Samenvatting wiskunde: Analyse: afgeleiden I – 7u wiskunde – made by Abdellah

---

(Z) VOORWOORD
Dit is de samenvattingenreeks wiskunde voor de afgeleidentoets/examen, de samenvatting van afgeleiden wordt gesplitst in 3 delen om structuur aan te brengen.

Afgeleiden I = Introductie + rekenen met afgeleiden + afgeleid getal + L'Hôpital
Afgeleiden II = Herhaling rekenregels + rekenregels afleiden met afgeleid getal + benadering nulwaarden + denkvragen
Afgeleiden III = Bewijzen van de rekenregels

Veel leerplezier!

(Y) FOUTENPROCEDURE
Foutje in de samenvatting? Dat kan. Ik ben je dan ook heel dankbaar als je het meld via Smartschool. A.d.h.v. de ernst van de fout wordt het direct of pas later aangepast.

FOUT VAN DE 0DE GRAAD: Spellingsfout, verkeerde zinsbouw, de/het-fout … = niet melden
FOUT VAN DE 1STE GRAAD: Voorbeeldoefening verkeerd, theorie onvolledig = melden
→ Fouten van de 1ste graad worden gecommuniceerd via Smartschool en later aangepast.
FOUT VAN DE 2DE GRAAD: Ernstige fout waardoor de theorie verkeerd wordt uitgelegd = melden
→ Fouten van de 2de graad worden zo snel mogelijk aangepast en gecommuniceerd via Smartschool.

(X) INHOUDSTAFEL
Zie volgende pagina.

Inhoud

2) Afgeleiden II: toepassen

2.1) Herhaling rekenregels

*We halen hier de belangrijkste dingen uit samenvatting afgeleiden I, je moet deze **nog steeds** kennen voor de toets en voor het examen. Ga naar samenvatting afgeleiden I om toepassingen te zien op deze rekenregels. Ga naar samenvatting afgeleiden III voor de bewijzen.

1.2.3) Overzicht rekenregels afgeleiden veelterm-/rationale functies

1) Afgeleid getal/afgeleide functie bepalen: $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

2) Rekenregels veeltermfuncties afleiden:
   1) DC = 0 (constante functie)
   2) Dx = 1 (identieke functie)
   3) $D(x^n) = nx^{n-1}$ (power rule)
   4) D(f+g) = D(f) + D(g)
   5) D(f.g) = D(f) . g + f . D(g)
   6) $D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{Df.g - f.Dg}{g^2}$ (quotiëntregel)
   7) $D(x+y)^n \; met \; y \; is \; een \; getal = n(x+y)^{n-1}.D(x+y)$ (kettingregel)

3) L'Hopital: bij een vorm van 0/0 of oneindig/oneindig mag je teller en noemer apart afleiden.

2.2) Vergelijking opstellen van een raaklijn

*Je moet op de toets vergelijkingen kunnen opstellen van een raaklijn aan een kromme als één punt gegeven is. We maken hier enkele voorbeelden.
*Je herinnert je (omdat je zo slim bent) de algemene vergelijking van een rechte die we hebben geleerd in het 3dejaar: $y - y_1 = m(x - x_1)$ door coördinaat (x_1, y_1) en met rico m.
*Je herinnert je (omdat je superslim bent) uit samenvatting afgeleiden I dat **het afgeleid getal gelijk is aan de rico van de raaklijn aan dat getal.**

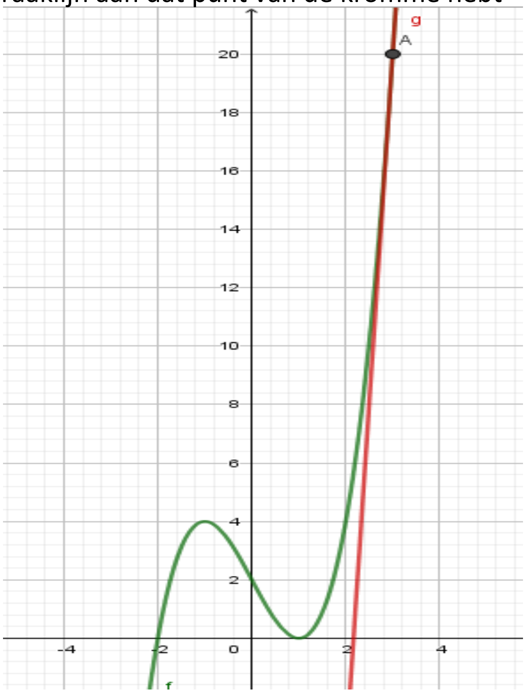
2.2.1) Voorbeeld: vgl van y = x³ - 3x + 2 door (3, 20)

→ Dit gaat volgens een welbepaald stappenplan, als je één oefening kan, kan je ze allemaal.
*Stap 1: schrijf de opgave goed over.
--> $f(x) = x^3 - 3x + 2$ en punt P(3,20)
*Stap 2: Bereken de afgeleide van de functie want de afgeleide = rico (zie 2.2 vanboven).
→ $f'(x) = 3x^2 - 3$
*Stap 3: Je hebt één coördinaat gegeven, vul de x-waarde ervan in om de rico te weten.
→ $f'(3) = 3.3^2 - 3 = 27 - 9 + 2 = 27 - 3 = 24$
*Stap 4: Schrijf de algemene vergelijking van de rechte op
→ $y - y_1 = m(x - x_1)$
--> We hebben x_1 en y_1 én onze m ook daarjuist berekent door de eerste afgeleide te nemen, we kunnen dus beginnen met invullen (zie stap 5).
*Stap 5: Vul je gegevens in die je hebt gevonden/hebt gegeven
--> $y - 20 = 24(x - 3)$
*Stap 6: reken verder uit totdat je een rechte hebt van de vorm y = ax + b

--> $y = 24(x-3) + 20$ ➔ $y = 24x - 52$

*Stap 7: Wees trots op jezelf dat je de vergelijking van de raaklijn aan dat punt van de kromme hebt gevonden!

*Om het je een beetje grafisch te kunnen voorstellen heb ik hiernaast de grafiek getekent van de functie en de raaklijn, dat zit je dus te berekenen! We zien ook direct dat we juist zijn.



2.3) Punten berekenen waar de functie raakt als je de rico van de raaklijn en f(x) hebt gegeven

*Als je de rico van de raaklijn weet en je hebt het functie-voorschrift gegeven moet je de raakpunten of -punt kunnen berekenen. Dit gaat weeral volgens een wel-bepaalde stappenplan. Maar eerst…

→ **Je herinnert je opnieuw (omdat je zo slim bent) dat het afgeleid getal gelijk is aan de rico van de raaklijn aan dat getal.**

2.3.1) Voorbeeld: In welk(e) punt(en) van de grafiek van f(x) = -x^2 + x – 6 heeft de raaklijn als rico -1?

*Stap 1: Schrijf de opgave tegoei over.

→ Gegeven: f(x) = -x^2 + x – 6 en m(raaklijn) = -1

*Stap 2: Bereken de (eerste) afgeleide aangezien dat gelijk is aan de rico van de raaklijn.

→ $f'(x) = -2x + 1$

*Stap 3: Aangezien je eerste afgeleide gelijk is aan de rico van de raaklijn en je de rico gegeven hebt moet het dus gelijk zijn aan je afgeleide functie. Je stelt de rico en de eerste afgeleide gelijk aan elkaar en werkt uit

→ $-1 = -2x + 1 \Leftrightarrow -2 = -2x \Leftrightarrow x = 1$

*Stap 4: Nu heb je de x-waarde van je raakpunt, nu moet je de y-waarde zoeken. Omdat je weet dat **een raakpunt**, **raakt** aan de functie (in dit geval parabool), vervang je de x-waarde van de niet-afgeleide functie door 1 en reken je zo de y-waarde uit.

→ $y = -x^2 + x - 6 = -1^2 + 1 - 6 = -1 + 1 - 6 = -6$

*Stap 5: Je hebt nu de raakpunt(en) gevonden!

→ Je raakpunt is (1, -6)!

2.4) Waarde van parameters bepalen als het functievoorschrift, een raakpunt en de rico zijn gegeven

*Je moet dit ook kunnen, als je een functie hebt met parameters moet je de parameters kunnen bepalen met deze gegevens. Dit gaat ook volgens een welbepaalde stappenplan.

2.4.1) Voorbeeld: de grafiek van $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ heeft in P(2, -6) een raaklijn met rico 1. Bepaal a en b.

*Stap 1: Herinner jezelf opnieuw enkele dingen…

→ **Het afgeleid getal is gelijk aan de rico van de raaklijn van dat getal!**

*Stap 2: Leid je functie af.

→ $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ (met parameters leid je hetzelfde af als met normale functies!)

*Stap 3: Vul je x- én y-waarde in de normale functie in, we zonderen af tot a en/of b!

→ $f(x) = x^3 + ax^2 + bx \Leftrightarrow f(2) = 2^3 + 2a.2 + b$ (we weten dat f(2) = -6, punt is gegeven!)

➔ $-6 = 8 + 4a + 2b$

$\Leftrightarrow 4a + 2b = -14$

*Stap 4: Vul je x- én y-waarde in de afgeleide functie in, we zonderen af tot a en/of b!

→ $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Leftrightarrow f'(2) = 1$ (weten we want we hebben rico raaklijn gegeven!)

➔ $1 = 3.2^2 + 2a.2 + b \Leftrightarrow 1 = 12 + 4a + b \Leftrightarrow 4a + b = -11$

*Stap 5: Gebruik eenderwelke wiskundige methode die je kent om beide vergelijkingen op te lossen, in dit geval moeten we een stelsel maken. Ik los ze op met substitutie (fuck Gauss)

$$\begin{cases} 4a + 2b = -14 \\ 4a + b = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2(-11 - 4a) = -14 \\ b = -11 - 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 22 - 8a = -14 \\ \ldots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a = 8 \\ \ldots \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -11 - 4.(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -11 + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases}$$

→ Je oefening stopt hier, je hebt gevonden: a = -2 en b = -3, proficiat!

2.5) Verdieping: Tot een hogere orde afleiden

*Zoals we hebben gezien in samenvatting afgeleiden I kan je tot een hogere orde afleiden, dit is een verdiepingsoefening in de cursus maar is zo makkelijk dat ik het toch uitleg (misschien bonus-vraag op toets?). **Voor het ingangsexamen geneeskunde moet je tot de 2de orde kunnen afleiden**.

2.5.1) Voorbeeld: bereken $D^3(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

*Je ziet aan de opgave dat je tot de 3de orde moet afleiden!

→ Wat doe je?

--> Stap 1: Leid de eerste orde af zoals normaal --> $D = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

--> Stap 2: Leid je afgeleide functie nog eens af = tweede orde --> $D^2 = 12x^2 + 6x + 2$

--> Stap 3: Leid je afgeleide functie nog eens af = derde orde --> $D^3 = 24x + 6$

*Proficiat! Je hebt zojuist tot de derde orde afgeleid! Je kan blijven afleiden totdat je 0 uitkomt.

2.6) Benaderingsmethode van nulwaarden

*Als je een benaderde waarde van een nulwaarde wilt vinden gebruik je de methode van Newton-Raphson. Je moet kunnen tonen dat je de methode begrijpt dus max. 1 of 2 keer toepassen.

→ Wat gaan we doen? Nulwaarde benaderen door gebruik te maken van raaklijnen aan de functie, en je riekt het al --> raaklijn aan functie = afgeleide!

→ **Je herinnert je (omdat je bijna zo slim als Einstein bent) de stelling van Bolzano aka stelling van het nulpunt uit het hoofdstuk van continuïteit: een nulwaarde ligt altijd tussen een positieve functiewaarde en een negatieve functiewaarde.**

→ **Je herinnert je (slimmerik) dat de algemene vergelijking van een rechte gelijk is aan:** $y - y_1 = m(x - x_1)$

2.6.1) Voorbeeldoefening: bepaal tot 4 decimalen nauwkeurig de wortels (oplossingen) van de vergelijking x^3 - 2x + 5 = 0

*Stap 1: Maak van je vergelijking een functie.
--> $f(x) = x^3 - 2x + 5$
*Stap 2: Zoek één positieve en één negatieve waarde, herinner je de stelling van Bolzano.
--> Negatieve waarde: als x = 2 --> f(x) = -1 (ga zelf na)
--> Positieve waarde: als x = 3 --> f(x) = 16 (ga zelf na)
→ Volgens de stelling van Bolzano zit onze nulwaarde hiertussen.
*Stap 3: Leid je functie af (zoals we al gewoon zijn)
--> $f'(x) = 3x^2 - 2$
*Stap 4: Vul één van de gevonden getallen in stap 2 in de afgeleide functie in zodat je de rico kan zoeken van de raaklijn.
--> We kiezen x = 2 --> $f'(2) = 3\,.\,2^2 - 2 = 3.4 - 2 = 10$
→ Onze rico van onze raaklijn is dus 10.
*Stap 5: Vul de gekozen x- en y-waarde en de rico in de algemene vergelijking van de rechte in.
--> $y - y_1 = m(x - x_1)$
⇔ $y - (-1) = 10(x - 2)$ ⇔ $y + 1 = 10x - 20$ ⇔ $y = 10x - 21$ (dit is je raaklijn!)
*Stap 6: Zoek de nulwaarde van de bekomen raaklijn (doe je door y gelijk te stellen aan 0)
--> $0 = 10x - 21$ ⇔ **$x = 2,1$ --> Dit is je eerste benaderde nulwaarde**.

---

*Stap 7: Vul je eerste benaderde nulwaarde in de afgeleide functie in om de tweede rico te zoeken
--> $f'(2{,}1) = 3\,.\,2{,}1^2 - 2 = 7{,}261$
*Stap 8: Zoek de y-waarde van je eerste benaderde nulwaarde.
--> $f(x) = 2{,}1^3 - 2\,.\,2{,}1 + 5 = 0{,}061$
*Stap 9: Vul de x- en y-waarde en de rico in in de algemene vergelijking van de rechte.
--> $y - y_1 = m(x - x_1)$
⇔ $y - 0{,}061 = 7{,}261(x - 2{,}1)$
⇔ $y = 7{,}261x - 15{,}3091$ $(ga\ de\ tussenstappen\ zelf\ na)$
*Stap 10: Zoek de nulwaarde van je bekomen vergelijking
--> $0 = 7{,}261x - 15{,}3091$ ⇔ $x = \frac{15{,}3091}{7{,}261} =$ **$2,1084$ --> Dit is je tweede benaderde nulwaarde**

---

*Stap 11: Repeat stappen 7 tot en met 10 totdat de éérste 4 getallen van je benaderde nulwaarde niet meer veranderen (#InfiniteLoop#Alexander).

2.7) Ogenblikkelijke snelheid en versnelling berekenen

*In de studiewijzer wiskunde van module 3 staat onder afgeleiden dat je dit moet kunnen:

- extremumvraagstukken, ook van buiten de wiskunde, oplossen die aanleiding geven tot de reeds gekende functies, eventueel met behulp van ICT.

→ Dus ookal is de ogenblikkelijke snelheid een fysisch probleem moet je deze- en andere problemen kunnen oplossen met afgeleiden. Ik kies om de ogenblikkelijke snelheid te doen omdat je dit volgend jaar voor fysica ook moet kunnen. Ook omdat dit zeer belangrijk is om te kunnen voor het ingangsexamen geneeskunde.
→ Gemiddelde snelheid berekenen is een toepassing op het differentiequotiënt maar dat kan

je al. Dit doe je met de formule $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.

→ Wat is mijn verplaatsing als ik met een constante snelheid van 3m/s voor 2s rij?

$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta x = v \,.\, \Delta t = \frac{3m}{s} . 2s = 6m$ → voila! Niet zo moeilijk!

2.7.1) Voorbeeldoefening: ogenblikkelijke snelheid en versnelling

*Opgave: Abdellah rijdt met zijn fiets langs een rechte weg naar school. Zijn plaats als functie van de tijd wordt weergegeven door: $x(t) = 1{,}00\frac{m}{s^2} \,.\, t^2 + 0{,}50\frac{m}{s} \,.\, t + 2{,}50\, m$

Wat was zijn snelheid op t = 1s, t = 3s en t = 5 min? Wat is zijn versnelling op t = 6 min?

→ Gegeven: $x(t) = 1{,}00\frac{m}{s^2} \,.\, t^2 + 0{,}50\frac{m}{s} \,.\, t + 2{,}50\, m$

t(1) = 1s, t(2) = 3s, t(3) = 5 min = 300 s

→ Gevraagd: v(1,0s); v(3,0s); v(300s)?

→ Oplossing: Om de ogenblikkelijke snelheid te berekenen moet je de plaatsfunctie die we hebben gekregen afleiden. Dit doe je met de normale rekenregels voor veeltermfuncties afleiden.

--> $\boldsymbol{v(x) = \frac{dx}{dt}}$

$v(t) = \frac{dx}{dt} = x'(t) = 2 \,.\, 1{,}00\frac{m}{s^2} \,.\, t^{2-1} + 1.0{,}50\frac{m}{s} \,.\, t^{1-1} + 0$ --> Macht naar voor, macht eentje minder.

→ Let op! Je moet NIKS aan je eenheden doen, je moet s² dus niet ineens beginnen af te leiden!!!

➔ Je moet t zien als ‘x’ bij je normale functie f(x) want het staat tussen haakjes.

--> We hebben nu: $v(t) = 2{,}00\frac{m}{s^2} \,.\, t + 0{,}50\frac{m}{s}$

→ Om de ogenblikkelijke snelheid te berekenen vul je je t-waarden nu gewoon in!

--> 1) $v(1) = 2{,}00\frac{m}{s^2} \,.\, 1s + 0{,}50\frac{m}{s} = 2{,}50\frac{m}{s}$

2) $v(3) = 2{,}00\frac{m}{s^2} \,.\, 3s + 0{,}50\frac{m}{s} = 6{,}50\frac{m}{s}$

3) $v(500) = 2{,}00\frac{m}{s^2} \,.\, 500s + 0{,}50\frac{m}{s} = 100{,}50\frac{m}{s}$

Om de ogenblikkelijke versnelling te berekenen moet je de bekomen snelheidsfunctie nu gaan afleiden: $\boldsymbol{a(t)} = \boldsymbol{\frac{dv}{dt}} = v'(t) = 2{,}00\frac{m}{s^2}$ (macht naar voor, macht eentje minder!)

→ We krijgen dus: $a(t) = 2{,}00\frac{m}{s^2}$

→ We zien dat de versnellingsfunctie constant is (een functie van de vorm y = c) en ik dus constant met die waarde versnelde. Mijn versnelling op t = 6 min is dus $2{,}00\frac{m}{s^2}$.

→ Als mijn versnellingsfunctie niet constant was moest je 6 min omzetten naar seconden en moest je dan de t-waarde invullen net zoals bij versnelling!