Samenvatting wiskunde – analyse – verloop van functies – made by Abdellah

---

(Y) VOORWOORD

Dit is de laatste hoofdstuk wiskunde van dit jaar, dit is eigenlijk een grote samenvatting van al het analyse dat we dit jaar hebben geleerd. We brengen al onze kennis samen om het verloop van functies te bepalen.

(X) FOUTJE?

Dat kan. Meld hem als je er eentje vindt. Ik ben je alvast zeer dankbaar!

(Z) INHOUDSTAFEL

Zie volgende pagina.

# Inhoud

# 1) Verloop van functies bepalen

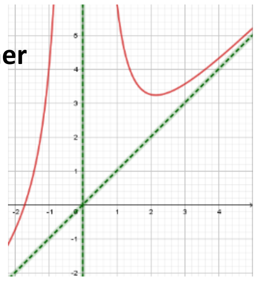
## 1.1) Verloop van functies: stappenplan

*We volgen telkens een bepaalde stappenplan om het verloop van functies te bepalen:

1) Bepalen van het domein --> voor alle veeltermfuncties is het domein $\mathbb{R}$
2) Continuïteit --> De functie tekenen zonder je grafiek op te heffen
   --> Alle veeltermfuncties zijn continu
3) Functies van een bijzonder type
   --> Even/oneven/periodieke functie?
      --> Even: $f(x) = f(-x)$ ➔ Kan je spiegelen om de y-as
      --> Oneven: $f(-x) = -f(x)$ ➔ Kan je spiegelen om de x-as
      --> Periodiek: herhaalt zichzelf constant --> zoals goniometrische functies

4) Snijpunten met assen
   --> Bepaal de snijpunten met de y- en x-assen
      --> y-as: je stelt x = 0
      --> x-as: je stelt y = 0, dit zijn de nulwaarden van je functie

5) Asymptoten: Bij rationale functies (en andere soorten functies die we volgend jaar zien) moet je de asymptoten ook bepalen.
   --> rationale functie:
      --> **Verticale asymptoot: noemer gelijk stellen aan 0 en de polen van de functie uitrekenen**
      --> **Horizontale asymptoot:**
         --> $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = q$
         --> **Graad teller = graad noemer: naar hoogste graad bekijken, functie vereenvoudigen**
            --> Bv.: $f(x) = \frac{4x^3+3x^2-1}{5x^3}$ ➔ HA: $y = \frac{4}{5}$
         --> **Graad teller is 1 graad kleiner dan noemer: HA --> y = 0**
            --> Bv.: $f(x) = \frac{3x^2-1}{5x^3}$ ➔ HA: $y = 0$
      --> **Verticale asymptoot:**
         ➔ **Bestaat enkel als graad teller is hoger dan graad van de noemer**



         --> $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$
            --> $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{h(x)}{x[g(x)]}$
            --> $q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - m(x)]$

Als je asymptoten nog steeds niet meer kent na de kleine herhaling, open dan de samenvatting van limieten!

               --> Bijvoorbeeld: $y = \frac{x^3+5}{x^2}$
               ➔ $m = \frac{x^3+5}{x(x^2)} = \frac{x^3+5}{x^3} = 1$
               ➔ $q = \frac{x^3+5}{x^3} - x = \frac{x^3+5}{x^3} - \frac{x^4}{x^3} = \frac{(x^3-x^4)+5}{x^3} = \pm\infty$ (rekenregels limieten)
               ➔➔ Je schuine asymptoot is nu: y = mx + q ⇔ y = x

6) Eerste afgeleide functie
   --> De eerste afgeleide functie geeft meetkundig gezien het stijgen/dalen van je functie weer.
      --> Is het tekenverloop in je eerste afgeleide positief: normale functie stijgt, is hij negatief, dan daalt de normale functie.
   --> De eerste afgeleide functie geeft ook je extremawaarden weer, als je afgeleide = 0 bereikt je functie een absoluut minimum/maximum

7) De tweede afgeleide functie

--> Als je tweede afgeleide functie positief is, is je functie convex: U
--> Als je tweede afgeleide functie negatief is, is je functie concaaf: ∩
--> Als je tweede afgeleide functie 0 wordt, dan heb je een buigpunt

8) Punten en raaklijnen
--> Punten zoeken met horizontale en schuine asymptoten
--> Punten waarin f'(x) en f''(x) 0 worden
--> … ➔ Sommige bijzondere punten zijn al gevonden in de vorige stappen

9) Limieten
--> We bepalen het begin en het einde van de functie: wat doet x als f(x) nadert $\pm\infty$?
--> We sporen limieten op van niet-differentieerbare x-waarden

10) Samenvattende tabel
--> We vatten onze bevindingen samen

11) Grafiek
--> We maken een grafiek

Let op: bij verloop van functies willen we enkel weten hoe de grafiek eruitziet (zonder Geogebra) dus slaan we meestal sommige stappen over die niet nuttig zijn om het verloop te bepalen. Dit wordt allemaal duidelijker in de voorbeeldoefeningen.

# 1.2) Meetkundige betekenis van de eerste- en tweede afgeleide

*Het is belangrijk dat je de meetkundige betekenis snapt.
--> Als de eerste afgeleide positief is, dan stijgt je functie (want: eerste afgeleide = rico raaklijn)
negatief is, dan daalt je functie
nul wordt, dan heb je een extremawaarde bereikt
--> Nu logisch redeneren: als je functie daalde (eerste afgeleide is negatief en je bereikt dan een extrema (eerste afgeleide 0), dan heb je een minimum bereikt. Als je functie stijgde en je eerste afgeleide wordt nul dan heb je een maximum bereikt. Als je meerdere maxima/minima bereikt is het aan jou om uit te maken welke absoluut (de grootste/ kleinste is) en welke relatief (de minst grootste/minst kleine) is.

--> Als de tweede afgeleide positief is, dan is je functie convex (U-vormig)
negatief is, dan is je functie concaaf (∩-vormig)
nul wordt, dan heb je een buigpunt bereikt.
--> Bij een buigpunt gaat je functie van convex naar concaaf of vice versa.

*Dit wordt allemaal nog verduidelijkt in de voorbeeldoefeningen.

# 2) Voorbeeldoefeningen

## 2.1) Verloop van veeltermfuncties

### 2.1.1) Functies van de tweede graad

*Voorbeeldoefening 1: Bepaal het verloop van de functie $f(x) = x^2 - 2$

--> **STAP 1: We leiden onze functie al op voorhand tot twee ordes af**

→ $f'(x) = 2x$

→ $f"(x) = 2$

--> **STAP 2: We maken al op voorhand een standaardtabel die je best altijd maakt**

| | |
|---|---|
| x | |
| f'(x) | |
| f''(x) | |
| f(x) | |

--> **STAP 3: Bepaal de nulwaarden van je eerste afgeleide functie, bepaal ook de corresponderende f(x) waarde van je gewone functie als je eerste afgeleide 0 wordt**

--> Dus: $f(x) = 2x$ wordt 0 als: $0 = 2x \Leftrightarrow x = 0$

--> Nu vullen we $x = 0$ in, in onze gewone functie: $f(x) = x^2 - 2 = 0^2 - 2 = -2$

--> Dit kunnen we nu invullen in onze tabel:

| | |
|---|---|
| x | 0 |
| f'(x) | 0 |
| f''(x) | |
| f(x) | -2 |

--> **STAP 4: Bepaal het tekenverloop van f’(x) met behulp van testgetallen**

--> $f'(x) = 2x$ --> 1) Waarde kleiner dan 0, bv. -1: $f'(x) = 2\,.(-1) = -2 = -$

--> 2) Waarde groter dan 0, bv. 1: $f'(x) = 2\,.\,1 = 2 = +$

--> Dit is een makkelijke functie dus kan je het direct zien, maar als je moeilijkere krijgt gebruik je de [CALC]-functie op je rekenmachine, jij voert je functie in, drukt op [CALC], je rekenmachine zal nu vragen: X? Daar voer je jouw x-waarde in en krijg je een bijbehorende y-waarde!

--> We kunnen dit tekenverloop al in ons tabelletje zetten:

| x | | 0 | |
|---|---|---|---|
| f'(x) | - | 0 | + |
| f''(x) | | | |
| f(x) | | -2 | |

--> **STAP 5: Bepaal de nulwaarden van f’’(x)**

--> $f''(x) = 2 \rightarrow heeft\ géén\ nulwaarden$

--> **STAP 6: Bepaal het tekenverloop van f’’(x)**

--> $f''(x) = 2 \rightarrow positieve\ constante\ functie: tekenverloop\ is\ overal\ positief$

--> Dit kunnen we in ons tabelletje gieten:

| x | | 0 | |
|---|---|---|---|
| f'(x) | - | 0 | + |
| f''(x) | + | + | + |
| f(x) | | -2 | |

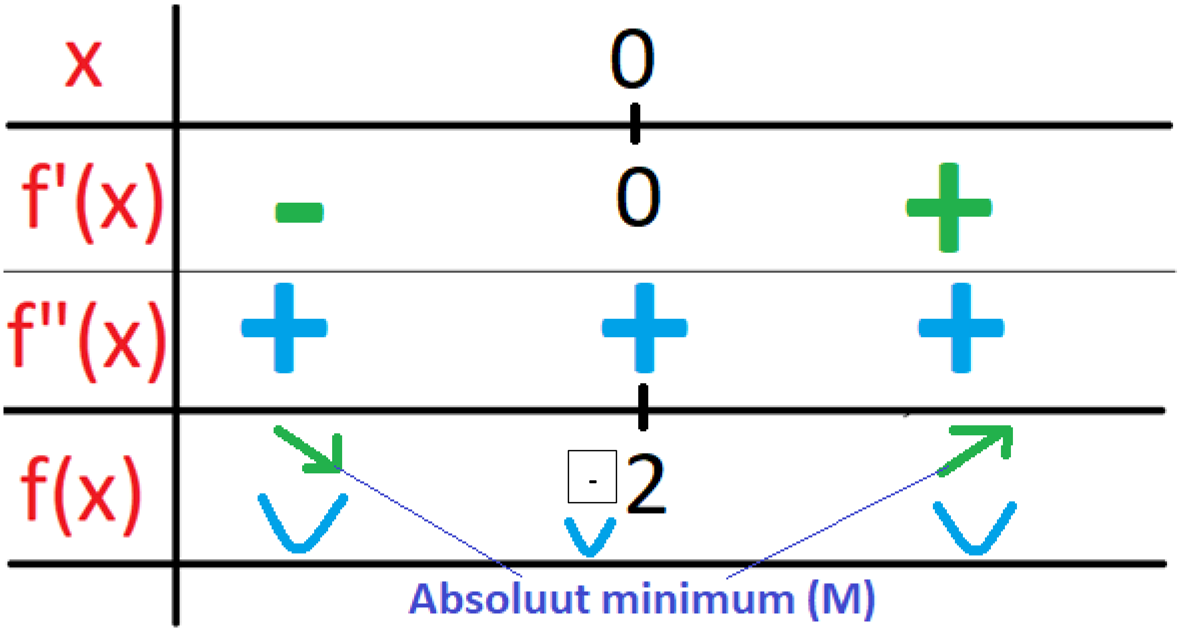
--> **STAP 7: Trek je conclusies uit je tabel, rekening houdende met de meetkundige betekenis van de eerste- en tweede afgeleide. Schrijf je conclusies bij f(x).**

--> Quickie herhaling: meetkundige betekenis eerste- en tweede afgeleide:

--> 1ste: + = stijgend, - = dalend, 0 = extrema

--> 2de: + = ∪, - = ∩, 0 = buigpunt

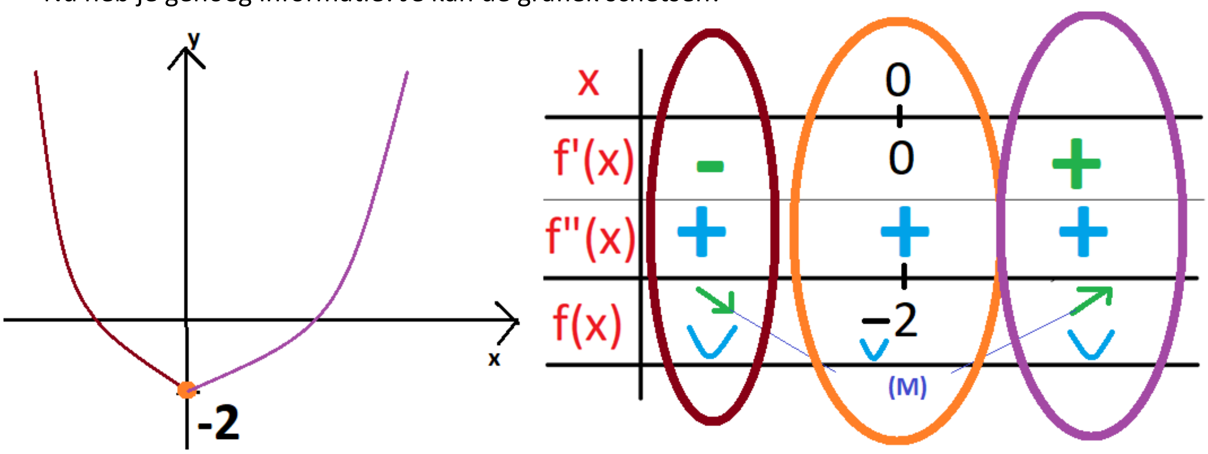
--> We vullen nu dus onze tabel aan:




--> We hebben gewoon aangevuld rekening houdende met de meetkundige betekenis van de eerste- en tweede afgeleide. Hoe weten we dat we een absoluut minimum hebben? Zoals ik al heb aangehaald: logisch redeneren, je functie daalt eerst, daarna wordt je eerste afgeleide 0 dus heb je een extrema, omdat je functie daalt is het een minimum. Daarna stijgt je functie weer. Omdat we niet meerdere minima hebben mogen we zeggen dat dit het absoluut minimum is.

--> **STAP 8: Teken (schets) de bijbehorende grafiek**

--> Nu heb je genoeg informatie! Je kan de grafiek schetsen!




--> **STAP 9: Vragen die je nu hebt (aka dingen die ik verwarrend vond).**

**<u>A) Waarom moeten we de nulwaarden van f(x) niet bepalen?</u>**

Kevin vertelde me dat, omdat we énkel geïnteresseerd zijn in het verloop van de functie, we géén nulwaarden moeten bepalen. Je mag dit doen (om de grafiek beter te kunnen tekenen), maar dit is in principe niet nodig en niet belangrijk voor Kevin.

**B) Waarom slaan we sommige stappen over?**
Omdat deze extra tijd in beslag nemen en niet nodig zijn om het verloop te bepalen, we weten immers dat elke veeltermfunctie continu is bv. en we weten ook dat een veeltermfunctie geen asymptoten heeft dus moeten we ze ook niet bepalen.

**C) Geldt de besproken stappenplan in deze voorbeeldoefening voor alle veeltermfuncties?**
Ja, bij derde- en vierdegraadsfuncties (zie later) wordt het gewoon meer rekenwerk maar het komt op dit neer. Bij rationale functies is dit ook de basis, hier komt enkel bij dat we asymptoten moeten gaan zoeken (zie later).

*Voorbeeldoefening 2: Bepaal het verloop van de functie $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$
--> STAP 1: De functie al op voorhand 2 ordes afleiden
$f'(x) = 4x - 3$
$f''(x) = 4$
--> STAP 2: De samenvattende standaardtabel maken…

| x | | |
|---|---|---|
| f'(x) | | |
| f''(x) | | |
| f(x) | | |

--> STAP 3: De nulwaarden van de eerste afgeleide bepalen, de corresponderende y-waarde van de gewone functie daarmee invullen
$f'(x) = 4x - 3 \Leftrightarrow 0 = 4x - 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$
$f(x) = 4x - 3 = 4 . \frac{3}{4} - 3 = 3 - 3 = 0$

| x | | 3/4 | |
|---|---|---|---|
| f'(x) | | 0 | |
| f''(x) | | | |
| f(x) | | $\boxed{-\frac{1}{8}}$ | |

--> STAP 4: Bereken de nulwaarden van je tweede afgeleide functie, vul de corresponderende waarde van f(x) in en vul je tabel aan

$f''(x) = 4 \rightarrow constante\ functie\ heeft\ geen\ nulwaarde$

--> STAP 5: Maak het tekenverloop van je eerste afgeleide, dit doe je door testgetallen in te vullen in de eerste afgeleide functie, eventueel met de CALC-functie van je rekenmachine.

| x | | 3/4 | |
|---|---|---|---|
| f'(x) | - | 0 | + |
| f''(x) | | | |
| f(x) | | $\boxed{-\frac{1}{8}}$ | |

Let op: om het tekenverloop te maken pak je natuurlijk één waarde kleiner dan ¾ en ééntje groter dan ¾. Niet kleiner en groter dan 0! Als je -/- of +/+ zou uitkomen is je tekenverloop fout tenzij je een dubbele nulwaarde hebt. Want dit is tegenstrijdig met de stelling van Bolzano.

--> STAP 6: Bepaal het tekenverloop van de tweede afgeleide

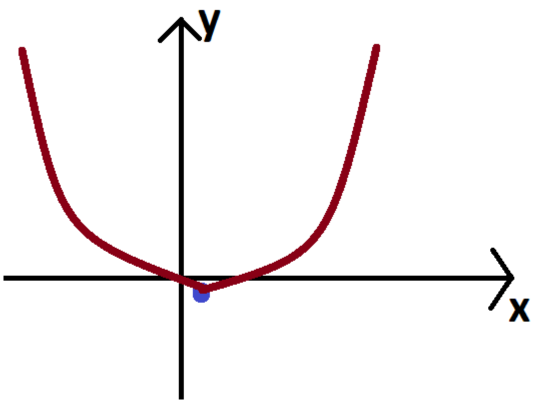
$f''(x) = 4 \rightarrow functie\ is\ positief\ in\ heel\ haar\ domein$

| x | | 3/4 | |
|---|---|---|---|
| f'(x) | - | 0 | + |
| f''(x) | + | + | + |
| f(x) | | $\boxed{-\frac{1}{8}}$ | |

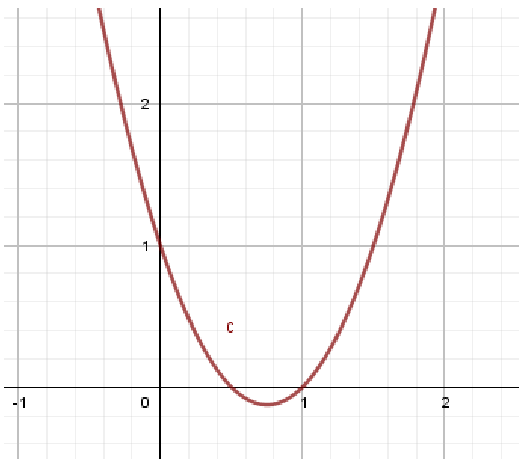
--> STAP 7: Trek je besluiten uit je bevindingen, rekening houdende met de meetkundige betekenissen van de eerste- en tweede afgeleide.

| x | | 3/4 | |
|---|---|---|---|
| f'(x) | - | 0 | + |
| f''(x) | + | + | + |
| f(x) | ↘ ∪ | $-\frac{1}{8}$ ∪ | ↗ ∪ |
| | | (M)min | |

--> STAP 8: Schets je grafiek met de gegevens die je hebt gevonden:




| x | | 3/4 | |
|---|---|---|---|
| f'(x) | - | 0 | + |
| f''(x) | + | + | + |
| f(x) | ↘ ∪ | -1/8 ∪ | ↗ ∪ |
| | | (M)min | |




Wil jij toch de nulwaarden uitrekenen (terwijl dit niet moet)? Dan gebruik je de discriminant.

$D = b^2 - 4ac$

--> $D > 0 : x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

--> $D = 0 : x = -\frac{b}{2a} (multipliciteit\ 2)$

--> $D < 0 : x\ heeft\ geen\ reële\ wortels$

We verhogen nu de moeilijkheidsgraad en gaan het verloop van derdegraads veeltermfuncties bespreken.

## 2.1.2) Functies van de derde graad

*Voorbeeldoefening 3: Bepaal het verloop van de functie $f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x + 3$.

--> **STAP 1: functie al 2 ordes afleiden**

$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$

$f"(x) \ = 6x - 3$

--> **STAP 2: Standaardtabel maken.**

| | |
|---|---|
| x | |
| f'(x) | |
| f"(x) | |
| f(x) | |

--> **STAP 3: Nulwaarde(n) van de eerste afgeleide zoeken. Zoek ook de corresponderende y-waarden van de gewone functie bij de nulwaarden van de eerste afgeleide (dit om je extrema te vinden). Vul je tabel aan**

3.1: Nulwaarden eerste afgeleide

$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x - 6 = 0$

➔ Discriminant: $D\ = b^2 - 4ac$

$= (-3)^2 - 4.3.(-6)$

$= 81$ --> $D > 0 \rightarrow vergelijking\ heeft\ 2\ reële\ oplossingen$

➔ Oplossingen: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3)+\sqrt{81}}{2.3} = 2$ ➔ Nulwaarde 1: (2,0)

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3)-\sqrt{81}}{2.3} = -1$ ➔ Nulwaarde 2: (-1,0)

3.2: Invullen in gewone functie om extrema te zoeken

x = 2 --> $f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x + 3 = 2^3 - 1{,}5\,.2^2 - 6\,.2 + 3 = \ -7$ ➔ Extrema 1: (2, -7)

x = -1 --> $f(x) = 6{,}5\ (ga\ zelf\ na \rightarrow eventueel\ met\ CALC - functie\ op\ je\ rekentoestel)$

➔ Extrema 2: (-1;6,5)

3.3: Tabel aanvullen

| | | | |
|---|---|---|---|
| x | -1 | | 2 |
| f'(x) | 0 | | 0 |
| f"(x) | | | |
| f(x) | 6,5 | | -7 |

--> **STAP 4: Zoek de nulwaarden van je tweede afgeleide functie, vul deze in, in je tabel. Zoek ook de corresponderende y-waarden van de gewone functie (om je buigpunten te hebben). Vul je tabel aan.**

$f''(x) \; = \; 6x - 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ➔ Nulwaarde: (1/2, 0)

$f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x + 3 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 1{,}5\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6\,.\frac{1}{2} + 3 = -\frac{1}{4} (gebruik\ CALC!)$

| x | -1 | 1/2 | 2 |
|---|---|---|---|
| f'(x) | 0 | | 0 |
| f''(x) | | 0 | |
| f(x) | 6,5 | -1/4 | -7 |

--> **STAP 5: Bepaal het tekenverloop van je eerste afgeleide met behulp van testgetallen**

| x | | -1 | 1/2 | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | + | 0 | - | 0 | + |
| f''(x) | | | 0 | | |
| f(x) | | 6,5 | -1/4 | -7 | |

Je vult dus een waarde kleinder dan -1 in, eentje tussen -1 en 2 en eentje groter dan 2.

Met de -1/2 moet je geen rekening houden aangezien die betrekking heeft tot de tweede afgeleide!

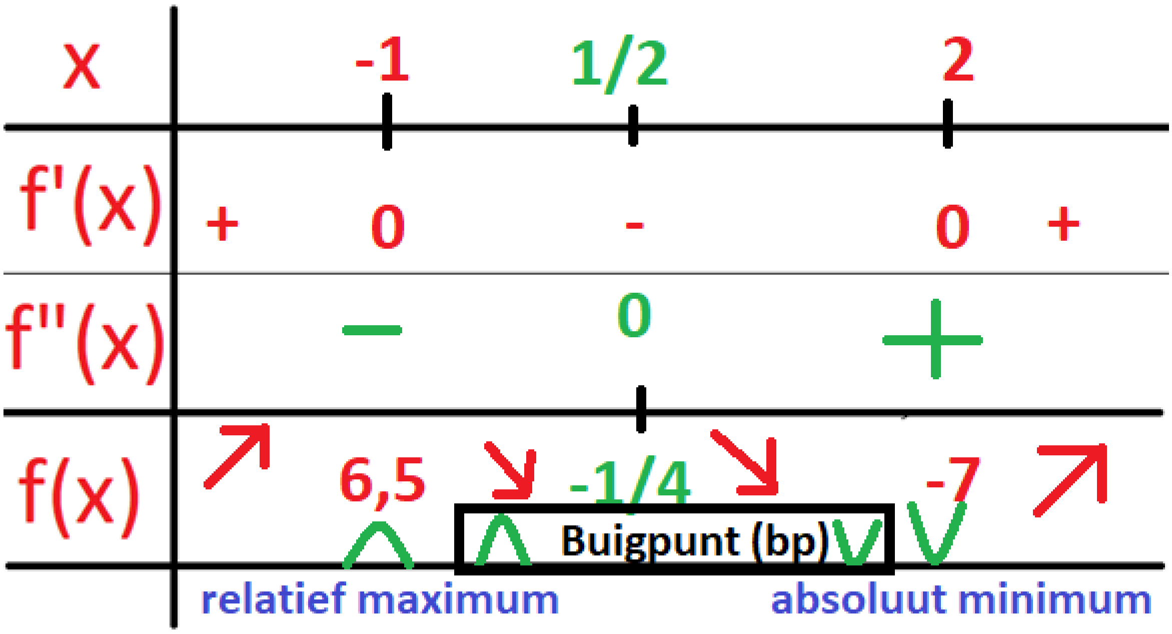
Hier opnieuw, je hoeft géén rekening te houden met de -1 en 2 aangezien die betrekking hebben tot de eerste afgeleide. Je vult dus een waarde kleiner- en eentje groter dan ½ in.

--> **<u>STAP 6: Bepaal het tekenverloop van je tweede afgeleide met behulp van testgetallen</u>**

| x | | -1 | 1/2 | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | + | 0 | - | 0 | + |
| f''(x) | | − | 0 | + | |
| f(x) | | 6,5 | -1/4 | -7 | |

--> **<u>STAP 7: Trek de conclusies uit je tabel rekening houdende met de meetkundige betekenissen met de eerste- en tweede afgeleide.</u>**

-->--> Let op: niet vergeten – de nulwaardes van je tweede afgeleide zijn de buigpunten in je grafiek.



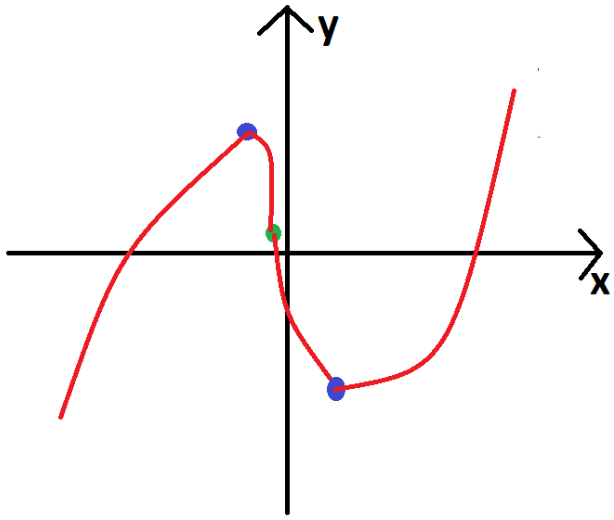

--> Hoe ben ik aan het buigpunt gekomen? Nulwaarde van je tweedegraad is altijd een buigpunt, dit i is waar de grafiek van concaaf naar convex verandert in dit geval.

--> Het is belangrijk dat je beseft dat de buigpunt je grafiek als het ware 'buigt', je grafiek gaat van concaaf naar convex in dit geval, het verandert van zin.

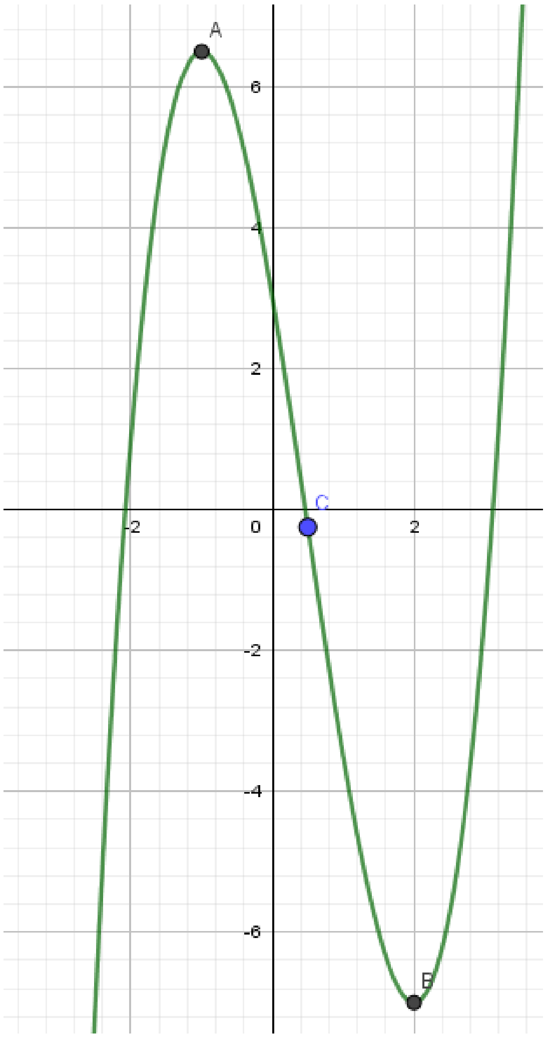
--> Hoe kom ik aan het relatief maximum? Je ziet dat je functie stijgt tot (-1;6,5), daarna daalt hij, daarna stijgt hij opnieuw maar tot in het oneindige deze keer, daarom is ons gevonden maximum gewoon relatief en niet absoluut.

--> Hoe kom ik aan het absoluut minimum? Zelfde redenering als hierboven maar de functie daalt niet meer tot het oneindige, (2,-7) is dus ons absoluut minimum!

--> **<u>STAP 8: Teken je grafiek</u>**




| x | | -1 | | 1/2 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | + | 0 | | - | | 0 | + |
| f''(x) | | − | | 0 | | + | |
| f(x) | ↗ | 6,5 ∩ | ↘ ∩ | -1/4 Buigpunt (bp) | ↘ ∪ | -7 ∪ | ↗ |
| | | relatief maximum | | | | absoluut minimum | |




We checken na met Geogebra (dit kan je niet doen op het examen voor alle duidelijkheid) en zien dat de vorm van onze grafiek mooi overeenkomt met de vorm die Geogebra aangeeft, we zijn dus juist!

*Voorbeeldoefening 4: Bepaal het verloop van $f(x) = 10x^3 - 7x^2 - 3$

--> **<u>STAP 1: functie al twee ordes afleiden</u>**

$f'(x) = 30x^2 - 14x$

$f''(x) \;=\; 60x - 14$

--> **<u>STAP 2: standaardtabel maken</u>**

| x | |
|---|---|
| f'(x) | |
| f''(x) | |
| f(x) | |

--> **<u>STAP 3: Nulwaarden eerste afgeleide + corresponderende y-waarden van gewone functie bepalen (om extremawaarden van de functie te bepalen)</u>**

<u>3.1: Nulwaarde 1ste afgeleide</u>

$f'(x) = 30x^2 - 14x \Leftrightarrow 30x^2 - 14x = 0$

--> Dit is een onvolledige vierkantsvergelijking, discriminant is hier niet nodig (mag wel)

$\Leftrightarrow x(30x - 14) = 0 \Leftrightarrow x = 0\ (I) \vee 30x - 14 = 0\ (II)$

$(II) 30x - 14 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{14}{30}$ ➔ Dus we hebben als nulwaarde: 0, 14/30

<u>3.2: Invullen in gewone functie</u>

(I) x = 0 --> $f(x) = 10x^3 - 7x^2 - 3 = 0 - 0 - 3 = \;-3$

(II) x = $\frac{14}{30}$ --> $f(x) = 10 . \left(\frac{14}{30}\right)^3 - 7 . \left(\frac{14}{30}\right)^2 - 3 = \;-3{,}51\ (afgerond)$

<u>3.3: Tabel aanvullen</u>

| x | 0 | | 14/30 |
|---|---|---|---|
| f'(x) | 0 | | 0 |
| f''(x) | | | |
| f(x) | -3 | | -3,51 |

--> **STAP 4: Bepaal de nulwaarde(n) van je tweede afgeleide functie, vul deze waarden dan in, in je oorspronkelijke functie om je buigpunten te weten te komen**

$f"(x) \;=\; 60x - 14 \Leftrightarrow 0 = 60x - 14 \Leftrightarrow 60x = 14 \Leftrightarrow x = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}$

--> $f(x) = -3{,}25 \; \left(\frac{7}{30}\,heb\ ik\ ingevuld\ in\ de\ functie, uitgerekend\ met\ CALC\right)$

| x | 0 | 7/30 | 14/30 |
|---|---|---|---|
| f'(x) | 0 | | 0 |
| f''(x) | | 0 | |
| f(x) | -3 | -3,25 | -3,51 |

--> **STAP 5: Bepaal het tekenverloop van je eerste afgeleide functie**

| x | | 0 | | 7/30 | | 14/30 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | + | 0 | - | - | - | 0 | + |
| f''(x) | | | | 0 | | | |
| f(x) | | -3 | | -3,25 | | -3,51 | |

--> Zoals je nu wel weet: testgetallen, géén rekening houden met tweede afgeleide functie

--> **Stap 6: Bepaal het tekenverloop van je tweede afgeleide functie**

| x | | 0 | | 7/30 | | 14/30 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | + | 0 | - | - | - | 0 | + |
| f''(x) | - | - | - | 0 | + | + | + |
| f(x) | | -3 | | -3,25 | | -3,51 | |

--> **Stap 7: Trek je conclusies nu uit je tabel, rekening houdende met de meetkundige betekenis van de eerste- en tweede afgeleide**

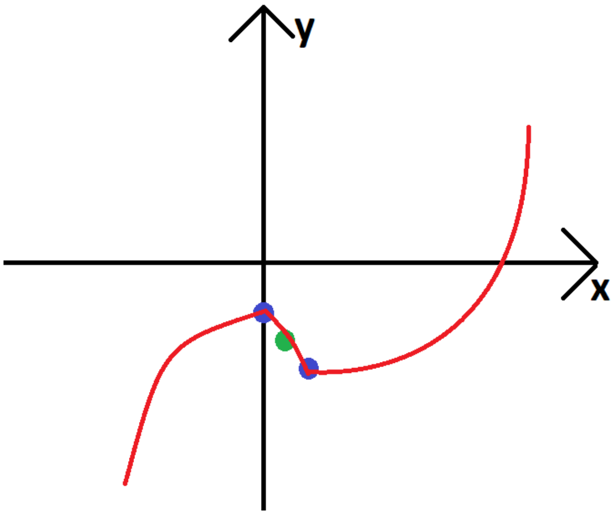
| x | | 0 | | 7/30 | | 14/30 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | + | 0 | - | - | - | 0 | + |
| f''(x) | - | - | - | 0 | + | + | + |
| f(x) | ↗ ∩ | -3 | ↘ ∩ | -3,25 | ↘ ∪ | -3,51 | ↗ ∪ |
| | | rel. M | | bp | | abs. m | |

--> rel. M = relatief maximum

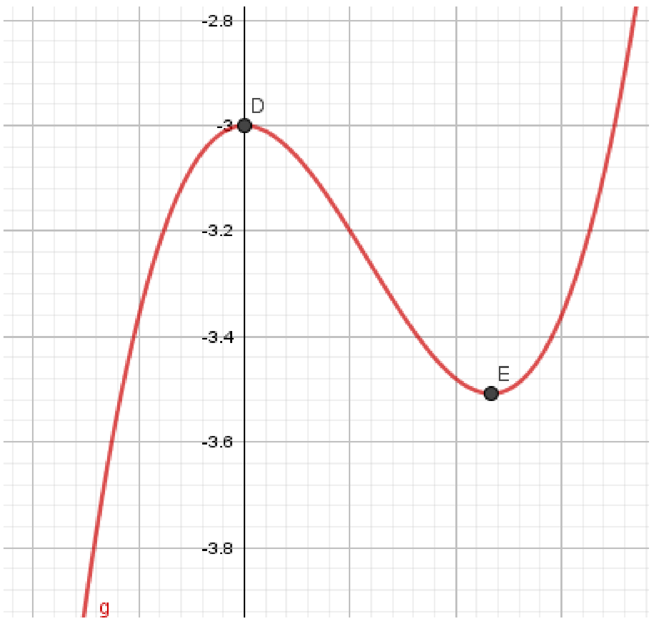
--> bp = buigpunt (nulwaarde van tweede afgeleide)

--> abs. m = absoluut minimum

--> **Stap 8: Schets je grafiek**




| x | | 0 | | 7/30 | | 14/30 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | + | 0 | - | - | - | 0 | + |
| f''(x) | - | - | - | 0 | + | + | + |
| f(x) | ↗ ∩ | -3 | ↘ ∩ | -3,25 | ↘ ∪ | -3,51 | ↗ ∪ |
| | | rel. M | | bp | | abs. m | |




We zien dat onze schets goed overeenkomt met wat Geogebra ons weergeeft (rekening houdende met dat ik de grafiek via Paint heb getekend)

## 2.1.3) Veeltermfuncties van de vierde- en hogere graad

*De stappenplan is nog steeds hetzelfde, echter zal je nu Horner moeten gebruiken om de nul-waarden van je eerste afgeleide te berekenen.

*Voorbeeldoefening 5: Bepaal het verloop van $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$

--> STAP 1: Functie 2x afleiden

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2$

$f''(x) = 12x^2 - 12$

--> STAP 2: Standaardtabel

| x | | |
|---|---|---|
| f'(x) | | |
| f''(x) | | |
| f(x) | | |

--> STAP 3: Nulwaarden f'(x) en bijbehorende f(x)-waarden

$f(x) \rightarrow 4x^3 - 6x + 2 = 0$

➔ STAP 1: Functie vervolledigen: $4x^3 + 0x^2 - 6x + 2 = 0$

➔ STAP 2: Deler zoeken --> Met de CALC-functie op je rekenmachine vindt je dat 1 al een deler is --> het is dus deelbaar door (x-1) aangezien 1-1 = 0

➔ STAP 3: Algoritme van Horner maken

| | 4 | -6 | 0 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 4 | -2 | -2 |
| | 4 | -2 | -2 | 0 |

➔ STAP 3: Stel je uitkomsten gelijk aan nul

--> We hebben nu: $(x-1)(4x^2-2x-2)=0$

⇔ $x-1=0\ (I)\ \lor\ 4x^2-2x-2=0\ (II)$

--> $(I)\ x=1$

--> $(II)\ D=b^2-4ac=36>0$

--> $x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=1$

--> $x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=-\frac{1}{2}$

➔ We hebben 3 nulwaarden (ééntje hebben we twee keer gevonden): 1, -1/2

1) $x=1\rightarrow f(x)=0\ (ga\ zelf\ na)$

2) $x=-\frac{1}{2}\rightarrow f(x)=\ -1{,}69\ (ga\ zelf\ na)$

| x | -0,5 | | 1 |
|---|---|---|---|
| f'(x) | 0 | | 0 |
| f''(x) | | | |
| f(x) | -1,69 | | -1/2 |

STAP 4: Bepaal de nulwaarden van $f''(x)$ en de bijbehorende y-waarden van de normale functie $f''(x)\ =\ 12x^2\ -12x$ ⇔ $12x^2-12x=0$ ⇔ $x(12x-12)=0$ ⇔ $x=0\ of\ x=1$

--> We hebben dus twee nulwaarden: +1 en -1, we zetten deze nu in het tekenverloop. Vergeet de bijbehorende y-waarde van de normale functie niet uit te rekenen om je buigpunten op te sporen

STAP 5: Maak het tekenverloop van je eerste- en tweede afgeleide

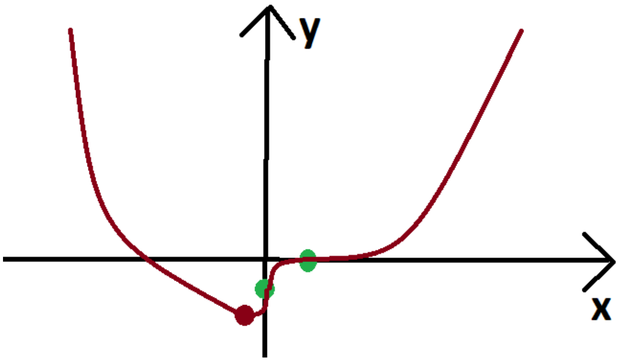
| x | | -0,5 | | 0 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | - | 0 | + | + | + | 0 | + |
| f''(x) | + | + | + | 0 | - | 0 | + |
| f(x) | | -1,69 | | -1 | | 0 | |

STAP 6: Trek je conclusies mbv het tekenverloop, rekening houdende met de meetkundige betekenis van de eerste- en tweede afgeleide.

| x | | -0,5 | | 0 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | - | 0 | + | + | + | 0 | + |
| f''(x) | + | + | + | 0 | - | 0 | + |
| f(x) | ↘ | -1,69 | ↗ | -1 | ↗ | 0 | ↗ |
| | ∪ | Abs. min | ∪ | buigpunt | ∩ | buigpunt | ∪ |

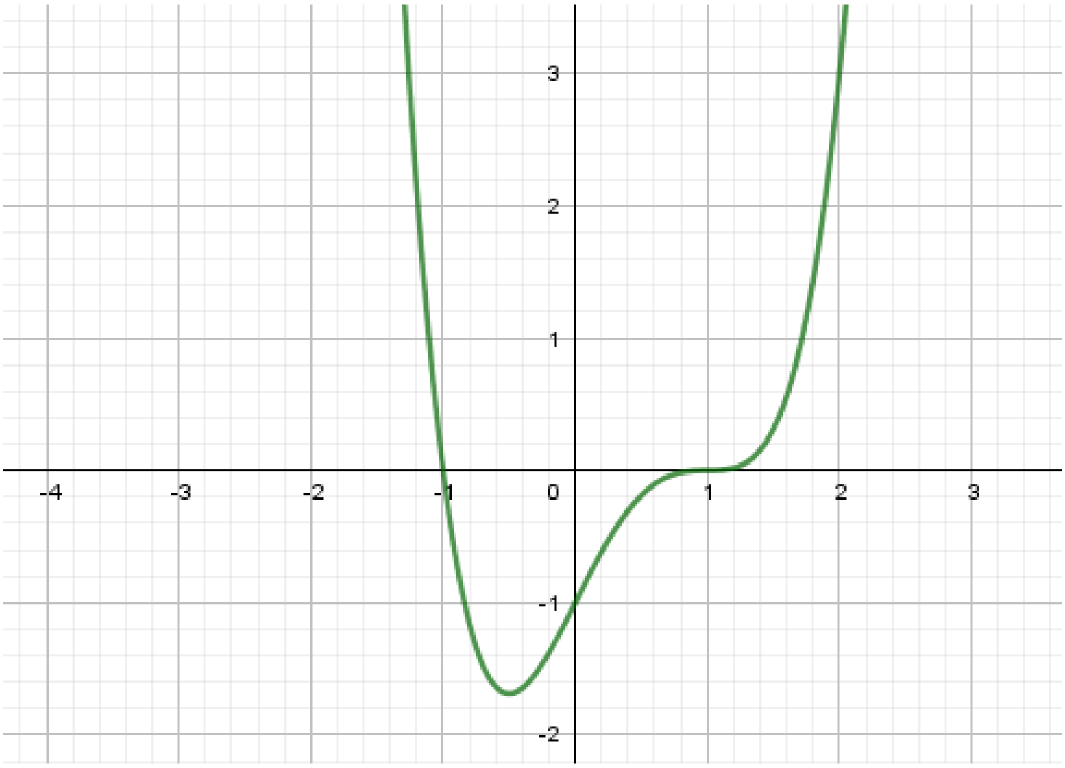
--> Absoluut minimum omdat we dalen en daarna stijgen, we dalen niet nog eens, dus absoluut.
--> 2 buigpunten omdat we twéé nulwaarden van de tweede afgeleide hebben, het tweede buigpunt is tevens ook een maximum.

STAP 7: Teken de grafiek




| x | | -0,5 | | 0 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | - | 0 | + | + | + | 0 | + |
| f''(x) | + | + | + | 0 | - | 0 | + |
| f(x) | ↘ | -1,69 | ↗ | -1 | ↗ | 0 | ↗ |
| | ∨ | Abs. min | ∨ | buigpunt | ∧ | buigpunt | ∨ |

--> Als we nachecken met Geogebra zien we dat we juist zitten:




*Zo kan je ook vijfdegraads- en andere hogeregraadsfuncties hun verloop bepalen, echter is het probleem vanaf een vijfdegraad dat we géén algebraïsche methoden kennen om de nulwaarden van de eerste afgeleide, een vierdegraadsfunctie, te bepalen. Die zal je dan grafisch moeten bepalen (als je een vijfdegraadsfunctie krijgt, wat onwaarschijnlijk is, dan krijg je er altijd een grafiek bij van de eerste afgeleide en moet je zo grafisch de nulwaarden en het tekenverloop bepalen --> nulwaarden lees je af op de x-as: logisch, want we zoeken wanneer is x = 0).

# 2.2) Verloop van rationale functies

*Bij rationale functies houden we ons aan dezelfde stappenplan, echter komt hier bij dat we de asymptoten van onze functie moeten bepalen om hem goed te kunnen tekenen.

## 2.2.1) Voorbeeldoefeningen

*Voorbeeldoefening 6: Geef het verloop van $f(x) = \frac{x-3}{x}$

*STAP 1: Leid je functie 2x af…

$f'(x) = \frac{1.x-(x-3).1}{x^2} = \frac{x-(x-3)}{x^2} = \frac{x-x+3}{x^2} = \frac{3}{x^2}$

$f''(x) = \frac{0.x^2-3.2x}{x^4} = \frac{-6x}{x^4} = -\frac{6}{x^3}$

*STAP 2: Bepaal de polen (= nulwaarden van je noemer) van de functie, want je kan namelijk niet delen door 0, wie deelt door nul, is een snul.

--> $x = 0$ --> Nul is een pool.

*STAP 3: Maak je tekenverloop al met de pool, een pool in je gewone functie is automatisch ook een pool in je afgeleide functies!

| x | 0 |
|---|---|
| f'(x) | \| |
| f''(x) | \| |
| f(x) | \| |

*STAP 4: Zoek de nulwaarden van je eerste- en tweede afgeleide.

--> Bij deze functies heb je géén nulwaarden aangezien in je teller en noemer géén x'en voorkomen.

*STAP 5: Maak het tekenverloop van je eerste- en tweedegraadsfunctie

| x | | 0 | |
|---|---|---|---|
| f'(x) | + | \| | + |
| f''(x) | + | \| | - |
| f(x) | | \| | |

--> Je doet dit door testgetallen in te vullen in je functie!

*STAP 6: Trek je besluiten uit het tekenverloop.

| x | | 0 | |
|---|---|---|---|
| f'(x) | + | \| | + |
| f''(x) | + | \| | - |
| f(x) | | \| | |

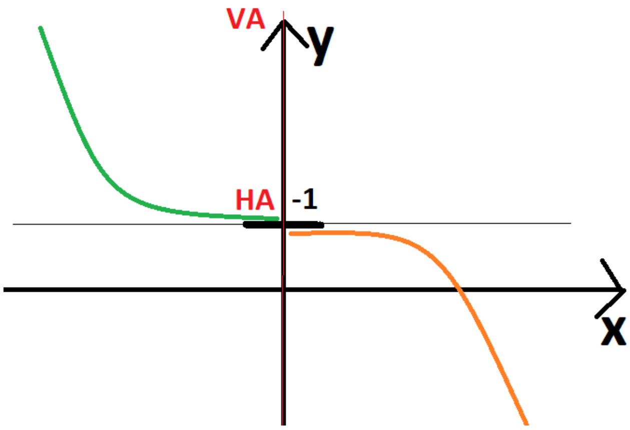
*STAP 7: Reken alle asymptoten uit

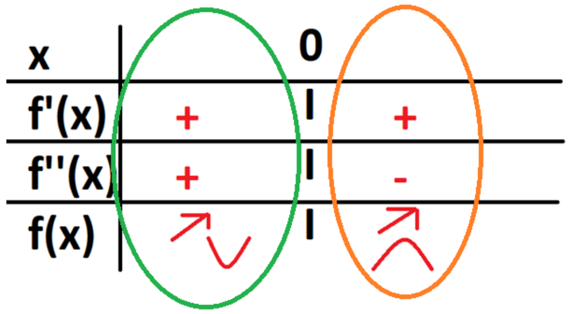
--> x = 0 hebben we al: verticale asymptoot = nulwaarde van de noemer

--> horizontale asymptoot? Graad teller = graad noemer --> ja!

--> Hoe uitrekenen? VEREENVOUDIGEN: y $= \frac{x+3}{x} = 1$ $(hoogste\ macht\ alleen\ bekijken)$

*STAP 8: Teken je grafiek




*Voorbeeldoefening 7: Geef het verloop van $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

*STAP 1: Leid je functies al 2x af

$$\rightarrow f'(x) = \frac{3x^2.(x^2-1)-x^3.2x}{(x^2-1)^2}$$
$$= \frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2}$$
$$= \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

**Je moet hier ook de productregel toepassen omdat je een haakjes én een macht hebt, je leid eerst alles buiten je haakjes af, daarna leid je alles in je haakjes apart af.**

$$\rightarrow f''(x) = \frac{4x^3-6x\,.(x^2-1)^2-(x^4-3x^2).2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4}$$
$$= (x^2-1)\frac{4x^3-6x\,.(x^2-1)^1-(x^4-3x^2).2\,.1\,.2x}{(x^2-1)^4}$$ [(x²-1) afzonderen!]
$$= \frac{4x^3-6x\,.(x^2-1)-(x^4-3x^2).2\ .2x}{(x^2-1)^3}$$ (rekenen met machten)
$$= \frac{4x^5-4x^3-6x^3+6x-(4x^5-12x^3)}{(x^2-1)^3}$$ (uitrekenen)
$$= \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$$

*STAP 2: Zoek de polen van je gewone functie, zet ze al in het tekenverloop.

$x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

| x | | -1 | | +1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | \| | | \| | |
| f''(x) | | \| | | \| | |
| f(x) | | \| | | \| | |

*STAP 3: Zoek de nulwaarden van je afgeleide functies

**<u>EERSTE AFGELEIDE</u>**

--> Herinner jezelf: nulwaarde van eerste afgeleide = maximum of minimum
nulwaarde van tweede afgeleide = buigpunt

--> Goh, <u>rationale vergelijkingen</u>, dat was een tijdje geleden, hoe loste je ze ookalweer op?

--> Noworries, daarvoor ben ik er! Je moet je vergelijking eerst in de standaardvorm zetten (die vorm heb je hier gelukkig al), dus je moet nu verdergaan van deze vorm.

--> Je stelt je noemer gelijk aan 0 en rekent de nulwaarden van je noemer uit

--> $f'(x) = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^4} \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 = 0$

--> Je ziet: ik kan $x^2$ afzonderen --> $x^2(x^2-3) = 0$

--> Dit vormt een ware uitspraat als $x^2 = 0 \quad of \quad x^2 - 3 = 0$

--> Dus: $x = 0 \; of \; x^2 = 3$ ➔ $x = \pm\sqrt{3}$

--> Onze teller heeft drie nulwaarden: $+\sqrt{3}, -\sqrt{3} \; en \; 0$

--> Als een nulwaarde ook een pool is (die we in stap 2 hebben uitgerekend), dan moet je hem schrappen (***wie deelt door nul is een dikke vette oerlelijke snul***, ik zou dit gewoon super-graag tegen sommige jaargenoten zeggen maar ben een te goed mens, sommige mensen zijn <u>veels</u> te dom voor een wiskunderichting, waarheid = waarheid, ja, ik was kwaad toen ik deze samenvatting maakte).

**GA ALSJEBLIEFT NIET DE NOEMER VAN JE AFGELEIDE FUNCTIE UITREKENEN ALS WE DE POLEN AL IN STAP 2 HEBBEN GEVONDEN EN JE WEET DAT DE POLEN VAN JE GEWONE FUNCTIE AUTOMATISCH DE POLEN VAN JE AFGELEIDE ZIJN!!!!!!!!!!!!!!!!!**

--> In stap 2 zagen we: x = -1 en x = 1 is een pool, dus al onze nulwaarden van hierboven gelden!

**<u>TWEEDE AFGELEIDE</u>**

$f''(x) = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$

➔ $2x^3 + 6x = 0$ --> Je <u>kan</u> dit oplossen met Horner, als je één van die domme mensen bent waar-over ik het daarjuist had doe je Horner, maar het gaat makkelijker.

$\Leftrightarrow x(2x^2+6) = 0$ --> Je ziet hier dat je x kan afzonderen, nu is het véél makkelijker

$\Leftrightarrow x = 0 \quad of \quad 2x^2 + 6 = 0$ ➔ $2x^2 = -6 \Leftrightarrow x^2 = -3$

--> We werken in de reële getallenverzameling, je kan nooit de negatieve vierkantswortel hierin nemen!

--> Dus we hebben als nulwaarde: x = 0, is dit ook een pool? Neen, onze polen waren $x = \pm 1$

--> Dus we hebben nu: EERSTE AFGELEIDE: $+\sqrt{3}, -\sqrt{3} \; en \; 0$
TWEEDE AFGELEIDE: $0$

*Stap 4: Zet deze nulwaarden in je tekenverloop

| x | | $-\sqrt{3}$ | | $-1$ | | $0$ | | $+1$ | | $\sqrt{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | 0 | | \| | | 0 | | \| | | 0 | |
| f''(x) | | | | \| | | 0 | | \| | | | |
| f(x) | | | | \| | | | | \| | | | |

*Stap 5: Reken de bijbehorende f(x)-waarden van je gewone functie al uit bij de nulwaarden van je eerste en tweede afgeleide (aangezien je je buigpunten/extrema moet hebben

| x | | $-\sqrt{3}$ | | $-1$ | | $0$ | | $+1$ | | $\sqrt{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | 0 | | \| | | 0 | | \| | | 0 | |
| f''(x) | | | | \| | | 0 | | \| | | | |
| f(x) | | -2,60 | | \| | | 0 | | \| | | 2,60 | |

*Stap 6: Maak het tekenverloop van je eerste- en tweede afgeleide

--> Let op: $\pm\sqrt{3}$ zijn géén nulwaarden van je tweede afgeleide, je hoeft bij het tekenverloop dus géén rekening houden met deze waarden

| x | | $-\sqrt{3}$ | | $-1$ | | $0$ | | $+1$ | | $\sqrt{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | + | 0 | - | \| | - | 0 | - | \| | - | 0 | + |
| f''(x) | - | - | - | \| | + | 0 | - | \| | + | | + |
| f(x) | | -2,60 | | \| | | 0 | | \| | | 2,60 | |

*Stap 7: Trek je besluiten uit het tekenverloop over stijgen/dalen en extrema

--> Herhaling meetkundige betekenissen:

1ste afgeleide: + = stijgen ⇔ - = dalen

2de afgeleide: + = convex (U-vormig) ⇔ - = concaaf (omgekeerde U)

| x | | $-\sqrt{3}$ | | -1 | | 0 | | +1 | | $\sqrt{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | + | 0 | - | \| | - | 0 | - | \| | - | 0 | + |
| f''(x) | - | - | - | \| | + | 0 | - | \| | + | | + |
| f(x) | | -2,60 | | \| | | 0 | | \| | | 2,60 | |
| Besluiten | ↗ ∩ | | ↘ ∩ | | ↘ ∪ | | ↘ ∩ | | ↘ ∪ | | ↗ ∪ |

--> Ik heb een extra vak besluiten gemaakt om de ordelijkheid te bewaren, kan je misschien ook doen op je examen. Dus ik heb hier ff de extrema en buigpunten uitgelaten, dit is énkel rekening gehouden met de tekens van de eerste- en tweede afgeleide.

| x | | $-\sqrt{3}$ | | -1 | | 0 | | +1 | | $\sqrt{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | + | 0 | - | \| | - | 0 | - | \| | - | 0 | + |
| f''(x) | - | - | - | \| | + | 0 | - | \| | + | | + |
| f(x) | | MAX -2,60 | | \| | | 0 BUIGPUNT | | \| | | 2,60 MIN | |
| Besluiten | ↗ ∩ | | ↘ ∩ | | ↘ ∪ | | ↘ ∩ | | ↘ ∪ | | ↗ ∪ |

--> MAX? Je stijgt naar dat punt en dan daal je, moet dus max zijn
--> BUIGPUNT? Nulwaarde van 2de afgeleide --> functie gaat van convex naar concaaf
--> MIN? Je daalt en stijgt terug, moet min zijn

*Stap 8: Reken alle asymptoten uit: $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

--> Verticale asymptoten (x = iets), al uitgerekend: $x = 1 \; en \; x = -1$

--> Horizontale asymptoten (y = iets): bestaat niet --> graad teller is groter dan noemer

--> Schuine asymptoot: JA! Bestaat! Graad teller is 1 graad hoger dan noemer!

--> **Ik reken schuine asymptoten uit met de limietdefinitie, aangezien je de euclidische deling volgend jaar bij moeilijkere functies NIET meer mag toepassen**

--> y = mx + q --> VERGELIJKING SCHUINE ASYMPTOOT

--> $m = \frac{teller}{x(noemer)} = \frac{x^3}{x(x^2-1)} = \frac{x^3}{x^3-x} = 1 \; (rekenen\ met\ limieten: vereenvoudigen)$

--> Eigenlijk staat er nog een $\lim\limits_{x \to \pm\infty}$ / voor de formule, ik schrijf ze niet (ik ben lui)

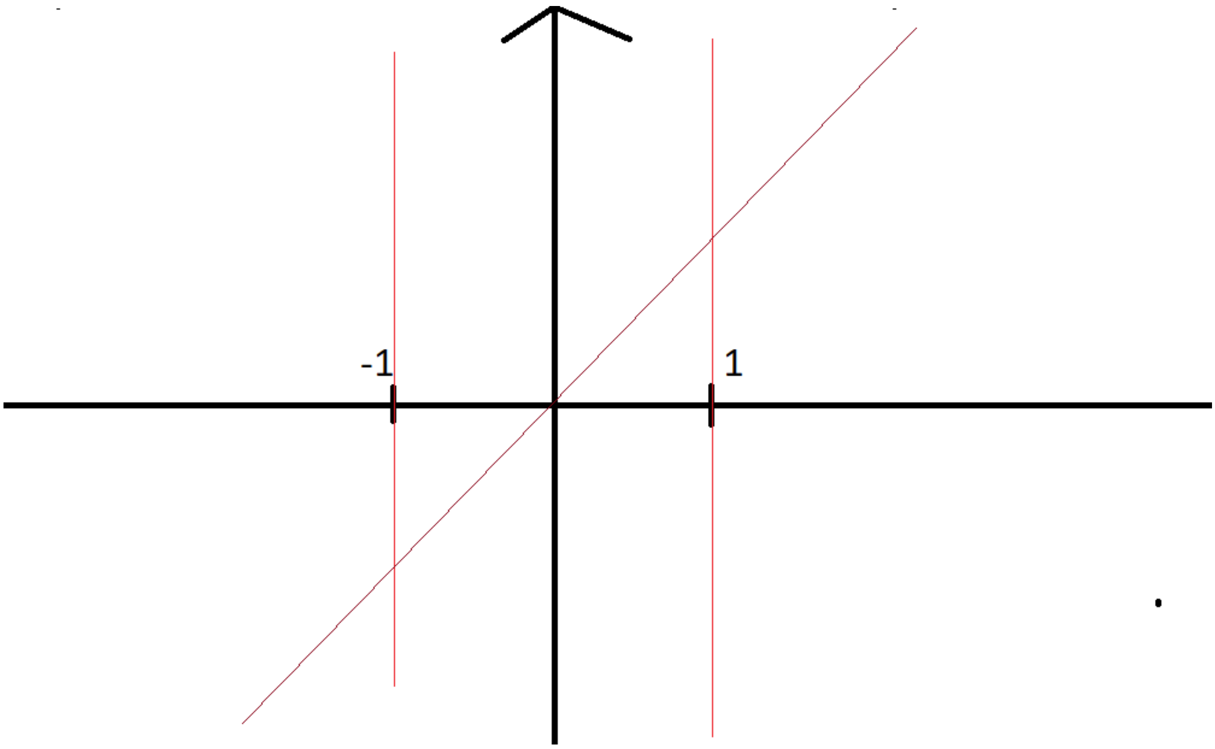
--> $q = f(x) - m(x) = \frac{x^3}{x^2-1} - x = \frac{x^3}{x^2-1} - \frac{x(x^2-1)}{x^2-1} = \frac{x^3}{x^2-1} - \frac{x^3-x}{x^2-1}$
$= \frac{x^3-(x^3-x)}{x^2-1} = \frac{x^3-x^3-x}{x^2-1} = \frac{-x}{x^2-1} = 0\ (rekenen\ met\ lim: graad\ T < N)$

--> y = mx + q = 1x + 0 ⇔ y = x

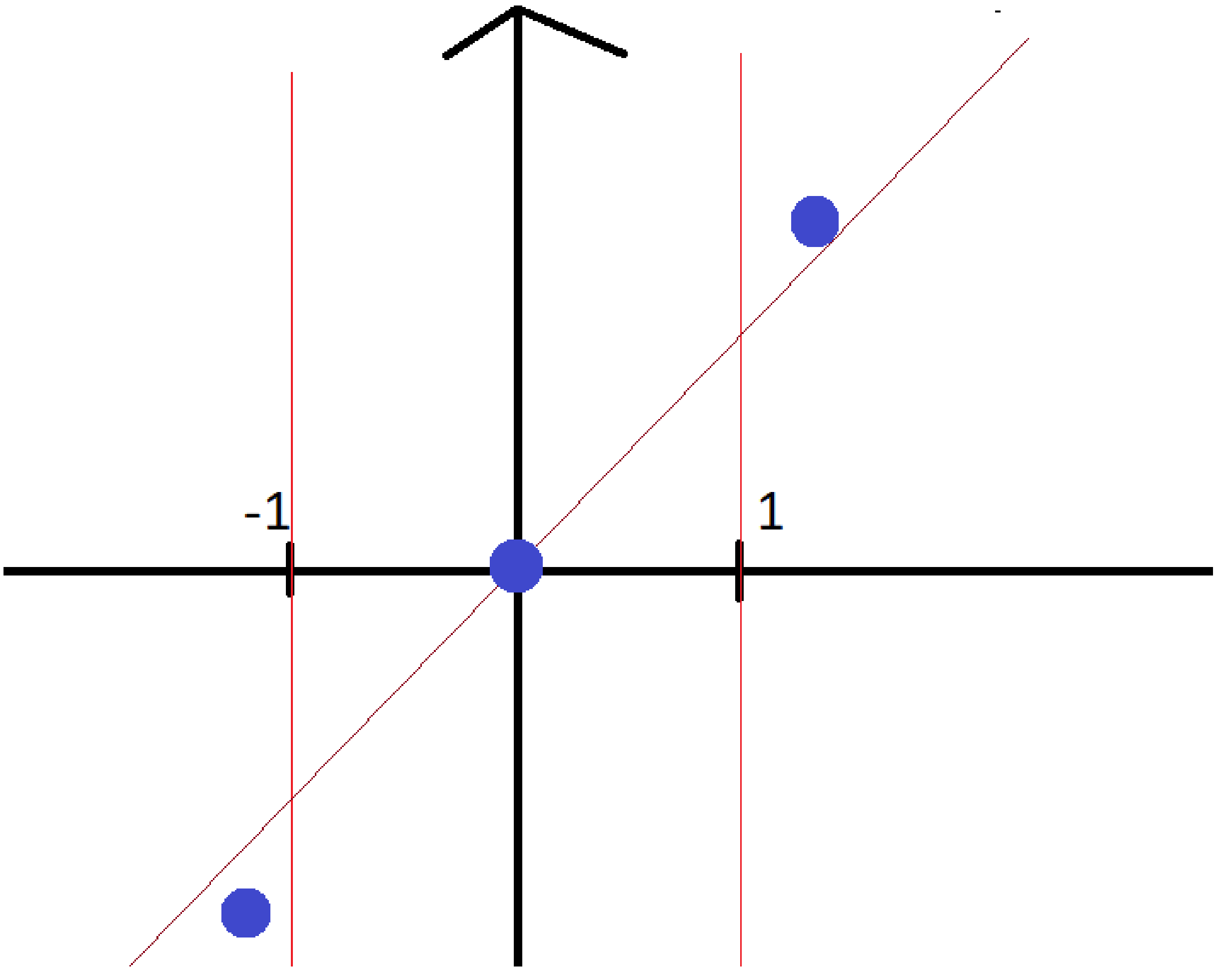
Dus, onze asymptoten zijn:
x = 1
x = -1
y = x

*Stap 9: Begin met je functie te tekenen

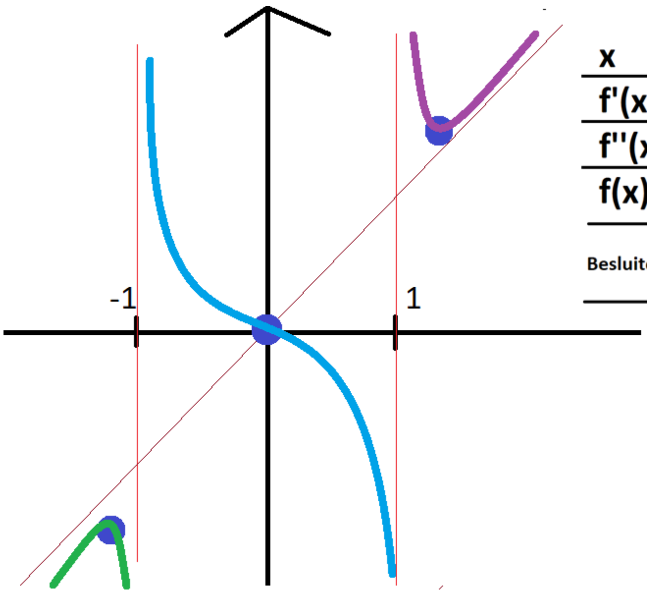
**9.1) Teken je asymptoten**

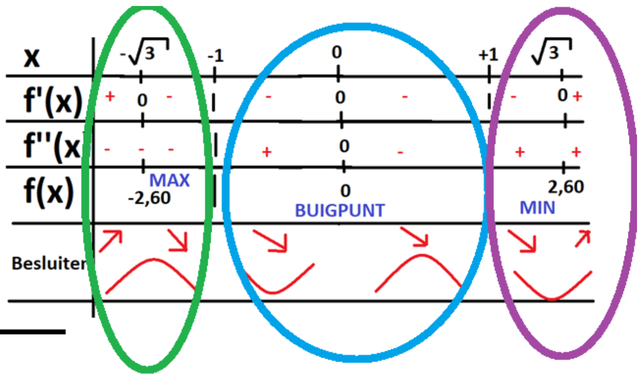



**9.2) Duid je extremawaarden (maxima/minima) en buigpunten aan!**




**9.3) Schets je functie adhv je tabel!**




--> Je moet dus rekening houden met je meetkundige betekenissen én je asymptoten!

Stap 10: De vraag die je nu hebt ga ik nu beantwoorden

--> Ma huh? y = x is de schuine asymptoot (juist), waarom raakt die functie die dan in het midden?

--> Een asymptoot betekent niet dat de functie die nooit mag maken, als de functie de asymptoot langs één kant nadert, is het al een asymptoot! Het mag dus raken, maar niet overal!

# 3) Extremavraagstukken

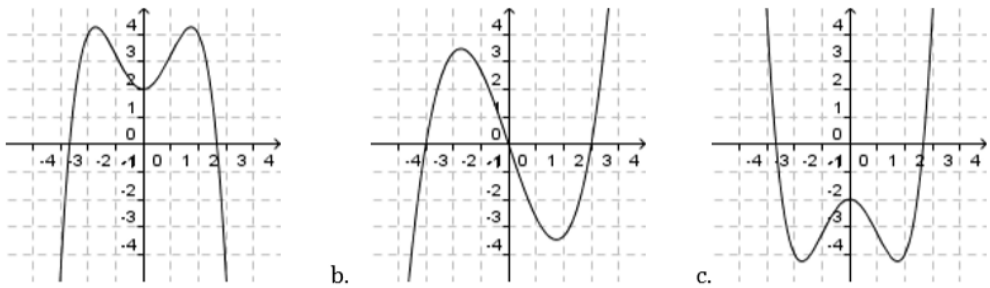
*Je moet extremavraagstukken in verband met verloop van functies kunnen oplossen.

## 3.1) Welk is de mogelijke grafiek van f?

10. (V) Voor een veeltermfunctie geven we het tekenverloop van $f'(x)$ en $f''(x)$:

| $x$ | | $-\sqrt{3}$ | | -1 | | 0 | | 1 | | $\sqrt{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | - | - | - | 0 | + | + | + | 0 | - |
| $f''(x)$ | − | − | − | 0 | + | + | + | 0 | − | − | − |

Welk van onderstaande grafieken is mogelijk de grafiek van $f$?



a. b. c.

*Hierbij moet je de meetkundige betekenissen van de eerste- en tweede afgeleide toepassen.
--> Je ziet dat de functie éérst stijgt: f’(x) > 0 --> C = KO
--> Daarna daalt hij (f’(x) < 0): a en b kunnen nog steeds
--> Daarna stijgt hij weeral: a en b kunnen nog steeds
--> Daarna daalt hij: b = KO --> b stijgt tot het oneindige, dus A = OK

*Grafiek A.
*Je kan ook beredeneren met de buigpunten (2de afgeleide), deze oefeningen zijn zeer makkelijk.

## 3.2) Extremumvraagstukken: functies bepalen

*Volgens Kevin is deze oefening méér Nederlands begrijpen dan pure wiskunde. Los geht’s
*Bepaal een veeltermfunctie van de derde graad, die een raaklijn met richtingscoëfficiënt -4 heeft voor x = 3, voor x = 5 een relatief extremum met waarde 0 bereikt en 0 als nulpunt heeft.
--> Dus: (1) $rico\ raaklijn = -4\ voor\ x = 3 \rightarrow f'(3) = -4$
(2) $relatief\ extremum = 0 \rightarrow f'(5) = 0 \rightarrow nulwaarde\ f'(x) = extrema!$
(3) $relatief\ extremum{:}\ f(5) = 0$
(4) $f(0) = 0$

--> Oplossing:
--> Algemene derdegraadsfunctie: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
--> Afleiden: $Dy = 3ax^2 + 2bx + c$
--> (1) $f'(3) = -4 \rightarrow -4 = 3a.3 + 2b3 + c \Leftrightarrow -4 = 27a + 6b + c$
--> (2) $f'(5) = 0 \rightarrow 0 = 3a.5^2 + 2\,.\,b\,.5 + 5 \Leftrightarrow 0 = 75a + 50b + c$
--> (3) $f(5) = 0 \rightarrow\ 125a + 25b + 5c = 0$
--> (4) $f(0) = 0 \rightarrow d = 0$

--> STELSEL: $\begin{cases} 27a + 6b + c = -4\ * \\ 75a + 50b + c = 0\ ** \\ 125a + 25b + 5c = 0\ *** \end{cases}$

$*Je\ hoort\ met\ dit\ stelsel\ a = \frac{1}{2}, b = -5\ en\ c = 12{,}5\ uit\ te\ komen$

--> $antwoord: f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 12{,}5x$

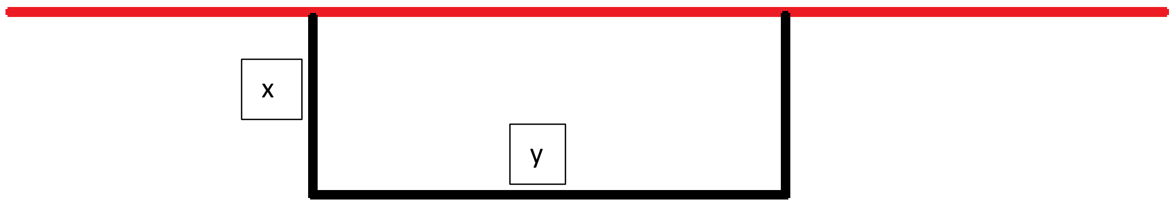
*Zo moet je elke extremumvraagstuk over functies bepalen oplossen.

# 3.3) De échte vraagstukken

## 3.3.1) Oefening 27: we gaan bouwen

*Een man bouwt in zijn tuin een rechthoekige kippenren waarvan één zijde tegen de muur ligt. Welke afmetingen moet hij voor die rechthoek nemen als je weet dat hij 10 meter lopende gaas heeft en een maximale oppervlakte wil bekomen?

--> 1: Tekening




--> Rood = muur, dat moeten we niet bebouwen!

--> 2: Functie opstellen

--> We weten dat hij een maximale oppervlakte wil → x . y = max

⬄ dus: $f(x) = 2x\ (2\ maal\ de\ x) + y\ (muur\ telt\ niet\ mee!)$

$f(x) = 2x + y$ ⬄ $10\ (hij\ heeft\ 10m\ gaas!) = 2x + y$

--> 10 = 2x + y ⬄ y = 10 – 2x

$x.y = max$ ⬄ $x\,.(10 - 2x) = \max \rightarrow 10x - 2x^2 = \max \rightarrow f'(x) = 10 - 4x$

➔ Om extrema te vinden moet je de nulwaarden van f’(x) zoeken

$0 = 10 - 4x$ ⬄ $4x = 10$ ⬄ $x = 2{,}5$

--> Dus; je zoekt het maximum, de nulwaarde van je afgeleide is 2,5. Je moet het schemaatje opstellen.

| x | | 2,5 | |
|---|---|---|---|
| f'(x) | + | 0 | - |
| f''(x) | ↗ | 12,5 | ↘ |

--> Je maakt het tekenverloop: functie stijgt eerst en daarna daalt = MAXIMUM
-->--> Voor x = 2,5 hebben we het maximum, als hij 2,5m neemt, dan heeft hij een maximale opp.!

## 3.3.2) Oefening 28: nog een vraagstuk

28. (B) Op een fruitbedrijf staan per hectare 60 appelbomen. Een boom draagt gemiddeld 500 appels. Onderzoek heeft uitgewezen dat, voor elke extra boom die men plant, dat gemiddelde daalt met 5. Hoeveel extra bomen moet men per hectare planten om een maximale opbrengst te verkrijgen?

--> Als je 60 bomen hebt, heb je 5 appels winst per boom.

Dus: $60\ bomen\ .\ 500\,\frac{appels}{boom} = winst$

--> Per boom (x) dat je bijplant, daalt de winst met 5 appels (5x)

--> Dus: $61\ bomen\ .\ 495\,\frac{appels}{boom} = winst\ 2$

$62\ bomen\ .\ 490\,\frac{appels}{boom} = winst\ 3$

...

$(60 + x)(500 - 5x) = algemene\ winst$

--> Werk distributief uit: $-5x^2 + 200x + 3000 = algemene\ winst$

--> Maximum/minimum = 1ste afgeleide, leid je winstfunctie nu af...

$f'(x) = -10x + 200$

--> Nu nulwaarde zoeken 1ste afgeleide: $x = 20$

➔ Tabel maken:

| $x$ | | 20 | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − |
| $f(x)$ | ↗ | 32000 | ↘ |
| | | max | |

Antwoord: Bij 80 bomen (60 + 20) is de winst maximaal.

## 3.3.3) Toepassing

37. (B) Een gewonde krijgt op de spoedopname via een injectie en bepaalde stootdosis van een geneesmiddel toegediend. De concentratie $C(t)$ in milligram per liter voldoet vrij goed aan het functievoorschrift:

$$C(t) = \frac{21t}{2t^2 + 3}$$

Hierin is $t$ de tijd in uren.

a. Toon aan dat na verloop van tijd de concentratie in het bloed naar nul nadert. Na hoeveel uur is de concentratie kleiner dan 0,5?

$$\lim_{t\to+\infty} C(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{21t}{2t^2+3} = \lim_{t\to+\infty} \frac{21t}{2t^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{10{,}5}{t} = 0$$

$$C(t) = 0{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{21t}{2t^2+3} = 0{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad 21t = t^2 + 1{,}5$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2 - 21t + 1{,}5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0{,}07 \quad \vee \quad t = 20{,}93$$

| $t$ | | 0,07 | | 20,93 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $t^2 - 21t + 1{,}5$ | + | 0 | - | 0 | + |

→ Om oefening a op te lossen moet je de limiet naar + oneindig of – oneindig uitrekenen, je ziet dan dat graad T < graad N en de functie dus 0 nadert, je hebt bewezen dat het 0 zal naderen. Daarna moet je de functie gelijkstellen aan 0,5 --> het functieverloop maken daarna en kijken wanneer het kleiner is dan 0,5.

b. Na hoeveel uur is de concentratie maximaal?

$$C'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-42t^2+63}{(2t^2+3)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -42t^2 + 63 = 0 \quad \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{1{,}5}$$

| $t$ | | $-\sqrt{1{,}5}$ | | $\sqrt{1{,}5}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $C'(t)$ | - | 0 | + | 0 | - |
| $C(t)$ | ↘ | -4,29 | ↗ | 4,29 | ↘ |
| | | min | | MAX | |

De concentratie is maximaal na 1,22h (of 1h13,2min of 1h13min12s)

c. Hoe groot is de snelheid waarmee het middel in het bloed wordt opgenomen vlak na de injectie?

$C'(0) = 7$ → 7 mg/l

--> Voor b check je je eerste afgeleide na: MAXIMAAL = EXTREMA
--> Voor c vul je de tijd in (0h) en reken je de eerste afgeleide uit
--> Als je de snelheid na 1h moest weten rekende je C'(1) uit enzoverder!

d. De patiënt moet extra geobserveerd worden als de concentratie vermindert aan een tempo van meer dan 0,5 mg/l. Hoe lang en van wanneer tot wanneer is dit het geval?

$$C'(t) = -0{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-42t^2+63}{(2t^2+3)^2} = -0{,}5$$

$$\Leftrightarrow \quad -42t^2 + 63 = -0{,}5(4t^4 + 12t^2 + 9)$$

$$\Leftrightarrow \quad -42t^2 + 63 = -2t^4 - 6t^2 - 4{,}5$$

$$\Leftrightarrow \quad 2t^4 - 36t^2 + 67{,}5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \pm 1{,}46 \quad \vee \quad t = \pm 3{,}98$$

We laten de negatieve nulwaarden weg want die zijn niet relevant (negatieve tijdstippen)

| $t$ | | 1,46 | | 3,98 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $C'(t)$ | + | 0 | - | 0 | + |

Tussen 1,46h (of 1h27,6min of 1h27min36s) en 3,98h (of 3h58,8min of 3h58min48s) vermindert de concentratie aan een tempo hoger dan 0,5 mg/l.

--> Voor d bereken je de afgeleide functie van -0,5 (concentratie vermindert met een tempo van meer dan 0,5 mg/l) en bereken je daar de nulwaarden van, daarna maak je het tekenverloop en je ziet tussen 1,46h en 3,98h is dat het geval.