Wiskunde (7u) – examen M4 – kegelsneden – made by Abdellah – Atheneum Plus Hasselt

---

(Z) VOORWOORD
Dit is de samenvatting ter voorbereiding van het examen wiskunde voor M4.

In de samenvattingenreeks van kegelsneden behandelen we volgende hoofdstukken:
H1: inleiding kegelsneden
H2: parabolen
H3: Ellipsen
H4: Hyperbolen

(X) FOUTJE?
Dat kan, meld het via Smartschool aan mij (Abdellah)

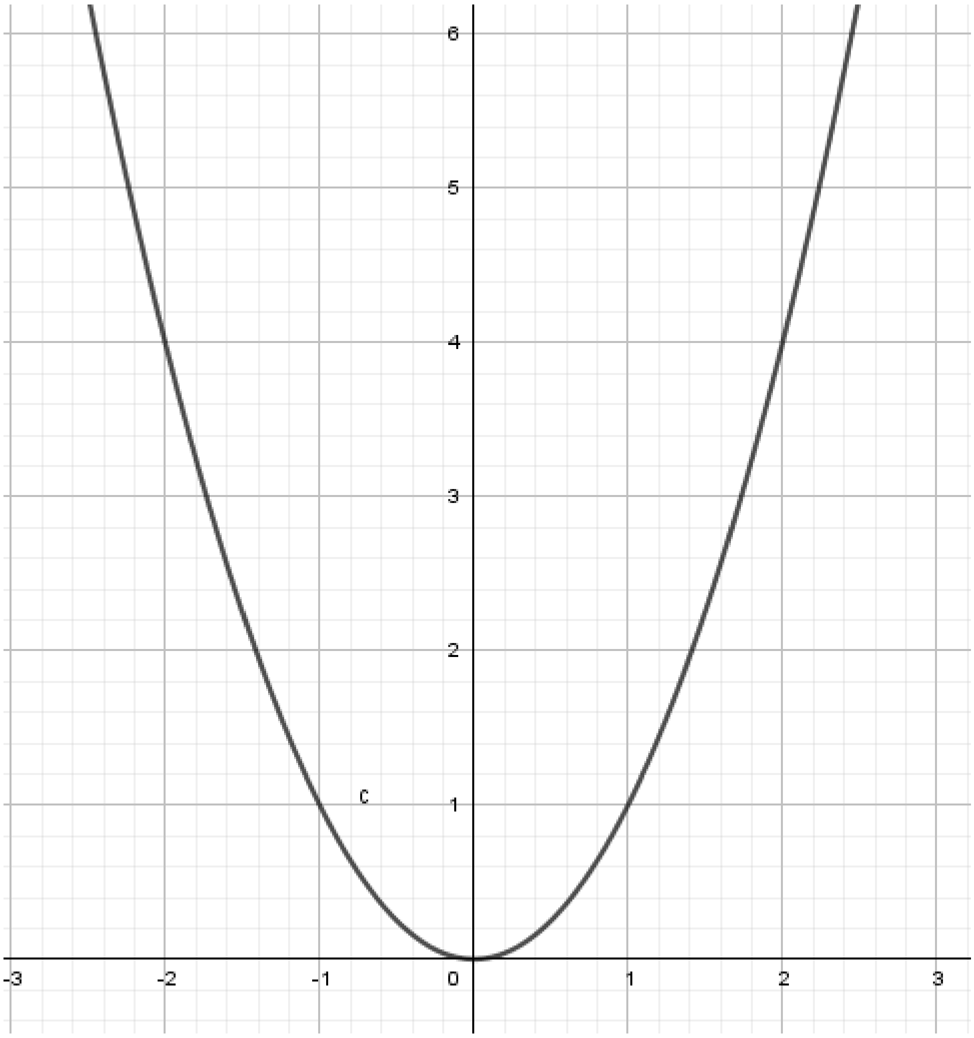
(Y) INHOUDSTAFEL
Over twee pagina's.

Inhoud

2) De parabool

2.0) Voorkennis

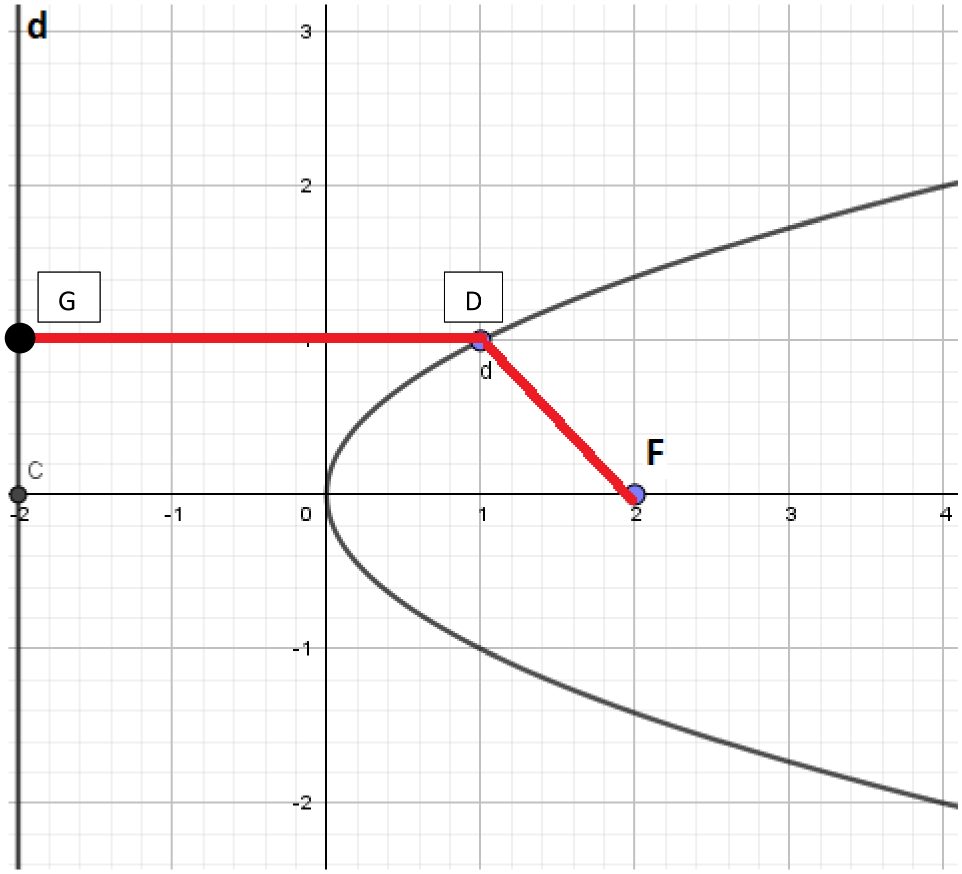
Je kent al veel van de de parabool omdat we ze al in de analyse hebben bestudeerd, we hebben in het 4dejaar en vorig jaar al veel over de parabool geleerd omdat we doen tweedegraadsfuncties bestudeerden.
--> Een tweedegraadsfunctie heeft als formule: $y = ax^2 + bx + c$
--> De grafiek (kromme) die hieruit kwam noemden we een parabool.



2.1) Definitie

Definitie: Een **parabool P** is een **verzameling punten** van het vlak waarvoor de **afstand tot een gegeven punt F** gelijk is aan **de afstand tot een gegeven rechte d** waarbij geldt: $F \notin d$.
→ Het **punt F** noemen we het *brandpunt* van de parabool.
→ De **rechte d** noemen we de **richtlijn** van de parabool.
→ Het punt F mag niet op rechte d liggen.

Dit wil praktisch gezien gewoon zeggen dat een punt zich op de parabool bevindt als de afstand van dat punt tot de richtlijn gelijk is aan de afstand van dat punt tot het brandpunt. We verduidelijken…



Het is een beetje slecht getekend, maar besef dat punt D (zie figuur) op de parabool zit enkel en alleen indien de afstand van D tot F (de brandpunt van de parabool) gelijk is aan de afstand D tot d (de richtlijn). Als die twee afstanden niet gelijk zijn aan elkaar zit punt A niet op de parabool.
→ Herinner jezelf van vorig jaar van analytische ruimtemeetkunde van de eerste graad dat de afstand van een punt tot een rechte overeenkomt met de afstand van het snijpunt die zorgt voor een loodrechte stand (zie figuur voor verduidelijking: punt G). De afstand van punt D tot de rechte d komt dus overeen met de afstand van punt G tot de rechte d.

We kunnen dus in symbolen stellen: $P = \{D \in \pi \mid d(D,F) = d(D,G)\}$
→ Dit is de definitie in symbolen voor een parabool P is een verzameling van punten (bijvoorbeeld punt D is een element van het vlak π) waarvoor geldt dat de afstand (d = afstand = *distance*) van het punt D tot het brandpunt gelijk is aan de afstand van het punt D tot de richtlijn d van de parabool (en dit komt overeen met de afstand tussen het punt D en het punt G op richtlijn d).

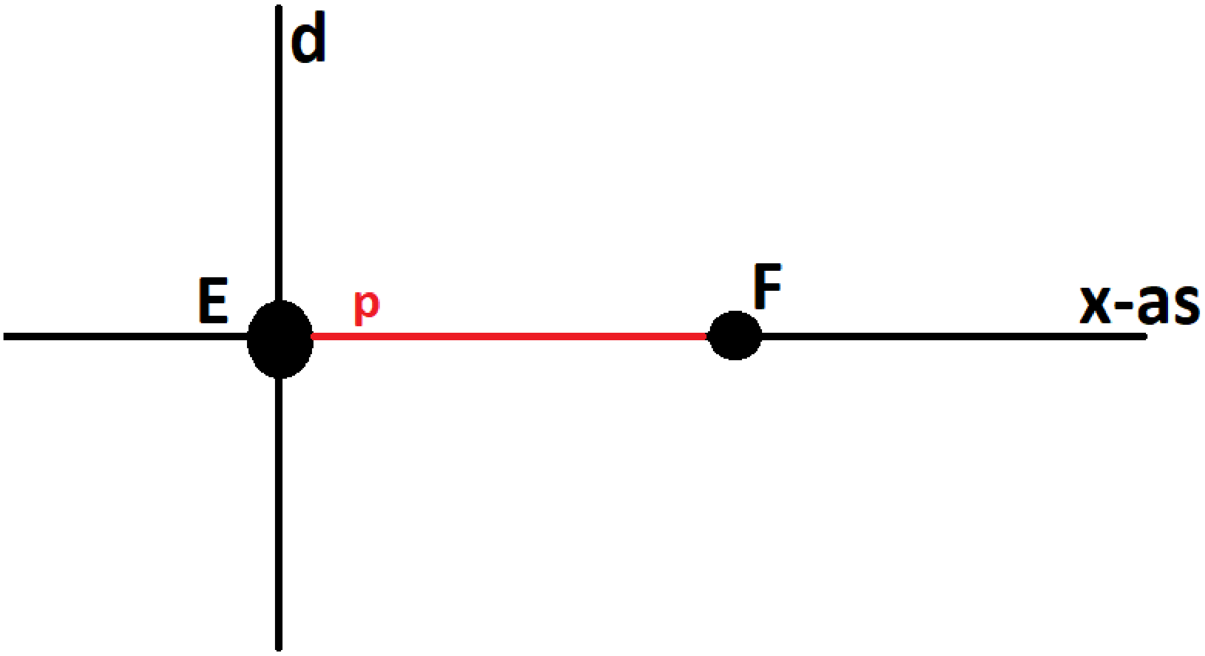
Nu willen we onderzoeken welke cartesische vergelijking de parabool heeft.

2.2) Cartesische vergelijking

We kiezen een positief orthonormaal assenstelsel, van vorig jaar weet je nog dat een orthonormaal assenstelsel een assenstelsel is met overal dezelfde schaalverdeling.

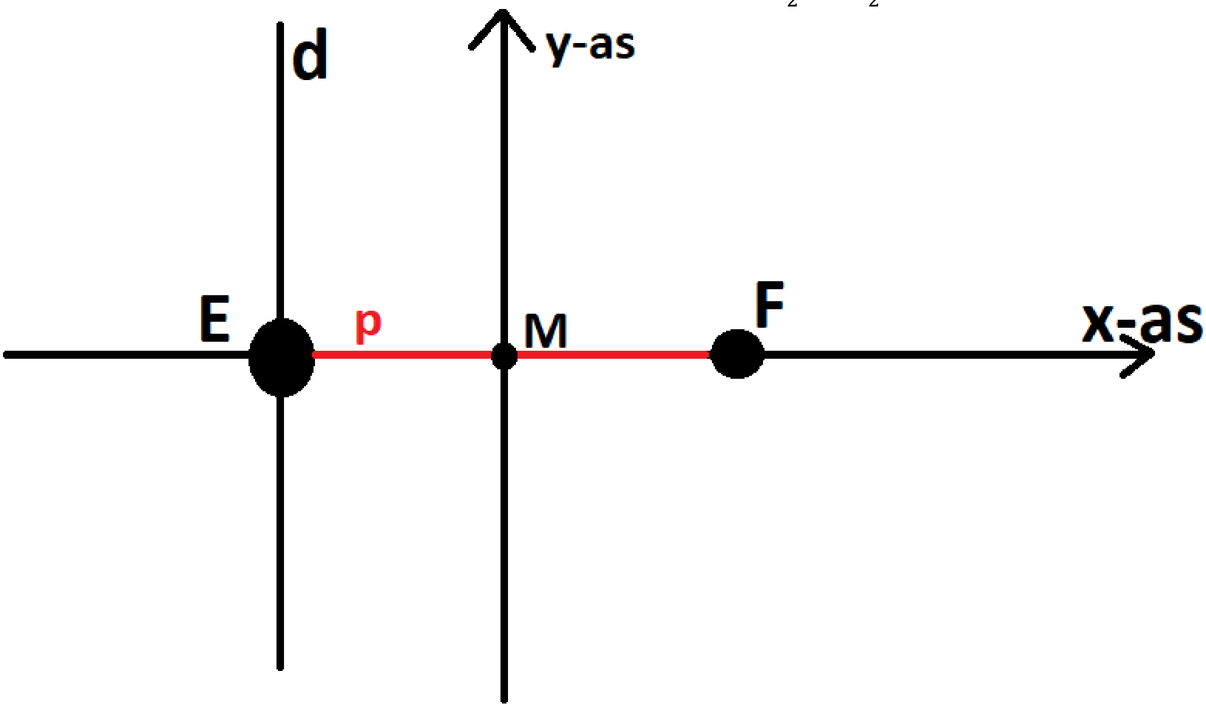
Vanuit het brandpunt F tekenen we een loodlijn op d (= de richtlijn). De snijpunt tussen d en dit loodlijn noemen we het punt E. We laten de x-as samenvallen met rechte EF zodanig dat punt E voor punt F (= het brandpunt) ligt en we noemen de afstand tussen E en F p (met p $\in \mathbb{R}_0^+$, aangezien je in ons universum nog steeds geen negatieve afstand kan hebben is p strikt positief).

We zitten dus voorlopig hier.



Voor de y-as nemen we de middelloodlijn van [EF] wat dus gewoon betekent dat de y-as door het midden gaat van rechte [EF].

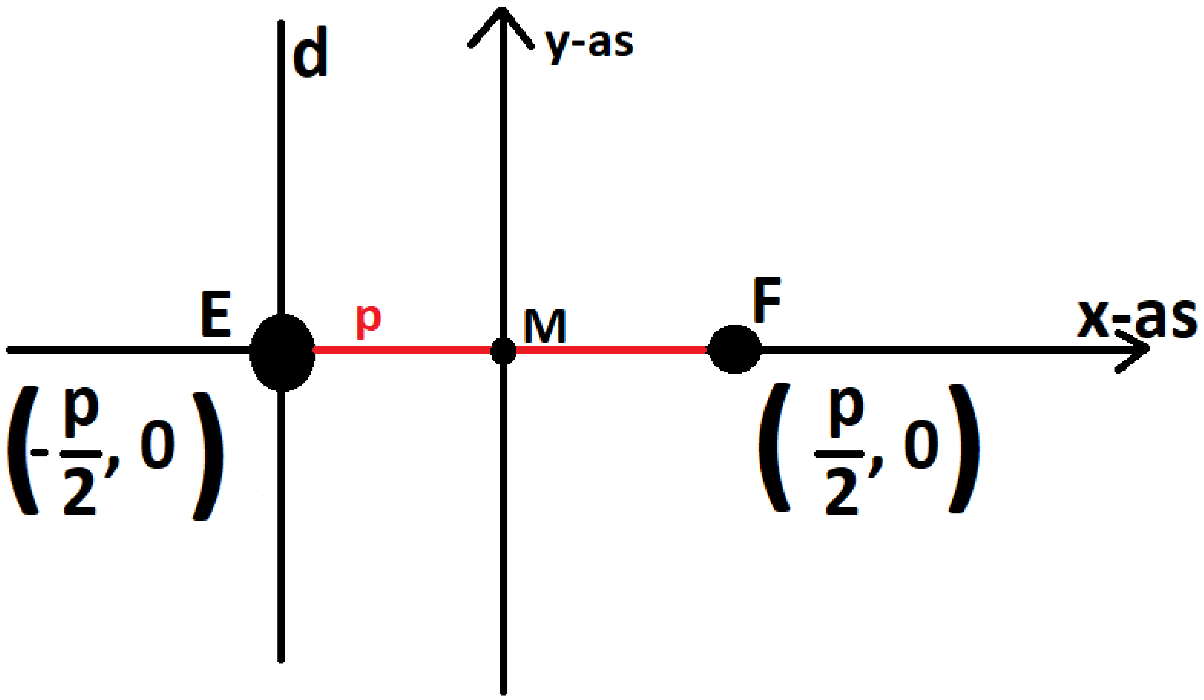
[Herinnering: het midden M van twéé punten bepaal je door:M$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$*]*



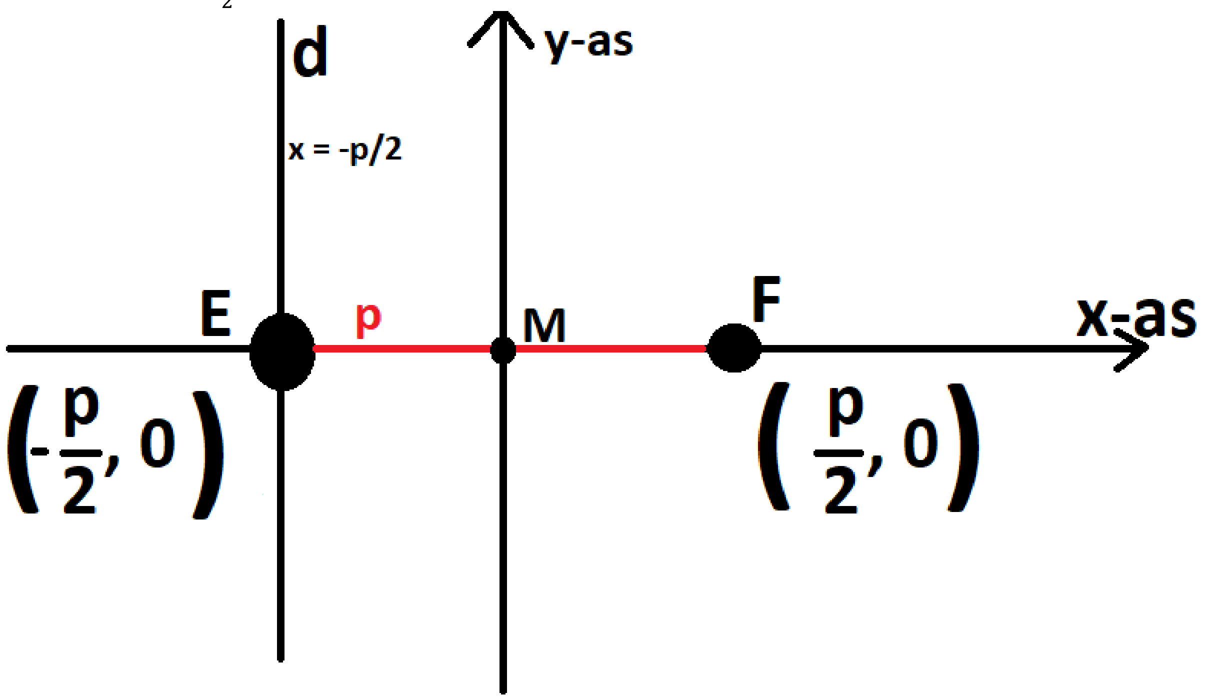
Doordat we de afstand [EF] gelijk hebben gesteld aan p, kunnen we de x-coördinaten van punten E en F achterhalen, die van F is bijgevolg $\frac{p}{2}$ en die van E dan $-\frac{p}{2}$. De y-coördinaten van beide punten

zijn natuurlijk 0. Merk op dat de x-coördinaat van E tegengesteld is van de x-coördinaat van F en de y-as wordt daar pal in het midden in geconstrueerd.
→ Waarom $\frac{p}{2}$? Als je de afstand tussen beide punten berekent moet het terug p worden.

We geven onze punten dus coördinaten.



De richtlijn d is een rechte evenwijdig met de y-as, dit soort rechten heeft altijd de vergelijking $x = iets$. In dit geval wordt het getal x de hele tijd afgebeeld op het getal $-\frac{p}{2}$. De richtlijn d heeft dus de vergelijking $x = -\frac{p}{2}$.



Dit was alleen maar de keuze van ons assenstelsel, het is belangrijk dat je steeds dezelfde assenstelsel kiest, anders ga je niet de algebraïsche berekeningen van de cartesische vergelijking van een parabool mogen gebruiken die ik nu ga uitleggen.

Wat moet je dus onthouden?

--> Je gebruikt een orthonormaal assenstelsel, dit wil zeggen een assenstelsel met overal dezelfde schaalverdeling.

--> Je kiest een punt F (het brandpunt) op de x-as met coördinaat $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

--> Je kiest een punt E op de x-as met coördinaat $(-\frac{p}{2}, 0)$

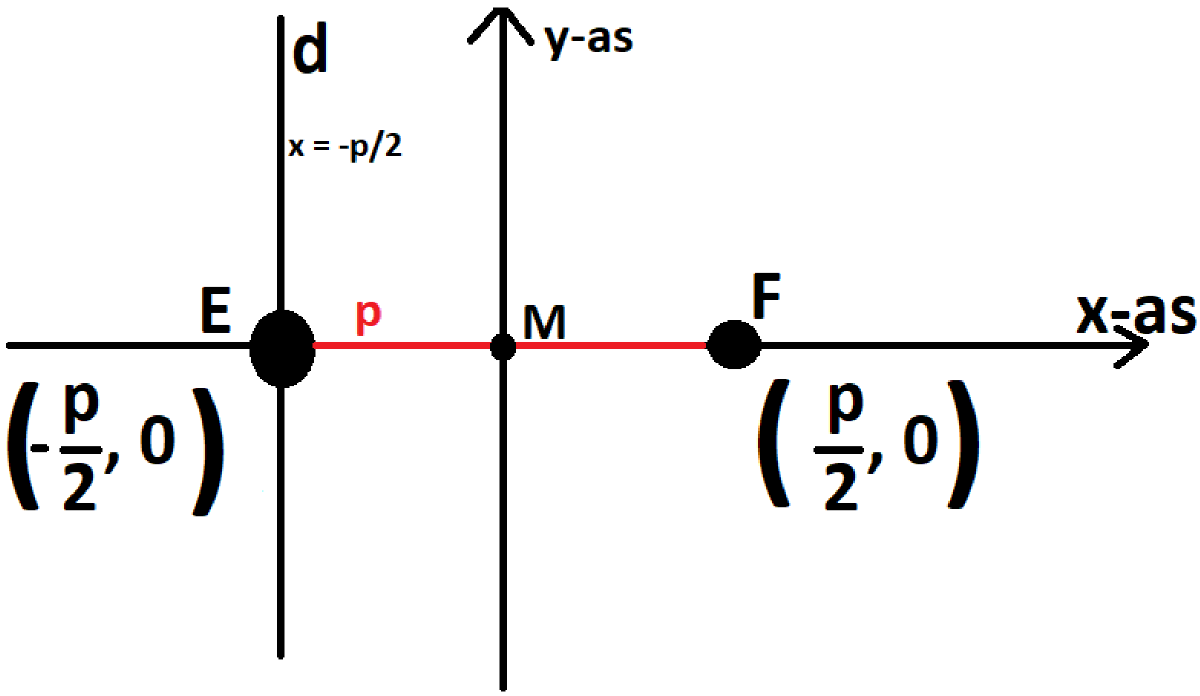
→ Door het punt E gaat de richtlijn d met vergelijking $x = -\frac{p}{2}$

--> De afstand tussen E en F = p

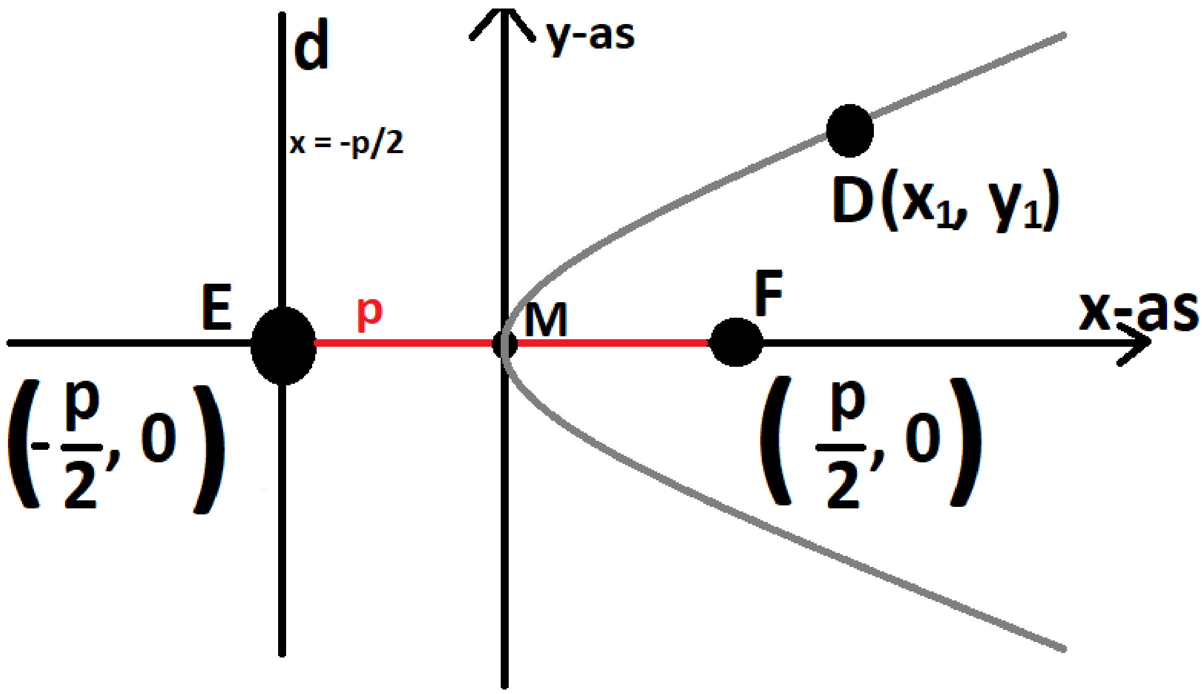
→ Let op: punt E moet altijd voor punt F liggen op de x-as!

--> De y-as teken je in het midden van E en F

→ Nu heb je je assenstelsel goed gekozen!

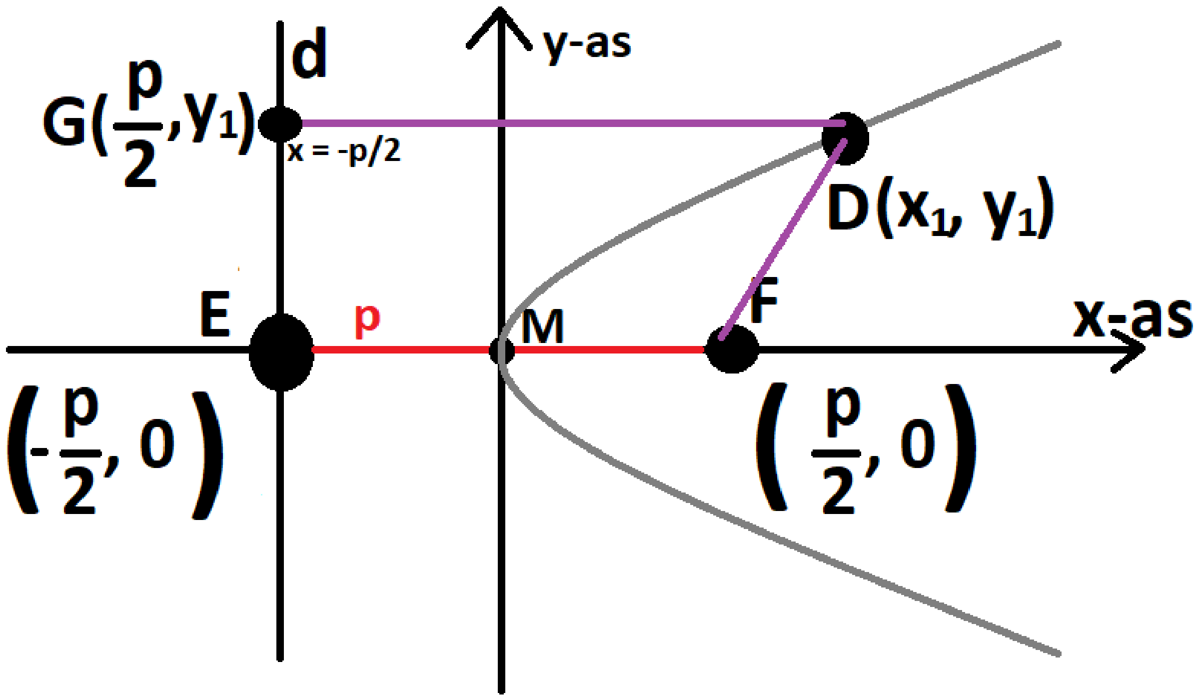


We tekenen nu een punt en bekijken opnieuw de voorwaarde waarvoor een punt moet voldoen om op een parabool te liggen *(herinnering: een punt ligt op een parabool als het afstand van dat punt tot het brandpunt F gelijk is aan de afstand van dat punt tot de richtlijn d)*.



We hebben een grijze parabool getekend en een willekeurig punt D met coördinaten (x_1, y_1) in het vlak getekend. Dit punt D ligt op de parabool als de afstand tussen D en F (het brandpunt) gelijk is aan de afstand tussen D en d (de richtlijn).

De afstand tussen D en F komt overeen met de rechte hiertussen, de afstand tussen D en d komt overeen met het snijpunt van de loodlijn van punt D op rechte d. Dit snijpunt hebben we op onderstaande tekening punt G genoemd en deze heeft bijgevolg als coördinaat $\left(\frac{p}{2}, y_1\right)$.



Ik hoop dat nu, nadat ik het honderden keren heb herhaald al snapt dat het punt D op de parabool ligt als de afstand tussen dat punt en het brandpunt gelijk is aan de afstand tussen dat punt en de richtlijn d. Dit gaan we nu meer in wiskundige termen verwoorden.

$D(x_1, y_1) \in P \Leftrightarrow |DF| = |DG|$

Dit is de definitie in symbolen: het punt D ligt op de parabool P als de afstand tussen D en het brandpunt F gelijk is aan de afstand tussen D en de richtlijn d (= afstand tussen D en het snijpunt van de loodlijn uit D en de richtlijn d, G).

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + {y_1}^2} = \sqrt{\left(x_1 - \left(-\frac{p}{2}\right)\right)^2 + \cancel{(y_1 - y_1)^2}}$$

Hier hebben we de definitie van afstand tussen twee punten die we vorig jaar hebben geleerd bij ruimtemeetkunde: $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Je trekt de x-coördinaten van elkaar af en kwadrateert ze en je trekt de y-coördinaten van elkaar af en je kwadrateert ze.

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + {y_1}^2} = \sqrt{\left(x_1 + \frac{p}{2}\right)^2}$$

Je kan –(- als + schrijven en y_1-y_1 = 0 dus kan je dit weglaten.

$$\Leftrightarrow \left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + y_1^2 = \left(x_1 + \frac{p}{2}\right)^2$$

We hebben wortels aan beide kanten van de vergelijking, we hebben in deze stap dus beide kanten gekwadrateerd om de wortels weg te halen. Dit kan enkel omdat onze getallen positief zijn (p = afstand = strikt positief), bij kwadrateren (tip van Kevin) moet je soms opletten dat je geen oplossingen bij maakt die niet bestaan aangezien bijvoorbeeld (-4)² = 16 maar ook 4² = 16. In dit geval hebben we géén oplossingen bijgemaakt die niet bestaan omdat onze getallen strikt positief zijn.

$$\Leftrightarrow x_1^2 - 2\,.\,x_1\,.\,\frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + y_1^2 = x_1^2 + 2\,.\,x_1\,.\,\frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

We hebben zowel in het linker- als rechterlid het dubbel product uitgevoerd: (a + b)² = a² + 2ab + b² en (a – b)² = a² - 2ab + b².

$$\Leftrightarrow \cancel{x_1^2} - 2\,.\,x_1\,.\,\frac{p}{2} + \cancel{\left(\frac{p}{2}\right)^2} + y_1^2 = \cancel{x_1^2} + 2\,.\,x_1\,.\,\frac{p}{2} + \cancel{\left(\frac{p}{2}\right)^2}$$

In deze stap hebben we alle gelijke termen in het linker- en rechterlid geschrapt. We houden over:

$$\Leftrightarrow -2\,.\,x_1\,.\,\frac{p}{2} + y_1^2 = 2\,.\,x_1\,.\,\frac{p}{2}$$

Na nog meer vereenvoudigen houden we volgende vergelijking over:

$$\Leftrightarrow y_1^2 = 2\,.\,x_1\,.\,p$$

→ Hierin is p nog steeds het maatgetal voor de afstand tussen punt E en F. p is dus een reëel getal.

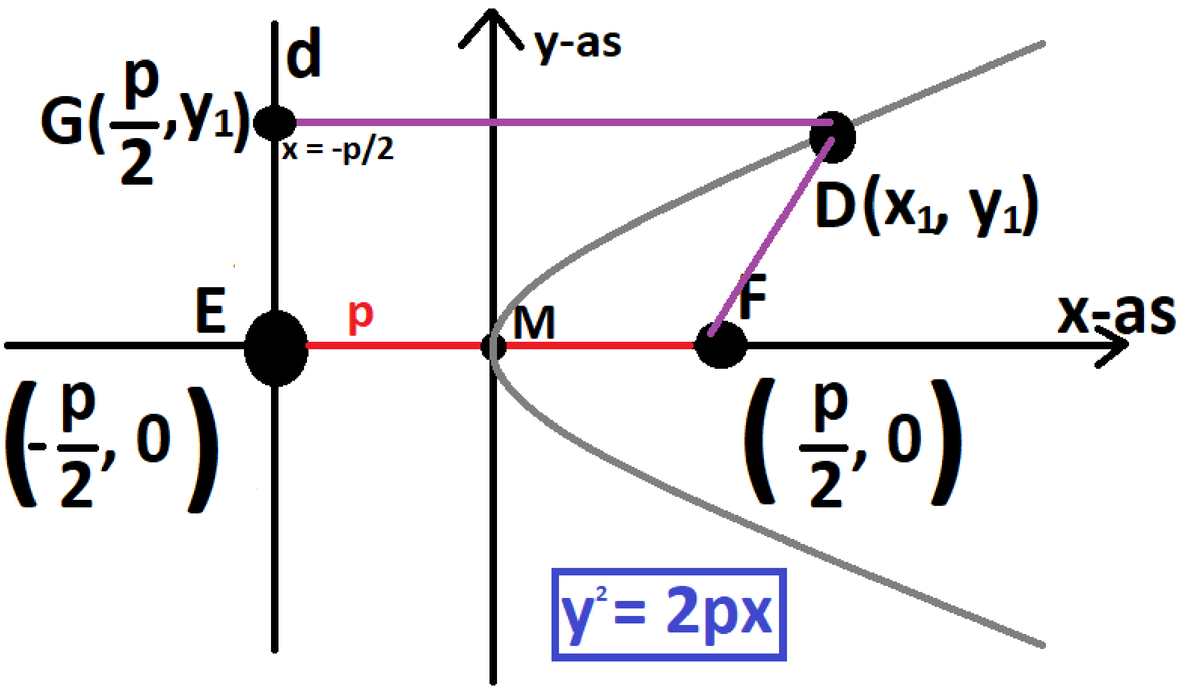
Herschrijven we de vergelijking een beetje…

$\Leftrightarrow y^2 = 2px$ met $p \in \mathbb{R}_0^+$.

→ Deze vergelijking noemen we de **cartesische vergelijking van een parabool**.

Als mnr. Wanten als theorievraag de afleiding vraagt van de cartesische vergelijking van een parabool dan moet je de hele afleiding geven zoals ik heb gedaan. Als mnr. Wanten je een oefening geeft dan moet je gewoon vlot moeten werken met de cartesische vergelijking zonder de afleiding te geven.

De parabool die we eerder hebben getekend (zie grafiek hieronder) heeft dus als cartesische vergelijking: $y^2 = 2px$, afhankelijk van de waarde die p aanneemt heb je een ander soort parabool (breder, smaller …).



Opmerking:
Herinner je van het hoofdstuk reële functies van vorig jaar (module 2 wiskunde) dat je grafieken kan spiegelen t.o.v. de eerste bissectrice (= de inverse relatie construeren van die grafieken). De eerste bissectrice is de rechte met vergelijking y = x in het eerste kwadrant van de grafiek.

Om de inverse relatie te maken van een vergelijking moet je de x- en y-waardes met elkaar omwisselen. Voor onze cartesische vergelijking krijgen we:

$y^2 = 2px$

⇔ $x^2 = 2py$

--> We kunnen y afzonderen.

⇔ $y = \frac{x^2}{2p}$

--> Dit kunnen we schrijven als…

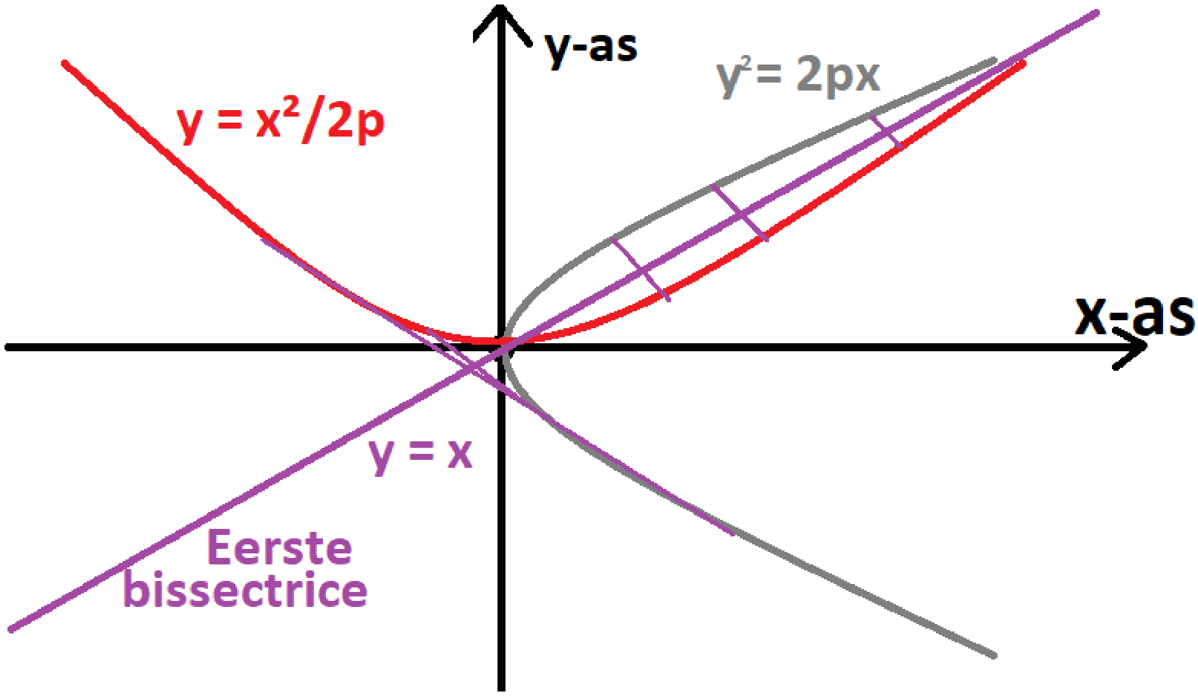
⇔ $y = \frac{1}{2p}\, x^2$

--> Stellen we nu een reëel getal a = $\frac{1}{2p}$ dan verkrijgen we…

⇔ $y = ax^2$

→ Dit is hetzelfde als de functievoorschrift van een kwadratische functie. Nu begrijp je dus waarom we de grafiek van een tweedegraadsfunctie een parabool noemden.

Grafisch onze parabool spiegelen t.o.v. de eerste bissectrice er zo uit:



Als je de details bent vergeten over spiegelen t.o.v. de eerste bissectrice (= de inverse relatie van een vergelijking maken) verwijs ik je graag door naar mijn website: samenvattingen.github.io --> 5dejaar --> module 2 --> wiskunde --> reële functies.

2.3) Onderzoek van de parabool

2.3.1) Relatie definiëren en grafieken onderzoeken

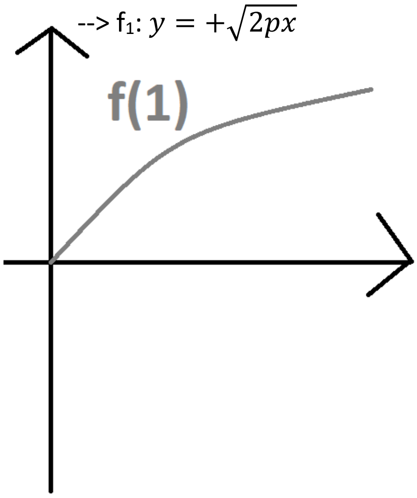
*Opmerking: een parabool is een kromme, op de grafiek zie je duidelijk dat de parabool krom is.
*In een georthonormeerd assenstelsel (= een assenstelsel met overal dezelfde schaalverdelingen) is P (= parabool- de grafiek van de relatie f:

$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 2px\}$ (hier hebben we de relatie gedefinieerd: $y^2 = 2px$)

$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = +\sqrt{2px} \vee y = -\sqrt{2px}\}$ (we hebben de vergelijking opgelost, herinner jezelf dat een kwadraat altijd twéé oplossingen heeft: één positieve en één negatieve)

→ De grafiek P is de vereniging van de grafieken van functies f_1 en f_2

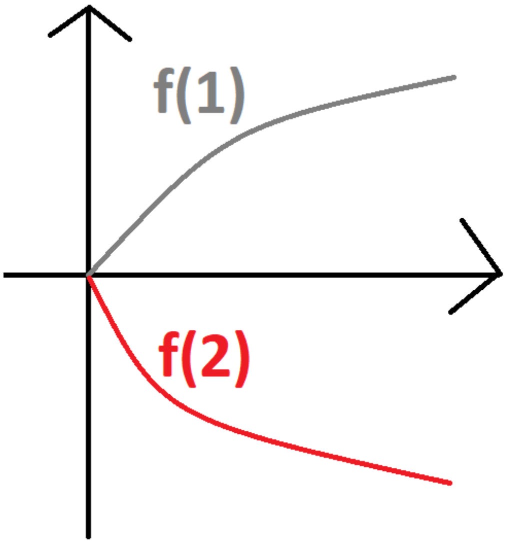
--> f_1: $y = +\sqrt{2px}$



De grafiek van functie f_1: $y = +\sqrt{2px}$ is de bovenste helft van de grafiek van de relatie $y^2 = 2px$.

Waarom alleen de bovenste helft? Omdat je géén negatieve wortel kan trekken in $\mathbb{R}$. Het domein en bereik van deze functie is daarom ook $\mathbb{R}^+$.

--> f_2: $y = -\sqrt{2px}$



De grafiek van f(2) is de onderkant van de grafiek van de relatie $y^2 = 2px$. De vereniging van de grafieken van f(1) en f(2) geeft de grafiek van de relatie (= cartesische vergelijking van de parabool) $y^2 = 2px$

Waarom de onderkant? Het getal onder de wortel moet strikt positief blijven, die min daarvoor maakt de grafiek negatief.

Merk op dat de grafieken van f(1) en f(2) t.o.v. de x-as gespiegeld kunnen worden. Eigenschappen van functie f(1) gelden dus ook voor f(2) en vice versa. Eén functie onderzoeken volstaat dus. We onderzoeken $y = +\sqrt{2px}$ aangezien we minnen haten.

2.3.2) Onderzoek van de functie y = + $\sqrt{2px}$

Vorig jaar zijn we bij wiskunde geëindigd met het verloop van functies. We passen dit dit jaar toe; we onderzoeken het verloop van de functie $y = +\sqrt{2px}$.

ONDERZOEK VAN DE FUNCTIE:

$dom\ f_1 = \mathbb{R}^+$ (je kan geen negatieve vierkantswortel trekken in de reële getallenverzameling)
$f_1\ is\ continu\ in\ \mathbb{R}^+$ (zie je duidelijk op de grafiek
$Snijpunten: x - as: y = 0 => x = 0 \rightarrow (0,0)$
$y - as: x = 0 => y = 0 \rightarrow (0,0)$

--> Wie vorig jaar heeft opgelet weet dat deze stappen eigenlijk niet zo belangrijk waren om het verloop te bepalen. Om het verloop van de functie te bepalen zijn we eerder geïnteresseerd in de eerste- en tweede afgeleide.

$f_1(x) = +\sqrt{2px} = (2px)^{\frac{1}{2}}$

--> Let op: we hebben vorig jaar geleerd hoe we wortels in termen van rationale exponenten (= exponenten met een breuk) kunnen schrijven.

$\sqrt{2px} = \sqrt[2]{2px^1}$ (de vierkantswortel kan je herschrijven als de 2demachtswortel)

$= (2px)^{\frac{1}{2}}$ (je zet de macht onder je wortel in de teller en die langs je wortel in je noemer).

→ Zo is bijvoorbeeld ook: $\sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}}$, $\sqrt[100]{x^{2384}} = x^{\frac{2384}{100}}$

$f_1' = (2px)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(2px)^{-\frac{1}{2}}(2p)$

→ LET OP: p is een reëel getal (afstand tussen E en F), die moet je niet afleiden!

--> We hebben hier de kettingregel toegepast aangezien we een macht hebben tussen haakjes, de regel hiervoor was: EERST leidt je alles BUITEN je haakjes af (macht naar voor macht eentje minder), dan leidt je alles IN de haakjes af. In formulevorm: $D(f(x))^n = n(f(x))^{n-1}Df(x)$

$= \frac{1}{\cancel{2}(2px)^{\frac{1}{2}}} \cdot \cancel{2}p$ (als je een negatieve macht hebt wordt ze positieve in de noemer: $x^{-1} = 1/x$)

$= \frac{1}{(2px)^{\frac{1}{2}}} \cdot p = \frac{p}{(2px)^{\frac{1}{2}}} = \frac{p}{\sqrt{2px}}$ (je kan omgekeerd ook $x^{\frac{1}{2}}$ schrijven als $\sqrt{x}$)

→ Dit is de eerste afgeleide van onze functie!

$f_1'' = D\left(p\,.\,(2px)^{-\frac{1}{2}}\right)$ (ik heb van de wortel terug een macht gemaakt en ik heb die macht in de teller gezet).

$= \cdots (productregel + kettingregel\ toepassen, ga\ tussenstappen\ zelf\ na!)$

→ productregel: $D(f\,.\,g) = Df\,.\,g + f\,.\,Dg$

→ Kettingregel: $D\big(f(x)\big)^n = n\big(f(x)\big)^{n-1}Df(x)$

$= -\frac{p}{2\sqrt{2px^3}}$

→ We hebben dus onze eerste en tweede afgeleide gevonden:

$f_1' = \frac{p}{\sqrt{2px}}$

$f_1'' = -\frac{p}{2\sqrt{2px^3}}$

➔ Deze kunnen we zetten in een samenvattende tabel:

x		0	
f'	//////	|	+
f''	//////	|	-
f		0	↗
		<u>VR</u>	∩

→ Herinner jezelf de meetkundige betekenis van de eerste- en tweede afgeleiden:

EERSTE AFGELEIDE: + = functie stijgt

- = functie daalt

0 = extremawaarde (maximum/minimum) is bereikt

→ Onze eerste afgeleide was: $f_1' = \frac{p}{\sqrt{2px}}$

--> Aangezien p een strikt positief reëel getal is en ook onder een wortelteken voorkomt bestaat de eerste afgeleide niet als p < 0. De eerste afgeleide bestaat ook niet als p = 0 want dan deel je nul en… *Wie deelt door nul is een snul! :)*

--> Omdat p strikt positief is kan de eerste afgeleide enkel positief zijn, de functie stijgt.

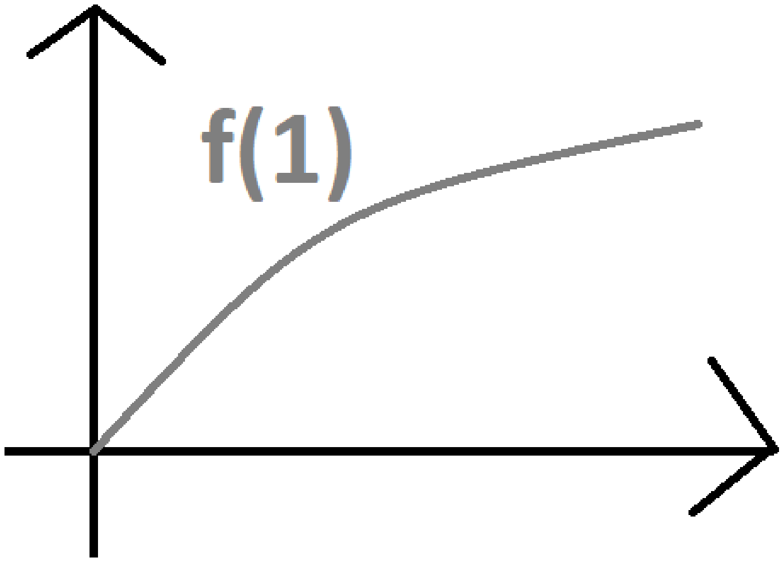
TWEEDE AFGELEIDE: + = functie is convex (U-vormig)

- = functie is concaaf (∩-vormig)
0 = buigpunt bereikt (functie gaat van U naar ∩ of vice versa)

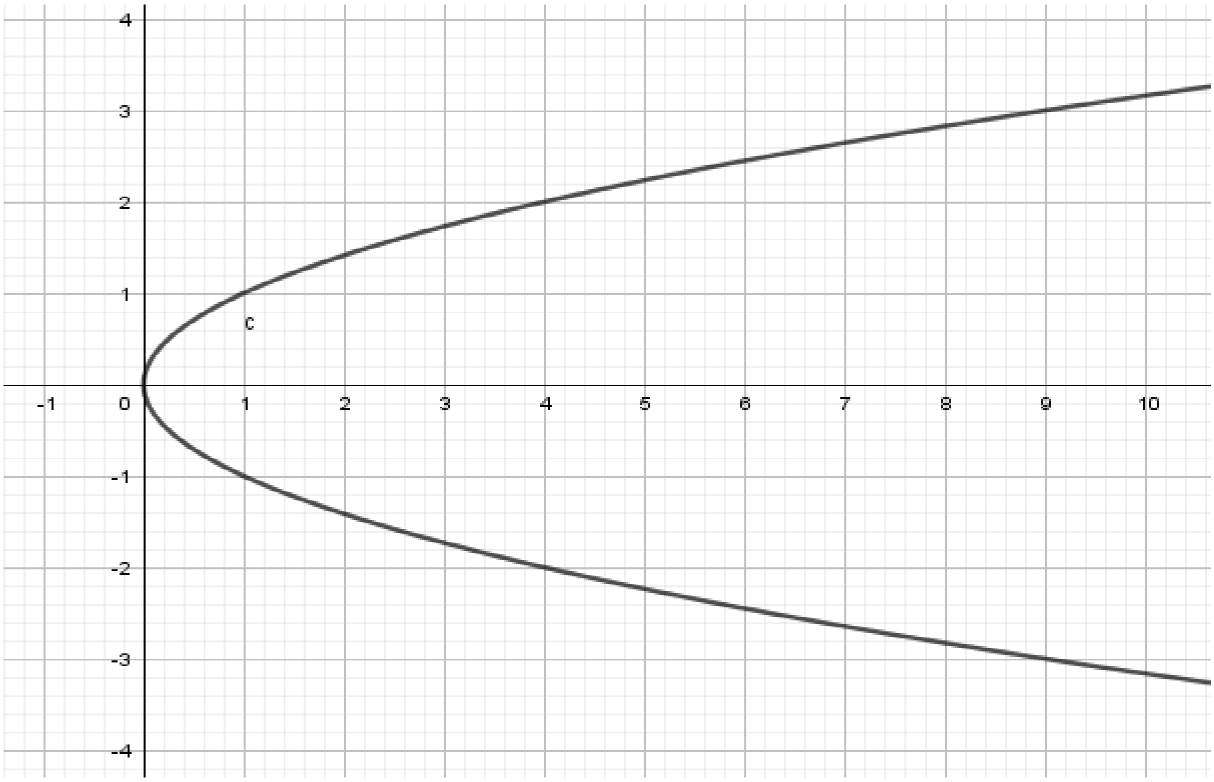
→ Onze tweede afgeleide functie was: $-\frac{p}{2\sqrt{2px^3}}$

--> De tweede afgeleide bestaat ook niet als $p \leq 0$, zie uitleg bij eerste afgeleide.
Ze is negatief voor p > 0 aangezien de minteken voor de breuk de functie negatief maakt, de grafiek van de functie is dus concaaf (∩-vormig).

→ Op het einde van het verloop schetsten we vorig jaar altijd een grafiek, maar we weten al hoe deze grafiek eruit ziet:



Voor functie f_2 kan je een soortgelijk verloop maken, als je de grafiek van functie f_1 dan samenvoegt met f_2 krijg je dan de parabool P terug.



*Opmerkingen:
--> We noemen $y^2 = 2px$ ook wel de topvergelijking van een parabool
--> Bij een kegelsnede noemt men de verhouding $\frac{|DF|}{|Dd|}$ de excentriciteit van de parabool, dit is m.a.w. de verhouding van een random punt D op de parabool en het brandpunt F gedeeld door de afstand van dit punt D tot de richtlijn d, bij een parabool geldt: $\frac{|DF|}{|Dd|} = 1$ omdat beide afstanden gelijk moeten zijn opdat de punt op de parabool licht.

2.4) Cartesische vergelijking van de raaklijn t aan een punt van de parabool

2.4.1) De topraaklijn

Zoals al gezien bij de onderzoek van de parabool is de y-as een verticale rechte (VR). Je weet ook nog dat de rico van de raaklijn aan een functie de eerste afgeleide is.

De relatie is niet differentieerbaar in (0,0), maar de rico van de raaklijn is eigenlijk oneindig op de grafiek van $y^2 = 2px$.
--> In de limietdefinitie gaat de rechterlimiet voor x > 0 naar oneindig.

2.4.2) Stelling + bewijs

In een punt D(x_1, y_1) van een parabool P met vergelijking $y^2 = 2px$ is de vergelijking van de raaklijn t aan P: $\boldsymbol{y \,.\, y_1 = p(x + x_1)}$.

--> Geval 1: D(x_1, y_1) ∈ f_1 en $D \neq 0$.
--> Tijdens het onderzoek van de parabool vonden we: $f_1'(x) = \frac{p}{\sqrt{2px}}$ ($f_1 = y = \sqrt{2px}$)
--> In punt D(x_1, y_1) geldt dus: $f_1'(x_1) = \frac{p}{\sqrt{2px_1}} = \frac{p}{y_1}$
--> De noemer vervangen door $y_1 = \sqrt{2px}$
--> Aangezien de eerste afgeleide = rico raaklijn geldt: $m = \frac{p}{y_1}$.

De algemene vergelijking van een rechte: $y - y_1 = m(x - x_1)$
⇔ $y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$ (rico vervangen door gevonden waarde: $m = \frac{p}{y_1}$)
⇔ $y_1(y - y_1) = p(x - x_1)$ (y_1 overbrengen)
⇔ $yy_1 - y_1^2 = px - px_1$ (distributief uitwerken)
⇔ $yy_1 - 2px_1 = px - px_1$ (cartesische vergelijking parabool: $y^2 = 2px$)
⇔ $yy_1 = px - px_1 + 2px_1$ (overbrengen van 2px1)
⇔ $yy_1 = px + px_1$ (rekenen)
⇔ $yy_1 = p(x + x_1)$ (p afzonderen)
→ Dit is de formule die we in het begin hadden gegeven voor de raaklijn aan een parabool.

--> Geval 2: D = O(0,0)
Gevolg: $x_1 = y_1 = 0$
---------------> Invullen: $y \,.\, 0 = p(x + 0)$ ⇔ $px = 0$ ⇔ $x = 0$
→ Dit is de vergelijking van de y-as. De y-as is, zoals al eerder gevonden, de verticale raaklijn.

2.5) Cartesische vergelijking van de normaal in een punt van de parabool

*Je weet nog van vorig jaar dat de normaal loodrecht staat op iets.
→ De normaal staat in ons geval loodrecht op de raaklijn.
*Je weet nog uit de 2de graad dat er een welbepaald verband bestaat tussen de rico's van twee rechten: $m_1 \,.\, m_2 = -1$.
→ De product van de rico's van rechte 1 en rechte 2 is dus samen -1.
*Je weet nog van puntje 2.4 dat de rico van de raaklijn aan de parabool gelijk is aan $\frac{p}{y_1}$.

*Met R = raaklijn en N = normaal kunnen we dus schrijven:
$m_R \,.\, m_N = -1$
→ We kennen de rico van de raaklijn
⇔ $m_N = \frac{-1}{m_R}$
⇔ $m_N = \frac{-1}{\frac{p}{y_1}}$ (rico van de raaklijn invullen)
⇔ $m_N = -\frac{y_1}{p}$
→ Dit is de rico van de normaal! Dit kunnen we nu invullen in de algemene vergelijking van een rechte.

$y - y_1 = m(x - x_1)$
⇔ $y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1)$
→ Dit is de cartesische vergelijking van de normaal in een punt van de parabool.

VOORBEELD:
1) Gegeven is de parabool $y^2 = 10x$ en punt D(4,9 ; 7). Stel de vergelijking van de raaklijn op in dit punt. Stel daarna de vergelijking van de normaal op
→ De cartesische vergelijking van een raaklijn aan een parabool is:
$y \,.\, y_1 = p(x + x_1)$
→ De cartesische vergelijking van de parabool is $y^2 = 2px$
→ Je kan hieruit afleiden dat p in ons geval 5 is aangezien 2 . 5 = 10.
⇔ $y \,.\, 7 = 5(x + 4{,}9)$ (ik heb het punt ingevuld!)
⇔ $7y = 5(x + 4{,}9)$
→ Dit is de cartesische vergelijking van de raaklijn in punt D aan je parabool

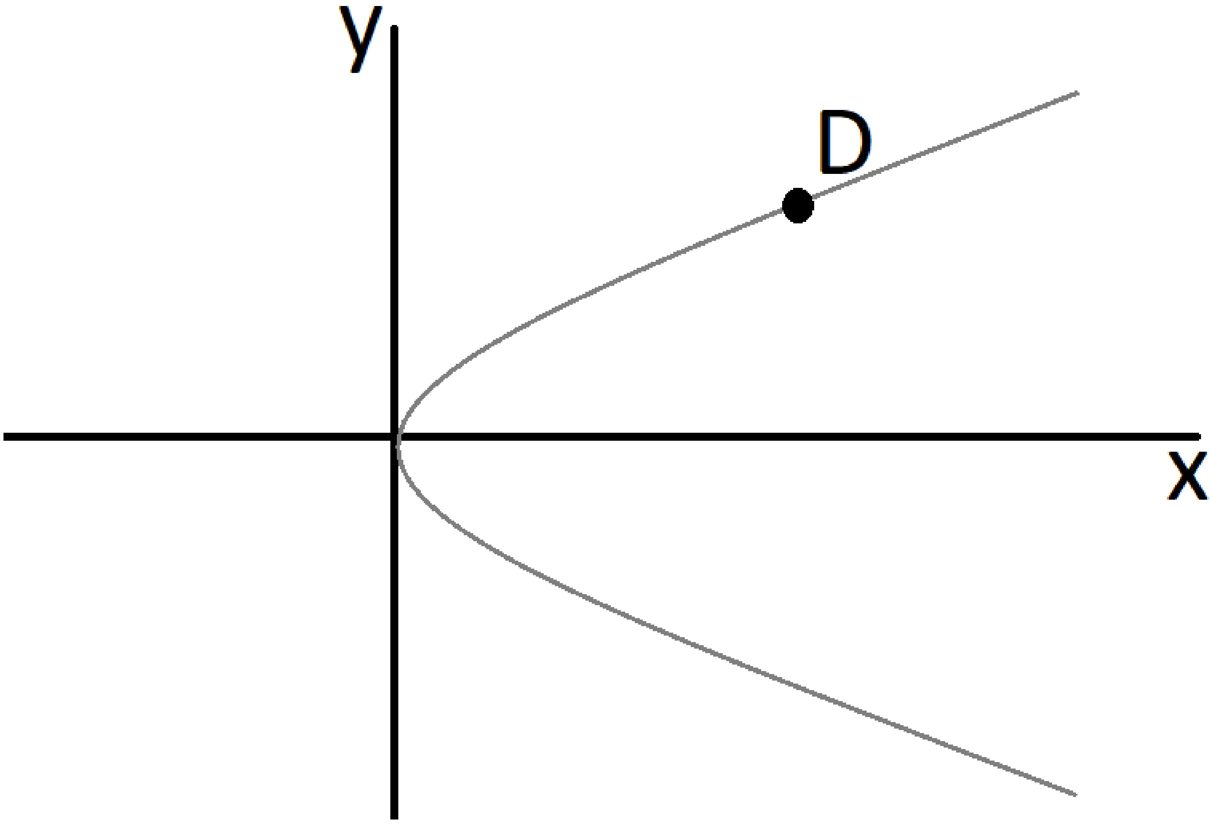
TIP VAN KEVIN WANTEN: Als je de vergelijking van je raaklijn al schrijft in de vorm y = ax + b kan je je rico (a) van je raaklijn direct al aflezen. Zo kan je de rico van je normaal sneller bepalen.

⇔ $7y = 5x + 24{,}7$ ⇔ $y = \frac{5}{7}x + 3{,}53$
→ De rico hier is dus 5/7
→ De rico van je normaal is dus $-\frac{7}{5}$ ($m_N = \frac{-1}{m_R}$)

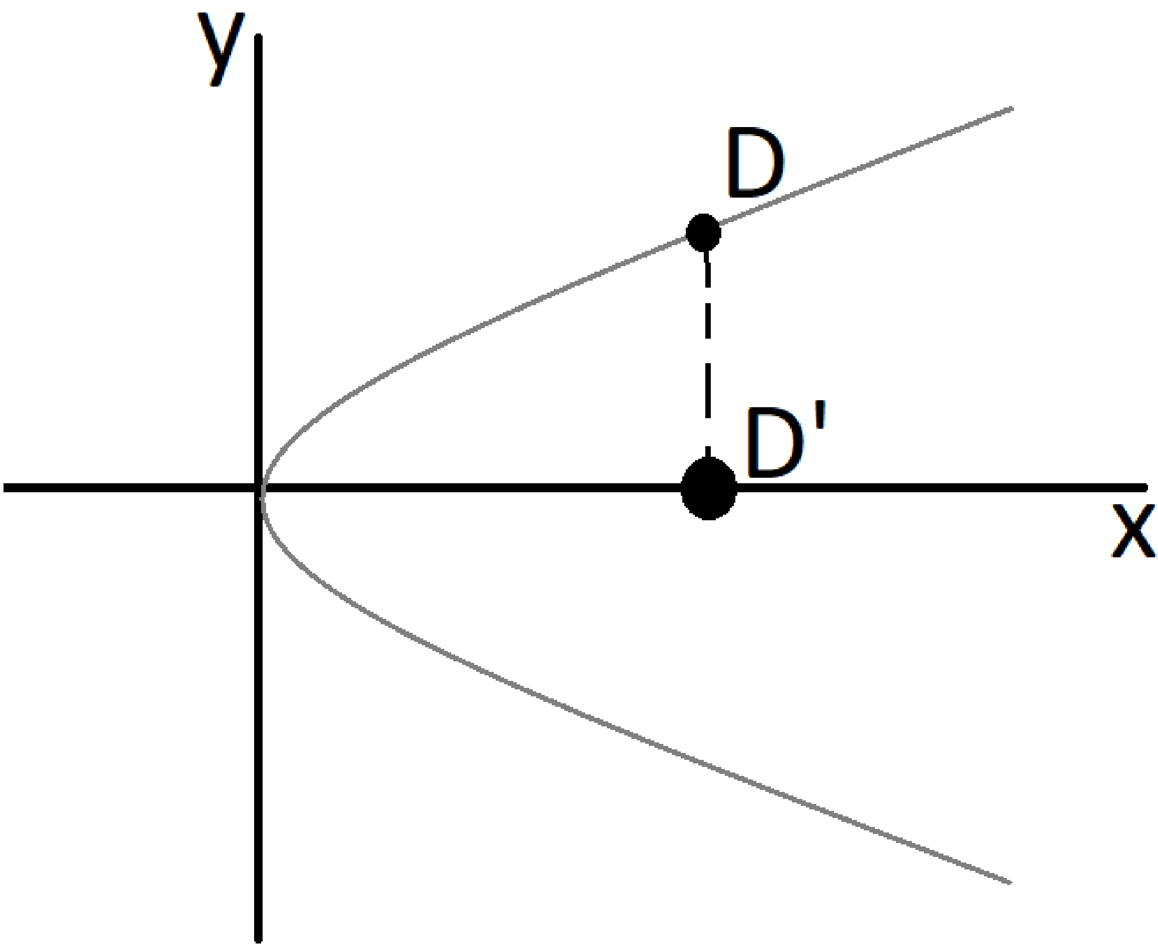
→ Vergelijking normaal: $y - 7 = -\frac{7}{5}(x - 4{,}9)$
→ Je hebt je rico in de vergelijking van de raaklijn al uitgerekend.

2.6) Meetkundige constructie van de raaklijn in een punt van de parabool

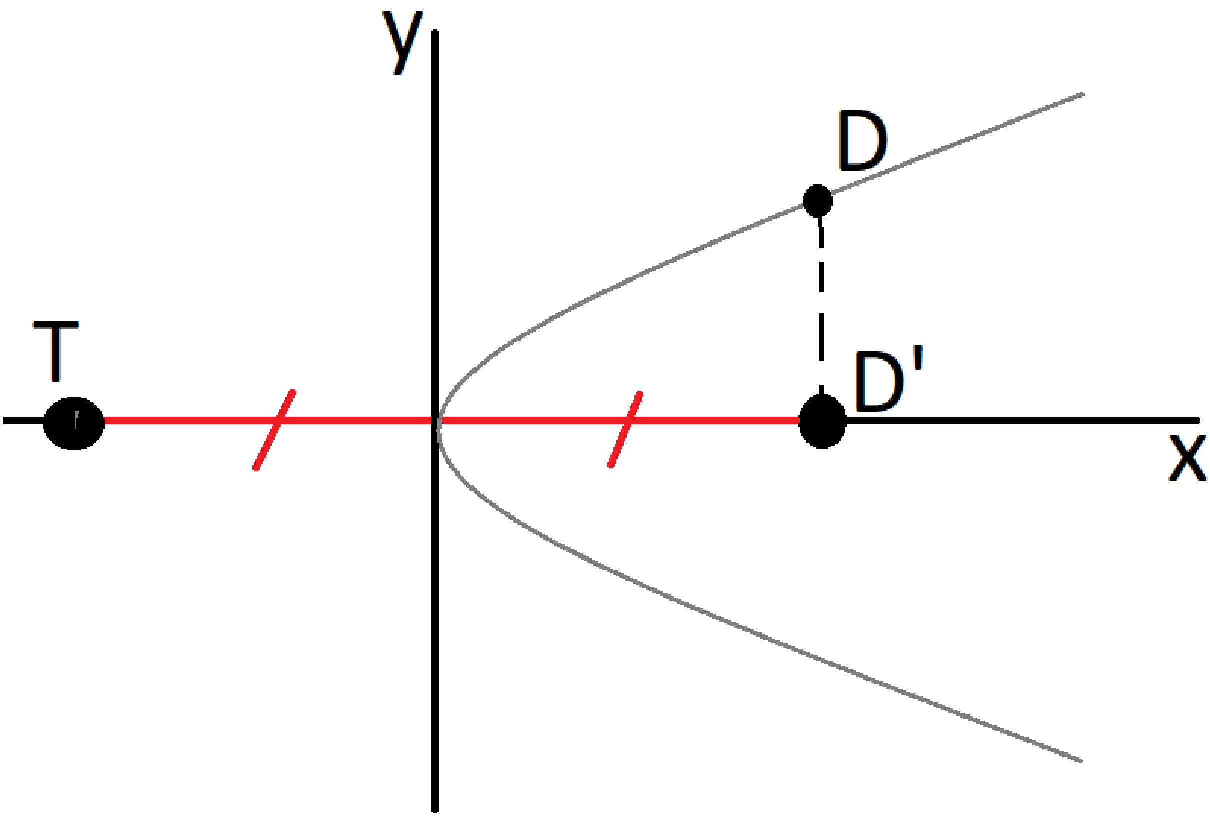
We hebben de raaklijn nu analytisch benaderd, echter moet je ze ook meetkundig kunnen construeren. We beginnen in een orthonormaal assenstelsel met parabool $y^2 = 2px$.



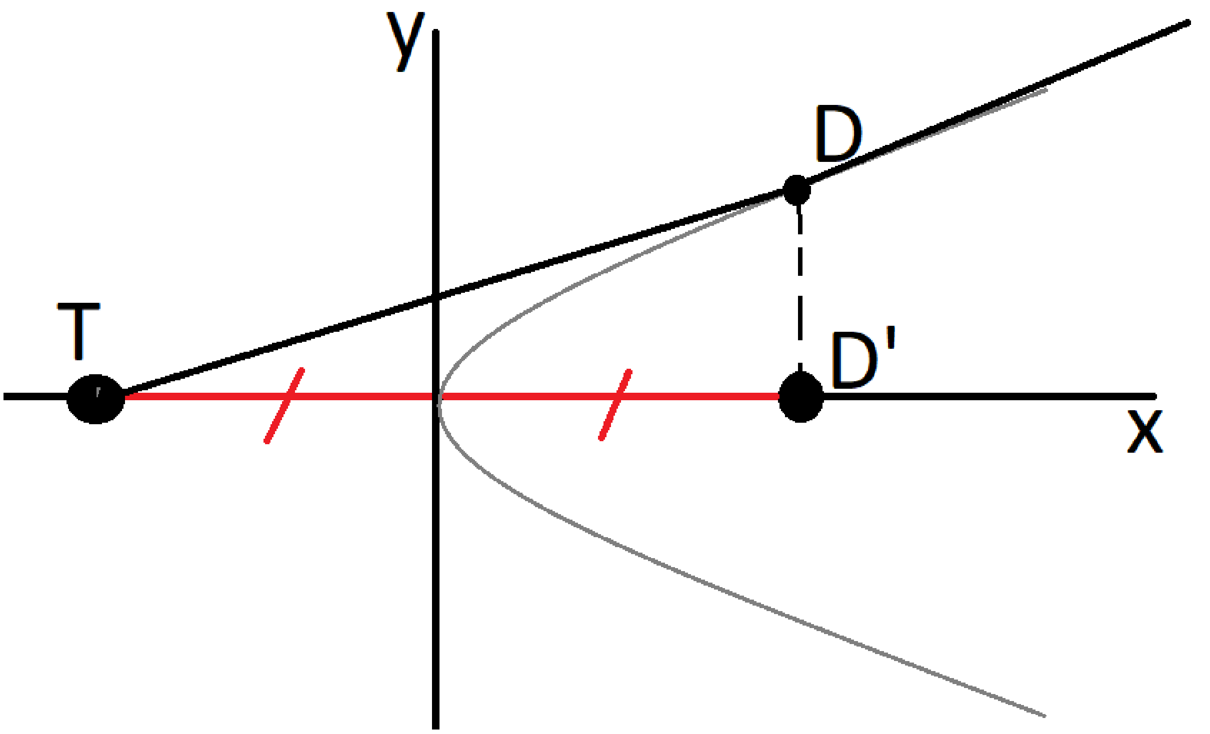
--> Om de raaklijn in punt D juist meetkundig te construeren projecteer je D allereerst loodrecht op de x-as, dit punt is D'



--> Nu bepaal je punt T door D’ te spiegelen t.o.v. de oorsprong



--> De rechte bepaald door T en D is de raaklijn aan je parabool.

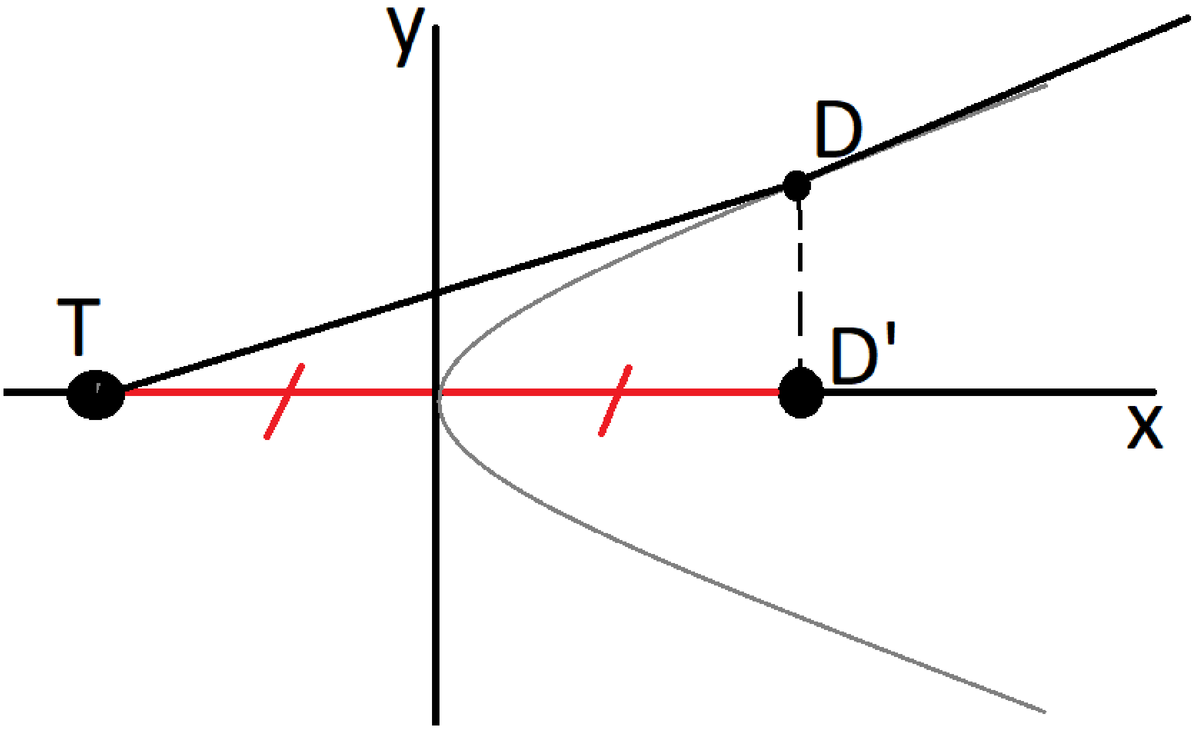


(De nauwkeurigheid op paint is natuurlijk niet perfect)

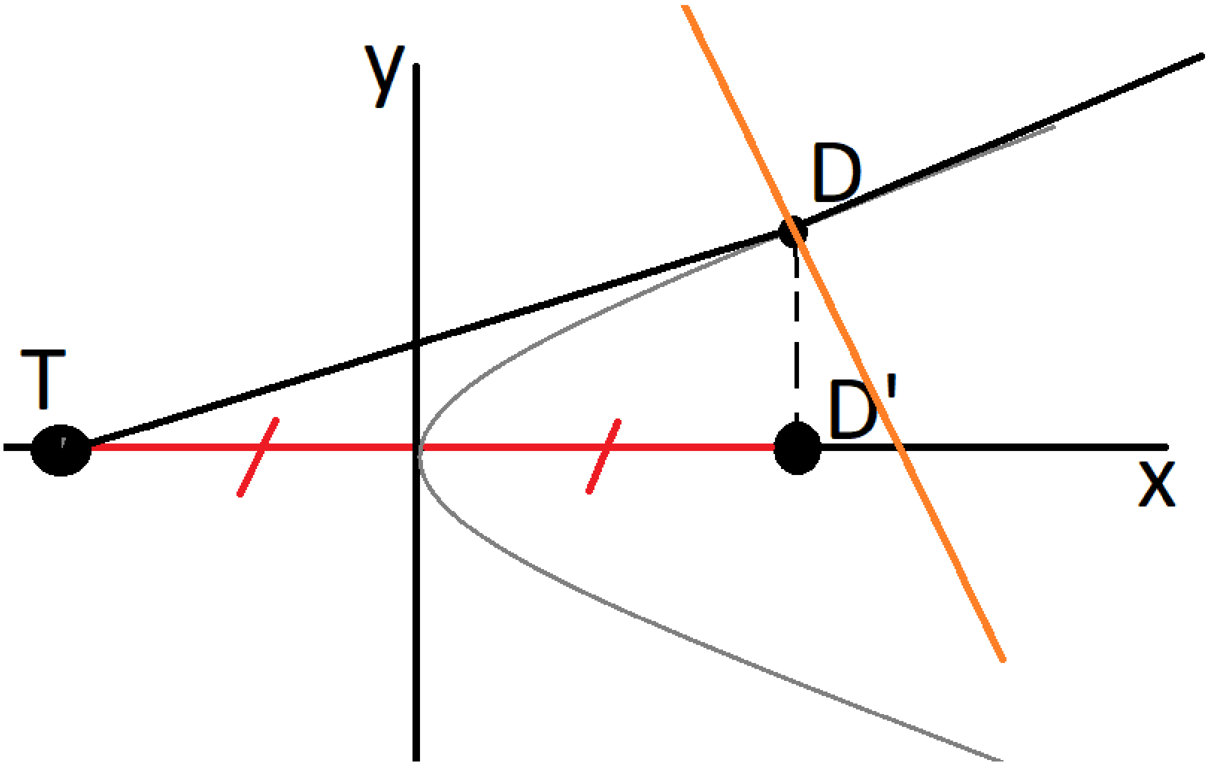
2.7) Meetkundige constructie van de normaal in een punt van de parabool

2.7.1) Met de raaklijn

STAP 1: Teken de raaklijn (zie stappenplan 2.6)



STAP 2: De rechte loodrecht op je raaklijn is de normaal.



(de oranje rechte is de normaal)

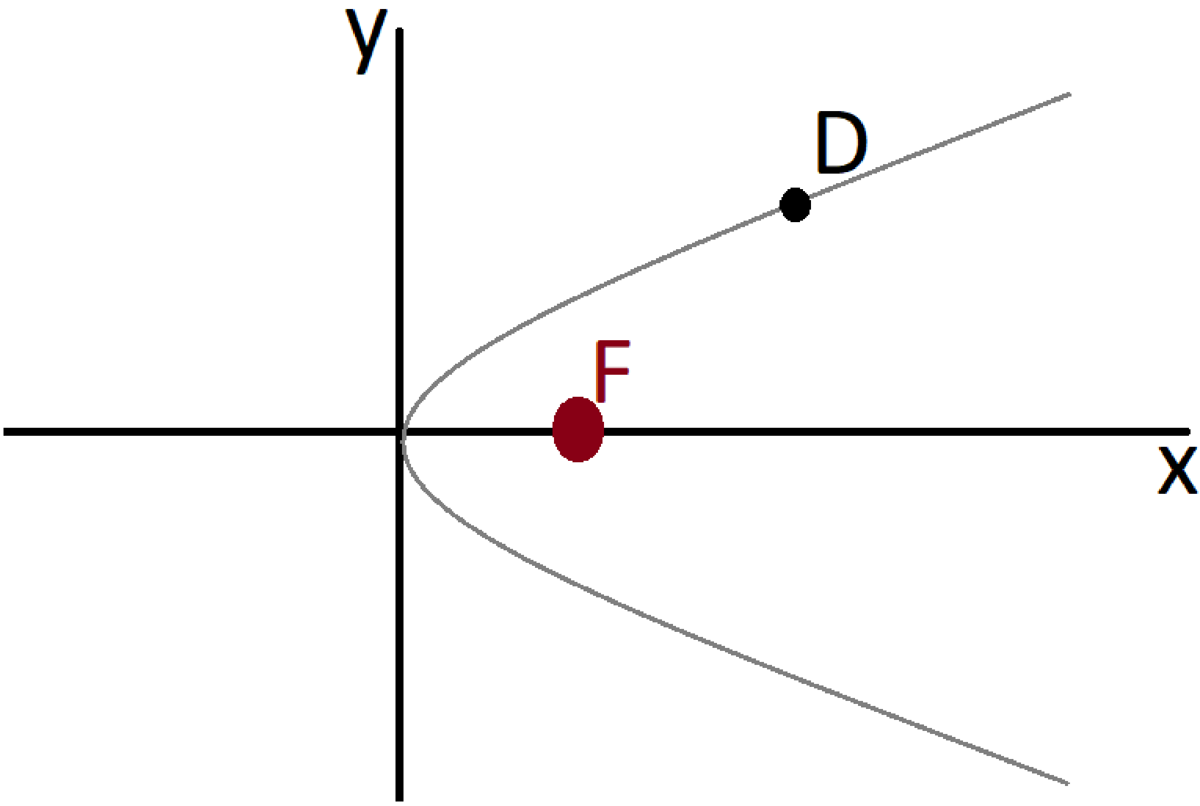
2.7.2) Zonder raaklijn met gegeven brandpunt

2.7.2.1) Hoofdeigenschap

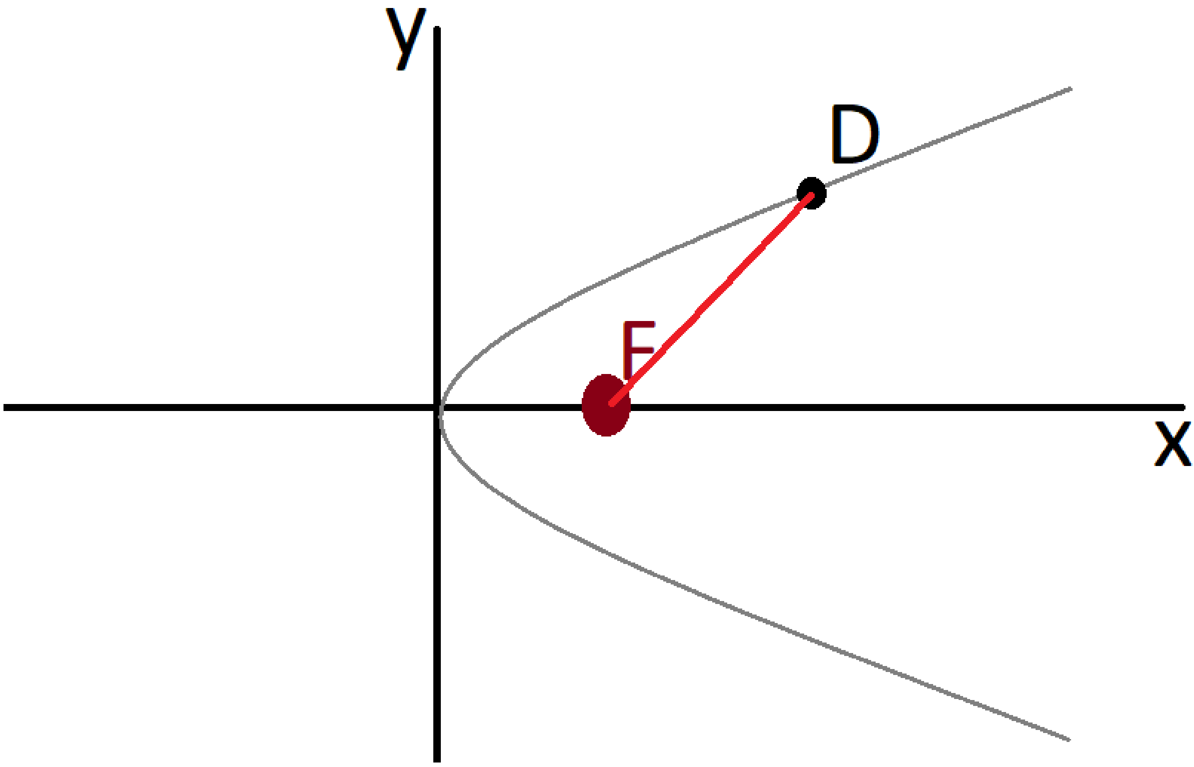
De hoofdeigenschap van de raaklijn t en normaal n zegt:
De **raaklijn t** en **normaal n** in een punt D van een parabool zijn de **bissectrices** van de hoeken gevormd door **rechte DF (rechte tussen punt D en het brandpunt F)** en de **rechte h** die **door D** en evenwijdig met de **as van de parabool (de x-as)** loopt.
--> Uit de 1ste graad wiskunde weet je dat een bissectrice een rechte is die de hoek tussen twéé rechten in twee gelijke delen verdeelt.

2.7.2.2) Constructie van de normaal

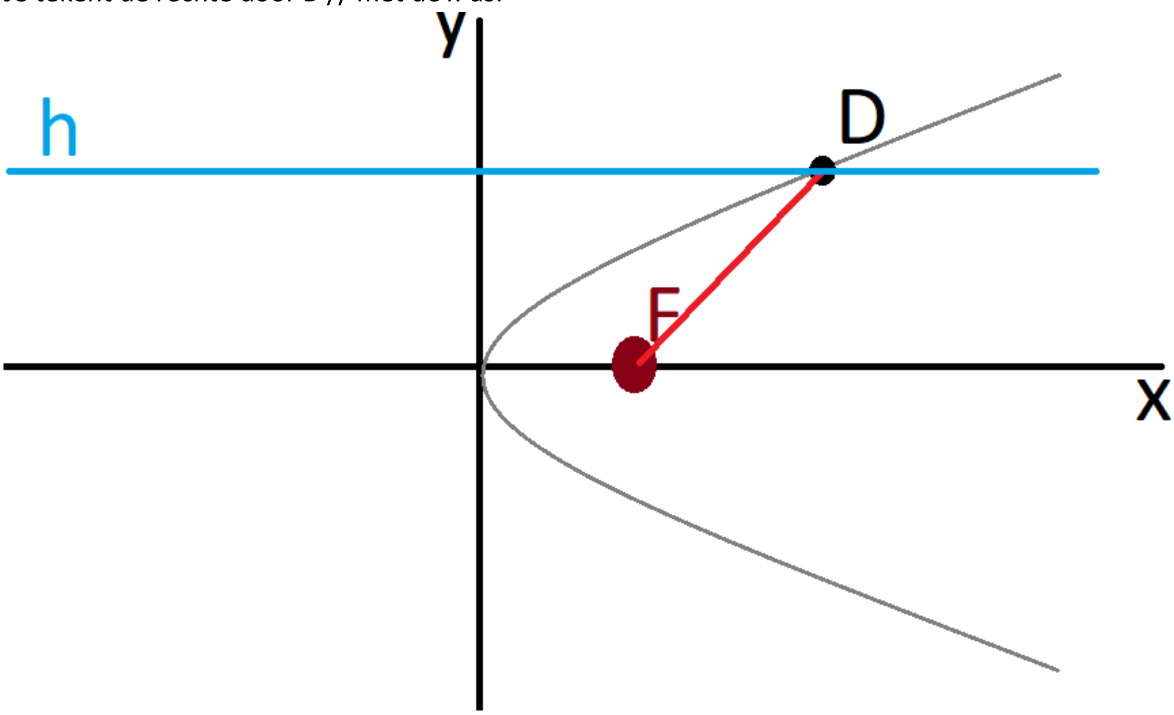
Je hebt dit gegeven:



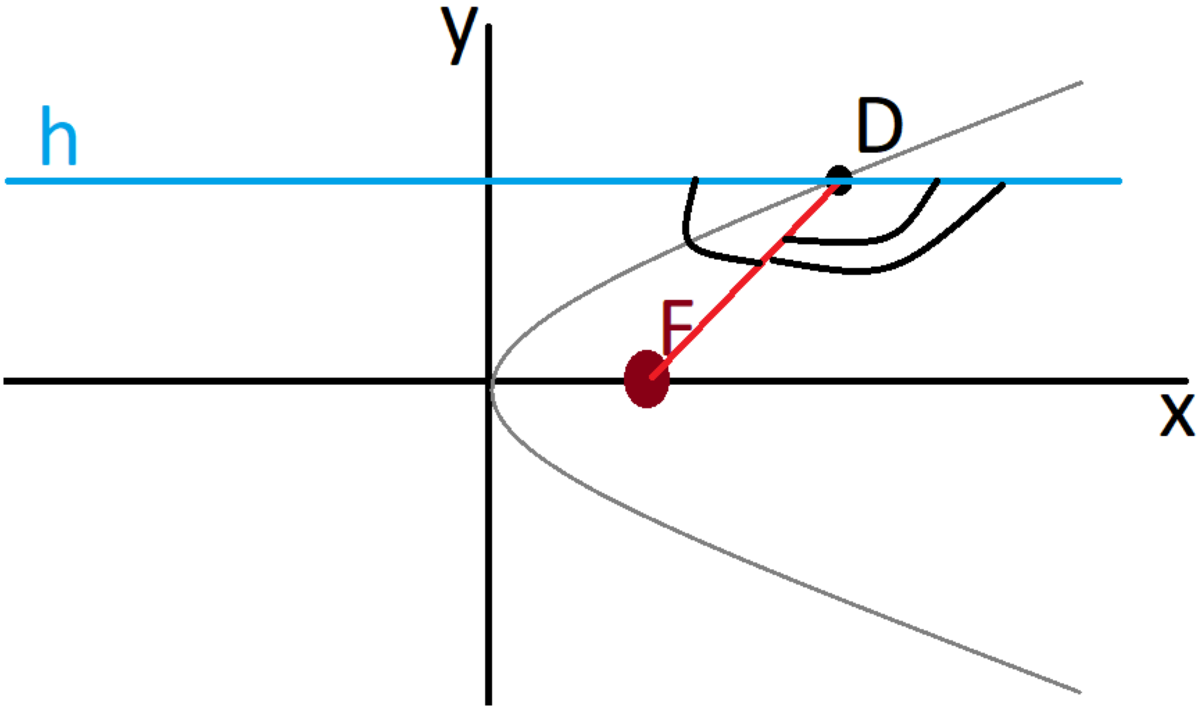
Je tekent de rechte tussen D en f



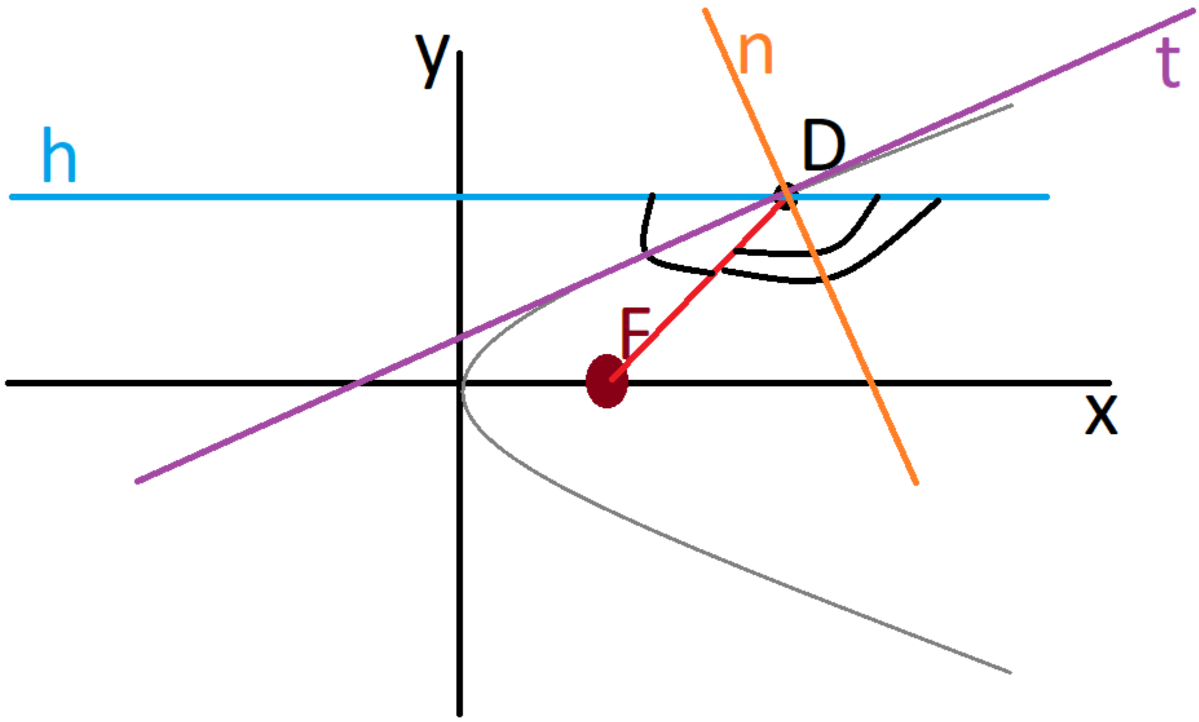
Je tekent de rechte door D // met de x-as:



Rechte h en F maken twee supplementaire hoeken:



De bissectrices van deze hoeken zijn de raaklijn en de normaal, de bissectrice van de hoek met 1 aanduiding is natuurlijk de raaklijn, die van de hoek met 2 aanduidingen is de normaal.



2.8) Toepassingen van parabolen

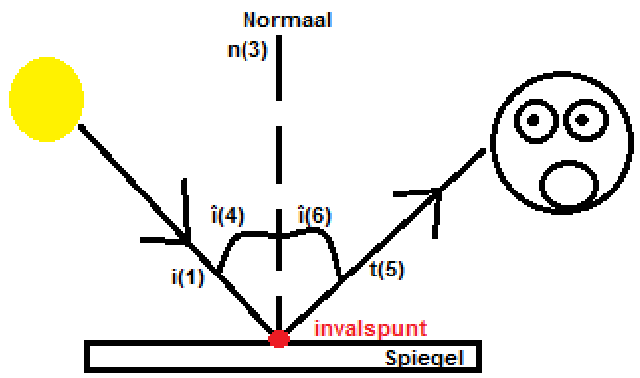
2.8.1) Toepassingen in de optica (= fysica 3dejaar)

De hoofdeigenschap uitgelegd in 2.7.2.1 heeft een belangrijk gevolg. Lichtstralen worden namelijk weerkaatst zodanig dat de invalshoek gelijk is aan de terugkaatsingshoek. Dit hebben we in het 3dejaar fysica gezien, het was één van de zogenaamde terugkaatsingswetten.

Uit samenvatting fysica 3dejaar halen we volgende passage:

TERUGKAATSING VAN HET LICHT:

Begrippen:



*De lichtstraal die invalt op een spiegel in de invallende straal i
*Het punt waar de invallende straal de spiegel raakt, is het invalspunt I.
*De rechte door het invalspunt, loodrecht op de spiegel is de normaal n.
*De hoek tussen de invallende straal en de normaal is de invalshoek î.
*De lichtstraal die de spiegel verlaat, is de weerkaatste straal t.
*De hoek tussen de teruggekaatste straal en de normaal is de terugkaatsingshoek t.

GEVOLGDE WEG: Licht volgt bij terugkaatsing de kortste weg.

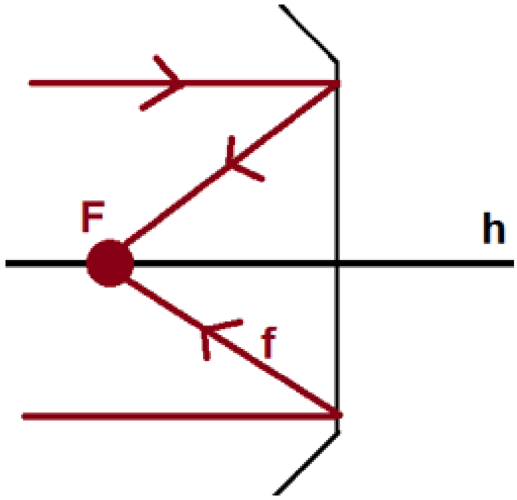
TERUGKAATSINGSWETTEN:

TERUGKAATSINGSWETTEN:
*De invallende straal, teruggekaatste straal en de normaal liggen in eenzelfde vlak. Dat vlak staat recht op het spiegeloppervlak. (invalshoek = terugkaatsingshoek, i = t)
*De terugkaatsingshoek van een lichtstraal is altijd gelijk aan de invalshoek.
*De stralengang is omkeerbaar

We hebben in het 3dejaar ook geleerd dat indien een lichtbundel evenwijdig met de x-as binnenvalt op een parabolische spiegel (= holle of bolle spiegel) alle lichtstralen dan door het brandpunt weerkaatst zullen worden. Dit wordt toegepast bij telescopen, schotelantennes, radiotelescopen …

Uit samenvatting fysica 3dejaar halen we volgende passage:

BRANDPUNT VAN EEN SFERISCHE SPIEGEL:



Alle stralen die evenwijdig met de hoofdas invallen worden teruggekaatst in één punt teruggekaatst, het brandpunt (F).
De afstand tussen het brandpunt en de spiegel is de brandpuntsafstand (f).

Om f te berekenen gebruik je deze formule:
f = $\frac{r}{2}$

Deze eigenschap geldt ook omgekeerd: alle stralen van een lichtbron die zich in het brandpunt bevindt zullen als evenwijdige lichtbundel uit de parabolische spiegel treden: zaklampen, koplampen …

Wat moet je onthouden?
(1) invalshoek = terugkaatsingshoek = gevolg van hoofdeigenschap van normaal en raaklijn.
(2) Lichtbundel valt // in met de x-as --> alle lichtstralen worden door het brandpunt weerkaatst.
→ Telescopen, schotelantennes, radiotelescopen …
(3) Alle lichtstralen in het brandpunt worden evenwijdig uit de spiegel gezonden.
→ Koplampen, zaklampen …

2.9) Voorbeeldoefeningen parabolen

2.9.1) Topvergelijkingen opstellen

OEFENING 1 (cursus): Stel in een georthonormeerd assenstelsel de topvergelijking van parabool P met als as de x-as en:
a) het brandpunt (2,0)
→ Je weet dat het brandpunt (2,0) is.
➔ Dus heeft punt E op richtlijn D de coördinaten (-2,0)
➔ De algemene vergelijking van een parabool = $y^2 = 2px$
--> Herinner jezelf dat we die 'p' definieerden als de afstand tussen de richtlijn en het brandpunt F, dus de afstand tussen E en F.
→ p is dus 4, de afstand tussen het getal 2 en -2 op de x-as is overduidelijk 4.
➔ De vergelijking hier wordt dus: $y^2 = 2 . 4 . x$ ⇔ $y^2 = 8x$
→ Dit is het!

b) die door het punt A(4, 3) gaat
→ Als de parabool door punt A gaat is de afstand tussen dat punt en het brandpunt gelijk aan de afstand tussen dat punt en de richtlijn. Hiervoor moet je de vergelijking $y^2 = 2px$ nachecken.
--> $y^2 = 2px$ --> Je kent één x-waarde (4) en y-waarde (3), we vullen ze in.
⇔ $4^2 = 2p3$ --> Als dit een ware uitspraak vormt zit dit punt op de parabool.
⇔ $16 = 6p$ ⇔ $p = \frac{16}{6} = 2{,}67$

→ Dus: y² = 2 . $\frac{16}{6} . x = \frac{32}{6}x$

➔ Onze vergelijking is dus: $y^2 = \frac{32}{6}x$

d) met als richtlijn 2x + 5 = 0

→ Eerst moet je je richtlijn in de standaardvorm zetten, dus x afzonderen:

2x + 5 = 0 ⇔ 2x = -5 ⇔ x = -2,5

→ Als de richtlijn vergelijking x = -2,5 heeft, dan heeft punt E op de richtlijn coördinaten $(-2{,}5; 0)$

→ Als dit punt coördinaten $(-2{,}5; 0)$ heeft, heeft het brandpunt F de coördinaten $(2{,}5; 0)$.

--> De afstand tussen deze punten is uiteindelijk 5, dit is onze p.

→ $y^2 = 2px = 2 . 5 . x = 10x$

--> Dit is de vergelijking van de parabool!

2.9.2) Raaklijn t en normaal n algebraïsch berekenen

OEFENING 2: Stel van parabool P de vergelijking op van de raaklijn t en de normaal n in het punt Q.

a) P: y² = 3x   Q(27, -9)

--> Je weet dat de cartesische vergelijking van een parabool is: $y^2 = 2px$

--> Uit de gegeven cartesische vergelijking kan je afleiden dat p = 1,5 want 2 . 1,5 $. x = 3x$

--> Je weet dat de cartesische vergelijking van een raaklijn aan de parabool is:

$y . y_1 = p(x + x_1)$

→ We hebben onze p en één punt gegeven, we vullen dus in.

⇔ $y . (-9) = 1{,}5(x + 27)$

⇔ $-9y = 1{,}5(x + 27)$

--> Als je het zo laat, is het goed. Echter heeft mnr. Wanten als tip meegegeven dat je best uitwerkt naar de vorm y = ax + b omdat je dan de rico (a) direct kan aflezen.

⇔ $-9y = 1{,}5x + 40{,}5$

⇔ $y = -\frac{1}{6}x - 4{,}5$ (beide leden delen door -9)

--> Dit is de cartesische vergelijking van je parabool P in de vorm y = ax + b

--> Je weet nu de rico van je parabool, namelijk $-1/6$, we hebben gezien dat de rico van de normaal = $-\frac{1}{rico\ raaklijn}$, de rico van de normaal is bijgevolg 6. $(m_1 . m_2 = -1)$

→ Je kan 6 en je gegeven punt nu invullen in de algemene vergelijking van je rechte.

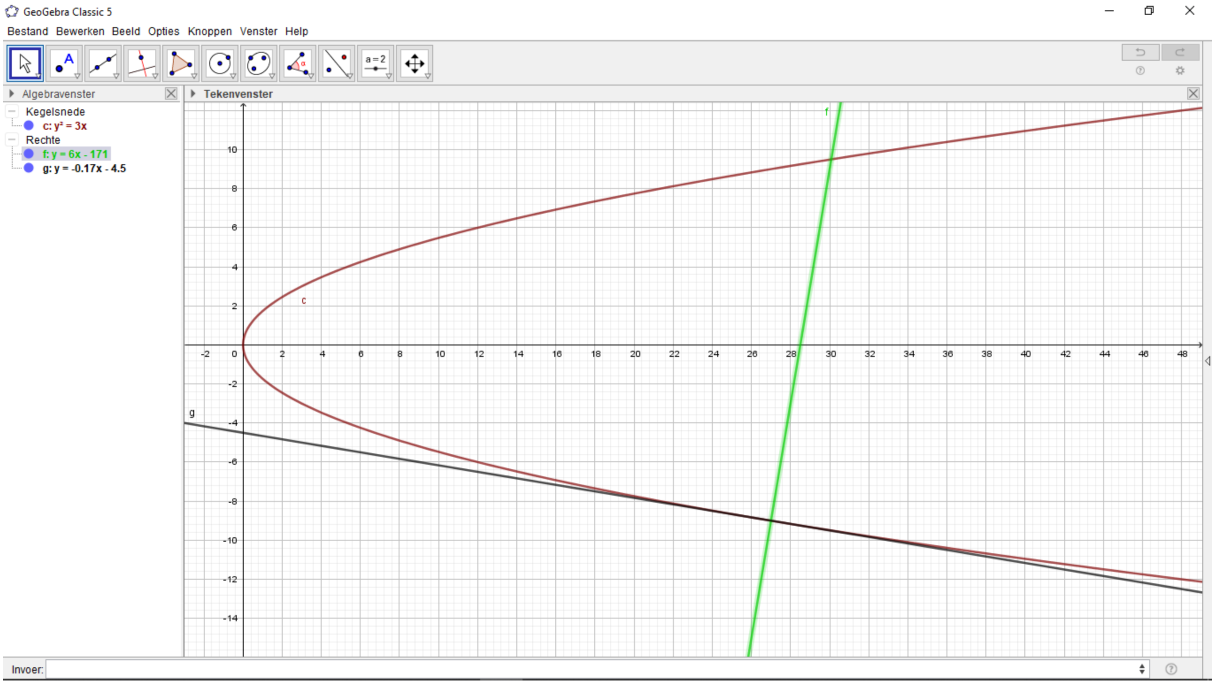
$y - y_1 = m(x - x_1)$

⇔ $y - (-9) = 6(x - 27)$

⇔ $y + 9 = 6x - 162$

⇔ $y = 6x - 171$

--> Dit is de rico van de normaal is dus 6



--> Ik heb in Geogebra onze parabool en onze gevonden rechten ingegeven, je ziet duidelijk dat onze oefening juist is gemaakt!

Als je de tip van Kevin niet hebt opgevolgd moet je de rico van de normaal vinden met de algemene cartesische vergelijking van de normaal.

$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1)$

--> Hier is m vervangen door $-\frac{y_1}{p}$

--> Je weet dat $y_1 = 9 \quad en \quad p = 1{,}5$

--> Dus: $m = -\frac{y_1}{p} = -\frac{9}{1{,}5} = 6$

--> Vul je alles terug in in je vergelijking en werk je uit, dan bekom je dezelfde uitkomst.

d) P: $y^2 = 16x$ Q(4, ?)

--> Je hebt de y-waarde van Q niet gegeven, die moet je berekenen.

--> Je weet dat Q op de parabool licht, dus kan je de x-waarde (4) invullen en kijken welke y-waarde eruit komt.

--> $y^2 = 64$ (x = 4 invullen)

⇔ $y = +8$ ∨ $y = -8$ (niet vergeten: een kwadraat heeft 2 oplossingen!)

→ We hebben 2 y-waarden gevonden, dus hebben we in theorie ook 2 punten: Q(4, 8) en Q'(4, -8)

--> Hier zie je nog eens perfect dat parabolen van de vorm $y^2 = 2px$ géén functie is omdat één x-waarde verschillende beelden (y-waarden) kan hebben.

--> Omdat we 2 punten hebben, hebben we ook 2 raaklijnen en twee normalen.

Je kan uit de gegeven cartesische vergelijking van de parabool bepalen dat p = 8.

We berekenen eerst t en n van punt Q(4, 8)

$t: y \,.\, y_1 = p(x + x_1)$

⇔ $y \,.\, 8 = 8(x + 4)$

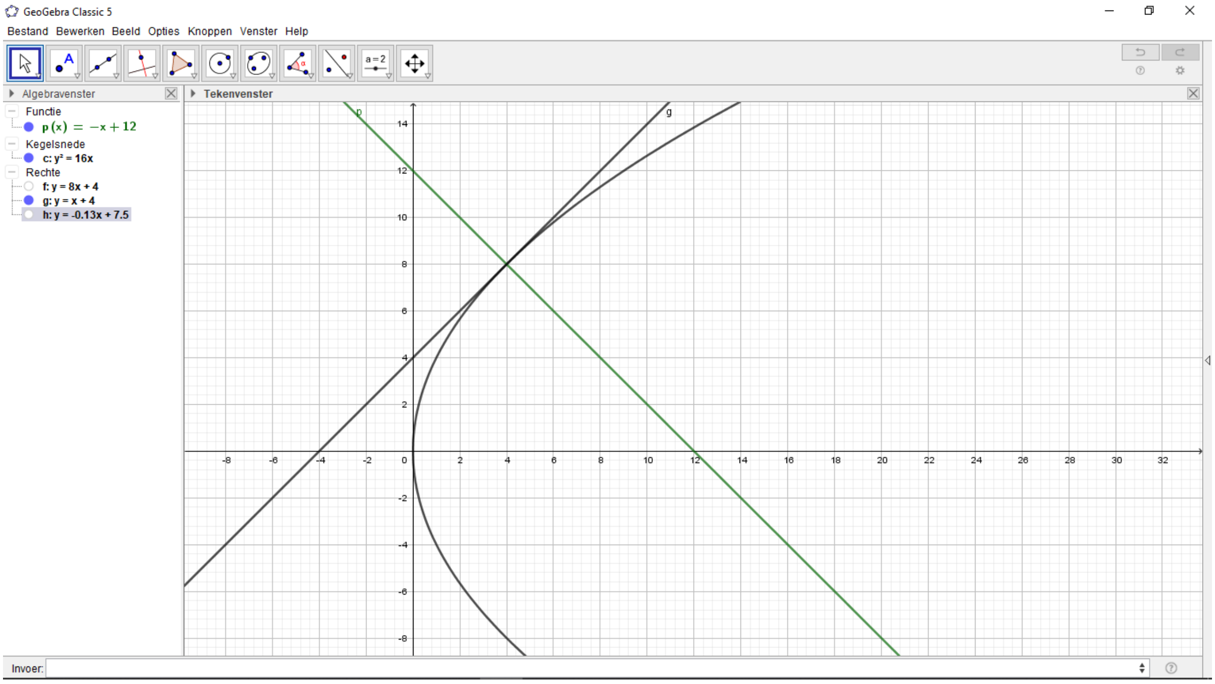
⇔ $8y = 8(x + 4)$

--> Dit is voldoende, maar we volgen Kevins tip: we zonderen af tot de vorm y = ax + b.

⇔ $8y = 8x + 32$
⇔ $y = x + 4$
--> De rico van de raaklijn is dus 8
--> De rico van de normaal is daarom -1 ($m_1 \,.\, m_2 = -1$)

$y - 8 = -1(x - 4)$ (formule: $y - y_1 = m(x - x_1)$)
⇔ $y - 8 = -x + 4$
⇔ $y = -x + 12$

Als je Kevins tip niet hebt opgevolgd bereken je de rico door: $m = -\frac{y_1}{p} = -\frac{8}{8} = -1$



Geogebra bevestigt dat we juist zitten! We hebben de juiste raaklijn/normaal getekend!

2.9.3) Een vraagstukje oplossen…

Oefening 4: Bepaal de coördinaten van de punten van parabool P met vergelijking $y^2 = 2px$ met p een strikt positief reëel getal waarvan het ordinaat het dubbele is van de abscis
--> Je weet uit de 1ste graad dat we de x-waarde de abscis noemen en de y-waarde het ordinaat.
--> De y-waarde moet dus het dubbele zijn van de x-waarde.
→ Dus we kunnen y vervangen door 2x

$y^2 = 2px$
⇔ $(2x)^2 = 2px$ (y vervangen door 2x)
⇔ $4x^2 = 2px$ (kwadraat uitwerken)
⇔ $4x = 2p$ (beide leden delen door x)
⇔ $p = 2x$
→ Vullen we p in in de algemene cartesische vergelijking van een parabool bekomen we:
$y^2 = 2 \,.\, 2x \,.\, x = 4x^2$
--> Dus: $y^2 = 4x^2$
➔ Uittesten: $2^2 = 4x^2$ ⇔ $4 = 4x^2$ ⇔ $x^2 = 1$ ⇔ $x = 1$ of $x = -1$
$4^2 = 4x^2$ ⇔ $16 = 4x^2$ ⇔ $x^2 = 4$ ⇔ $x = 2$ of $x = -2$
→ Het ordinaat is inderdaad het dubbele van de abscis, we zitten juist!

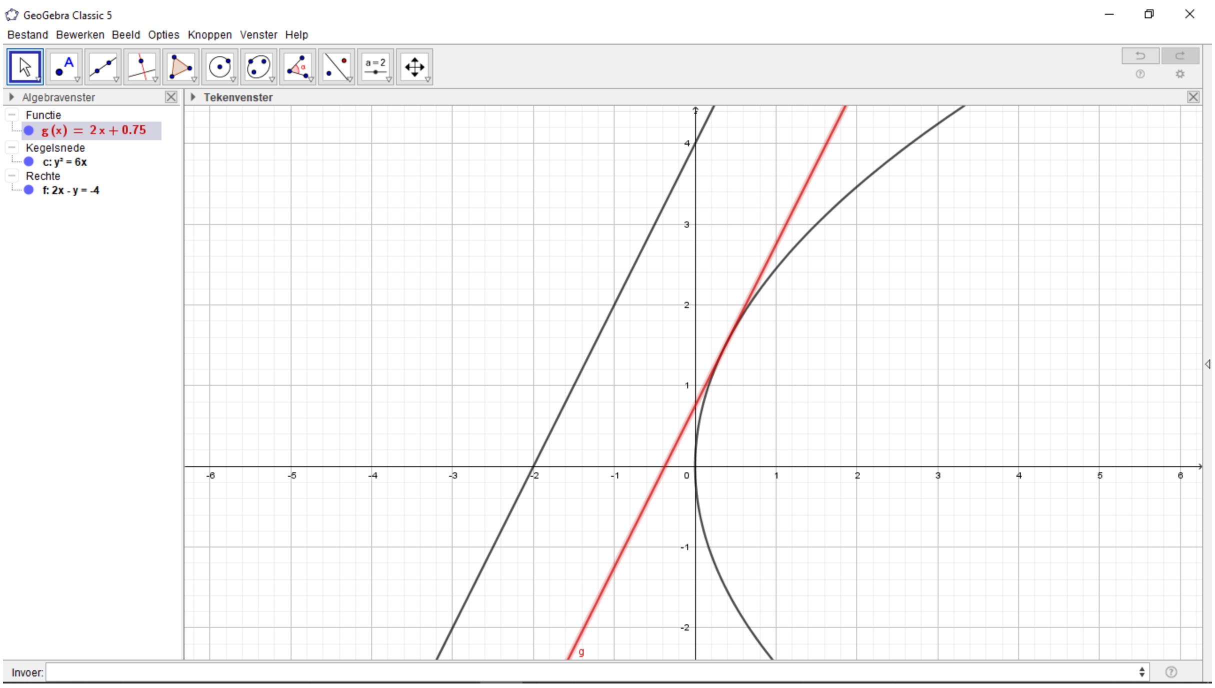
2.9.4) Raaklijn t bepalen met parabool en evenwijdige rechte gegeven

OEFENING 5: Bepaal de vergelijking van raaklijn t aan P die evenwijdig is met r.
P: $y^2 = 6x$ en rechte r: $2x - y + 4 = 0$

Uit het 3dejaar weet je nog dat evenwijdige rechten dezelfde rico hebben. Dat betekent dus dat de raaklijn t dezelfde rico heeft als de rechte r. Om de rico van rechte r af te lezen zetten we om naar y = ax + b.
--> $2x - y + 4 = 0 \Leftrightarrow -y = -2x - 4 \Leftrightarrow y = 2x + 4$
→ Rico r = rico t = 2

De cartesische vergelijking van de raaklijn is: $y \,.\, y_1 = p(x + x_1)$
--> Als we een stap teruggaan van het bewijs krijgen we: $y = \frac{p}{y_1}(x + x_1)$
--> We kennen p want p = 3
→ Dus: $y = \frac{3}{y_1}(x + x_1)$
- ➔ We weten dat p = 3 en rico = 2, dan moet y_1 gelijk zijn aan 1,5 van 3/1,5 = 2!
  - → Als $y_1 = 1{,}5$ kunnen we x bepalen
  - ➔ $y^2 = 6x \Leftrightarrow 1{,}5^2 = 6x \Leftrightarrow 2{,}25 = 6x \Leftrightarrow x = 0{,}375$

➔ We krijgen dus:
$$y \,.\, y_1 = p(x + x_1)$$
$$\Leftrightarrow y \,.\, 1{,}5 = 3(x + 0{,}375)$$
$$\Leftrightarrow 1{,}5y = 3x + 1{,}125$$
$$\Leftrightarrow y = 2x + 0{,}75 \text{ (beide leden delen door 1,5)}$$



→ Geogebra bevestigd dat we juist zitten!

2.9.5) Verdieping in cursus: gemeenschappelijke punten van een parabool en een rechte bepalen

Dit is verdieping maar is zéér makkelijk dus neem ik het op in de samenvatting, we hebben dit zelfs al in het vierdejaar gedaan.

Om de gemeenschappelijke punten van een parabool en een rechte bepaal je door een stelsel.

OEFENING 6 (V): Bepaal t.o.v. een positief orthonormaal assenstelsel de gemeenschappelijke punten van P en a met:

P: $y^2 = \frac{x}{4}$ $\quad a: 4x - y - 15 = 0$

--> We zetten P en a in een stelsel:

$$\begin{cases} y^2 = \frac{x}{4} \\ 4x - y - 15 = 0 \end{cases}$$

➔ Dit is een stelsel van 2 vergelijkingen en 2 onbekenden (2x2), het heeft dus één oplossing, de x- en y-waarde die je uitkomt is/zijn het/de snijpunt(en)

⇔ $\begin{cases} y^2 = \frac{x}{4} \\ -y = -4x - 15 \end{cases}$ (we beginnen y af te zonderen om substitutie uiteindelijk uit te voeren)

⇔ $\begin{cases} y^2 = \frac{x}{4} \\ y = 4x - 15 \end{cases}$ (in de volgende stap kunnen we substitutie uitvoeren)

⇔ $\begin{cases} (4x - 15)^2 = \frac{x}{4} \\ y = 4x - 15 \end{cases}$ (y substitueren = vervangen in 1ste vergelijking)

⇔ $\begin{cases} 16x^2 - 120x + 225 = \frac{x}{4} \\ y = 4x - 15 \end{cases}$ (dubbel product: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$)

⇔ $\begin{cases} 64x^2 - 480x + 900 = x \\ y = 4x - 15 \end{cases}$ (4 overbrengen)

⇔ $\begin{cases} 64x^2 - 481x + 900 = 0 \\ y = 4x - 15 \end{cases}$ (x overbrengen)

→ $D = b^2 - 4ac = (-481)^2 - 4\,.\,64\,.\,900 = 961$

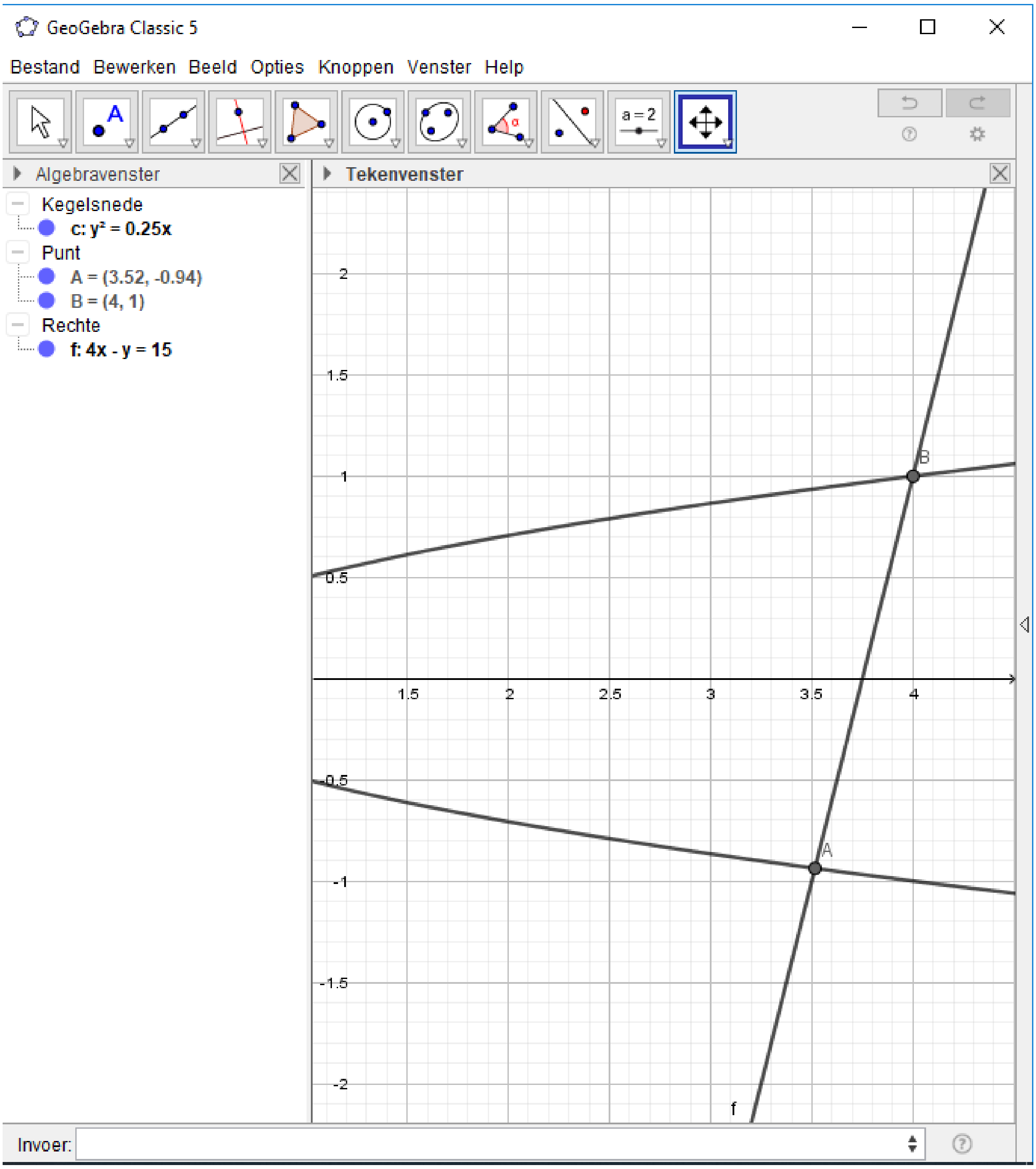
--> $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-481)+\sqrt{961}}{2\,.\,64} = 4\ (I)$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-481)-\sqrt{961}}{2\,.\,64} = 3{,}52\ (afgerond)\ (II)$

We hebben 2 x-waarden gevonden, we moeten ze allebei dus in de 2de vergelijking invoeren om de corresponderende y-waarden te vinden.

$y = 4x - 15 = (I)\ 4\,.\,4 - 15 = 1$

$y = 4x - 15 = (II)\ 4\,.\,3{,}52 - 15 = -0{,}92$



Geogebra bevestigd dat we juist zijn!