Samenvatting wiskunde 3de graad – toets 1 ruimtemeetkunde (H1, H2, H3) – made by Abdellah

----

(Z) VOORWOORD

Dit is de samenvatting voor de eerste toets van ruimtemeetkunde, de samenvatting van ruimtemeetkunde wordt dus onderverdeeld a.d.h.v. wat we moeten kennen voor de toetsen. Voor het examen moet je alle samenvattingen kennen.

(Y) FOUTENPROCEDURE

Foutje? Dat kan. A.d.h.v. hoe groot de fout is kan je hem melden.
Fout van de 0de graad = elke niet-relevante fout = niet melden
Fout van de 1ste graad = elke relevante niet-zo-erge-fout = melden
→ Fouten van de 1ste graad worden gecommuniceerd via Smartschool en aangepast.
Fout van de 2de graad = elke relevante, zeer erge, fout = melden.
→ Fouten van de 2de graad worden direct aangepast en gecommuniceerd.

Fouten zijn jammer genoeg niet te vermijden maar ik, Abdellah, doe mijn best om alles zo juist mogelijk samen te vatten.

(X) INHOUDSTAFEL

Zie volgende pagina

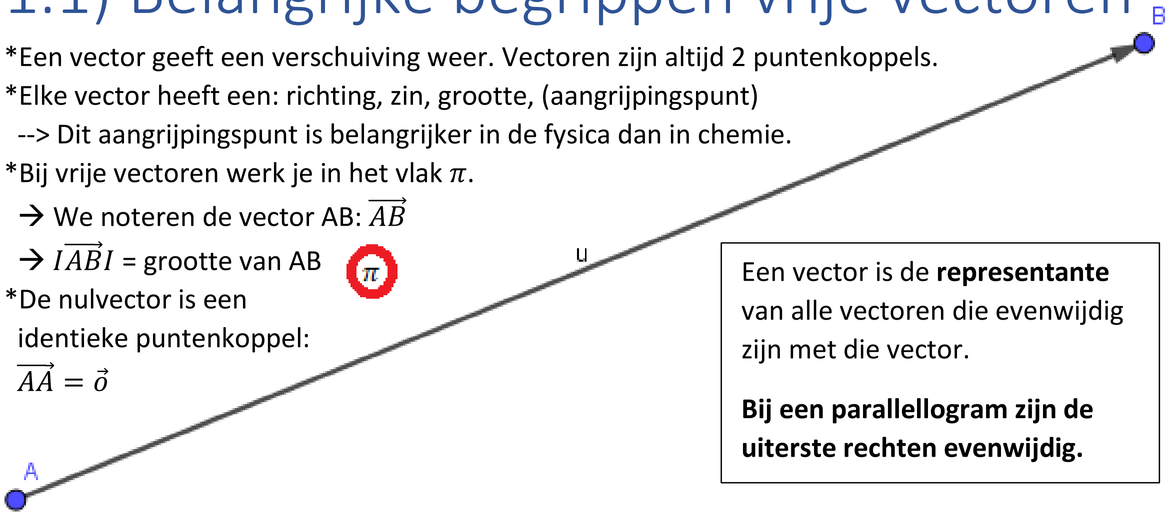
Inhoud

1) Vrije vectoren in de ruimte

*Vroeger hebben we vectoren bestudeerd in de vlakke meetkunde, nu bestuderen we ze in de ruimtemeetkunde. Alles blijft haast hetzelfde in dit hoofdstuk, dit is puur herhaling.

1.1) Belangrijke begrippen vrije vectoren

*Een vector geeft een verschuiving weer. Vectoren zijn altijd 2 puntenkoppels.
*Elke vector heeft een: richting, zin, grootte, (aangrijpingspunt)
--> Dit aangrijpingspunt is belangrijker in de fysica dan in chemie.
*Bij vrije vectoren werk je in het vlak π.
→ We noteren de vector AB: $\overrightarrow{AB}$
→ $I\overrightarrow{AB}I$ = grootte van AB
*De nulvector is een identieke puntenkoppel: $\overrightarrow{AA} = \vec{o}$



Een vector is de **representante** van alle vectoren die evenwijdig zijn met die vector.

Bij een parallellogram zijn de uiterste rechten evenwijdig.

*De tegengestelde vector van $\overrightarrow{AB}$ is $\overrightarrow{BA}$ zodat geldt: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.
*Vectoren tellen we visueel op met de parallellogramregel.

1.2) Bewerkingen met vrije vectoren

1.2.1) Betrekking van Charles-Möbius

*Voor alle vectoren geldt volgende betrekking: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Dit noemen we de betrekking van Charles-Möbius.
→ Je moet deze betrekking zowel van links naar rechts als van rechts naar links interpreteren!

1.2.2) Product van een reëel getal en vector

*Als je een reëel getal met een vector vermenigvuldigt krijg je terug een vector.
→ $k\,.\vec{u} = een\ vector$ ➔ Visueel moet je de vector u keren groter maken.

1.2.3) Verschil van twee vectoren

*Twee vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ kan je ook aftrekken: $\vec{v}$ - $\vec{w}$ =$\vec{v}$ +(- $\vec{w}$)

1.4) De reële vectorruimte $\mathbb{R}, Vect\ (V), +$

*Eigenschappen van de reële vectorruimte:
(1) $Vect, +\ is\ een\ commutatieve\ groep$
(2) $\mathbb{R}, Vect\ is\ gemengd\ associatief, commutatief, onderling\ distributief\ en\ er\ is\ een\ neutraal\ element.$
→ Je moet de eigenschappen niet meer vanbuiten kennen maar wel kunnen toepassen.

1.5) Voorbeeldoefeningen

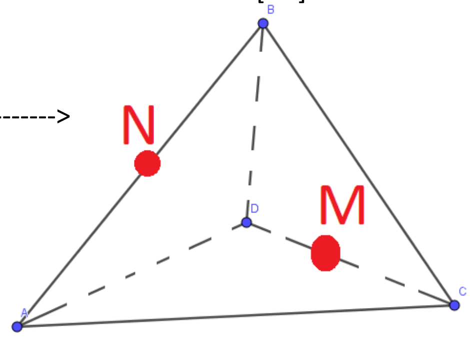
*Wiskunde moet je natuurlijk veel inoefenen.

1.5.1) Toepassingen op Charles-Möbius in de ruimte

*VOORBEELD 1: In viervlak ABCD met M het midden van [CD] en N het midden van [AB] stellen we:

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ en $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$

Gevraagd: druk $\overrightarrow{MN}$ uit in u, v en w.



➔ **Een visuele voorstelling helpt vaak**: --------------------------------->

(Opmerking: ik laat de pijltjes weg omdat dit anders teveel tijd kost om ze allemaal in te voegen)

➔ Oplossing:

a) MN = MC + CA + AN (Charles-Möbius)

= $-\frac{1}{2}CD$ + CA + AN (M is het midden van CD)

= $-\frac{1}{2}CD$ - AC + AN (het tegengestelde van een vector nemen = teken omdraaien)

= $-\frac{1}{2}CD$ – v + AN (AC = v --> staat gegeven in de opgave)

= $-\frac{1}{2}(CA + AD)$ – v + AN (Charles-Möbius)

= $-\frac{1}{2}(-v + w)$ – v + AN (v = AC, dus is CA = -v en w = AD)

= $-\frac{1}{2}(-v + w)$ – v + $\frac{1}{2}$ AB (N is het midden van AB --> AN is dus de helft van AB)

= $-\frac{1}{2}(-v + w)$ – v + $\frac{1}{2}$ u (AB = u --> gegeven)

= $\frac{1}{2}v - \frac{1}{2}w$ – v + $\frac{1}{2}$ u (rekenen in Vect, haakjes uitwerken)

= $-\frac{1}{2}v - \frac{1}{2}w + \frac{1}{2}u$ (rekenen in Vect, aftrekking uitvoeren)

➔ Proficiat! Dit was je oefening!

→ Wat is nu de algemene werkwijze bij oefeningen van hoofdstuk 1?

(1) Zoek zo veel mogelijk betrekkingen van Charles-Möbius die je omgekeerd kan uitvoeren.

(2) Hou altijd de gegevens in gaten, je moet naar de gegevens toewerken!

(3) Gebruik de rekenregels om alles te vereenvoudigen

(4) Geef niet te snel op, je kan het!

1.5.2) Iets bewijzen

*VOORBEELD 2: Bewijs voor A, B, C, D ∈ S: AB + CD = AD + CB (met pijlen erop natuurlijk)

➔ Je kan dingen op 4 manieren bewijzen: (1) Je start vanaf het rechterlid en werkt uit tot linkerlid

(2) Je start vanaf het linkerlid

(3) Je behandelt het als vergelijking en werkt beide leden dus tegelijk uit.

(4) Je werkt het rechterlid uit tot je niet kan, het linkerlid tot je niet meer kan. Als RL = LL dan is het bewezen!

Credits to meneer Wanten die ons dit vertelde tijdens goniometrie. Dit is eig. wel handig, hou dit in je achterhoofd.

→ Ik verkies methode 3 het liefst, we gebruiken methode 3:

(1) AB + CD = AD + CB ⇔ CD – CB = AD – AB (Vergelijking oplossen)

⇔ -DC + CB = -DA + AB (CD = -DC, AD = -DA)

⇔ -DB = -DB (Charles-Möbius)

➔ LL = RL --> je hebt het bewezen!

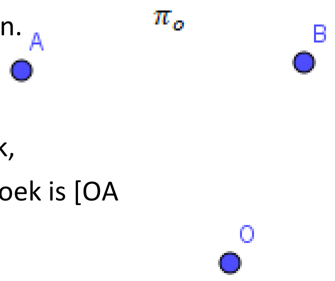
2) De gepunte ruimte

2.1) Belangrijke begrippen puntvectoren

*We hebben vorig jaar de gepunte ruimte ook al leren kennen. Dit jaar herhalen we dit.

→ Als we in een ruimte een oorsprong O (= bevoorrecht punt) kiezen, dan spreken we van de gepunte ruimte in het vlak π_o (de o staat voor de oorsprong).

➔ Elke vector begint vanaf de oorsprong, dat betekent dat elke vector in de gepunte ruimte dezelfde begin heeft. Daarom teken we enkel de punt aan het einde. We spreken nu van **puntvectoren**. In de afbeelding hiernaast zijn $\vec{A}$ en $\vec{B}$ puntvectoren.



*Evenwijdige puntvectoren zijn collineair met $\vec{O}$.

--> Collineair betekent: ligt op dezelfde rechte als

*De hoek tussen twee puntvectoren noemen we een geörienteerde hoek, we noteren de geörienteerde hoek als: $(\vec{A}, \vec{B})$, de eerste been in deze hoek is [OA en de tweede been is [OB.

→ Een geörienteerde hoek kan wijzersin of tegenwijzersin zijn.

*Puntvectoren tellen we visueel op met de parallellogramregel.

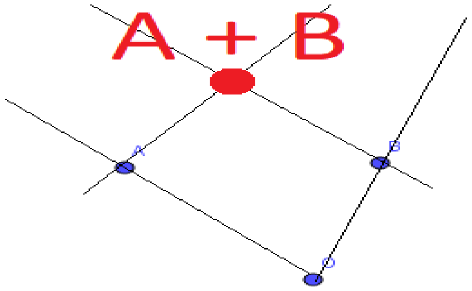
2.2) Bewerkingen met puntvectoren

*De bewerkingen blijven hetzelfde als bij vrije vectoren.

2.2.1) Optelling en aftrekking van twee puntvectoren

*Twee puntvectoren kan je optellen: $\vec{A} + \vec{B}$, visueel doe je dit met de parallelogramregel.

→ Neem bovenstaande puntvectoren in puntje 2.1, we gaan ze optellen met de parallellogramregel



➔ Als je een vector met de nulvector optelt krijg je terug dezelfde vector.
(ja logisch, een getal + 0 is ook dazelfde getal)

➔ De aftrekking kan je ook uitvoeren in de gepunte ruimte: $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

2.2.2) Product van een vector en een reëel getal

*Dit is hetzelfde als bij vrije vectoren, je kan de uitwendige vermenigvuldiging uitvoeren:
k . $\vec{A}$ = een vector, visueel moet je de puntvector $\vec{A}$, k keer verder tekenen (let op: géén lijn!)

2.2.3) Identificatie van vrije- en puntvectoren

*<u>*Elke vrije vector $\overrightarrow{AB}$ kan je schrijven als puntvectoren $\vec{B}$ - $\vec{A}$:* ***$\overrightarrow{AB}$ = $\vec{B}$ - $\vec{A}$*** *--> belangrijke eigenschap!*</u>

2.3) Reële vectorruimte, deelruimte, basis

2.3.1) Reële vectorruimte van puntvectoren

*Er is een onderlinge bijectie tussen vrije vectoren en puntvectoren, dit betekent dat er een isomorfisme is en voor de puntvectoren alle eigenschappen van de vectorruimte dus ook gelden!

2.3.2) Deelruimten en basis

*Puntvectoren kunnen een basis vormen als ze niet samenvallen met de oorsprong en niet op eenzelfde rechte gelegen zijn.

2.4) Voorbeeldoefeningen

2.4.1) Puntvectoren en ruimtefiguren (oef 1 p. 12)

*VOORBEELD 1: Vier punten A, B, C, D ∈ S_0 vormen een parallellogram. De oorsprong ligt niet in het vlak van het parallellogram. Druk $\vec{C}$ uit in $\vec{A}$, $\vec{B}$ en $\vec{D}$.

➔ **Een visuele voorstelling helpt vaak**

→ Ik laat weeral de pijltjes weg omdat het anders teveel tijd kost.

➔ Oplossing:

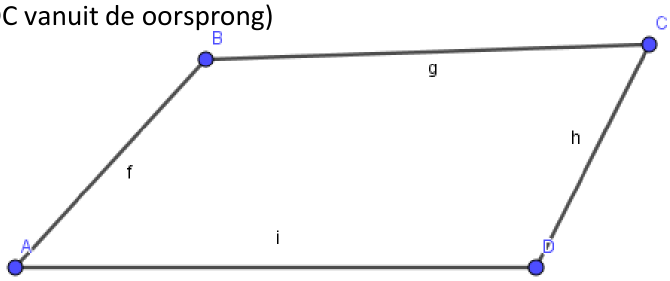
C = OC (Je kan C schrijven als de vector OC vanuit de oorsprong)

==> OC = OA + AC (Charles-Möbius)

= OA + AB + BC (Charles-Möbius)

= OA + AB + AD

(eigenschap van parallellogram, tegenoverstaande zijden zijn // met elkaar, we mogen ze dus vervangen)



= A – O + B – A + D – A (identificatie van vrije- en puntvectoren)

= A + B – A + D – A (de oorsprong = 0 = mag je weglaten)

= -A + B + D (rekenen in de gepunte ruimte)

= Proficiat! Je oefening is gedaan!

→ Algemene werkwijze: (1) Zoek zoveel mogelijk betrekkingen van Charles-M.

(2) Vergeet niet: puntvector A kan je schrijven als vrije vector OA met O = oorsprong!

(3) Pas de eigenschappen van de parallellogram toe.

(4) Pas de identificatie toe!

(5) Geef niet te snel op!

2.4.2) Dingen bewijzen met puntvectoren (oef. 2)

*Soms ga je iets moeten bewijzen, dit kan zeer moeilijk zijn maar gelukkig heeft Abdellah een zeer handige shortcut gevonden die het makkelijk maakt.

*VOORBEELD 2: Bewijs: CA + CD – 4BA + 2BC = BD + 3AB (ik laat opnieuw de pijltjes weg)

--> We hebben de 4 mogelijkheden om iets te bewijzen in hoofdstuk 1 gezien, bij puntvectoren is het preferabel om te bewijzen door het te behandelen als een vergelijking.

➔ Oplossing: CA + CD – 4BA + 2BC = BD + 3AB

⇔ CA + CD – 4BA + 2BC – BD - 3AB = 0 (stap 1: RL gelijk stellen aan nulvector o)

⇔ A – C + D – C – 4(A – B) + 2(C – B) – (D – B) - 3(B – A) = o

(stap 2: overal de identificatie uitvoeren)

⇔ A – C + D – C – 4A + 4B + 2C – 2B – D + B - 3B + 3A = o

(stap 3: haakjes wegwerken)

⇔ A – 4A + 3A + B – 3B – 2B + 4B + 2C – C – C + D – D = o

(stap 4: ordenen)

⇔ 0A + 0B + 0C + 0D = o (stap 5: Uitrekenen)

⇔ o = o (LL = RL --> Het is bewezen!)

→ Met de identificatie en eventueel gelijkstellen aan o zal je veel kunnen bewijzen! Hou dit stappenplan dus altijd in je achterhoofd.

2.4.3) Puntvectoren en basissen (oef. 3, 4)

*VOORBEELD 3 : We gaan uit van A, B, C en nemen:

$$D = \frac{2}{3}A, E = A + 2C, F = A + B + C$$

→ Druk DE, EF en FD uit in A, B, C.

➔ Een van deze vectoren is gelijk aan CB, welke?

➔ Oplossing: (I) DE = E – D (identificatie)

= A + 2C – 2/3 A (gegeven)

= 1/3 A + 2C (oefening is opgelost!)

(II) EF = F – E (identificatie)

= A + B + C – A – 2C (gegeven)

= B – C (uitwerken)

= CB (identificatie omgekeerd uitgevoerd)

(III) doe ik niet meer voor, je weet nu wel hoe dit soort oefeningen gaat.

2.4.4) Puntvectoren en relaties (oef. 7)

*VOORBEELD 4: We nemen A, B vast. We beschouwen de relatie t die elke P afbeeldt op een plaats-vector zodat PP’ = 2AP + 3BP

→ Gevraagd: a) Welke puntvector wordt door t op de oorsprong afgebeeld?

b) Welke puntvector wordt door t op -2A + B afgebeeld?

→ Oplossing: (I) We werken de vergelijking uit en zonderen P’ af. Omdat P wordt afgebeeld op P’!

PP’ = 2AP + 3B ⇔ P’ – P = 2(P – A) + 3BP (identificatie)

⇔ P’ = 2P – 2A + 3(P – B) + P (identificatie)

⇔ P’ = 2P – 2A + 3P – 3B + P (uitrekenen)

⇔ P’ = 6P – 3B – 2A (uitrekenen

(II) Nu lossen we opdracht A op.

→ We vervangen P’ door o (de nulvector) om te kijken op wat P wordt afgebeeld.

➔ P’ = 6P – 3B – 2A

➔ o = 6P – 3B – 2A

⇔ -6P = -3B – 2A

⇔ P = $\frac{-3B-2A}{-6}$ ➔ Oefening a is opgelost!

(III) Voor opdracht B moet je i.p.v. P’ te vervangen door de nulvector het vervangen door -2A + B en dan naar P afzonderen, dit kan je nu wel zelf.

3) Vectoriële vergelijkingen in de ruimte

*Je moet vectoriële vergelijkingen van rechten en vlakken kunnen opstellen, dit leren we nu.

3.1) Vectoriële vergelijkingen

3.1.1) Vectoriële vergelijkingen van rechten

3.1.1.1) Vectoriële vergelijking van een rechte door de oorsprong

*De vergelijking van een rechte m door $\vec{O}$ en puntvector $\overrightarrow{P_1}$:

$$\vec{P} = k\,.\overrightarrow{P_1}$$

Bijvoorbeeld: stel de vergelijking op van de rechte door de puntvector OB…

$\vec{P} = k\,.\vec{B}$

*Merk de analogie met de eerstegraadsfunctie y = ax.

3.1.1.2) Vectoriële vergelijking van een rechte door puntvector $\overrightarrow{P_1}$ en richtingsvector $\vec{S}$

*De vergelijking van een rechte door puntvector $\overrightarrow{P_1}$ en richtingsvector $\vec{S}$:

$$\vec{P} = \overrightarrow{P_1} + k\,.\vec{S}$$

Bv.: stel de vergelijking op van de rechte door A // BC.

$\vec{P} = \vec{A} + k\,.(\vec{C} - \vec{B})$

*Merk de analogie met de eerstegraadsfunctie: y = ax + b (gaat ook niet door de oorsprong)

3.1.1.3) Vectoriële vergelijking van een rechte door puntvectoren $\overrightarrow{P_1}$ en $\overrightarrow{P_2}$

*De vergelijking van een rechte door puntvectoren $\overrightarrow{P_1}$ en $\overrightarrow{P_2}$ is:

$$\vec{P} = (1-k)\overrightarrow{P_1} + k\,.\overrightarrow{P_2}$$

→ Bijvoorbeeld: Stel de vergelijking op van de rechte $\overline{AB}$.

➔ $\vec{P} = (1-k)\vec{A} + k\,.\vec{B}$

3.1.1.4) Hoe weet ik nu welke vectoriële vergelijking ik moet gebruiken?

*Als je een rechte hebt gegeven die door de oorsprong gaat, dus een rechte met O erin, gebruik je de éérste vergelijking. Bv. rechte OB, rechte A die door de oorsprong gaat …

*Als je een rechte hebt gegeven die door de oorsprong gaat en evenwijdig is met een andere rechte, dan gebruik je de 2de vergelijking: bv. rechte door A die evenwijdig is met BC. Degene die alleen staat is dan je P1.

*Als je énkel een rechte hebt gegeven, gebruik je de laatste vergelijking.

3.1.2) Vectoriële vergelijkingen van vlakken

3.1.2.1) Vectoriële vergelijking van het vlak met één puntvector en één paar richtingsvectoren gegeven.

*Als je één puntvector en twéé richtingsvectoren hebt gegeven dan is de vergelijking:

$$\vec{P} = \overrightarrow{P_1} + k\,.\vec{R} + m\,.\vec{S}$$

*Bijvoorbeeld: Stel de vergelijking van het vlak door A en evenwijdig met OBC op:
$\vec{P} = \vec{A} + k\,.\vec{B} + m\,.\vec{C}$ ➔ Je A staat als P_1, als je geen P_1 gegeven hebt is je P_1 de oorsprong (zie volgend puntje) dan mag je het gewoon weglaten.

3.1.2.2) Vectoriële vergelijking van het vlak met één paar richtingsvectoren gegeven

*Als je géén puntvector gegeven hebt, dan luidt de vergelijking als volgt:

$$\vec{P} = k\,.\vec{R} + m\,.\vec{S}$$

*Bijvoorbeeld: Stel de vergelijking van het vlak OHA (#Islam) op.
$\vec{P} = k\,.\vec{H} + m\,.\vec{A}$ ➔ De volgorde van H en A maakt niet uit, je mag ook zeggen $\vec{P} = k\,.\vec{A} + m\,.\vec{H}$

3.1.2.3) Vectoriële vergelijking van het vlak als 3 puntvectoren zijn gegeven

$$\vec{P} = (1 - k - m).\overrightarrow{P_1} + k.\overrightarrow{P_2} + m\,.\overrightarrow{P_3}$$

*Bijvoorbeeld: Stel de vergelijking op van het vlak BAF (#Ahmed) op.
$\vec{P} = (1 - k - m).\vec{B} + k.\vec{A} + m\,.\vec{F}$ --> Wie de grap niet begrijpt hoort niet in het 5dejaar te zitten.

3.1.2.4) Hoe weet ik nu welke vectoriële vergelijking ik moet gebruiken?

*Als je een puntvector hebt die evenwijdig met een ander vlak met oorsprong, dan gebruik je de eerste. --> Bv.: vergelijking van vlak door C evenwijdig met OHA.
*Als je énkel een vlak met oorsprong gegeven hebt, gebruik je de tweede vergelijking.
--> Bv.: vergelijking van vlak OPA.
*Als je een vlak zonder oorsprong gegeven hebt (drie puntvectoren), dan gebruik je de laatste:
--> Bv.: vergelijking van vlak BEF (#Ahmed)

3.1.3) Wtf moeten we doen met die k en m?

*Je ziet in de vectoriële vergelijking van rechten de k steeds terugkomen, in de vectoriële vergelijking van vlakken komt daar een m bij. In oefeningen vragen ze meestal 'geef 2 andere **richtingsvectoren** (**in het vervolg noem ik richtingsvector in de samenvatting river**)', dan moet je de k- en m-waarden veranderen. Bv.: geef de vectoriële vergelijking van het vlak BEF (#Ahmed) en 2 andere rivers.

→ $\vec{P} = (1 - k - m).\vec{B} + k.\vec{E} + m\,.\vec{F}$ ➔ Voor de rivers pakken we 2 random waarden 2 keer.

→ river 1: k = 2 en m = 3 ➔ $\vec{P} = (1 - 2 - 3).\vec{B} + 2.\vec{E} + 3\,.\vec{F} = -4\vec{B} + 2.\vec{E} + 3\,.\vec{F}$

→ river 2: k = 0 en m = 1 ➔ $\vec{P} = 0\,.\vec{B} + 0.\vec{E} + 1\,.\vec{F} = \vec{F}$

→ Dat is het voor de k's en m's, die zijn er om je extra rivers te zoeken!

3.1.4) Overzicht: vectoriële vergelijkingen

RECHTE OF VLAK?	VERGELIJKING	WANNEER GEBRUIKEN?
RECHTE	$\vec{P} = k\,.\vec{P_1}$	Als je énkel een rechte met oorsprong hebt gegeven
RECHTE	$\vec{P} = \vec{P_1} + k\,.\vec{S}$	Als je een rechte hebt gegeven die evenwijdig is met een puntvector P_1, van de rechte moet je de river zoeken (zie 3.2) en invullen op de plaats van S.
RECHTE	$\vec{P} = (1-k)\vec{P_1} + k\,.\vec{P_2}$	Als je énkel een rechte hebt gegeven, zonder oorsprong noch evenwijdigheid.
VLAK	$\vec{P} = \vec{P_1} + k\,.\vec{R} + m\,.\vec{S}$	Als je één punt hebt gegeven en een vlak mét oorsprong!
VLAK	$\vec{P} = k\,.\vec{R} + m\,.\vec{S}$	Als je énkel een vlak mét oorsprong hebt gegeven!
VLAK	$\vec{P} = (1-k-m).\vec{P_1} + k.\vec{P_2} + m\,.\vec{P_3}$	Als je énkel een vlak zonder oorsprong hebt gegeven!

3.2) Rivers zoeken van rechten en vlakken

*Herinnering: ik kort richtingsvector af met river.

*Een richtingsvector is een vector die de richting aangeeft van een rec

3.2.1) River van een rechte

*Een river van een rechte AB vind je door: B – A

→ De river van de rechte OH bijvoorbeeld is dus: H – O

3.2.2) River van een vlak

*Een river van een vlak is altijd bepaalt door 3 punten, deze vind je voor het vlak ABC voor:

➔ B – A en C – A (de volgorde van getallen is niet van belang)

→ De river van een vlak wordt bepaald door 2 snijdende rechten.

3.3) Middelpunt en zwaartepunten

3.3.1) Puntvector van het midden van een lijnstuk

$\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B})$

➔ Het midden van lijnstuk CD is dus: $\frac{1}{2}(\vec{C} + \vec{D})$

3.3.2) Zwaartepunt van een driehoek

*De zwaartepunt van een driehoek ABC wordt bepaald door volgende puntvector:

$\vec{Z} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$

3.3.3) Zwaartepunt van een viervlak

*De zwaartepunt van een viervlak ABCD wordt bepaald door volgende puntvector:

$\vec{Z} = \frac{1}{4}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D})$

→ Andere eigenschappen: een viervlak heeft 4 zwaartelijnen, het punt waar ze allemaal snijden noemen we het zwaartepunt.

→ De zwaartelijnen zijn concurrent (d.w.z. dat ze één snijpunt hebben, het zwaartepunt).

→ $\overrightarrow{AZ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AZ_1}$

3.4) Voorbeeldoefeningen

3.4.1) Vectoriële vergelijkingen opstellen (oef. 1)

*Je moet vectoriële vergelijkingen zelf kunnen opstellen, we bekijken verschillende opgaves om te kijken hoe je het best zo'n vergelijking opstelt.

*Hint: neem het overzicht van 3.1.4 erbij om vectoriële vergelijkingen op te stellen.

*VOORBEELDEN: De plaatsvectoren A, B en C zijn niet coplanair met O (liggen niet in hetzelfde vlak). Stel een vectoriële vergelijking op van…

A) De rechte AB. Geef nog 2 plaatsvectoren van AB.

→ STAP 1: Wat hebben we allemaal gegeven? Welke vergelijking moeten we gebruiken?

--> Rechte, géén oorsprong, géén evenwijdigheid

--> dus we moeten deze vergelijking gebruiken: $\vec{P} = (1-k)\overrightarrow{P_1} + k\,.\overrightarrow{P_2}$ (zie theorie)

→ STAP 2: Vul je gegeven waarden in.

--> $\vec{P} = (1-k)\vec{A} + k\,.\vec{B}$ (waar je A en B vult maakt niks uit, je mag ze omwisselen).

→ STAP 3: Zoek 2 andere plaatsvectoren door de k-waarden te veranderen.

--> k = 1 en k = 2 bijvoorbeeld

--> k = 1 ➔ $\vec{P} = \vec{B}$

--> k = 2 ➔ $\vec{P} = -\vec{A} + 2\vec{B}$

B) De rechte A evenwijdig met BC.

→ STAP 1: Wat hebben we allemaal gegeven? Welke vergelijking moeten we gebruiken?

--> Rechte, géén oorsprong, evenwijdigheid

--> dus we moeten deze vergelijking gebruiken: $\vec{P} = \overrightarrow{P_1} + k\,.\vec{S}$ (zie theorie)

→ STAP 2: Vul je gegeven waarden in.

-->$\vec{P} = \vec{A} + k\,.\overrightarrow{(C-B)}$ (je moet hier ook gebruik maken van de river)

→ STAP 3: Twee andere plaatsvectoren zoeken kan je nu wel.

C) De rechte OB

→ STAP 1: Wat hebben we allemaal gegeven? Welke vergelijking moeten we gebruiken?

--> Rechte, oorsprong, géén evenwijdigheid

--> dus we moeten deze vergelijking gebruiken: $\vec{P} = k.\overrightarrow{P_1}$ (zie theorie)

→ STAP 2: Vul je gegeven waarden in.

--> $\vec{P} = k.\vec{B}$

→ STAP 3: Twee andere plaatsvectoren zoeken kan je nu wel.

D) De rechte door het midden van AB en evenwijdig met AC, zit A + C op deze rechte?

→ STAP 1: Wat hebben we allemaal gegeven? Welke vergelijking moeten we gebruiken?

--> Rechte, evenwijdigheid, midden = $\vec{P} = \vec{P_1} + k\,.\vec{S}$

--> we moeten eerst wat voorbereidend rekenwerk doen.

→ STAP 2: Voer het voorbereidend rekenwerk uit.

--> $\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B})$

--> River AC = C – A (bij deze vergelijking moet je altijd de river zoeken)

→ STAP 3: Vul je vergelijking in

→ $\vec{P} = \vec{M} + k\,.(\vec{C} - \vec{A})$

$= \left(\frac{\vec{1}}{2}(\vec{A} + \vec{B})\right) + k\,.(\vec{C} - \vec{A})$

$= \left(\frac{\vec{1}}{2}(\vec{A} + \vec{B})\right) + k\,.(\vec{C} - \vec{A})$

$= \left(\frac{1}{2}\vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B}\right) + k\vec{C} - k\vec{A}$

$= \left(\frac{1}{2}\vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B}\right) + k\vec{C} - k\vec{A} = \left(\frac{1}{2} - k\right)A + \frac{1}{2}B + kC$

→ Stap 4: Nachecken of A + C op de rechte zit.

--> Om dit te doen moet je de P in het linkerlid vervangen door A + C en uitwerken

➔ $P = \left(\frac{1}{2} - k\right)A + \frac{1}{2}B + kC$

➔ $A + C = \left(\frac{1}{2} - k\right)A + \frac{1}{2}B + kC$

→ Dit kunnen we schrijven als: $A + 0B + C = \left(\frac{1}{2} - k\right)A + \frac{1}{2}B + kC$

➔ Nu kunnen we overgaan naar een stelsel, de '+' fungeert als scheiding.

→→ $\begin{cases} 1 = \frac{1}{2} - k \\ 0 = \frac{1}{2} \\ 1 = k \end{cases}$

Normalerwijze zou je dit stelsel moeten oplossen maar je ziet direct dat het géén oplossing heeft, 0 kan namelijk nooit ½ zijn. Daarom kan je nu besluiten: A + C zit niet op deze rechte!

E) Het vlak door A en evenwijdig met het vlak OBC

→ STAP 1: Wat hebben we allemaal gegeven? Welke vergelijking moeten we gebruiken?

--> Vlak, oorsprong, evenwijdigheid

--> dus we moeten deze vergelijking gebruiken: $\vec{P} = \vec{P_1} + k\,.\vec{R} + m\,.\vec{S}$ (zie theorie)

→ STAP 2: Vul je gegeven waarden in.

-->$\vec{P} = \vec{A} + k\,.\vec{B} + m\,.\vec{C}$ (de plaatsen van B en C maken niks uit, je mag ze omwisselen)

→ STAP 3: Twee andere plaatsvectoren zoeken kan je nu wel.

F) … zo gaat het door en door, overzicht op puntje 3.1.4 is handig om vectoriële vergelijkingen te maken.

3.4.2) Bewijzen met zwaartepunten (oef. 9)

*VOORBEELD: Bewijs: Z is zwaartepunt van driehoek ABD ⇔ AZ + BZ + CZ = O

→ Je weet al hoe je dingen moet bewijzen: ik ga dit aanpakken als een vergelijking

➔ AZ + BZ + CZ = 0

⇔ Z-A + Z-B + Z-C = 0

⇔ 3Z -A – B – C = 0

⇔ 3Z = A + B + C

⇔ Z = $\frac{A+B+C}{3} = \frac{1}{3}(A + B + C)$ = definitie zwaartepunt = bewezen

3.4.3) Toepassing op zwaartepunt (oef. 17)

*VOORBEELD: In een viervlak ABCD met zwaartepunt Z construeert men het punt E zodat ZE = ZB + ZC + ZD. Bewijs dat Z het midden is van AE.

➔ $Z = \frac{1}{4}(A + B + C + D)$ (definitie zwaartepunt viervlak)

⇔ $4Z - A = B + C + D$ (vergelijking oplossen, 1)

➔ $ZE = ZB + ZC + ZD$

⇔ $E - Z = B - Z + C - Z + D - Z$ (identificatie van vrije- en puntvectoren)

⇔ $E = B - Z + Z + C - Z + D - Z$ (vergelijking oplossen)

⇔ $E = B + C + D - 2Z$ (genoeg afgezonderd, kijk terug naar vergelijking 1)

⇔ $E = 4Z - A - 2Z$ (Vergelijking 1 invullen i.p.v. B + C + D)

⇔ $E = 2Z - A$ (rekenen)

⇔ $E - A = 2Z$ ⇔ $Z = \frac{1}{2}(E - A)$ (rekenen)

⇔ $Z = \frac{1}{2}(AE)$ (identificatie omgekeerd toegepast

→ Nu heb je bewezen dat het zwaartepunt het midden is van AE!

➔ Nu, dit was een grote brok. Je moet bij dit soort oefeningen altijd in je achterhoofd houden dat je definities en vergelijkingen met elkaar moet combineren zoals we dat hier hebben gedaan.

3.4.4) Gemeenschappelijke punten zoeken

*We kunnen de gemeenschappelijke punten van twee rechten, twee vlakken (snijlijn) of een rechte en een vlak zoeken.

➔ Stel we hebben 2 rechten: $\vec{P} = k\,.\vec{A}$ en $\vec{P} = \vec{A} + k\,\vec{C} - k\vec{B}$

→ Gevraagd zijn de gemeenschappelijke punten: we stellen de RL's aan elkaar gelijk

➔ $k\,.\vec{A} = \vec{A} + k\,\vec{C} - k\vec{B}$

→ We gaan over naar een stelsel: $\begin{cases} k = 1 \\ k = 0 \\ -k = 0 \end{cases}$ (C en D komen niet voor in de LL dus 0!)

➔ Normaal moet je de stelsel met substitutie of Gauss oplossen, maar hier zie je direct dat het tegenstrijdig is want k kan nooit 1 én 0 tegelijk zijn. Beide rechten hebben dus géén gemeenschappelijke punten, ze zijn dus evenwijdig of kruisend (! Let op, kruisend is niet snijdend ! Denk aan 2 vliegtuigen op verschillende hoogte die elkaar 'kruisen'!)

Veel succes op de toets! Deze samenvatting heeft letterlijk bloed, zweet en tranen gekost.