Samenvatting wiskunde – module 1 – wiskunderichtingen (7u) – made by Abdellah

---

(Y) VOORWOORD

Wiskunderichtingen: Deze samenvatting is bruikbaar voor 7u wiskunde, wiskundecursus van meneer Vandelaer.

Talenrichtingen: Samenvatting is niet bruikbaar aangezien hier teveel leerstof in staat.

- -

(X) INHOUDSTAFEL

(A) STRUCTUREN

- -

(A1) VERZAMELINGEN

- -

(A1I) SOORTEN VERZAMELINGEN

*Verzamelingen stellen we voor met een Venn-diagram of tussen accolades (V = {1, 2, 4}

*Twee verzamelingen zijn gelijk als beide elementen voorkomen in beide verzamelingen.

*Een deelverzameling van A [D(A)] is de verzameling die alle mogelijke koppels van A bevat.

→ Bv.: A = {1, 2} ⇔ D(A) = {∅, (1), (2), (1, 2)} → De lege verzameling zit altijd in de deelverzameling!

*De universele verzameling (U) is de verzameling met alle elementen.

- -

(A1II) BEWERKINGEN MET VERZAMELINGEN

*Doorsnede (∩) van 2 verzamelingen: alle gemeenschappelijke elementen van A en B.

→ A = {0, 1, 2}, B = {1, 2} ⇔ A ∩ B = {1, 2}

*Vereniging (U) van 2 verzamelingen: alle elementen van beide verzamelingen

→ A = {0, 3, 6}, B = {1, 6, 8} ⇔ A U B = {0, 1, 3, 6, 8}

*Verschil (\) van 2 verzamelingen A en B: alle elementen die in A zitten maar niet in B

→ A = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, B = {3, 5, 8, 9} ⇔ A \ B = {0, 1, 2, 4}

*Complement van een verzameling A: alles wat niet in die verzameling zit

→ A = {4, 5}, U = {1, 2, 3, 4, 5} ⇔ A^c = {1, 2, 3}

*Productenverzameling A x B: Alle elementen in A x B distributief vermenigvuldigd

→ A = {1, 2}, B = {3, 4, 5} ⇔ A x B = {(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)}

*Partitie van een verzameling: mag geen lege verzameling zijn, moet alle elementen bevatten

→ A = {1, 2, 3} ⇔ mogelijke partitie P_1 = {(1), (2, 3)}

- -

(B) RELATIES

*Een mogelijke relatie aRb = {(1, x), (2, z), (2, x)}

- -

(BI) DOMEIN VAN EEN RELATIE

*Bij een functie is dit alle mogelijke x-waarden, bij een relatie alle beginwaarden.

*R = {(1, 2), (1, 3), (2, 4)} ⇔ dom R = {1, 2}

- -

(BII) BEREIK VAN EEN RELATIE

*Bij een functie zijn dit alle mogelijke y-waarden, bij een relatie alle eindwaarden

*R = {(1, 2), (1, 3), (2,4)} ⇔ ber R = {2, 3, 4}

- -

(BIII) OMGEKEERDE VAN EEN RELATIE

*Dit zijn alle elementen in de relatie omgekeerd

*R = {(1, 2), (1, 3), (2, 4)} ⇔ R^{-1} = {(2, 1), (3, 1), (4, 2)}

- -

(BIV) RELATIE, FUNCTIE, AFBEELDING EN BIJECTIE

*RELATIE: als je twee dezelfde beginwaarden hebt

→ R = {(1, 2), (1, 3), (2, 4)} is een relatie, 1 komt twee keer voor als beginwaarde

*FUNCTIE: elke beginwaarde komt maximum één keer voor

→ R = {(1, 2), (4, 3), (2, 4)} is een functie, alles komt maximum één keer voor als beginwaarde

*AFBEELDING: elke beginwaarde komt precies één keer voor

→ R = {(1, 2), (3, 4), (4, 3), (2, 4)} is een afbeelding want elke beginwaarde (1, 2, 3, 4) komt precies één keer voor

*BIJECTIE: elke beginwaarde heeft precies één eindwaarde ➔ #A = #B

→ R = {(a, 1), (b, 2), (c, 3)} is een bijectie, elke beginwaarde heeft precies één eindwaarde.

- -

(BV) REFLEXIEF, SYMMETRISCH, TRANSITIEF

*REFLEXIEF: als een element in relatie staat met zichzelf

→ R = {(2, 4), (3, 3)} is reflexief, 3 staat in relatie met zichzelf

→ ANTIREFLEXIEF: nooit in relatie met zichzelf ⇔ NIET-REFLEXIEF: soms in relatie met zichzelf

*SYMMETRISCH: als er een pijltje heengaat in een relatie gaat er ook een pijltje terug

→ R = {(2, 4), (4, 2)} is symmetrisch

→ ANTISYMMETRISCH = nooit symmetrisch ⇔ NIET-SYMMETRISCH = soms symmetrisch

*TRANSITIEF: Als a in relatie staat met b, en b in relatie met c, staat a in relatie met c.

→ Ik woon in hetzelfde huis als mijn zus en mijn zus in hetzelfde huis als mijn moeder, dan woon ik ook in hetzelfde huis als mijn moeder ➔ dit is een transitieve relatie

→ NIET-TRANSITIEF = nooit transitief

- -

(BVI) EQUIVALENTIE- EN ORDERRELATIE

*Equivalentierelatie: als de relatie reflexief, symmetrisch en transitief is.

→ De relatie ‘woont in hetzelfde huis als’ is een equivalentierelatie.

→ R: ja, ik woon in hetzelfde huis als mezelf

S: ja, als ik in hetzelfde huis woon als mijn broer woont zij in hetzelfde huis als mij

T: ja, zie puntje BV voor de uitleg hiervan

*Orderrelatie: als de relatie reflexief, antisymmetrisch en transitief is.

→ Strikte orderrelatie: antireflexief, antisymmetrisch en transitief

→ Totale orderrelatie: als je twee elementen met elkaar kan vergelijken

- -

(C) GROEP, RING, VELD

(CI) GROEP

*4 voorwaarden opdat getallen een groep vormen (neem nu verzameling $\mathbb{Z}, +$)

--> INWENDIGE BEWERKING: $\forall\, a, b \in \mathbb{Z} : \mathrm{a} + \mathrm{b} \in \mathbb{Z}$

--> ASSOCIATIVITEIT: $\forall\, a, b, c \in \mathbb{Z} : \mathrm{a} + (\mathrm{b} + \mathrm{c}) = (\mathrm{a} + \mathrm{b}) + c = a + b + c$

--> NEUTRAAL ELEMENT (NE): $\forall\, a \in \mathbb{Z}, \exists\ \mathrm{n} \in \mathbb{Z} : \mathrm{a} + n = a = n + a$

--> SYMMETRISCH ELEMENT (SE): $\forall\, a \in \mathbb{Z}, \exists\ (-\mathrm{a}) \in \mathbb{Z} : \mathrm{a} + (-\mathrm{a}) = 0 = -a + a$

→ Als je een verzameling onderzoekt en als al deze eigenschappen kloppen is het een groep.

--> COMMUTATIVITEIT: $\forall\, a, b \in \mathbb{Z} : \mathrm{a} + \mathrm{b} = \mathrm{b} + \mathrm{a}$

→ Als je een verzameling onderzoekt en de vorige 4 + deze eigenschap gelden, is de verameling een commutatieve groep.

*Additieve groepen: + --> NE = 0 (niet per sé getal 0) ⇔ SE = -x (tegengestelde van getal 'x')

*Multiplicatieve groepen: . --> NE = 1 (niet per sé 1) ⇔ SE = x^{-1} = 1/x

*VOORBEELD: De natuurlijke getallenverzameling vormt géén groep want het heeft géén symm. element, negatieve getallen zitten namelijk niet in de verzameling

---

(CII) RING

*3 voorwaarden om een ring te zijn:

--> COMMUTATIEVE GROEP: je verzameling moet een commutatieve groep zijn

--> ASSOCIATIVITEIT: $\forall\, a, b, c \in \mathbb{Z} : \mathrm{a} \,.\, (\mathrm{b} \,.\, \mathrm{c}) = (\mathrm{a} \,.\, \mathrm{b}) . c = a \,.\, b \,.\, c$

→ Bij een ring werken we met een twééde bewerking (hier dus .)

--> DISTRIBUTIEF: je verzameling moet zowel links- als rechts distributief zijn!

→ $\forall\, a, b, c \in \mathbb{Z} : \mathrm{a} \,.\, (\mathrm{b} + \mathrm{c}) = \mathrm{ab} + \mathrm{ac} = (\mathrm{a} + \mathrm{b}) \,.\, c$

→ Als al deze eigenschappen gelden heb je een ring.

--> COMMUTATIVITEIT: $\forall\, a, b \in \mathbb{Z} : \mathrm{a} \,.\, \mathrm{b} = \mathrm{b} \,.\, \mathrm{a}$

→ Als de commutativiteit ook geld heb je een commutatieve ring

--> NEUTRAAL ELEMENT: $\forall\, a \in \mathbb{Z}$ en $1 \in \mathbb{Z} : 1 \,.\, \mathrm{a} = \mathrm{a} = \mathrm{a} \,.\, 1$

→ Als dit ook geld: commutatieve ring met eenheidselement (neutraal element)

(CIII) VELD

*2 voorwaarden om een veld te zijn:

--> De gehele getallenverzameling is géén veld.

--> VOORWAARDE 1: je verzameling is een commutatieve groep met eenheidselement (✓)

--> VOORWAARDE 2: je verzameling heeft een symmetrisch element voor elk getal (**X**)

--> 5 . 1/5 = 1 = 1/5 . 5 ➔ 1/5 is géén element van de gehele getallenverzameling (!!!)

(CIV) ISOMORFISMEN

Gegeven twee reële vectorruimten $\mathbb{R}, V, +$ en $\mathbb{R}, W, \oplus$. Een relatie f van V naar W is een isomorfisme van $\mathbb{R}, V, +$ op $\mathbb{R}, W, \oplus$ als

- f een bijectie is van V op W
- $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V$: $\quad f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) \oplus f(\vec{v})$
- $\forall k \in \mathbb{R}$: $\forall\, \vec{u} \in V$: $\quad f(k.\vec{u}) = k.f(\vec{u})$

We zeggen dat $\mathbb{R}, V, +$ en $\mathbb{R}, W, \oplus$ isomorf zijn.

Bij een isomorfisme (groep, ring, veld, vectorruimte) kunnen we twee bewerkingen 'op elkaar plakken'. Enkel als beide verzamelingen een onderlinge bijectie tonen.

(CV) Cayley-tafel

*We willen élk beeld weten van verzameling X (die een eindig aantal elementen heeft).

→ We zetten alle mogelijke beelden uit in een samenstellingstabel/Cayley-tafel)

*	a	b
a	a	b
b	b	a

Uitleg: in de eerste cel zet je de bewerking (*), daaronder alle 'beginwaarden' en naast de bewerking (rechts) alle 'eindwaarden', de getallen die je daarna opschrijft zijn alle uitkomsten!
--> Je kan hier aflezen: b * a = b (a = neutraal element).

LET OP: EEN BEWERKING HOEFT NIET PER SE +, -, . of : TE ZIJN!!!

(D) REËLE VECTORRUIMTE

//

*Er moeten aan verschillende voorwaarden voldaan worden opdat $\mathbb{R}$, V, + een vectorruimte is.

→ V, + is een commutatieve groep (+ is inwendig, associatief, commutatief, heeft een symmetrisch element en een neutraal element)

→ $\forall k \in \mathbb{R}$ en $\forall \vec{v} \in V: k\,.\,\vec{v} \in V$ (De bewerking is inwendig)

→ $\forall k, m \in \mathbb{R}$ en $\forall \vec{v} \in V: k.m.\vec{v} = (k.m).\vec{v} = k.(m.\vec{v})$ (associatief)

→ $\forall k, m \in \mathbb{R}$ en $\forall \vec{v} \in V: (k+m).\vec{v} = k\vec{v} + m\vec{v}$ (. Is distributief t.o.v. + in R)

→ $\forall k \in \mathbb{R}$ en $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V: k\,.\,(\vec{v} + \vec{w}) = k\vec{v} + k\vec{w}$ (. Is distributief t.o.v. + in V)

→ $1 \in \mathbb{R}$ *en* $\forall \vec{v} \in V: 1\,.\,\vec{v} = \vec{v}$ (neutral element voor . = 1)

Gelden al deze eigenschappen, dan is V een reële vectorruimte (over R).

(4A) Rekenen in vectorruimten

(1) Gelijkheid getallen: $(x_1, x_2) = (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ en $y_1 = y_2$

(2) Inwendige bewerkingen: $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

→ Bijvoorbeeld: (3, 4) + (1, 2) = (3 + 1, 4 + 2) = (4, 6)

(3) Opslorpend element: $\forall \vec{v} \in V: 0.v = \vec{o}$ (nulvector)

(…) Rekenregels zijn vanzelfsprekend, ook al geleerd bij groepen, ringen en velden.

(4B) Deelvectorruimte

*Definitie: als in een reële vectorruimte $\mathbb{R}$, V, + een niet-lege deelverzameling W van V voor dezelfde bewerkingen een reële vectorruimte $\mathbb{R}$, W, + vormt, noemen we $\mathbb{R}$, W, + een deelvectorruimte van $\mathbb{R}$, V, +.

→ Vertaald: als W (deelverzameling van V) ook een vectorruimte vormt, is het een deelvectorruimte.

*Stelling: W is een deelvectorruimte ⇔ $k\,.\,\vec{u} + p\,.\,\vec{v} \in W$

→ Met deze formule kan je nakijken of het een vectorruimte is i.p.v. de 10 eigenschappen (axioma's) na te checken.

(4C) Lineaire combinatie van vectoren

*Definitie: als k_1 en k_2 reële getallen zijn en u_1, u_2, vectoren, dan noemen we: $k_1\vec{u_1} + k_2\vec{u_2}$ een lineaire combinatie van deze vectoren.

→ Voorbeeld: (1, 2), (2, 1), (0, 1) en berekenen: 1 . (1, 2) + 2 . (2, 1) + 3 . (0, 1)

We noemen de vector (5, 7) een lineaire combinatie van (1, 2), (2, 1), (0, 1) met coëfficienten 1, 2, 3 van de combinatie.

= (1 . 1, 2 . 1) + (2 . 2, 2 . 1) + (3 . 0, 3 . 1)
= (1, 2) + (4, 2) + (0, 3)
= (1 + 4 + 0, 2 + 2 + 3) = (5, 7)
→ De nulvector is altijd een lineaire combinatie.

Elke reële vectorruimte heeft een basis.

- -

(4D) Lineaire (on)afhankelijkheid van vectoren
*Twee vectoren zijn lineair afhankelijk als je ze als een combinatie van elkaar kan schrijven.
→ Bv. (3, 5) en (9, 15) zijn lineair afhankelijk want 3 . (3, 5) = (9, 15) (k = 3)
→ De nulvector is altijd lineair afhankelijk (0, 0) en (9, 15) → 0 . (9, 15) = (0, 0)
*Twee vectoren zijn lineair onafhankelijk als je ze niet als een lineaire combinatie kan schrijven.
→ Bv. (3, 5) en (-4, -8) zijn onafhankelijk want (3, 5) ≠ k . (-4, -8)

- -

(4E) Basis van een reële vectorruimte
*Vectoren vormen een basis als: (1) ze onderling lineair onafhankelijk zijn.
(2) je een derde vector als een lineaire combinatie van de eerste twee vecoren kan schrijven.

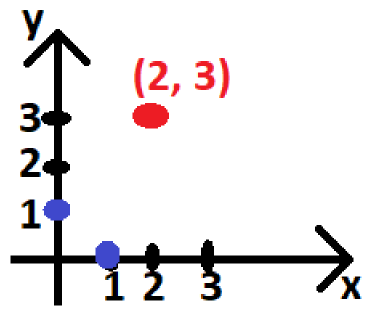
→ (1, 0) en (0, 1) is een vaak voorkomende basis: (1, 0) ≠ k (0, 1) → lineair onafhankelijk
→ (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) --> bijvoorbeeld: (3, 7) = 3(1, 0) + 7(0, 1)

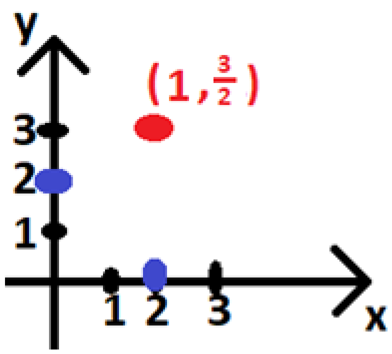
- -

(4F) Dimensie van een reële vectorruimte
*Dit is gewoon het aantal elementen dat elke vector van de basis heeft.
→ (1,0) en (0,1), hierbij is de dimensie 2 (elke vector heeft 2 elementen)
→ (1,0,3) en (3,0,8), hierbij is de dimensie 3 (elke vector heeft 3 elementen)
*Indien je n aantal onafhankelijke vectoren hebt in een reële vectorruimte met dimensie n, dan vormen die vectoren sowieso een basis, je hoeft niet verder te rekenen

- -

(4G) Coördinaten
*Afhankelijk van in welke basis je werkt kunnen de coördinaten dus 'verschillen' op je grafiek.





Uitleg: hiernaast zie je twee grafieken, we hebben in beide grafieken verschillende basissen gekozen.
*Bovenste grafiek, basis = (0, 1) en (1, 0)
→ We kunnen (2, 3) schrijven als 2(0, 1) + 3 (1, 0)
→ Coördinaat op grafiek is dus (2, 3)
*Onderste grafiek, basis = (0, 2) en (2, 0)
→ Coördinaat is niet meer hetzelfde als degene op de bovenste grafiek aangezien we een andere basis hebben gekozen!
→ We kunnen (2, 3) schrijven als…
$1(2, 0) + \frac{3}{2}(0, 2)$.
→ De nieuwe coördinaten in deze basis zijn dan…
→ (1, 3/2)
*Zo zie je dat de coördinaten op een grafiek afhankelijk zijn van welke basis je kiest op die grafiek.