Wiskunde (7u) – examen M4 – kegelsneden – made by Abdellah – Atheneum Plus Hasselt

---

(Z) VOORWOORD

Dit is de samenvatting ter voorbereiding van het examen wiskunde voor M4.

In de samenvattingenreeks van kegelsneden behandelen we volgende hoofdstukken:

H1: inleiding kegelsneden
H2: parabolen
H3: Ellipsen
H4: Hyperbolen

(X) FOUTJE?

Dat kan, meld het via Smartschool aan mij (Abdellah)

(Y) INHOUDSTAFEL

Over twee pagina's.

Inhoud

4) Hyperbolen

4.1) Definitie

Een hyperbool H is een verzameling punten van het vlak waarvoor de absolute waarde van het verschil van de afstanden tot twee gegeven punten F_1 en F_2 constant is en gelijk is aan 2a met a ∈ $\mathbb{R}_0^+$.

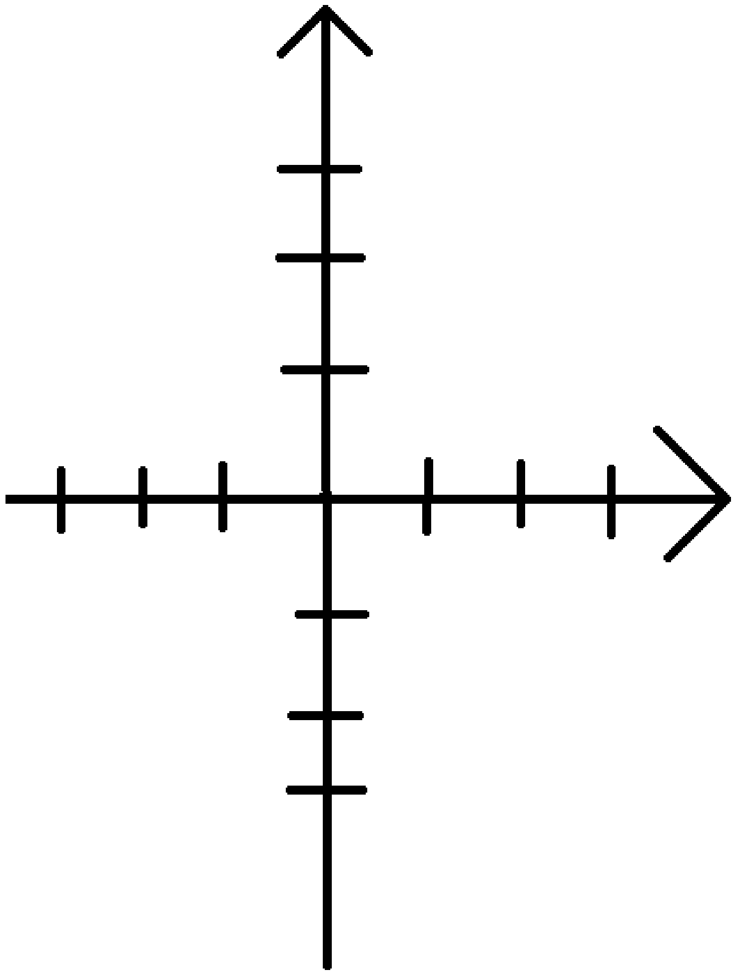
$H = \{D \in \pi |\, d(D,F_1) - d(D,F_2) = \pm 2a\}$

De definitie van de hyperbool is volgens *Kjuvin*: "**Juist hetzelfde als de ellips behalve vervang je elke + door een –**". In principe heeft *Kjuvin* niet ongelijk, de oefeningen van de ellips verlopen zeer analoog als die van de hyperbool.

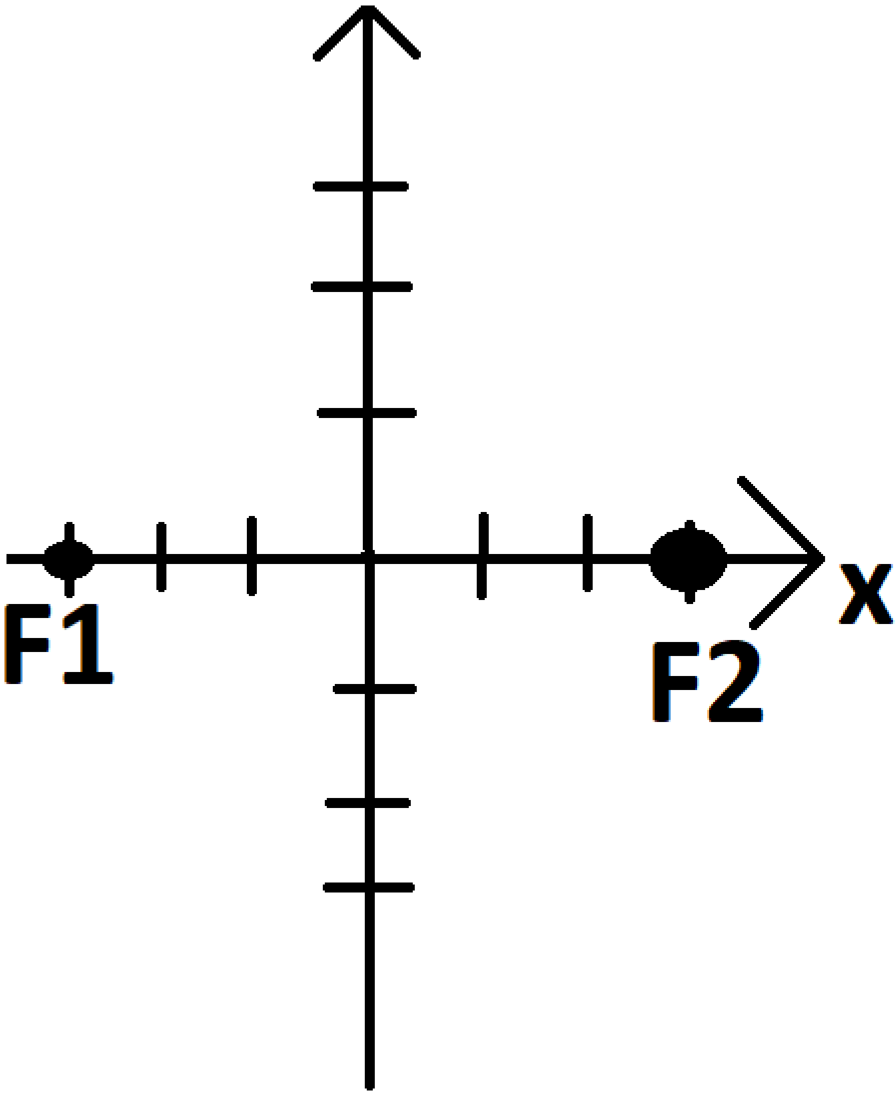
4.2) Cartesische vergelijking

4.2.1) Keuze van het assenstelsel

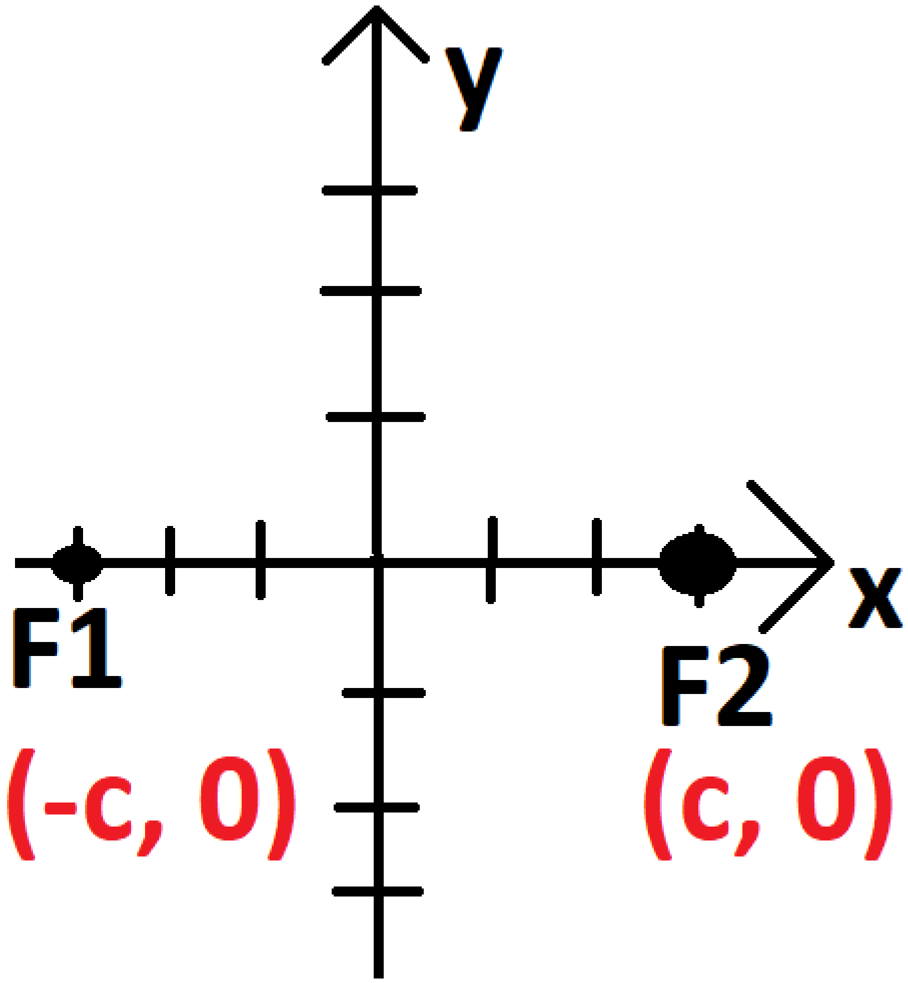
We kiezen een positief orthonormaal assenstelsel (= assenstelsel waar beide assen loodrecht op elkaar staan en de schaalverdeling overal hetzelfde is).



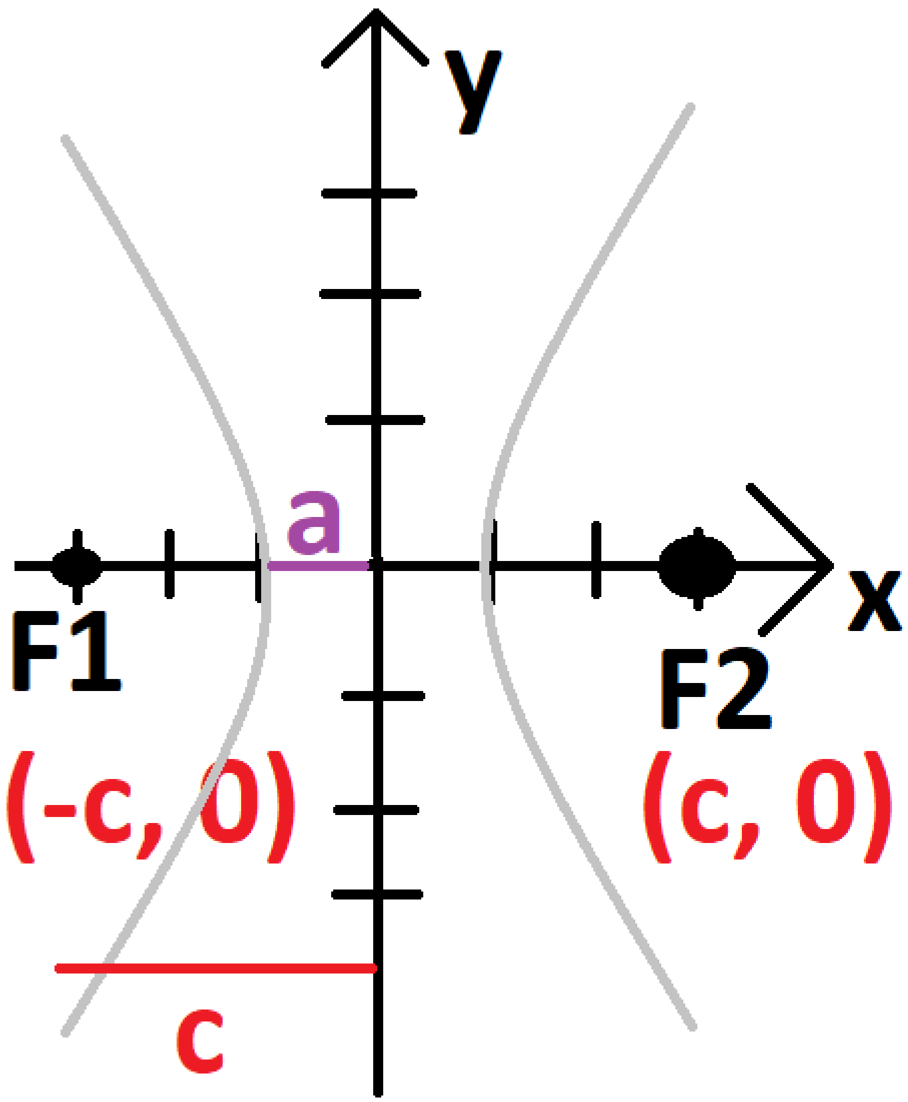
We laten de x-as samenvallen met F_1F_2 zodanig dat F_1 voor F_2 ligt.



We pakken voor de y-as de middelloodlijn van F_1F_2. De afstand tussen F_1F_2 stellen we gelijk aan 2c waardoor volgende dingen gelden:
Coördinaat F_1: (-c, 0)
Coördinaat F_2: (c, 0)

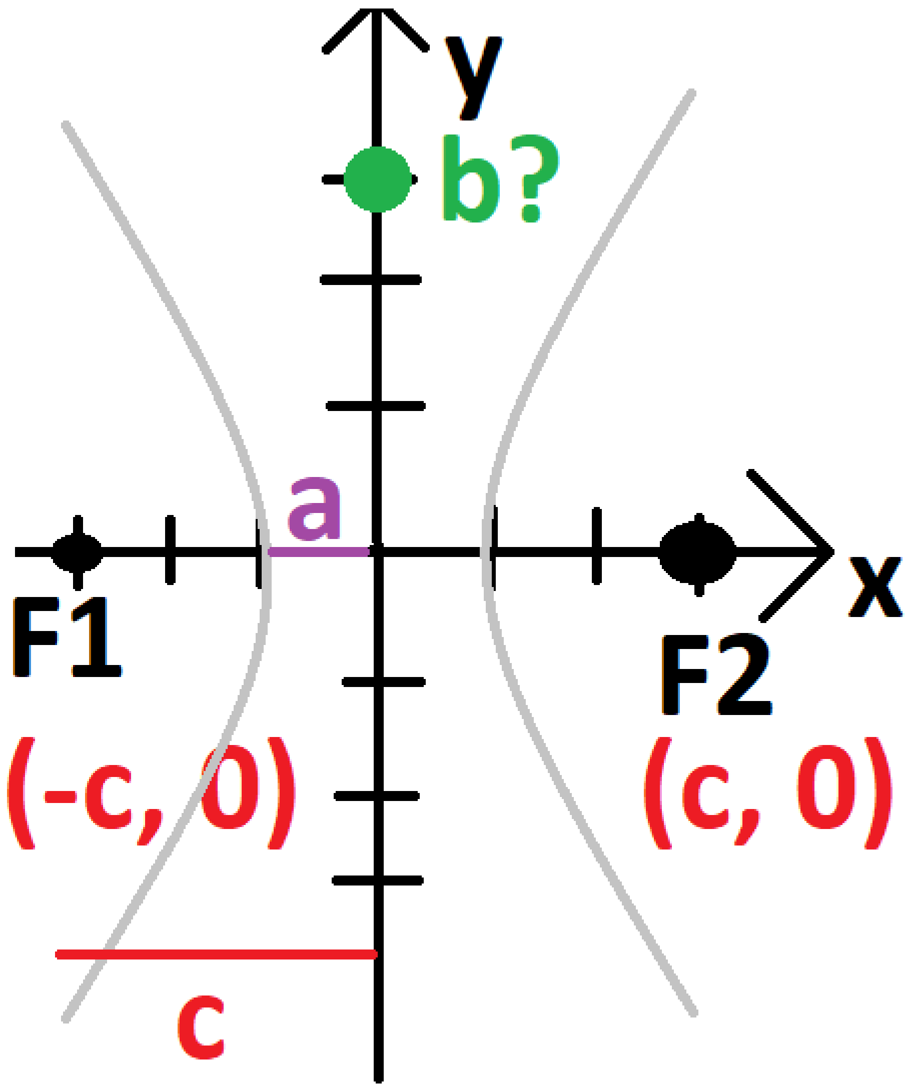


De **a** hebben we bij de ellips gedefinieerd als de afstand tussen het uiteinde van de ellips tot de oorsprong. Nu definiëren we de a als de afstand van het uiteinde van de hyperbool tot de oorsprong. We gaan ervanuit dat a < c, dit zie je duidelijk op de tekening.



Op de tekening zie je duidelijk dat de a, in tegenstelling tot de ellips, kleiner is dan de c. De b-waarde hadden we gedefinieerd bij de ellips als de afstand van de oorsprong tot en met het uiteinde van de ellips t.o.v. de y-as.

De hyperbool heeft echter geen uiteinde t.o.v. de y-as. De b-waarde is echter wel gedefinieerd maar waar zal je niet grafisch kunnen bepalen zonder een beetje algebraïsch rekenwerk uit te voeren (zie later).



Nu heb je het assenstelsel goed gekozen en ken je de grafische waardes van a, b en c!

4.2.2) Bewijs voor de cartesische vergelijking

$D(x_1, y_1) \in H \quad \Leftrightarrow \quad |DF_1| - |DF_2| = \pm 2a$ (definitie hyperbool)

$\Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - c)^2 + (y_1 - 0)^2} - \sqrt{\left(x_1 - (-c)\right)^2 + (y_1 - 0)^2} = \pm 2a$

(definitie voor afstand tussen twéé punten toegepast: $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$)

$\Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - c)^2 + (y_1)^2} - \sqrt{(x_1 + c)^2 + (y_1)^2} = \pm 2a$

[0 valt weg, -(- wordt +]

$\Leftrightarrow (x_1 - c)^2 + y_1^2 - 2.\sqrt{(x_1 - c)^2 + (y_1)^2}\,.\sqrt{(x_1 + c)^2 + (y_1)^2} + (x_1 + c)^2 + (y_1)^2 = 4a^2$

(Kwadrateren: géén kwadrateringsvoorwaarde aangezien we $\pm 2a$ hebben en voor elk reëel getal geldt dat de wortel zowel positief als negatief is)

$\Leftrightarrow (x_1 - c)^2 + y_1^2 + (x_1 + c)^2 + (y_1)^2 - 2.\sqrt{(x_1 - c)^2 + (y_1)^2}\,.\sqrt{(x_1 + c)^2 + (y_1)^2} = 4a^2$

(De optelling in $\mathbb{R}$ is commutatief, we hebben hebben het groengemarkeerde deel van plaats verandert)

$\Leftrightarrow (x_1 - c)^2 + y_1^2 + (x_1 + c)^2 + (y_1)^2 - 2.\sqrt{(x_1 - c)^2 + (y_1)^2}\,.\sqrt{(x_1 + c)^2 + (y_1)^2} = 4a^2$

(*We bereiden ons mentaal voor* op de toepassing van het dubbel product in beide paars-gemarkeerde delen)

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$\Leftrightarrow$

$x_1^2 \cancel{- 2x_1c} + c^2 + y_1^2 + x_1^2 \cancel{+ 2x_1c} + c^2 + y_1^2 - 2.\sqrt{(x_1 - c)^2 + (y_1)^2}\,.\sqrt{(x_1 + c)^2 + (y_1)^2} = 4a^2$

(We schrappen de groen-gemarkeerde delen en tellen in de volgende stap gelijksoortige eentermen met elkaar op)

$\Leftrightarrow 2x_1^2 + 2y_1^2 + 2c^2 - 2.\sqrt{(x_1 - c)^2 + (y_1)^2}\,.\sqrt{(x_1 + c)^2 + (y_1)^2} = 4a^2$

(*We bereiden ons mentaal voor* op de toepassing van het dubbel product in de blauw-gemarkeerde delen)

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$\Leftrightarrow 2x_1^2 + 2y_1^2 + 2c^2 - 2.\sqrt{x_1^2 - 2x_1c + c^2 + (y_1)^2}\,.\sqrt{x_1^2 + 2x_1c + c^2 + (y_1)^2} = 4a^2$

(De optelling in ℝ is commutatief, we verplaatsen de -2x₁c om het merkwaardig product toegevoegde tweetermen te kunnen uitvoeren)

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$\Leftrightarrow 2x_1^2 + 2y_1^2 + 2c^2 - 2.\sqrt{x_1^2 + c^2 + (y_1)^2 - 2x_1c}\,.\sqrt{x_1^2 + c^2 + (y_1)^2 + 2x_1c} = 4a^2$

[Vooraleer we het merkwaardig product mogen uitvoeren moeten we alles onder dezelfde wortel zetten, dit mag ook aangezien we een gelijke n-demachtswortel hebben (de tweedemachtswortel)]

$\Leftrightarrow 2x_1^2 + 2y_1^2 + 2c^2 - 2.\sqrt{[\underbrace{x_1^2 + c^2 + (y_1)^2}_{a} \underbrace{- 2x_1c}_{-\ b}][\underbrace{x_1^2 + c^2 + (y_1)^2}_{a} \underbrace{+ 2x_1c}_{+\ b}]} = 4a^2$

(Nu gaan we toegevoegde tweetermen uitvoeren)

$\Leftrightarrow 2x_1^2 + 2y_1^2 + 2c^2 - 2.\sqrt{(x_1^2 + c^2 + y_1^2)^2 - (2x_1c)^2} = 4a^2$

(Merk op dat je zowel LL als RL kan delen door 2!)

$\Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 + c^2 - \sqrt{(x_1^2 + c^2 + y_1^2)^2 - (2x_1c)^2} = 2a^2$

(We brengen de wortel over naar de andere kant en de 2a² ook om te kunnen kwadrateren)

$\Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 + c^2 - 2a^2 = \sqrt{(x_1^2 + c^2 + y_1^2)^2 - (2x_1c)^2}$ **(1)**

(In de volgende stap gaan we kwadrateren, onze equivalentie ⇔ wordt vervangen door een implicatie ==> als je kwadrateert (zie irrationale vergelijkingen), later bewijzen we dat de terugweg <== ook geldt en dus de equivalentie ⇔ geldig is)

==> $(\underbrace{x_1^2 + y_1^2 + c^2}_{a} \underbrace{- 2a^2}_{-\ b})^2 = (x_1^2 + c^2 + y_1^2)^2 - (2x_1c)^2$

(Zoals je weet vallen de wortels weg bij het kwadrateren. *We bereiden ons ook opnieuw mentaal voor* op de toepassing van het dubbel product in LL!)

⇔ $(x_1^2 + y_1^2 + c^2)^2 - 2\,.\,(x_1^2 + y_1^2 + c^2)\,.\,(2a^2) + (-2a^2)^2 = (x_1^2 + c^2 + y_1^2)^2 - (2x_1c)^2$

(Je kan nog vereenvoudigen in LL, dit doe je ook, wiskunde is namelijk ordelijk en niet slordig)

⇔ $(x_1^2 + y_1^2 + c^2)^2 - 4a^2\,.\,(x_1^2 + y_1^2 + c^2) + 4a^4 = (x_1^2 + c^2 + y_1^2)^2 - (2x_1c)^2$

(Heyyyyyyyyy wacht eens even, je hebt gelijksoortige termen in LL en RL die je mag schrappen!)

⇔ $-4a^2\,.\,(x_1^2 + y_1^2 + c^2) + 4a^4 = -(2x_1c)^2$

(Minnen zijn nooit leuk, we werken de min in RL weg door te delen door -1, hierdoor keren alle tekens buiten de haakjes in LL om)

⇔ $4a^2\,.\,(x_1^2 + y_1^2 + c^2) - 4a^4 = (2x_1c)^2$

(We werken nu het kwadraat uit in RL)

⇔ $4a^2\,.\,(x_1^2 + y_1^2 + c^2) - 4a^4 = 4x_1^2c^2$

(Hmmm… Zie jij het ook? Je <u>kan</u> LL en RL delen door 4!)

⇔ $a^2\,.\,(x_1^2 + y_1^2 + c^2) - a^4 = x_1^2c^2$

(We werken nu RL distributief uit)

⇔ $a^2x_1^2 + a^2y_1^2 + a^2c^2 - a^4 = x_1^2c^2$

(We brengen alle termen met onbekenden (x, y) in LL en de rest naar RL)

⇔ $a^2x_1^2 + a^2y_1^2 + a^2(c^2 - a^2) = x_1^2c^2$

(Om tot het bewijs te komen, willen we $a^2x_1^2$ in RL toevoegen, dit doe je door zowel af te trekken in LL als in RL! :) Wat is de wiskunde toch zo mooi.)

⇔ $a^2x_1^2 - a^2x_1^2 + a^2y_1^2 + a^2(c^2 - a^2) = x_1^2c^2 - a^2x_1^2$

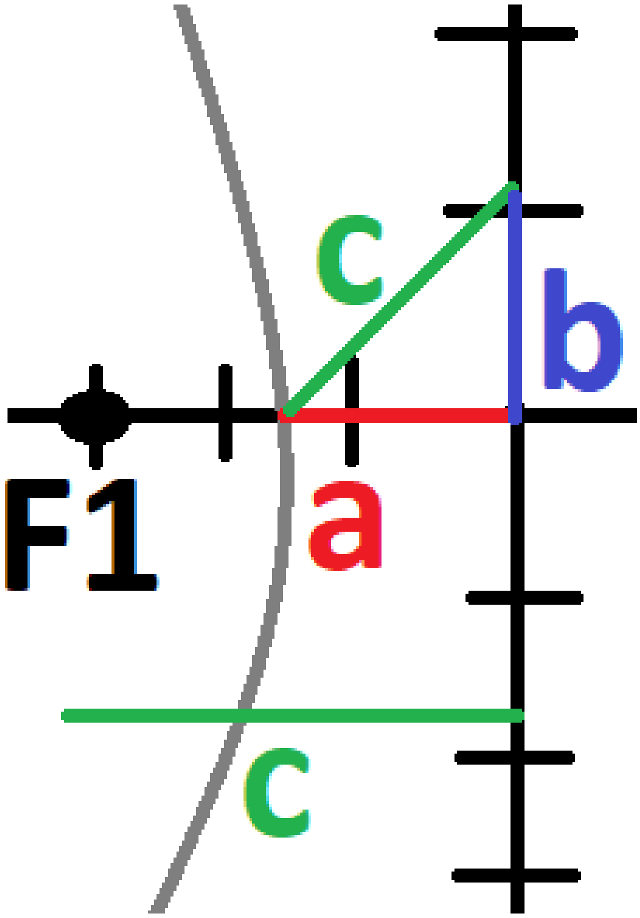
(Proper overschrijven…)

⇔ $a^2y_1^2 + a^2(c^2 - a^2) = x_1^2c^2 - a^2x_1^2$

(We kunnen nu x_1^2 afzonderen in RL)

⇔ $a^2y_1^2 + a^2(c^2 - a^2) = x_1^2(c^2 - a^2)$

(Nu zeggen we $b^2 = c^2 - a^2$, dit mogen we zeggen aangezien we bij het begin, in de keuze van ons assenstelsel hebben gezegd dat c > a. Of je kan opnieuw redeneren vanuit de stelling van Pythagoras die een rechthoekige driehoeksrelatie in de hyperbool verklaart. Zie hieronder).



Bij de ellips was a de schuine zijde omdat a de grootste was, nu is b de schuine zijde.

Kortom: $b^2 = c^2 - a^2$

$\Leftrightarrow a^2y_1^2 + a^2b^2 = x_1^2b^2$

(We verwisselen de plaats van enkele factoren, de optelling in $\mathbb{R}$ is immers commutatief)

$\Leftrightarrow -x_1^2b^2 + a^2y_1^2 = -a^2b^2$

(We werken nooit graag met mintekens in de wiskunde dus werken we de min weg in RL waardoor alle tekens in LL omkeren)

$\Leftrightarrow x_1^2b^2 - a^2y_1^2 \ = a^2b^2$

(Je hebt er bijna, we delen LL en RL door a²b²)

$\Leftrightarrow \frac{x_1^2\cancel{b^2}}{a^2\cancel{b^2}} - \frac{\cancel{a^2}y_1^2}{\cancel{a^2}b^2} = \frac{\cancel{a^2b^2}}{\cancel{a^2b^2}}$

$\Leftrightarrow \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ **(2)**

Wat je nu bent uitgekomen, is de cartesische vergelijking van de ellips. Je bent er echter nog niet. We hebben ergens een enkele pijl (implicatie) gezet, met name bij deze stap…

$x_1^2 + y_1^2 + c^2 - 2a^2 \ = \sqrt{(x_1^2 + c^2 + y_1^2)^2 - (2x_1c)^2}$ **(1)**

Omdat we bij het kwadrateren oplossingen kunnen bijmaken als we een negatief getal in RL kwadrateren, moeten we bewijzen dat de gelijkheid onder de wortel in RL positief is.

<u>We vertrekken vanuit de gevonden cartesische vergelijking van de ellips</u>

$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ **(2)**

Nu moet je je afvragen, wanneer kan het verschil van de kwadraten van twee getallen positief zijn? Dat kan als minstens één getal groter of gelijk is aan 1 afhangende van het 2[de] getal.

==> $\frac{x_1^2}{a^2} \geq 1$

==> $x_1^2 \geq a^2$ (a^2 overbrengen)

==> $x_1^2 + y_1^2 + c^2 \geq a^2 + y_1^2 + c^2$

(We voegen y_1^2 en c^2 aan beide kanten toe om tot de gelijkheid onder onze wortelteken te komen van (1), dit mag je doen, dit doet niks aan de ongelijkheid)

==> $x_1^2 + y_1^2 + c^2 \geq a^2 + y_1^2 + b^2 + a^2$

($c^2 = b^2 + a^2$ --> de relatie tussen a, b en c kan je uitdrukken met de stelling van Pythagoras)

==> $x_1^2 + y_1^2 + c^2 \geq 2a^2 + y_1^2 + b^2$

(optellen)

==> $x_1^2 + y_1^2 + c^2 - 2a^2 \geq y_1^2 + b^2$

(De uitdrukking $y_1^2 + b^2$ is zeker groter dan 0 aangezien b een strikt positief reëel getal is alsook y_1. Je mag er dus vanuit gaan dat dit groter is dan 0.)

==> $x_1^2 + y_1^2 + c^2 - 2a^2 \geq y_1^2 + b^2 > 0$

Omdat we nu hebben bewezen dat de gelijkheid onder de wortelteken strikt positief is, mag de enkele pijl (==> of implicatie) vervangen worden door een dubbele pijl (⇔ of equivalentie).

Je hebt nu <u>bewezen</u> dat als een punt op een hyperbool zit volgende vergelijking geldt…

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

We noemen deze vergelijking de cartesische vergelijking van de hyperbool

4.3) Onderzoek van de kromme

Ik haat dit onderdeel kapot hard. Als ik het heb kunnen samenvatten kan jij het lezen.

4.3.1) Relatie definiëren

De hyperbool is een relatie, geen functie omdat één x-waarde 2 y-waardes heeft. We definiëren de relatie f van de hyperbool.

$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ (cartesische vergelijking van de hyperbool).

We kunnen de cartesische vergelijking een beetje omvormen tot de vorm y = ax + b.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\Leftrightarrow -\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$

$\Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = -1 + \frac{x^2}{a^2}$

$\Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$

$\Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2$

$\Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - \frac{b^2a^2}{a^2}$

$\Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2x^2 - b^2a^2}{a^2}$

$\Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2(x^2 - a^2)}{a^2}$

$\Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$

De relatie wordt nu…

$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)\}$

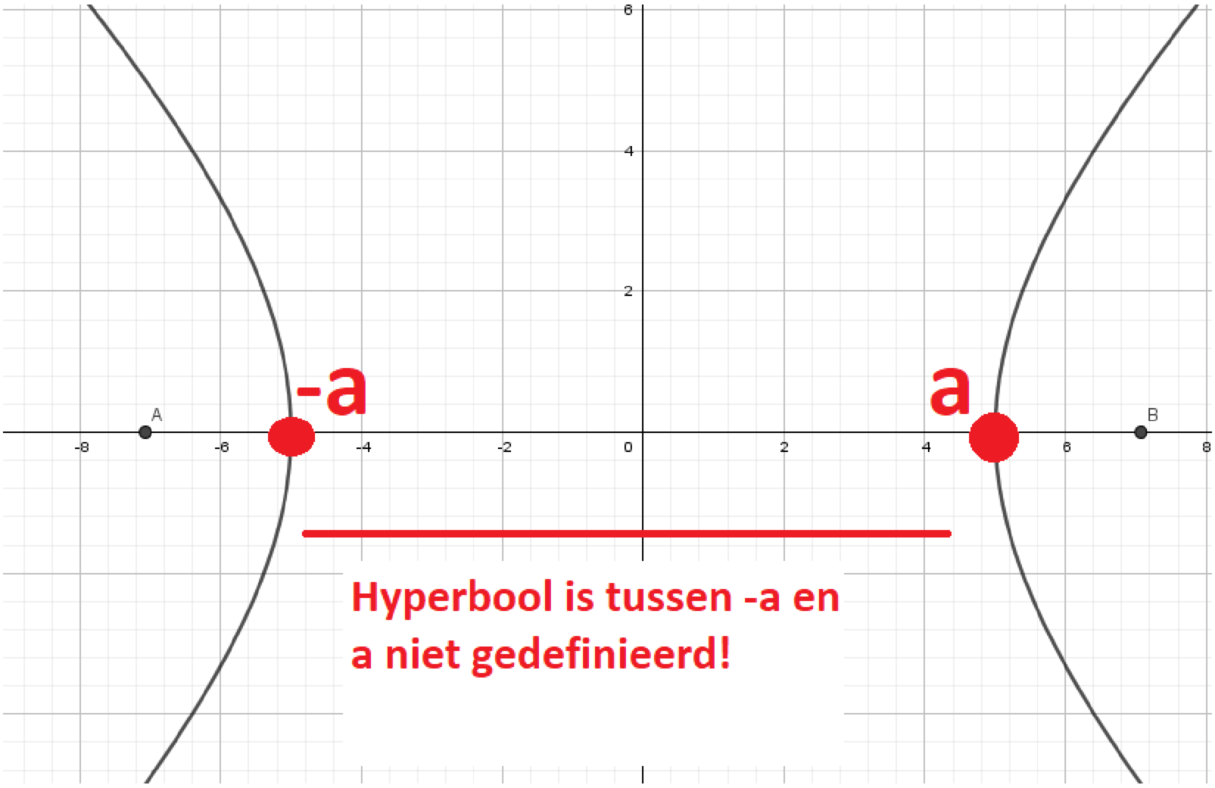
Neem de wortel hiervan en je krijgt twéé functies, namelijk…

$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ en $y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

De hyperbool is de vereniging van de grafieken van beide functies, het volstaat dus om één functie na te checken. Voor de eenvoud checken we alleen de positieve functie na (we haten mintekens).

4.3.2) Basisbespreking van de functie $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

<u>DOMEIN:</u>]-∞, -a] U [a, +∞[
--> Dit is logisch, de hyperbool ziet er namelijk zo uit…



CONTINUÏTEIT:]-∞, -a] U [a, +∞[
--> Een functie is continu in elk punt van haar domein.

SNIJPUNTEN:
--> Met de x-as ⬄ y = 0

$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

⬄ $0 = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

⬄ $0 = \sqrt{x^2 - a^2}$

⬄ $0 = x^2 - a^2$

⬄ $x^2 = a^2$ ⬄ $x = a$ V $x = -a$
--> Snijpunten x-as (= nulwaarden) => (a, 0) en (-a, 0)

--> Met de y-as ⬄ x = 0
$y = \frac{b}{a}\sqrt{0 - a^2}$

⬄ $y = \frac{b}{a}\sqrt{-a^2}$ --> omdat a strikt positief is leidt deze uitdrukking tot een negatieve vierkantswortel wat je natuurlijk niet kan trekken in $\mathbb{R}$

==> Er zijn dus geen snijpunten met de y-as

4.3.3) Eerste en tweede afgeleide van y = $\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

<u>Eerste afgeleide:</u>

$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

==> $Dy = D\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right)$

$= \frac{b}{a} . D\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)$ (een constant getal, b/a hier, mag je voor de afgeleide zetten)

$= \frac{b}{a} . \frac{1}{2\sqrt{x^2-a^2}} . 2x$

$$\boxed{D\sqrt{f(x)} = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} . Df(x)}$$

$= \frac{b\,.2x}{2a\sqrt{x^2-a^2}}$ (vermenigvuldigingen uitvoeren)

$= \frac{bx}{a\sqrt{x^2-a^2}}$ (vereenvoudigen)

--> Dit is de **eerste afgeleide**.

We weten nu dus voorlopig…

$f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

$\rightarrow f'(x) = \frac{bx}{a\sqrt{x^2-a^2}}$

Tweede afgeleide…

$f_1'' = D\frac{bx}{a\sqrt{x^2-a^2}}$ [overschrijven van f'(x)]

$= \frac{b}{a}\frac{Dx.\sqrt{x^2-a^2} - x.D\sqrt{x^2-a^2}}{x^2-a^2}$ [quotiëntregel toepassen] [constant getal mag voor afgeleide]

$= \frac{b}{a}\frac{\sqrt{x^2-a^2} - x.\frac{2x}{2\sqrt{x^2-a^2}}}{x^2-a^2}$ [afleiden: rekenregels]

$= \frac{b}{a}\frac{\frac{x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}}{x^2-a^2}$ [Op gelijke noemers zetten]

$= \frac{b}{a}\frac{\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}}{x^2-a^2}$ [aftrekking uitvoeren]

$= -\frac{b}{a}\frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}} . \frac{1}{x^2-a^2}$ [noemer in noemer zetten]

$= -\frac{ab}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}$ [uitwerken]

<u>We weten dus voorlopig…</u>

$f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

$\rightarrow f'(x) = \frac{bx}{a\sqrt{x^2-a^2}}$

$\rightarrow f''(x) = -\frac{ab}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}$

4.3.4) Samenvattende tabel

x		$-a$		a	
f_1'	$-$	|	///	|	$+$
f_1''	$-$	|	///	|	$-$
f_1	↘	0	///	0	↗
f_1	∩	VR	///	VR	∩

- voor de 2de afgeleide maakt ze overal negatief!

VR betekent verticale raaklijn, de hyperbool heeft 2 VR's aka topraaklijnen (zie later).
Herinner jezelf de meetkundige betekenis van de eerste- en tweede afgeleide.

<u>Uit samenvatting wiskunde module 3: verloop van functies halen we volgende passage…</u>

1.2) Meetkundige betekenis van de eerste- en tweede afgeleide

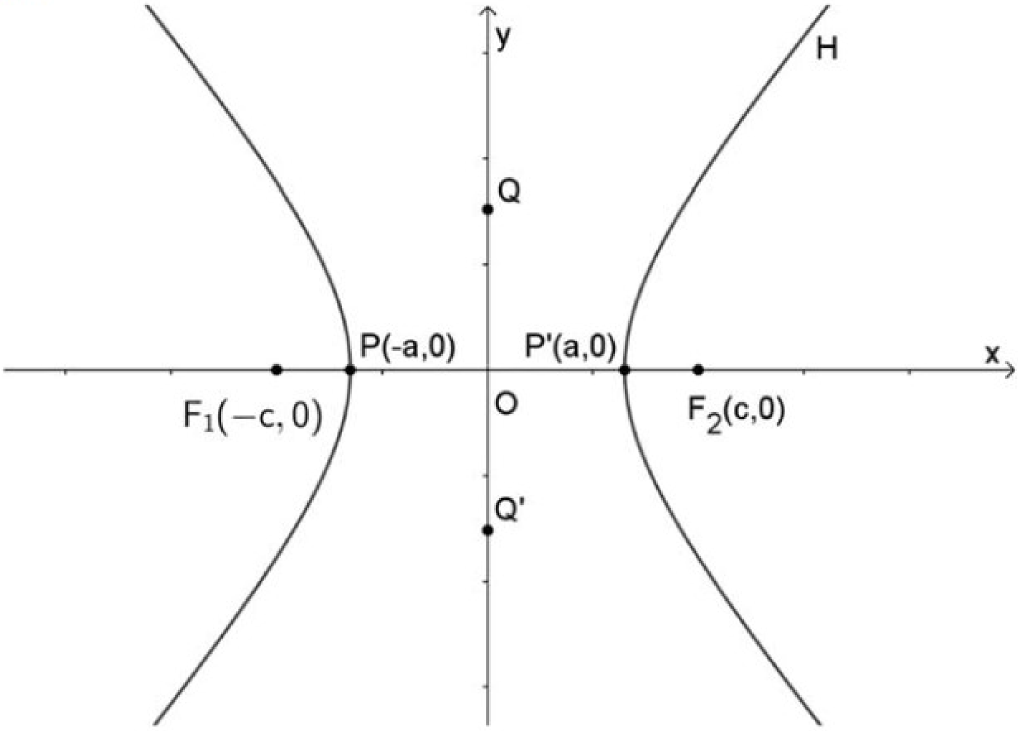
*Het is belangrijk dat je de meetkundige betekenis snapt.

--> Als de eerste afgeleide positief is, dan stijgt je functie (want: eerste afgeleide = rico raaklijn)
negatief is, dan daalt je functie
nul wordt, dan heb je een extremawaarde bereikt
--> Nu logisch redeneren: als je functie daalde (eerste afgeleide is negatief en je bereikt dan een extrema (eerste afgeleide 0), dan heb je een minimum bereikt. Als je functie stijgde en je eerste afgeleide wordt nul dan heb je een maximum bereikt. Als je meerdere maxima/minima bereikt is het aan jou om uit te maken welke absoluut (de grootste/ kleinste is) en welke relatief (de minst grootste/minst kleine) is.

--> Als de tweede afgeleide positief is, dan is je functie convex (U-vormig)
negatief is, dan is je functie concaaf (∩-vormig)
nul wordt, dan heb je een buigpunt bereikt.
--> Bij een buigpunt gaat je functie van convex naar concaaf of vice versa.

4.3.5) Schets van de grafiek

- Grafiek:



4.4) Terminologie

4.4.1) Hoofd- en nevenas

De x-as noemt men de hoofdas, de hoofdas is, naar analogie met de ellips, gelijk aan 2a.

HOOFDAS = X-AS = 2a

De y-as noemt men de nevenas, de nevenas is, naar analogie met de ellips, gelijk aan 2b.

NEVENAS = Y-AS = 2b

4.4.2) Excentriciteit

De verhouding $e = \frac{c}{a}$ noemt men de excentriciteit. Bij een hyperbool zal e altijd groter zijn dan 1 aangezien c > a zoals we hebben gezien.

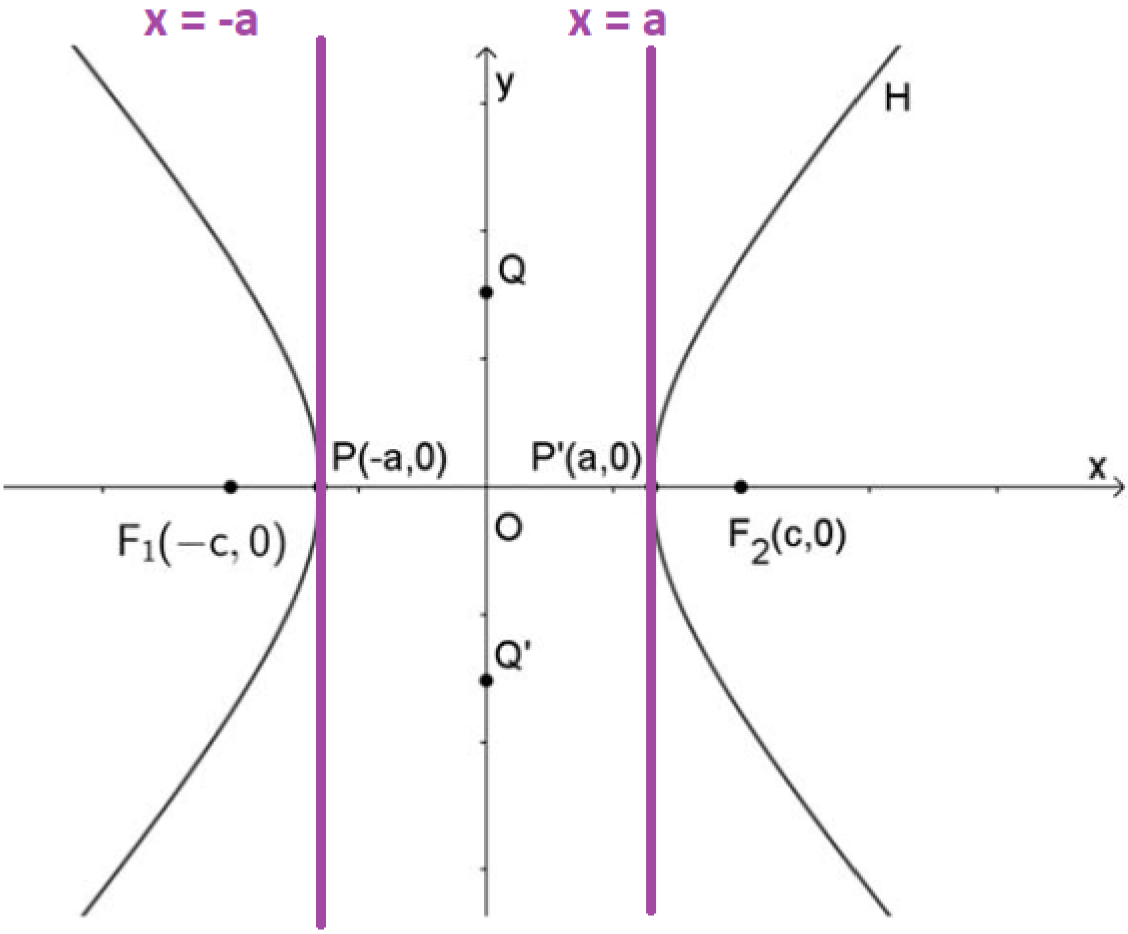
4.4.3) Belangrijke opmerking

Een hyperbool heeft géén snijpunten met de y-as.

4.5) Raaklijnen aan de hyperbool

4.5.1) Topraaklijnen

We hadden eerder gevonden dat de hyperbool 2 verticale rechten had (omdat zowel de eerste en tweede afgeleide niet bestonden), namelijk x = -a en x = a. Dit zijn de topraaklijnen van de hyperbool, ze raken aan de toppen van de hyperbool.



BESLUIT: De topraaklijnen aan de hyperbool zijn de rechten met vergelijkingen…

x = a

x = -a

4.5.2) Andere raaklijnen

4.5.2.1) Algemene vergelijking van een raaklijn aan een hyperbool

In een punt D(x_1, y_1) van een hyperbool H met vergelijking $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ is de vergelijking van de raaklijn t aan H: $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$.

4.5.2.2) (V) Bewijs

Kjuvin zei dat je dit niet echt moet 'kennen', maar 'snappen'. Je kan dit dus doorlezen, maar actief kennen is niet noodzakelijk.

We hebben eerder gevonden dat de eerste afgeleide van de hyperbool wordt weergegeven door volgende functie...

$\rightarrow f'(x) = \frac{bx}{a\sqrt{x^2-a^2}}$

Echter weten we ook dat...

$f(x) = y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

--> Dus: $\frac{ay}{b} = \sqrt{x^2 - a^2}$ (1)

--> Dit substitueren we nu in f'(x)

$\rightarrow f'(x) = \frac{bx}{a \cdot \frac{ay}{b}}$

$= \frac{b^2x}{a^2y} = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}$

Zoals je weet komt de eerste afgeleide overeen met de rico van de raaklijn. Dus mag je de waarde voor f'(x) invullen als m in de algemene vergelijking van de rechte.

$$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Maar we weten dat m = $\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$.

Dus...

$$\boldsymbol{y - y_1 = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)}$$

Nu mag het bewijs beginnen... We werken eerst onze noemer weg en werken tegelijkertijd ook distributief uit...

$$\boldsymbol{a^2y_1y - a^2{y_1}^2 = b^2xx_1 - b^2x_1^2}$$

In de volgende tussenstap delen we LL en RL door a²b²

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{a^2\,y_1y}{a^2b^2} - \frac{a^2y_1^2}{a^2b^2} = \frac{b^2xx_1}{a^2b^2} - \frac{b^2x_1^2}{a^2b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{yy_1}{b^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{xx_1}{a^2} - \frac{x_1^2}{a^2}} \textbf{ (deling uitwerken)}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{yy_1}{b^2} - \frac{xx_1}{a^2} = -\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}} \textbf{ (uitwerken)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}$$ **(maal -1 in RL en LL)**

STOP HIER ALS JE VANPLAN BENT HET BEWIJS TE SKIPPEN EN PAGINA'S BENT AAN HET OVERSLAAN WANT DEZE TUSSENSTAP IS BELANGRIJK.

Je ziet hier perfect dat je de algemene cartesische vergelijking van de hyperbool mag gelijkstellen aan de vergelijking van de hyperbool aangezien als een punt op de raaklijn zit het OOK op de hyperbool zit!

Je mag zelfs nog een beetje verder gaan…

$$\Leftrightarrow \frac{xx_1}{a^2} = \frac{x_1^2}{a^2} \quad \wedge \quad -\frac{yy_1}{b^2} = -\frac{y_1^2}{b^2}$$

Het is belangrijk dat je dit beseft voor de oefeningen.

$$\Leftrightarrow \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$$ **(cartesische vergelijking hyperbool)**

4.5.3) Tip van Kjuvin

Als je de raaklijn aan een hyperbool moet opstellen, werk de vergelijking van de raaklijn dan altijd uit naar de vorm y = ax + b, zodat je de rico van de normaal direct daaruit kan afleiden.

4.6) Vergelijking van de normaal

Herinnering: je normaal staat loodrecht op je punt/raaklijn.

We hebben voor de rico van de raaklijn gevonden: m = $\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$

Het verband tussen twee rico's van rechten die loodrecht op elkaar staan…

$m_R \cdot m_N = -1$ *(R = raaklijn, N = normaal)*

$$\Leftrightarrow m_N = -\frac{1}{m_R}$$

$$= -\frac{1}{\frac{b^2x_1}{a^2y_1}}$$

$$= -\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$$

Deze rico vul je in in de algemene vergelijking van de rechte en dan krijg je volgende vergelijking voor de normaal…

$$y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} \,.\, (x - x_1)$$

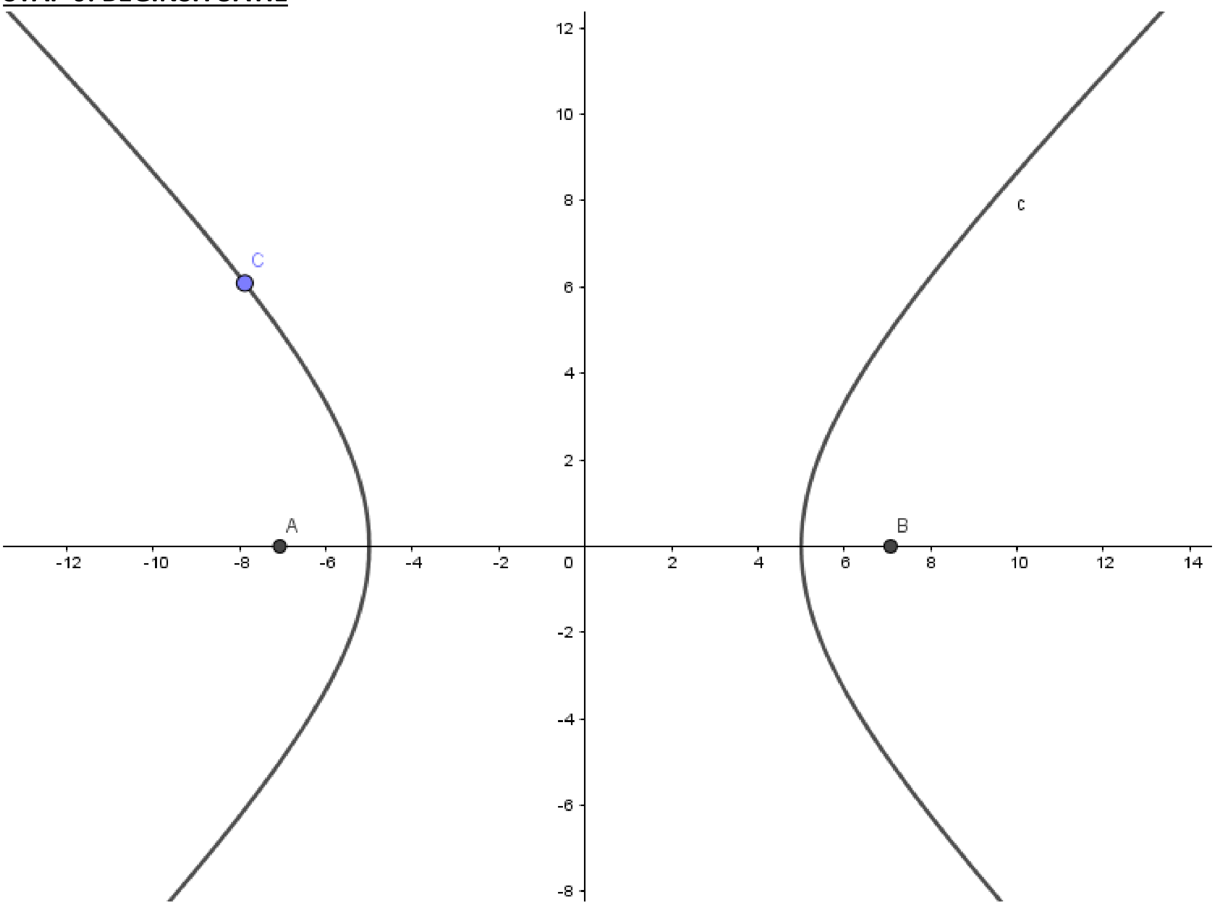
Tip van Kjuvin:

Als je de vergelijking van de raaklijn en de normaal zoekt, werk de vergelijking van de raaklijn dan uit tot de vorm y = ax + b zodat je de rico van de raaklijn direct kan aflezen (namelijk: a). De rico van de normaal kan je dan eenvoudig vinden met de betrekking: $m_N = -\frac{1}{m_R}$.

4.7) Meetkundige constructie van raaklijn en normaal in een punt van de hyperbool

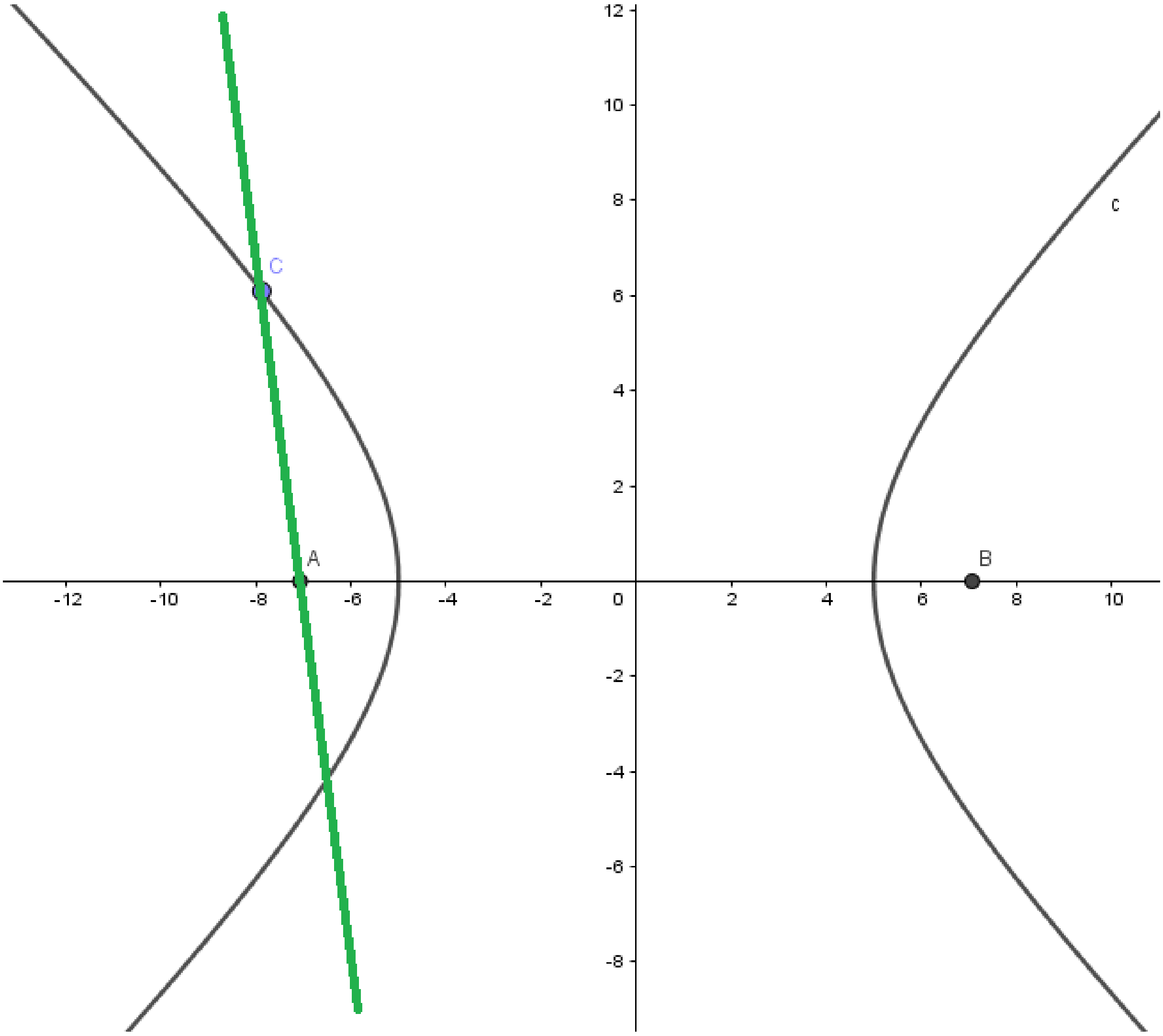
4.7.1) Werkwijze

STAP 0: BEGINSITUATIE

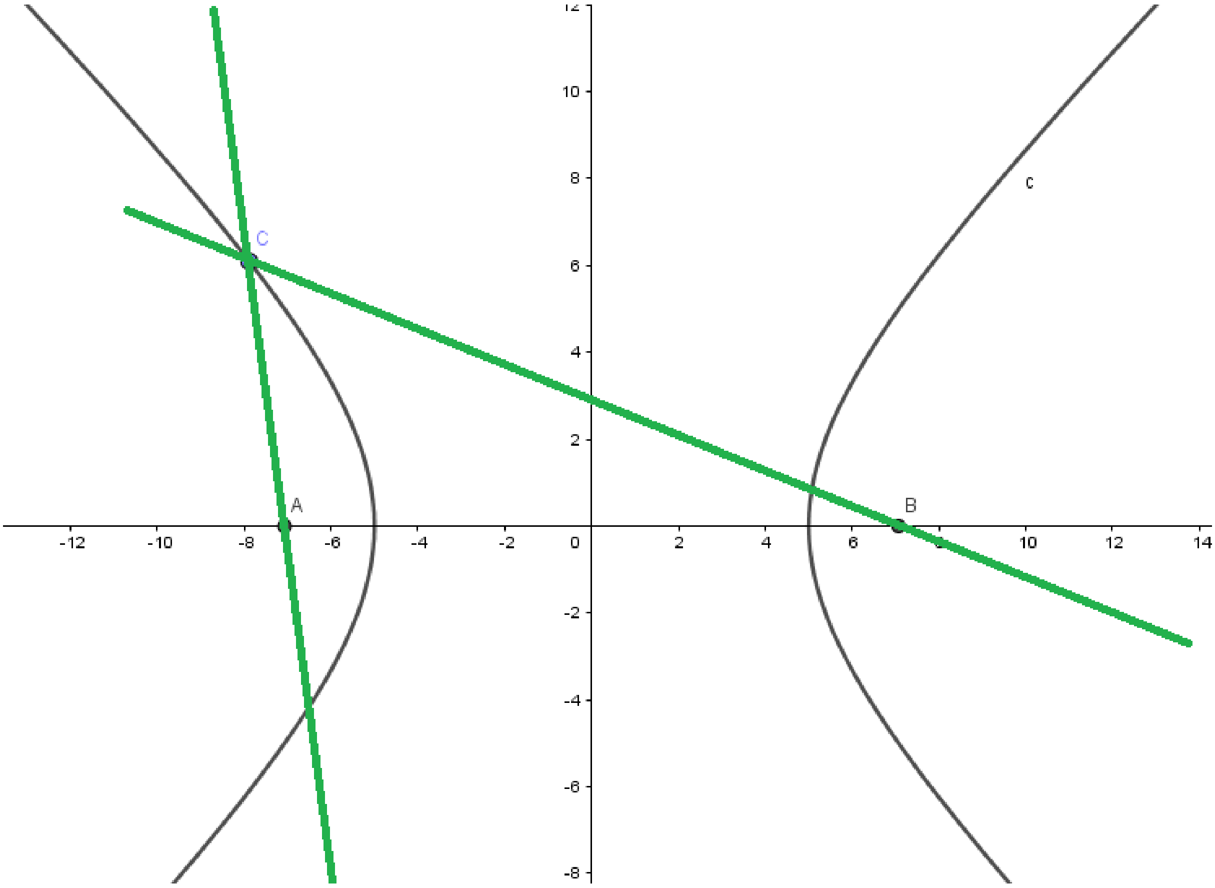


Je hebt één punt, twéé brandpunten (in dit geval genoemd A en B) en één hyperbool gekregen.

<u>STAP 1: Trek een rechte van het gegeven punt tot één brandpunt</u>



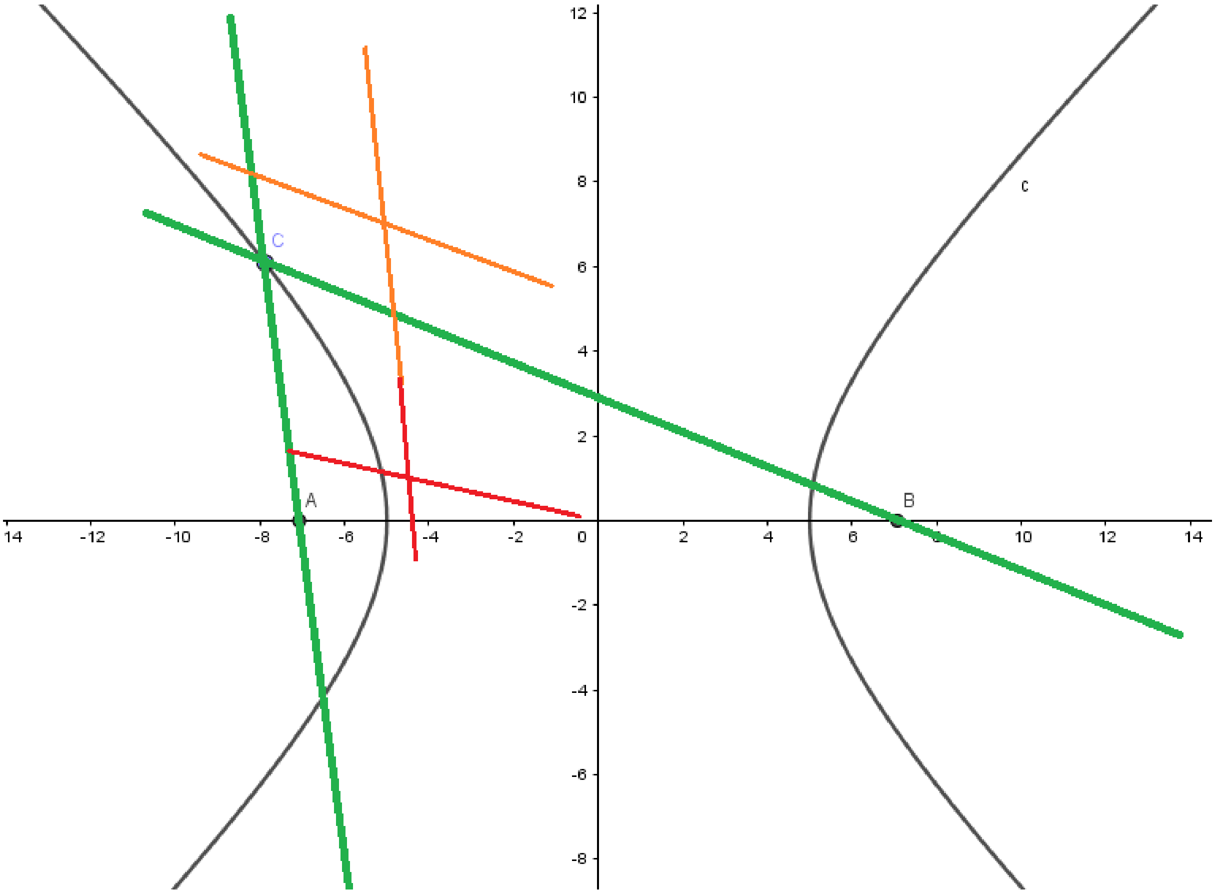
STAP 2: Trek een rechte van het gegeven punt tot het andere brandpunt



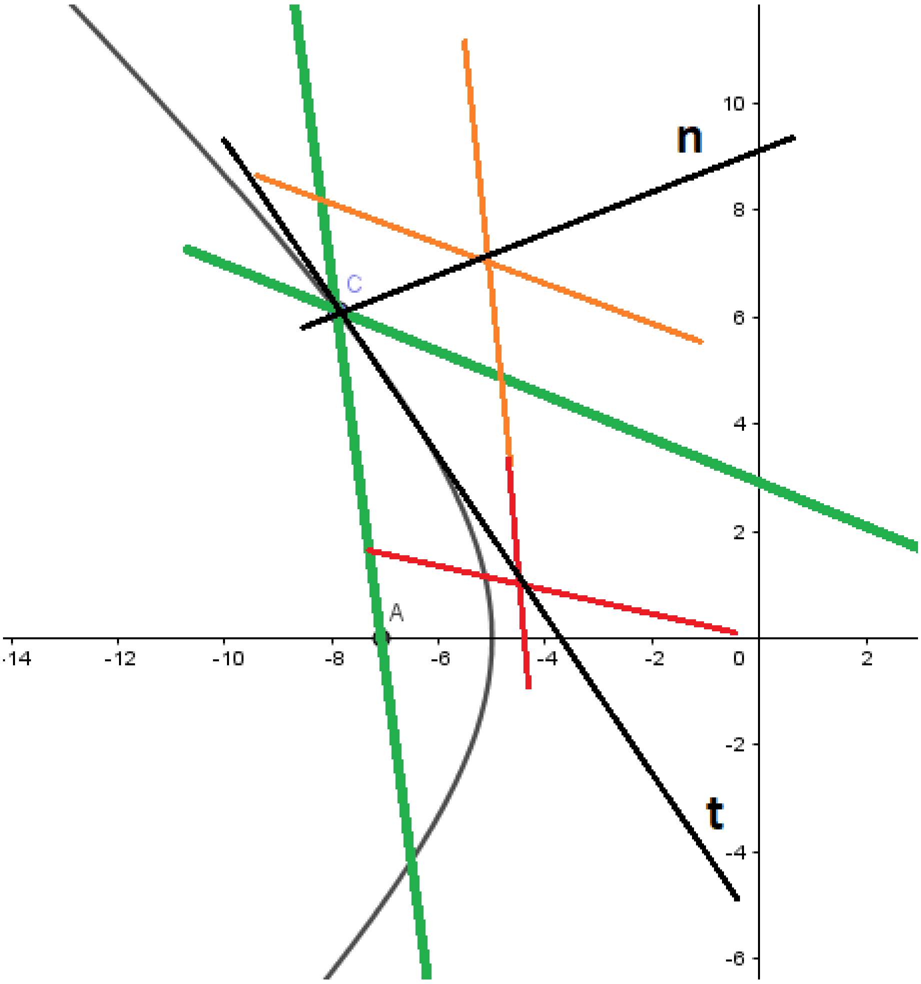
STAP 3: De bissectrices van deze rechten zijn nu je raaklijn t en je normaal n.

Herinnering: een bissectrice is een rechte die een andere rechte middendoor snijdt.
Je kan een bissectrice tekenen met een geodriehoek of met hulplijnen.

STAP 4: Bissectrices met hulplijnen: teken hulplijnen evenwijdig aan je rechten



<u>STAP 5: Bissectrices met hulplijnen: je bissectrices gaan nu door de snijpunten van je hulplijnen</u>



Met een geodriehoek zou je gewoon de hoek meten, door 2 delen en ergens een puntje zetten.

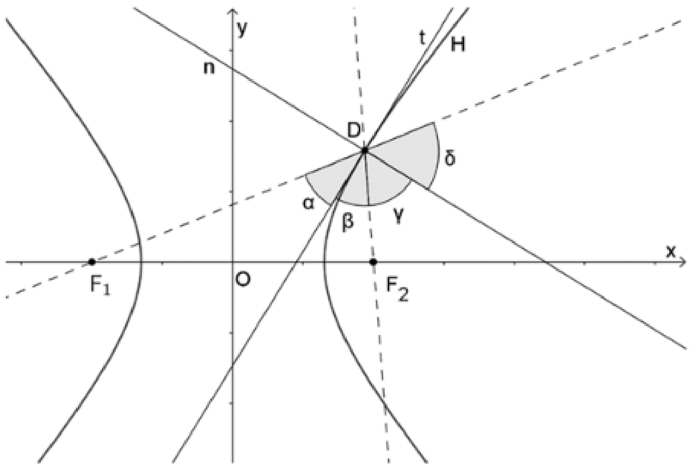
4.7.2) Waarom mogen we deze werkwijze toepassen?

Dankzij de **hoofdeigenschap van de raaklijn en de normaal**.

4.6.1. Hoofdeigenschap

De raaklijn en de normaal in een punt D van een hyperbool zijn de bissectrices van de hoeken gevormd door de rechten DF_1 en DF_2. ($\alpha = \beta$ en $\gamma = \delta$)

Het bewijs slaan we over.



4.8) Toepassingen

4.7. Toepassingen van de hyperbool

Koeltorens bij elektriciteitscentrales hebben meestal de vorm van een omwentelingshyperboloïde. Dit is een ruimtefiguur die ontstaat door een hyperbool te laten wenten om de nevenas. Deze vorm geeft een grotere stabiliteit.

4.9) Voorbeeldoefeningen

4.9.1) Oefening 14: analyse van de hyperbool

14) Geef van volgende hyperbool de lengte van de assen, de coördinaten van de brandpunten, de vergelijkingen van de topraaklijnen en de excentriciteit. Maak ook een schets van de hyperbool.

$6x^2 - 5y^2 = 1$

- -

Oplossing:

0) We brengen de hyperbool terug naar de standaardvorm.

$$\frac{x^2}{\frac{1}{6}} - \frac{y^2}{\frac{1}{5}} = 1$$

--> Delen door een breuk is maal het omgekeerde. Als je maal het omgekeerde doet kom je terug op de opgave uit dus dit is een geldige variant in de standaardvorm!

1) We berekenen nu de lengte van de assen.

Grote as = x-as = 2a

Kleine as = y-as = 2b

$a^2 = \frac{1}{6}$ (zie standaardvorm) $\Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \rightarrow 2a = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$b^2 = \frac{1}{5}$ (zie standaardvorm) $\Leftrightarrow b = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \rightarrow 2b = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

DUS:

Grote as = x-as = 2a = $\frac{\sqrt{6}}{3}$

Kleine as = y-as = 2b = $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

2) We berekenen nu de vergelijkingen van de topraaklijnen

Een hyperbool heeft twee topraaklijnen: x = a en x = -a

DUS: $x = \frac{\sqrt{6}}{6}$ en $x = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ --> Voor de berekening van a --> zie deel 1 oplossing.

3) We berekenen nu de coördinaten van de brandpunten
De algemene coördinaten zijn: $F_1(-c, 0)$ en $F_2(c, 0)$

Het verband tussen a, b en c in een hyperbool wordt uitgedrukt d.m.v. de stelling van Pythagoras…
$c^2 = a^2 + b^2$ (let op: niet verwarren met ellips --> $a^2 = b^2 + c^2$)
⇔ $c^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{5}$
⇔ $c^2 = \frac{5}{30} + \frac{6}{30}$
⇔ $c^2 = \frac{11}{30}$
⇔ $c = \sqrt{\frac{11}{30}}$

De coördinaten van de brandpunten worden dus…
$F_1\left(-\sqrt{\frac{11}{30}}, 0\right)$ en $F_2\left(\sqrt{\frac{11}{30}}, 0\right)$

4) We berekenen nu de excentriciteit van de hyperbool

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{\frac{11}{30}}}{\frac{\sqrt{6}}{6}} = 1{,}48$$

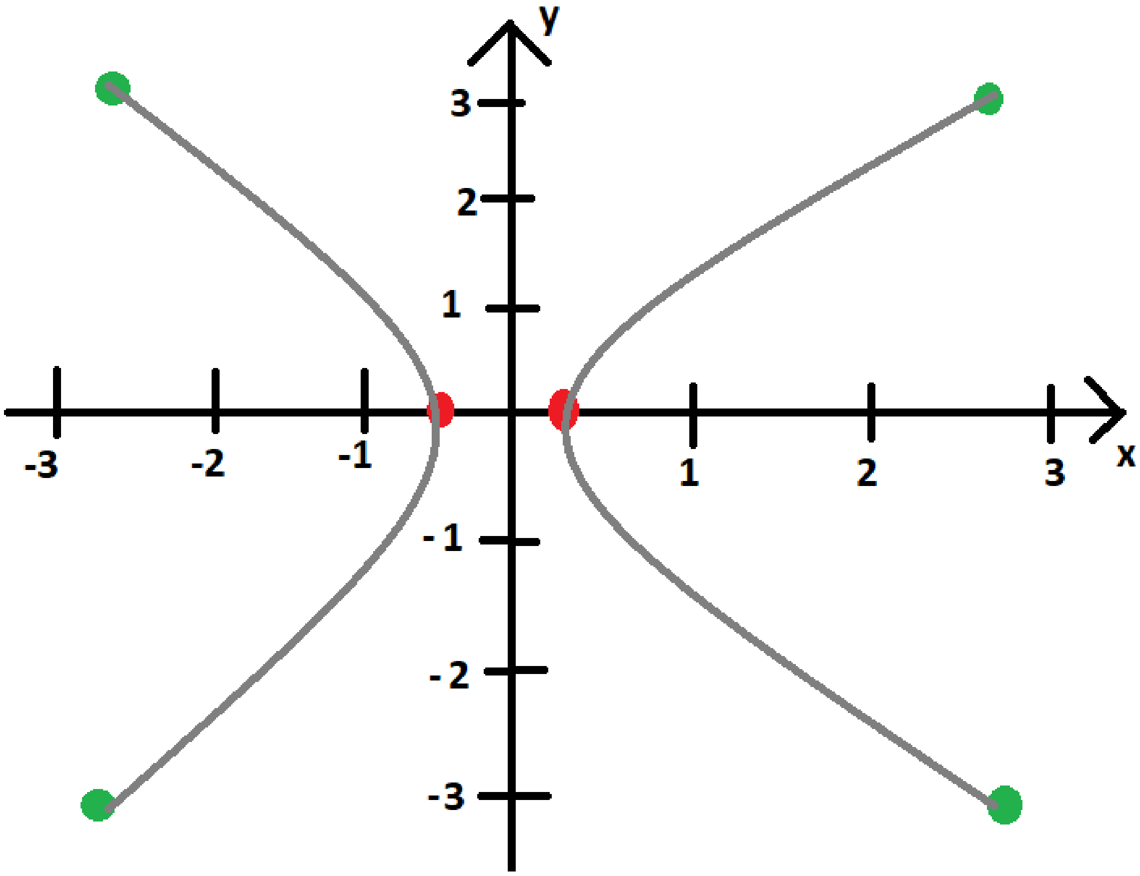
5) We zoeken één extra punt om de grafiek van de hyperbool te tekenen
Als je één punt hebt gevonden, dan heb je er direct 4 aangezien de hyperbool symmetrisch is langs alle kanten.

We vullen een random y-waarde (bv.: 3) in en kijken welke x-waarde daaruit komt.

$6x^2 - 5y^2 = 1$
⇔ $6x^2 - 5 \,.\, 3^2 = 1$
⇔ $6x^2 - 5 \,.\, 9 = 1$
⇔ $6x^2 - 45 = 1$
⇔ $6x^2 = 46$
⇔ $x^2 = \frac{46}{6}$
⇔ $x = \pm 2{,}77$

Je hebt nu de punten (2,77;3) en (-2,77;3) gevonden, maar de hyperbool is ook symmetrisch langs de y-as dus heb je nu ook punten (2,77;-3) en (-2,77;-3).

Duid deze punten en je a-waarden aan op een orthonormaal assenstelsel en teken je grafiek.
--> $a = \frac{\sqrt{6}}{6} = 0{,}41$



Zo, je hebt een volledige hyperbool geanalyseerd!

4.9.2) Oefening 15: vergelijking hyperbool bepalen

<u>a) als F(6,0) het brandpunt is en waarbij de hyperbool gaat door punt D(-2, 1)</u>

We weten dat F(6, 0) het brandpunt is --> DUS: c = 6

Hyperbool gaat door punt D(-2, 1), dit kunnen we invullen…

$$\frac{(-2)^2}{a^2} - \frac{1^2}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$$

--> Nu kunnen we met onze c werken naar een onbekende, we weten immers dat…

$$c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 = c^2 - b^2 \Leftrightarrow a^2 = 36 - b^2$$

--> Dit kunnen we terug invullen in onze oorspronkelijke vergelijking…

$$\Leftrightarrow \frac{4}{36-b^2} - \frac{1}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{36-b^2} = 1 + \frac{1}{b^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{36-b^2} = \frac{b^2+1}{b^2}$$

$$\Leftrightarrow (36 - b^2)(b^2 + 1) = 4b^2$$

$$\Leftrightarrow 36b^2 + 36 - b^4 - b^2 = 4b^2$$

$$\Leftrightarrow -b^4 + 31b^2 + 36 = 0$$

--> Dit is een bikwadratische vergelijking, die moet je oplossen met een hulponbekende.
We nemen… $\alpha = b^2$.

We krijgen dus…

$\Leftrightarrow -\alpha^2 + 31\alpha + 36 = 0$
--> $D = b^2 - 4ac = 31^2 - 4.(-1).36 = 1105$

$\alpha = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} = (1) - 1{,}12$

$= (2)\ 32{,}12$

--> Maar $\alpha = b^2$
--> Dus: $\cancel{b^2 = -1{,}12}$ V $b^2 = 32{,}12$
--> Antwoord verwerpen want b moet strikt positief zijn!

Als b² = 32,12 kunnen we a² hieruit halen want we vonden eerder: $a^2 = 36 - b^2$
--> Dus: $a^2 = 36 - 32{,}12 = 3{,}88$

De vergelijking van de hyperbool wordt dan…
$\frac{x^2}{3{,}88} - \frac{y^2}{32{,}12} = 1$

c) De hyperbool door twee punten A(4, 5) en B(3, -3) gaat
Je kan deze twee punten al invullen in de algemene vergelijking van de hyperbool. Je hebt twee aparte vergelijkingen.

$H1: \frac{4^2}{a^2} - \frac{5^2}{b^2} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{16}{a^2} - \frac{25}{b^2} = 1$

$H2: \frac{3^2}{a^2} - \frac{(-3)^2}{b^2} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{9}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1$

We zonderen a of b nu af in H1 of H2 om die uiteindelijk terug te substitueren in de andere. We gebruiken H2 omdat die er makkelijker uitziet.

$\Leftrightarrow \frac{9}{a^2} = 1 + \frac{9}{b^2}$

$\Leftrightarrow \frac{9}{a^2} = \frac{b^2+9}{b^2}$

$\Leftrightarrow \frac{a^2}{9} = \frac{b^2}{b^2+9}$

$\Leftrightarrow a^2 = \frac{9b^2}{b^2+9}\ (1)$

We vullen deze waarde (1) voor a² nu in in ellips H1.

$\Leftrightarrow \frac{16}{\frac{9b^2}{b^2+9}} - \frac{25}{b^2} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{16b^2+144}{9b^2} - \frac{25}{b^2} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{16b^2+144}{9b^2} = 1 + \frac{25}{b^2}$

$\Leftrightarrow \frac{16b^2+144}{9b^2} = \frac{b^2+25}{b^2}$

$\Leftrightarrow (16b^2 + 144)b^2 = 9b^2(b^2 + 25)$

$\Leftrightarrow 16b^4 + 144b^2 = 9b^4 + 225b^2$

$\Leftrightarrow 7b^4 - 81b^2 = 0$

$\Leftrightarrow b^2(7b^2 - 81) = 0$

$\Leftrightarrow b^2 = 0 \quad \vee \quad 7b^2 - 81 = 0$

$\Leftrightarrow b = 0 \quad \vee \quad b^2 = \frac{81}{7}$

--> Eerste antwoord verwerpen aangezien b strikt positief moet zijn!

We weten nu dus dat $b^2 = \frac{81}{7}$, a kunnen we nu halen uit volgende vergelijking die we eerder al hebben gevonden… $a^2 = \frac{9b^2}{b^2+9}$.

DUS: $a^2 = \frac{9b^2}{b^2+9} = \frac{9.\frac{81}{7}}{\frac{81}{7}+9}(uitrekenen\ met\ ZRM) = \frac{81}{16}$

Nu hebben we de vergelijking van onze hyperbool gevonden!

$\frac{x^2}{\frac{81}{16}} - \frac{y^2}{\frac{81}{7}} = 1$

Kan je schrijven als… (delen door een breuk is maal het omgekeerde!)

$\frac{16x^2}{81} - \frac{7y^2}{81} = 1$

Kan je schrijven als… (breuk overbrengen)

$16x^2 - 7y^2 = 1$

e) De lengte van de nevenas gelijk is aan 5 en de hyperbool door het punt P(3, 1) gaat.

Lengte nevenas = korte as = y-as = 2b
--> 2b = 5 ⇔ b = 2,5 --> b² = 6,25

We kennen b² en één punt, we kunnen dit invullen en a² afzonderen…

$\frac{3^2}{a^2} - \frac{1^2}{6{,}25} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{9}{a^2} = 1 + \frac{1}{6{,}25}$

$\Leftrightarrow \frac{9}{a^2} = 1{,}16\ (uitgerekend\ met\ ZRM)$

$\Leftrightarrow \frac{a^2}{9} = \frac{1}{1{,}16}$

$\Leftrightarrow a^2 = \frac{9}{1{,}16} = 7{,}76$

De formule van onze hyperbool wordt dan…

$\frac{x^2}{7{,}76} - \frac{y^2}{6{,}25} = 1$

g) De excentriciteit gelijk is aan 5/3 en F(-2,0) als brandpunt heeft

$e = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a = \frac{c}{e} = \frac{2}{\left(\frac{5}{3}\right)} = \frac{6}{5} \rightarrow a^2 = 1{,}44$

$c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 2 - 1{,}44 = 0{,}56$

De formule van de hyperbool wordt dan…

$\frac{x^2}{1{,}44} - \frac{y^2}{0{,}56} = 1$

i) F(1,0) het brandpunt is en de hyperbool rakend is aan t: 4x-3y+1 = 0

F(1,0) --> c = 1

We schrijven de raaklijn in de vorm van de algemene raaklijn aan een hyperbool…

$4x - 3y = -1 \Leftrightarrow -4x + 3y = 1$

--> Dit is in de vorm van de algemene vergelijking van de raaklijn aan de ellips.

➔ We mogen deze gelijkstellen aan: $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$

DUS: $-4x = \frac{xx_1}{a^2} \Leftrightarrow -4 = \frac{x_1}{a^2} \Leftrightarrow x_1 = -4a^2$

$3y = -\frac{yy_1}{b^2} \Leftrightarrow -3 = \frac{y_1}{b^2} \Leftrightarrow y_1 = -3b^2$

De algemene vergelijking van de raaklijn aan de ellips voldoet ook aan de vergelijking van de ellips (aahja, want de raaklijn raakt aan de ellips. Ze heeft dus één punt gemeenschappelijk!)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

--> We kennen x en y van onze vorige berekeningen…

$\frac{(-4a^2)^2}{a^2} + \frac{(-3b^2)^2}{b^2} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{16a^4}{a^2} + \frac{9b^4}{b^2} = 1$

$\Leftrightarrow 16a^2 + 9b^2 = 1$

➔ We weten: $c^2 = a^2 + b^2$ en c = 1

Nu is $b^2 = c^2 - a^2 \quad \Rightarrow \quad 16a^2 - 9(1 - a^2) = 1$

Hieruit vinden we dat $a^2 = 0{,}4 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 0{,}6$

De vergelijking wordt dus: $\frac{x^2}{0{,}4} - \frac{y^2}{0{,}6} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 6x^2 - 4y^2 = 2{,}4$

4.9.3) Oefening 16: snijpunten bepalen

a) Bepaal de snijpunten van hyperbool H en rechte r.

$H: \frac{x^2}{4} - y^2 = 1 \qquad r: -3x - \frac{1}{2}y + 6 = 0$

Snijpunten bepalen = stelsel maken.
--> Echter: We willen de breuken wegwerken omdat breuken het moeilijk maken om te rekenen…

$H: \frac{x^2}{4} - \frac{4y^2}{4} = 1$ (op gelijke noemers zetten)
$\Leftrightarrow x^2 - 4y^2 = 4$ (overbrengen)

$r: -\frac{6}{2}x - \frac{1}{2}y = -6$ (overbrengen + op gelijke noemers zetten)
$\Leftrightarrow -6x - 1y = -12$ (overbrengen)
$\Leftrightarrow 6x + y = 12$

We hebben nu twee makkelijkere vergelijkingen wat het oplossen van ons stelsel zal vergemakkelijken.

$\begin{cases} 6x + y = 12 \\ x^2 - 4y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12 - 6x \\ x^2 - 4(12 + 6x)^2 = 4 \end{cases}$ --> We werken eventjes enkel verder met vgl 2.

$x^2 - 4(12 - 6x)^2 = 4$
$\Leftrightarrow x^2 - 4[12^2 - 2\,.\,12\,.\,6x + 6^2x^2] = 4$
$\Leftrightarrow x^2 - 4[144 - 144x + 36x^2] = 4$
$\Leftrightarrow x^2 - 576 + 576x - 144x^2 = 4$
$\Leftrightarrow -143x^2 + 576x - 580 = 0$

$\rightarrow D = b^2 - 4ac$
$= 576^2 - 4\,.\,(-143).(-580)$
$= 16$

$\rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-576+4}{2\,.(-143)} = 2$

$\rightarrow x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-576-4}{2\,.(-143)} = \frac{290}{143}$

Vul de gevonden x-waardes nu in in y = 12-6x.
$\rightarrow y_1 = 12 - 6x = 12 - 6\,.\,2 = 0$
$\rightarrow y_2 = 12 - 6x = 12 - 6\,.\left(\frac{290}{143}\right) = -\frac{24}{143}$

De twee snijpunten zijn dus: $(2; 0)$ en $\left(\frac{290}{143}; -\frac{24}{143}\right)$

4.9.4) Oefening 17: raaklijn en normaal algebraïsch berekenen

Opgave 17: Bepaal de vergelijkingen van de raaklijn en de normaal van de gegeven hyperbool H in het punt P:

b) $H: 10x^2 - 4y^2 = 1$ $\quad\quad P(\quad, -2)$ met $P_x > 0$

→ We zoeken eerst het x-coördinaat door y in te vullen…
$10x^2 - 4\,.\,(-2)^2 = 1 \Leftrightarrow 10x^2 - 4.4 = 1 \Leftrightarrow 10x^2 - 16 = 1$
$\Leftrightarrow 10x^2 = 17 \Leftrightarrow x^2 = 1{,}7 \Leftrightarrow x = \sqrt{1{,}7} = (ongeveer)\ 1{,}30$
→ Punt $P(1{,}30;\ -2)$

De algemene vergelijking van de raaklijn aan de hyperbool is…

$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$

Om a² en b² af te kunnen lezen moeten we onze hyperbool H eerst in de standaardvorm omzetten.
$H: 10x^2 - 4y^2 = 1$
⇔ $\frac{x^2}{\frac{1}{10}} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$ (delen door een breuk = maal het omgekeerde!)
--> Hieruit lezen we af: $a^2 = \frac{1}{10}$ en $b^2 = \frac{1}{4}$

We vullen dus in…
$\frac{1{,}30x}{\frac{1}{10}} - \frac{-2y}{\frac{1}{4}} = 1$

⇔ $13{,}00x - (-8y) = 1$ (delen door een breuk = maal het omgekeerde)

⇔ $13x + 8y = 1$

⇔ $8y = -13x + 1$

⇔ $y = -1{,}625x + 0{,}125$
--> Dit is de vergelijking van onze raaklijn.

De rico van de raaklijn = -1,625
--> Rico normaal: $m_n = -\frac{1}{m_r}$

$= -\frac{1}{-1{,}625}$

$= 0{,}62$

$y - y_1 = m(x - x_1)$
⇔ $y - (-2) = 0{,}62(x - 1{,}30)$
⇔ $y + 2 = 0{,}62x - 0{,}806$
⇔ $y = 0{,}62x - 2{,}806$
--> Dit is de vergelijking van de normaal.