$

$= \frac{-8x\,.Bgsin(2x)}{2\sqrt{1-4x^2}} + \frac{2\sqrt{1-4x^2}}{\sqrt{1-4x^2}}$

$= \frac{-8x\,.Bgsin(2x)+4\sqrt{1-4x^2}}{2\sqrt{1-4x^2}}$

$= 2\left(\frac{-4x\,.Bgsin\,(2x)+2\sqrt{1-4x^2}}{2\sqrt{1-4x^2}}\right)$

--> Dit antwoord is hetzelfde als in de verbetersleutel, nagecheckt met Geogebra!

l) $Bgtan\left(\sqrt{x^2+1}\right) = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}\,.\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\,.\,2x$

$= \frac{1}{1+x^2+1}\,.\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

$= \frac{2x}{1+x^2+1\,.[2\sqrt{x^2+1}]}$

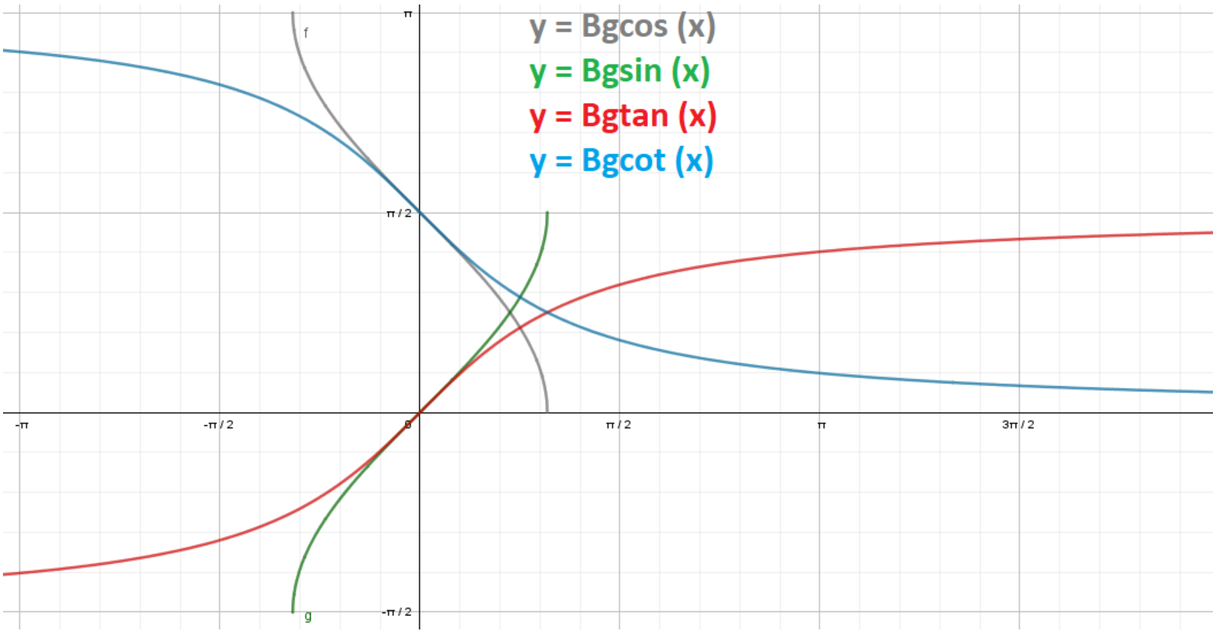
$= \frac{\cancel{2}x}{2+x^2.[\cancel{2}\sqrt{x^2+1}]}$

$= \frac{x}{(2+x^2).\sqrt{x^2+1}}$

# 5) Overzicht te kennen rekenregels

In dit hoofdstuk zijn zéér veel nieuwe rekenregels voorgekomen, hier som ik ze allemaal nog eens op.

## 5.1) Grafieken cyclometrische functies




Je kan aflezen dat het bereik beperkt is bij elke functie.

Je kan 2 asymptoten aflezen bij boogtangens en boogcotangens.
--> V.A. boogtangens: y = $-\frac{\pi}{2}$ (voor x naar – oneindig) en $y = \frac{\pi}{2}$ (voor x naar oneindig)
--> V.A. boogcotangens: $y = 0$ (voor x naar oneindig) en $y = \pi$ (voor x naar min oneindig)

Het beeld bij een cyclometrische functie is een hoekgrootte.

## 5.2) Rekenregels eigenschappen cyclometrische functies

### 5.2.1) Opheffing

De sinus en boogsinus, cosinus en boogcosinus … zijn elkaars tegengestelde bewerkingen en heffen elkaar dus op.

$\sin(Bgsin\, x) = x$
$\cos(Bgcos\, x) = x$
$\tan(Bgtan\, x) = x$
$\cot(Bgcot\, x) = x$

### 5.2.2) Rekenregels

Er zijn enkele merkwaardige rekenregels voor cyclometrische functies die je moet onthouden:

(1) $\sin(Bgcos\, x) = \cos(Bgsin\, x) = \sqrt{1 - x^2}$
(2) $\tan(Bgcot\, x) = \cot(Bgtan\, x) = \frac{1}{x}$

Let op: soms krijg je in de oefeningen bijvoorbeeld: $\sin(Bgtan\ x)$. Hiervoor hebben we géén specifieke rekenregel, je moet de sinus herschrijven naar een cotangens met volgende formule die niet op je formuleblad staat…

$$\sin x = \sqrt{\frac{1}{1+cot^2\ x}} \left(\Leftrightarrow sin^2 x = \frac{1}{1+cot^2 x}\right)$$

Je kan ook een vorm krijgen van bijvoorbeeld $\cos(Bgtan\ x)$, dan moet je de cos herschrijven als een tangens met volgende formule die niet op je formuleblad staat…

$$\cos x = \sqrt{\frac{1}{1+tan^2\ x}} \left(\Leftrightarrow cos^2 x = \frac{1}{1+tan^2 x}\right)$$

# 5.3) Rekenregels afgeleiden cyclometrische functies

## 5.3.1) Nieuwe rekenregels

Je mag de rekenregels voor het afleiden van cyclometrische functies niet vergeten.

(1) $D(Bg \sin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(2) $D(Bg \cos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(3) $D(Bg \tan x) = \frac{1}{1+x^2}$
(4) $D(Bg \cot x) = -\frac{1}{1+x^2}$

## 5.3.2) Oude rekenregels: goniometrische functies afleiden

De rekenregels voor het afleiden van goniometrische functies komen hier terug en mag je ook niet vergeten!

(1) $D(\sin x) = \cos x$
(2) $D(\cos x) = -\sin x$
(3) $D(\tan x) = \frac{1}{cos^2 x}$
(4) $D(\cot x) = -\frac{1}{sin^2 x}$

## 5.3.3) Oude rekenregels: irrationale functies afleiden

De rekenregels voor irrationale functies afleiden komt hierin terug, mag je niet vergeten.

(1) $D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

## 5.3.4) Kettingregel niet vergeten!

# 5.4) Limieten

Limieten reken je uit analoog als andere functies die we tot nu toe hebben gezien.
Voor een meer uitgebreidere uitleg, ga naar het onderdeeltje limieten.