Wiskunde: analyse – module 6 – laatste deel van analyse: integralen – samenvatting

----

(Y) VOORWOORD

*Dit is de samenvatting van analyse ter voorbereiding van het examen van module 6.
*Alle grafische voorstellingen zijn gemaakt met Geogebra of Paint.

(X) INHOUDSTAFEL

Over twee pagina's.

(Z) FOUTJE?

Contacteer de maker van deze samenvatting.

Inhoud

1) Differentiaal

1.1) Definitie en basisformules

*Definitie: de differentiaal van een reële functie f(x) is een benadering voor de toename van het argument x, Δy. De differentiaal dy komt overeen met de raaklijn.
--> Bij de identieke functie komt dy overeen met Δy.

*Formules voor het differentiëren:
$df(x) = dy = f'(x).dx$ --> dit is afleiden en een dx erachter zetten.
$df(x) = dy = f'(x).\Delta x$ --> Deze formule wordt duidelijk in de voorbeeldoefeningen.

1.2) Formules voor het differentiëren

*Differentiëren komt neer op afgeleide met een dx erachter zetten. Alle formules voor het afleiden moet je dus nog steeds kennen.

1.2.1) Basisformules

VEELTERM- EN RATIONALE FUNCTIES

$d(C) = 0$ (de afgeleide van een constant getal = 0)
$d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}\,.dx$
$d(x^n) = n\,.x^{n-1}\,.dx$

IRRATIONALE FUNCTIES

$d(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.dx$
$d(\sqrt[3]{x}) = d\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}\,.x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\,.x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\,.\sqrt[3]{x^2}}$
(elke andere functie dan de 2^de^ machtswortel zet je om naar een rationale exponent!)

GONIOMETRISCHE FUNCTIES

$d(\sin x) = \cos x\ .dx$
$d(\cos x) = -\sin x\ .dx$
$d(\tan x) = \frac{1}{cos^2(x)}\,.dx$
$d(\cot x) = -\frac{1}{sin^2(x)}\,.dx$

CYCLOMETRISCHE FUNCTIES

$d(Bgsin\ x) = \frac{1}{1+x^2}\,.dx$ $\quad$ $d(Bgcos\ x) = -\frac{1}{1+x^2}\,.dx$
$d(Bgtan\ x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.dx$ $\quad$ $d(Bgcot\ x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.dx$

EXPONENTIËLE FUNCTIES

$d(a^x) = a^x\,.\ln(a)\,.dx$ $\quad$ $d(e^x) = e^x\,.dx$

LOGARITMISCHE FUNTIES

$d(\log_a x) = \frac{1}{x\,.\ln a}\,.dx$ $\quad$ $d(\ln x) = \frac{1}{x}\,.dx$

VERGEET DE KETTINGREGEL NIET!!!!

1.2.2) Rekenregels

De basisrekenregels voor het afleiden gelden ook voor het differentiëren:

$d(f+g) = df + dg$ (somregel)

$d(f\,.\,g) = df.\,g + f\,.\,dg$ (productregel)

$d(k\,.\,f) = k\,.\,df$ (een constant getal k mag je voor je differentiaal zetten)

$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df\,.g - f\,.dg}{g^2}$ (quotiëntregel)

1.3) Toepassing: benadering van wortels (V)

Dit is verdieping, maar hebben we (in 6WEWA) behandeld in de les:

OEFENING 3a: voorbeeldoefening : bereken een benadering van $\sqrt{24}$

STAP 1: Herschrijf de wortel als een som of verschil met een wortel die je kent.

$\sqrt{24} = \sqrt{25-1}$

STAP 2: Besef dat de wortel in principe een functie is, dus mogen we dit herschrijven als…

$f(24) = f(25-1)$

--> je weet dat $f = \sqrt{iets}$

STAP 3: We herschrijven dit als een differentiaal

$f(24) = f(25-1) = f\big(25 + (-1)\big) = f(25 + \Delta x) = f(25) + \Delta y$

--> Waarom + Δx? Omdat er een verschil (Δ) in x-waarde is, nl. die -1! Daarna verandert die Δx in een Δy omdat we de functie uitrekenen!

STAP 4: Reken de wortel uit die je kent: f(25) = 5

$f(24) = 5 + \Delta y$

STAP 5: We benaderen Δy door dy

$f(24) = 5 + dy$

STAP 6: We vullen de formule van dy in.

$f(24) = 5 + f'(x).\,\Delta x$

$= 5 + \frac{1}{2\sqrt{25}}.(-1) = 5 + \frac{1}{2\,.5}.(-1) = 5 + \frac{1}{10}.(-1) = 4{,}9$

--> LET OP: we vullen in f'(x) onze 25 terug in, niet de 24!

4,9 is ons antwoord. Dit is een benadering van $\sqrt{24}$.

1.4) Voorbeeldoefeningen

1.4.1) Oefening 1: dy en Δy vergelijken

VOORAF:

$*dy = df(x) = f'(x).\,dx = f'(x).\,\Delta x$

$*\Delta y = y_2 - y_1$ (het verschil in y-waarden van een functie, grootste – kleinste waarde)

OEFENING H: $y = \ln(x^2+1)$ met x = 2 en $\Delta x = 0{,}01$

$f(x) = \ln(x^2+1)$

$df(x) = \frac{1}{x^2+1}\,.\,2x\,.\,0{,}01 = \frac{0{,}01\,.2x}{x^2+1} \rightarrow 2\ invullen \rightarrow = \frac{0{,}01\,.2.2}{2^2+1} = 8\,.\,10^{-3}$

$\Delta y = \ln(2{,}01^2+1) - \ln(2^2+1) = 7{,}98\,.\,10^{-3}$

--> Hieruit leer je: hoe kleiner Δx hoe beter je benadering!

Opmerkingen:
GROEN: vergeet de KETTINGREGEL niet!
GEEL: de grootste y-waarde is natuurlijk degene plus de Δx

1.4.2) Oefening 2: differentiëren

VOORAF:
*Integreren = afleiden met een dx erachter. Zie rekenregels pagina 3.
*Vergeet de kettinregel niet!

TWEE VOORBEELDOEFENINGEN:

s) $f(x) = \sqrt{Bgtan\sqrt{(\sin x)^2}}$ ***(aangepast)***

$$df(x) = \frac{1}{2\sqrt{Bgtan\, x}}\ (wortel\ afleiden)\ .\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{(\sin x)^2}}}\ (Bgtan\ afleiden).\frac{1}{2\sqrt{(\sin x)^2}}\ (wortel\ afl.)$$

$$.\,2\sin x\ \ (haakjes\ voor\ de\ sinus\ afleiden).\cos x\ \ (sinus\ afleiden).\,dx\ (different.)$$

➔ We hadden hier maar liefst 4x de kettingregel! Als je verschillende soorten functies (haakjes, cyclometrisch, goniometrisch, wortels …) in één hebt moet je elke soort functie stapsgewijs zoals hier afleiden. Dat is de kettingregel.
--> *We noemen deze 'functies in functies' samengestelde functies.*

➔ Zo moeilijke oefeningen krijg je niet, maar ik hoop dat het gebruik van de kettingregel hieruit duidelijk is.

➔ Vergeet je dx niet!

u) $f(x) = 10^{2x}$

$$df(x) = 10^{2x}\,.\ln 10\ .\,2\,.\,dx$$

➔ Kettingregel!

1.4.3) Een vraagstukje…

OEFENING 5: Een fabrikant maakt een schijfvormige ijzeren plaat met straal x cm en oppervlakte y cm. Een fout Δx voor x geeft een fout Δy voor y. Bereken Δy voor x = 5 en $\Delta x = 0,1$

Eerst maken we een formule voor Δy.
--> Je weet dat: $\Delta y \approx dy$
→ $dy = df(x) = f'(x).dx = f'(x).\Delta x$
--------> Wat is f(x)? We hebben te maken met een schijf (cirkel), dus: $f(x) = \pi x^2$
--> met x = de straal (zie opgave). De oppervlakte van een cirkel is immers: $A = \pi r^2$

➔ DUS: $dy = df(x) = 2\pi x\,.\,dx = 2\pi x\,.\,\Delta x$

Nu vullen we de fout Δx (= de fout in de straal) in om Δy (de fout in oppervlakte) te benaderen:
$\Delta y \approx dy = 2\pi\,.\,5\,.\,0{,}1 = 3{,}14$

Als de fabrikant dus de straal per ongeluk 0,1 kleiner maakt, verandert de oppervlakte met 3,14 eenheden.

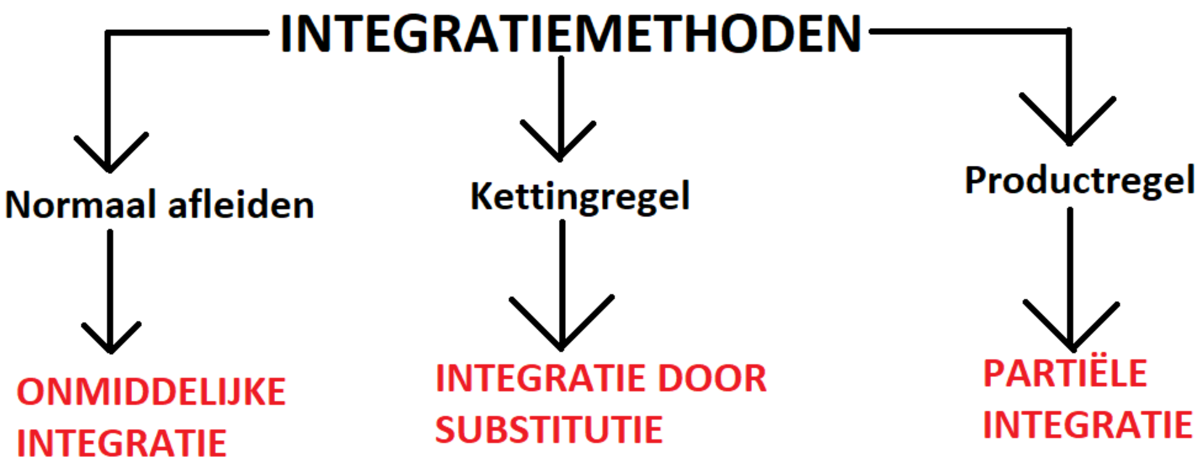
2) Onbepaalde integraal

2.1) Omgekeerde bewerking

*Integreren is de omgekeerde bewerking van afleiden (of differentiëren). Of zoals Mathijs het ooit mooi tijdens het oefenen had gezegd: “Integreren is ontafleiden.”

2.2) Integratiemethoden

We kennen 3 methoden om een onbepaalde integraal te berekenen. Aan de hand van wat je tijdens het afleiden (of differentiëren) moet doen, weet je welke methode je moet toepassen.



(1) Als je tijdens het afleiden een basisrekenregel moet gebruiken, moet je tijdens het integreren onmiddellijke integratie toepassen.
(2) Als je tijdens het afleiden de kettingregel moet toepassen, moet je tijdens het integreren een substitutie toepassen (en dus niet enkel onmiddellijke integratie!).
(3) Als je tijdens het afleiden de productregel moet toepassen, moet je tijdens het integreren partiële integratie toepassen.

We spreken in wat volgt de drie integratiemethoden in chronologische volgorde.

2.2.1) Onmiddelijke integratie

Integreren is het omgekeerde van afleiden. Na het integreren hoor je altijd een +C te zetten omdat je eigenlijk de primitieve functie (= verzameling van alle functies die één functie als afgeleide hebben) zoekt. Primitieve functies zijn op een constante C na bepaald.

2.2.1.1) Rekenregels

<u>VEELTERM- EN RATIONALE FUNCTIES</u>

$\int 1\,dx = x$ WANT $Dx = 1$

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ *(macht +1, macht naar onder)*

<u>IRRATIONALE FUNCTIES</u>

$\int \sqrt[n]{x^m}\,dx = \int x^{\frac{m}{n}}\,dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}$

Een irrationale functie zet je om naar een macht met rationale exponent, daarna pas je de regel “macht +1, macht naar onder” toe!

GONIOMETRISCHE FUNCTIES

$\int \sin x\, dx = -\cos x$ WANT *$D\sin x = \cos x$ (omgekeerde afleiden, dus min!)*

$\int \cos x\, dx = \sin x\ .dx$ WANT $D\cos x = -\sin x$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$ WANT $D\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x$ WANT $D\cot x = -\frac{1}{sin^2(x)}$

CYCLOMETRISCHE FUNCTIES

$\int \frac{1}{1+x^2} .dx = Bgtan\ x$ WANT $DBgtan\ x = \frac{1}{1+x^2}$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} .dx = Bgsin\ x$ WANT $DBgsin\ x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

EXPONENTIËLE FUNCTIES

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$ WANT $Da^x = a^x .\ln a$

$\int e^x dx = e^x$ WANT $De^x = e^x$

LOGARITMISCHE FUNTIES

$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$ WANT $Dln\ x = \frac{1}{x}$

→ Let op: $\int \frac{1}{x} dx \neq \int x^{-1} dx \neq \int \frac{x^0}{0} dx\ (macht + 1\ macht\ naar\ onder)$

--> De deling door 0 is immers niet gedefinieerd.

ALGEMENE REKENREGELS

$\int (f+g) dx = \int f\, dx + \int g\, dx$ ➔ integraal van een som = som van de integralen

$\int k . f . dx = k . \int f\, dx$ ➔ Een constante (getal) mag je voor je integraal zetten.

2.2.2.2) Voorbeeldoefeningen

1) $\int 3^x . 2^x\, dx = \cdots$ je intuïtie zou direct zeggen: partiële integratie want ik zie een product van twéé functies (= productregel). Maar, je kan een rekenregel van machten toepassen.

$= \int (3 . 2)^x\, dx$ $[a^m . b^m = (a.b)^m]$

$= \int 6^x dx = \frac{6^x}{\ln 6}$ $[\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}]$

2) $\int \frac{2x^2+x-4}{x} dx = \int \frac{2x^2}{x} + \frac{x}{x} - \frac{4}{x}\, dx$ (we mogen de teller altijd opsplitsen, bij noemers mag dit niet!)

$= \int \frac{2x^2}{x} + \int \frac{x}{x} - \int \frac{4}{x}$ (integraal van een som = som van de integralen)

$= \int 2x + \int 1 - \int 4 . \frac{1}{x}$ (uitwerken)

$= 2 \int x + \int 1 - 4 . \int \frac{1}{x}$ (een constante mag voor de integraal worden gezet)

$= 2 . \frac{x^2}{2} + x - 4 . \ln(x) + C$ (onmiddelijke integratie)

$= x^2 + x - 4 . \ln(x) + C$ (vereenvoudigen)

3) $\int \sqrt{1+\cos 2x}\, dx = \int \sqrt{1 + cos^2 x - sin^2 x}$ (verdubbelingsformule: zie formuleblad goniometrie!)

$= \int \sqrt{1 + \cos^2 x - (1 - cos^2 x)}$ (grondformule goniometrie: sin² + cos² = 1!)

$= \int \sqrt{1 + \cos^2 x - 1 + cos^2 x}$ (haakjes uitwerken)

$= \int \sqrt{\cos^2 x + cos^2 x}$ (1 – 1 heft elkaar op)

$= \int \sqrt{2 . \cos^2 x}$ (een optelling kan je korter schrijven door maal te doen)

$= \int \sqrt{2} . \sqrt{\cos^2 x}$ (je mag een product van 2 factoren onder een wortel splitsen)

$= \int \sqrt{2} . cos\ x$ (wortel uitwerken)

$= \sqrt{2} . \int \cos x$ (een constant getal mag voor de integraal gezet worden)

$= \sqrt{2} . \sin x + C$ (onmiddelijke integratie)

2.2.2) Integratie door substitutie

Integratie door substitutie steunt op het omkeren van de kettingregel van het afleiden. Wanneer je de kettingregel moet toepassen bij het afleiden, moet je bij het integreren een substitutie toepassen.

2.2.2.1) Voorbeeldoefening

<u>Oefening 5i in de cursus:</u>

$\int 2^{3x+1}\, dx$

$= \int 2^{3x} . 2^1\, dx$ $\qquad (a^{n+m} = a^n . a^m)$

$= 2 . \int 2^{3x}\, dx$

--> We hebben onze integraal nu vereenvoudigd. Als we de kettingregel moeten gebruiken tijdens het afleiden weten we dat we substitutie moeten toepassen.

➔ $D(2^{3x}) = 2^{3x} . \ln 2\ . 3$ *(we moeten de kettingregel inderdaad toepassen omdat we ook nog de afgeleide van 3x moeten nemen)*

$= 2 . \int 2^{3x}\, dx$

➔ SUBSTITUTIE: wat gaan we als substitutie nemen?

--> Meestal neem je hetgene wat 'in' je functie zit als substitutie, als die substitutie niet lukt probeer je een andere substitutie.

--> $3x = u$ (3x zit 'in' onze exponentiële functie)

⇔ $d(3x) = du$ (je neemt de differentiaal van het linker- en rechterlid)

⇔ $3dx = du$

⇔ $dx = \frac{du}{3}$

➔ We vervangen in de volgende tussenstap alle x'jes door u'tjes.

$= 2 . \int 2^{u} . \frac{du}{3}$

$= 2 . \frac{1}{3} . \int 2^u . du$ *(we mogen constante getallen voor de integraal zetten)*

$= \frac{2}{3} . \frac{2^u}{\ln(2)}$ (onmiddelijke integratie)

$= \frac{2 . 2^u}{3 . \ln(2)}$ (breuken maal elkaar)

$= \frac{2^1 . 2^u}{3 . \ln(2)}$ (als we 2 schrijven, weet je dat we eigenlijk natuurlijk 2^1 bedoelen)

$= \frac{2^{1+u}}{3 . \ln(2)}$ $(a^m . a^n = a^{m+n})$

$= \frac{2^{3x+1}}{3 . \ln(2)} + C$ (we hebben u terug ingevuld, dit is onze onbepaalde integraal!)

2.2.3) Partiële integratie

Partiële integratie steunt op het omkeren van de kettingregel, deze integratiemethode heeft één formule die je vanbuiten moet kennen:

$\int f(x) . g(x) dx = f(x) . g(x) - \int g(x) . f'(x) dx$

(= $dg(x)$) $\qquad$ (= $df(x)$)

--> Zoals je ziet in de formule keren we de rollen van f(x) en g(x) om door partiële integratie. f(x) wordt immers f(x)dx en g(x)dx wordt immers g(x). Als we f(x) en g(x) zo kiezen dat de integraal in het rechterlid vergemakkelijkt wordt, dan zal de partiële integratie ook lukken.

2.2.3.1) Voorbeeldoefening

Oefening 12q: $f(x) = Bgtan\ x$

$\int f(x)dx = \int Bgtan\ x\ \ dx$ --> je denkt nu zeker: waar is de vermenigvuldiging? Moet ik partiële integratie wel toepassen? Jawel. Met een beetje inzicht zie je dat er in je integraal eigenlijk staat: **1** . Bgtan x.

$= \int 1. Bgtan\ x\ \ dx$

Nu moet je je f(x) en g(x)dx bepalen voor de formule. Je f(x) differentieer je en je g(x)dx integreer je.
--> We pakken:

$f(x) = Bgtan\ x$ ----------------(differentiëren)-----------> $f'(x)dx = \frac{1}{1+x^2}dx$

$g(x)dx = 1\,.dx$ -----------------(integreren)---------------> $g(x) = x$

We vullen de formule van partiële integratie nu in:

$\int 1. Bgtan\ x\ \ dx = Bgtan\ x\,.x - \int x\,.\frac{1}{1+x^2}dx$

$= Bgtan\ x\,.x - \int \frac{x}{1+x^2}dx$ (we vermenigvuldigen)

$\cancel{= Bgtan\ x\,.x - \int \left(\frac{x}{1} + \frac{x}{x^2}\right) dx}$

Maak deze fout nooit! Een noemer mag je nooit splitsen! We moeten terug een substitutie doorvoeren.

SUB: $1 + x^2 = u$

--> *Zoals ik zei substitueer je meestal hetgene wat 'in' je functie staat, in dit geval hetgene in je noemer (aangezien we een rationale functie hebben)*

⇔ $d(1 + x^2) = du$

⇔ $2x\,.dx = du$

$= Bgtan\ x\,.x - \int \frac{2x}{2(1+x^2)}dx$

--> Ik heb 2 toegevoegd in teller en noemer omdat we 2x . dx = du uitkwamen. Dit mag immers, omdat ik het in de teller en noemer heb gedaan.

$= Bgtan\ x\,.x - \int \frac{1}{2u}\,.du$ (substitutie is doorgevoerd)

$= Bgtan\ x\,.x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\ du$ (getallen mogen we voor de integraal zetten)

$= Bgtan\ x\,.x - \frac{1}{2}\,.\ln u$ (de integraal van 1/u = ln u)

$= Bgtan\ x\,.x - \frac{1}{2}\,.\ln(1 + x^2)$

→ Dit is de onbepaalde integraal!

2.2.4) Speciale integratiemethoden

Voor de boogsinus en boogtangens gelden nog steeds dezelfde werkwijzen maar zijn de integratiemethoden ietsje moeilijker. Daarom heb ik ze apart gezet.

2.2.4.1) Integratie van functies van de vorm $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

Voorbeeld 1: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$

$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{9\left(1-\frac{x^2}{9}\right)}} dx$ *(we hebben de 9 in onze wortel in de noemer afgezonderd)*

$= \int \frac{1}{3\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{9}\right)}} dx$ *($\sqrt{9} = 3$)*

$= \frac{1}{3} . \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}} dx$ *($\frac{x^2}{9} = \left(\frac{x}{3}\right)^2$)*

⇨ SUBSTITUTIE: $u = \frac{x}{3} \Leftrightarrow du = d\left(\frac{x}{3}\right) \Leftrightarrow du = \frac{1}{3} dx \Leftrightarrow dx = 3du$

$= \frac{1}{3} . \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} . 3du$

$= \frac{1}{3} . 3 . \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} . du$ *(constante getallen mogen voor de integraal gezet worden)*

$= 1 . Bgsin\, u$ *(onmiddelijke integratie: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = Bgsin\, x$)*

$= Bgsin \frac{x}{3}$ *(vervangen van u door x/3)*

Voorbeeld 2: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-(x+3)^2}}$

$\int \frac{1}{\sqrt{3-(x+3)^2}} dx$ --> We kunnen hier géén getallen afzonderen, we weten echter wel dat we waarschijnlijk naar de boogsinus moeten toewerken. De onmiddelijke integraal van $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ is immers gelijk aan $Bgsin\, x$…

--> Zoals ik al enkele keren heb gezegd moet je hetgene wat 'in' je functie zit als substitutie nemen. In dit geval dus (x+3)² *(zie formule onmiddelijke integraal van de boogsinus!)*.

⇨ SUBSTITUTIE: $x + 3 = u \Leftrightarrow d(x + 3) = du \Leftrightarrow dx = du$

$= \int \frac{1}{\sqrt{3-u^2}} . du$ --> Nu kunnen we getallen beginnen af te zonderen…

$= \int \frac{1}{\sqrt{3\left(1-\frac{u^2}{3}\right)}} du$

$= \int \frac{1}{\sqrt{3}} . \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{3}}} du$ (rekenregels wortels: we mogen een wortel splitsen)

$= \frac{1}{\sqrt{3}} . \int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{3}}} du$ (getallen mogen we voor de integraal zetten)

$= \frac{1}{\sqrt{3}} . \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2}} du$ (rekenregels machten: $\frac{u^2}{3} = \left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2$)

➔ We voeren een tweede substitutie uit: $v = \frac{u}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow dv = d\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)$

$\Leftrightarrow dv = \frac{1}{\sqrt{3}} du$

$\Leftrightarrow du = \sqrt{3}\, dv$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} . \int \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} . \sqrt{3} dv$

$= \sqrt{3} . \frac{1}{\sqrt{3}} . \int \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} . dv$ (getallen mogen we voor de integraal zetten)

$= Bgsin\ v$ (onmiddelijke integratie: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = Bgsin\ x$

$= Bgsin \frac{u}{\sqrt{3}}$ (we hadden immers gezegd: $v = \frac{u}{\sqrt{3}}$)

$= Bgsin \left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right)$ (we hadden immers gezegd: $u = x + 3$)

2.2.4.2) Integratie van functies van de vorm $f(x) = \frac{1}{\sqrt{c+bx+ax^2}}$ *met* $D \geq 0$ *en* $a > 0$

Om deze functie te integreren moet je ook toewerken naar de Bgsin(x).

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$

3 + 4x – 4x² moeten we nog omzetten naar de vorm: $a^2 - (bx + c)^2$

--> Enkel zo kunnen we naar de Bgsin toewerken. De formule voor de integraal van de Bgsin is immers…

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = Bgsin\ x$

$$
\begin{aligned}
.\ 3 + 4x - 4x^2 &= a^2 - (bx + c)^2 \\
&= a^2 - (b^2x^2 + 2bcx + c^2) \\
&= a^2 - b^2x^2 - 2bcx - c^2 \\
&= -b^2x^2 - 2bcx + (a^2 - c^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases} a^2 - c^2 = 3 \\ -2bc = 4 \\ -b^2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - (-1)^2 = a^2 - 1 = 3 \rightarrow a = 2 \\ -4c = 4 \rightarrow c = -1 \\ b = 2 \end{cases}
$$

--> DUS: $3 + 4x - 4x^2 = 2^2 - (2x - 1)^2$
$= 4 - (2x - 1)^2$

We vervangen dit in onze functie:

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3+4x-4x^2}} \rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-(2x-1)^2}}$

We berekenen de onbepaalde integraal:

$\int f(x)dx = \int \frac{1}{\sqrt{4-(2x-1)^2}} dx$

SUBSTITUTIE: $2x - 1 = u \Leftrightarrow d(2x - 1) = du \Leftrightarrow 2dx = du \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2}$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{4-u^2}} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{4-u^2}} du = \frac{1}{2} . \int \frac{1}{\sqrt{4\left(1-\frac{u^2}{4}\right)}} du = \frac{1}{2} . \int \frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{u}{2}\right)^2}} du = \frac{1}{4} . \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{2}\right)^2}} du$$

2DE SUBSTITUTIE: $\frac{u}{2} = v \Leftrightarrow d\left(\frac{u}{2}\right) = dv \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ du = dv \Leftrightarrow du = 2dv$

$$= \frac{1}{4} . \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{2}\right)^2}} du = \frac{1}{4} . \int \frac{1}{\sqrt{1-(v)^2}} 2dv = \frac{2}{4} . \int \frac{1}{\sqrt{1-(v)^2}} dv = \frac{1}{2} . Bgsin\, v = \frac{1}{2} . Bgsin \frac{u}{2}$$

$$= \frac{1}{2} . Bgsin \frac{2x-1}{2} + C$$

2.2.4.3) Integratie van functies van de vorm $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$

Bij deze soort functies moet je altijd terugwerken naar de Bgtan, er geldt immers: $\int \frac{1}{1+x^2} = Bgtan\, x$

De werkwijze hierbij verloopt vrijwel analoog als deze met de boogsinus.

$f(x) = \frac{1}{2+3x^2}$

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{2+3x^2} dx$$

$$= \int \frac{1}{2(1+1{,}5x^2)} dx$$

$$= \frac{1}{2} . \int \frac{1}{1+1{,}5x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} . \int \frac{1}{1+\left(\sqrt{1{,}5}x\right)^2} dx$$

⇨ We voeren een substitutie door: $u = \sqrt{1{,}5}x$

$\Leftrightarrow du = d(\sqrt{1{,}5}x)$

$\Leftrightarrow du = \sqrt{1{,}5}dx$

$\Leftrightarrow dx = \frac{du}{\sqrt{1{,}5}}$

$$= \frac{1}{2} . \int \frac{1}{1+u^2} . \frac{du}{\sqrt{1{,}5}}$$

$= \frac{1}{2} . \frac{1}{\sqrt{1{,}5}} . \int \frac{1}{1+u^2} . du$ (getallen mogen voor de integraal worden gezet)

$$= \frac{1}{2\sqrt{1{,}5}} . Bgtan\, u$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1{,}5}} . Bgtan \left(\sqrt{1{,}5}x\right) + C$$

2.2.4.4) Integratie van functies van de vorm $f(x) = \frac{1}{c+bx+ax^2}$ met $D < 0$ en $a > 0$

$f(x) = \frac{1}{5+4x^2+x^2}$

We moeten de noemer van de functie eerst omzetten naar de vorm: $a^2 + (bx + c)^2$. Voor de integraal van de boogtangens geldt immers dat: $\int \frac{1}{1+x^2} dx = Bgtan\, x$

$$.\, 5 + 4x + 1x^2 = a^2 + (bx + c)^2$$
$$= a^2 + b^2x^2 + 2bcx + c^2$$
$$= (a^2 + c^2) + 2bcx + b^2x^2$$

➔ STELSEL: $\begin{cases} a^2 + c^2 = 5 \\ 2bc = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

→ DUS: $5 + 4x^2 + x^2 = 1^2 + (1x + 2)^2$

$= 1 + (x+2)^2$

--> Terug invullen in f(x):

$$f(x) = \frac{1}{5+4x^2+x^2} = \frac{1}{1+(x+2)^2}$$

We berekenen nu de onbepaalde integraal:

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{1+(x+2)^2} dx$$

--> We voeren een substitutie uit:

$$u = x + 2 \Leftrightarrow du = d(x+2) \Leftrightarrow du = dx$$

$$= \int \frac{1}{1+u^2} du$$

$$= Bgtan\, u$$

$$= Bgtan(x+2) + C$$

2.3) Flowchart

3) Bepaalde integraal