
(Y) VOORWOORD

Dit is de samenvatting van goniometrische ter voorbereiding van het examen van M4. Let op: deze samenvatting behandelt niet alles van goniometrische functies.

SAMENVATTING 1: Goniometrische vergelijkingen (zie website)
SAMENVATTING 2: Elementaire en uitgebreide goniometrische functies (zie website)
SAMENVATTING 3: Verloop van goniometrische functies en vraagstukken (deze samenvatting!)

(X) FOUTJE?

Dat kan. Als je twijfelt of iets fout is meld me dat dan zeker via Facebook (messenger) of Smartschool. Ik ben je alvast dankbaar.

(Z) INHOUDSTAFEL

Over twéé pagina's

Samenvatting wiskunde – analyse – verloop van en vraagstukken bij goniometrische functies

Inhoud

1) Afgeleiden

Om het verloop van een functie te bepalen heb je, zoals je al weet, afgeleiden nodig. We bespreken in dit stuk afgeleiden bij goniometrische functies en maken enkele voorbeeldoefeningen.

1.1) Voorkennis

Je weet nog steeds dat de eerste afgeleide overeenkomt met de rico van de raaklijn aan die rechte.

Ook mag je de basisregels, die we vorig jaar hebben geleerd, voor het afleiden niet vergeten. We halen uit samenvatting wiskunde module 3 volgende passage…

1) Afgeleid getal/afgeleide functie bepalen: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

2) Rekenregels functies afleiden:
   1) DC = 0 (constante functie)
   2) Dx = 1 (identieke functie)
   3) $D(x^n) = nx^{n-1}$ (power rule)
   4) D(f+g) = D(f) + D(g)
   5) D(f.g) = D(f) . g + f . D(g)
   6) $D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{Df.g - f.Dg}{g^2}$ (quotiëntregel)
   7) $D(x+y)^n\ met\ y\ is\ een\ getal = n(x+y)^{n-1}.D(x+y)$ (kettingregel)

1.2) Rekenregels

Er bestaan enkele rekenregels voor het afleiden van goniometrische functies:

(1) $D(\sin x) = \cos x$

--> In woorden: "De afgeleide van de sinus is de cosinus)

(2) $D(\cos x) = -\sin x$

--> In woorden: "De afgeleiden van de cosinus is min sinus"

(3) $D(\tan x) = \frac{1}{cos^2\, x}$

--> De afgeleide van de elementaire tangensfunctie kan je bewijzen met behulp van de quotiëntregel. Je weet immers dat tan $= \frac{sin}{cos}$.

--> (V) Bewijs: $D(\tan x) = D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{D(\sin x).\cos x - \sin x\,.D(\cos x)}{cos^2 x}$

$$= \frac{cos^2 x + sin^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x}$$

(4) $D(\cot x) = -\frac{1}{sin^2 x}$

--> De cotangensfunctie bewijs je op analoge wijze met de tangensfunctie, alleen is de cotangens zoals je al weet gedefinieerd als cos/sin

Let op: ik kan het niet vaak genoeg benadrukken --> je mag de kettingregel nooit of te nimmer vergeten. Véél mensen vergeten de kettingregel vaak. De kettingregel kan het verschil maken tussen een 5/10 of een 4/10!

1.3) Oefeningen

Oefening 12 in cursus: Bereken de afgeleiden van volgende functies…

a) $f(x) = \sin x + \cos x$

--> $f'(x) = \cos x + (-\sin x) = \cos x - \sin x$

(we hebben hier o.a. ook de somregel toegepast.

k) $f(x) = \sqrt{\sin x}$

--> $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \,.\cos x$

(LET OP: Je mag de kettingregel niet vergeten toe te passen. We hebben éérst de wortel afgeleid en daarna alles wat IN onze wortel zit afgeleid!)

n) $f(x) = \csc x$

--> De cosecans hebben we in het 4de geleerd: $\csc x = \frac{1}{\sin x}$

--> $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

➔ $f'(x) = \frac{0\,.\sin x - 1\,.\cos x}{sin^2 x} = -\frac{\cos x}{sin^2 x}$

OF ➔ $f'(x) = \sin^{-1} x = -1 \sin^{-2} x \,.\cos x = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

(LET OP: Als je de zogenaamde 'power rule' = macht naar voor macht ééntje minder gebruikt, dan mag je de kettingregel niet vergeten toe te passen!!!)

v) $f(x) = (\tan 5x - x^2)^2$

--> $f'(x) = 2(\tan 5x - x^2).\left(\frac{1}{\cos 5x} - 2x\right).5$

→ Let op: hier heb ik 2x de kettingregel op toegepast, je moet immers éérst de kettingregel toepassen op je haakje --> eerst alles buiten haakjes afleiden, daarna alles in je haakjes. Dan gebruik je de somregel in de haakjes, echter heb je tan 5x en moet je die 5x daarna ook nog eens afleiden. Jep, dat is véél afleiden. :)

Oefening 13 in cursus: Bereken de afgeleiden van volgende functies

m) $f(x) = \frac{\sin x}{x\,.\sin x + \cos x}$

--> We gebruiken hier natuurlijk de quotiëntegel én productregel voor:

$f'(x) = \frac{\cos x\,.(\,x\,.\sin x + \cos x) - \sin x\,.[(1\,.\sin x + x\,.\cos x) + \sin x]}{(x\,.\sin x + \cos x)^2}$

We werken de teller apart uit voor de overzichtelijkheid.

$$\begin{aligned} TELLER &= \cos x\,.(\,x\,.\sin x + \cos x) - \sin x\,.[(1\,.\sin x + x\,.\cos x) + \sin x] \\ &= \cos x\,.x\,.\sin x + cos^2 x - (sin^2 x + \sin x\,.x\,.\cos x + sin^2 x) \\ &= \cancel{\cos x\,.x\,.\sin x} + cos^2 x \cancel{- sin^2 x} \cancel{- \sin x\,.x\,.\cos x} \cancel{+ sin^2 x} \\ &= cos^2 x \end{aligned}$$

Onze afgeleide wordt dus…

$f'(x) = \frac{cos^2 x}{(x\,.\sin x + \cos x)^2}$

--> Meneer Wanten gaf ons vorig jaar de tip om onze noemer nooit of te nimmer uit te werken. Hij had ook gelijk. Als je je noemer niet uitwerkt, kan je bij verloop van functies makkelijker de polen (nulwaarden van je noemer) herkennen. Je weet dat je niet mag delen door 0 dus daar zijn dan ook direct je asymptoten.

Nu je kan afleiden, kan je het verloop bepalen!

2) Verloop van goniometrische functies

2.1) Stappenplan verloop G.F. bepalen

Het verloop van goniometrische functies bepaal je hetzelfde als je het verloop van alle andere soorten functies die we tot nu toe hebben gezien.

We bekijken eventjes wat je nu precies bij goniometrische functies moet kunnen bespreken:

(1) FUNCTIEWAARDETABEL

Je bekijkt de f(x)-waarden voor enkele x-waarden.

(2) DOMEIN

*Voor de sinus- en cosinusfunctie is het domein heel $\mathbb{R}$.

*Voor de tangensfunctie is het domein $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\,.\,\pi\}$, de tangens van 90° is immers zinledig.

*Voor de cotangensfunctie is het domein $\mathbb{R} \setminus \{\pi + k\,.\,\pi\}$, de cotangens van 180° is immers zinledig.

*Voor de secansfunctie moet je ook beredeneren…

--> Je weet dat $\sec x = \frac{1}{\cos x}$. De secansfunctie kan dus niet bestaan als de cosinus 0 wordt. Hmmm, wanneer werd de cosinus ook alweer 0? Aahja, bij $\frac{\pi}{2} + k\,.\,\pi$.

--> De cosinus van $\frac{\pi}{2}$ kan dus niet bij de secansfunctie…

→ dom = $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\,.\,\pi\}$

*Voor de cosecansfunctie kan je eenzelfde redenering maken maar dan met de sinus, je weet immers dat $\csc x = \frac{1}{\sin x}$.

→ Je komt uit dat: dom = $\mathbb{R} \setminus \{\pi + k\,.\,\pi\}$

(3) CONTINUÏTEIT

Een functie is continu in elk punt van haar domein. Je domein is dus ook je continuïteit.

(4) PERIODICITEIT

Na hoeveel x-waarden herhaalt de functie zichzelf?

--> Je weet al hoe je de periode uitrekent: $periode = \frac{2\pi}{|b|}$

--> Let op: bij een functie van de vorm y = ax² + bx + c met a, b, c goniometrische waarden pak je de grootste periode!

(5) SNIJPUNTEN ASSEN

*x-as: Om de snijpunt(en) met de x-as te zoeken stel je y = 0 en los je de vergelijking op.

*y-as: Om de snijpunt(en) met de y-as te zoeken stel je x = 0 en los je de vergelijking op.

(6) ASYMPTOTISCH GEDRAG

*Je onderzoekt de aanwezigheid van horizontale (x = a), verticale (y = b) of schuine (y = ax + b) asymptoten.

--> Zoals je weet heeft de tangensfunctie asymptoten: $x = \frac{\pi}{2} + k\,.\,\pi$

--> Zoals je weet heeft de cotangensfunctie asymptoten: $x = \pi + k\,.\,\pi$

--> Dit zijn al twee verticale asymptoten die je kan herkennen.

--> Dit zijn ter informatie dezelfde asymptoten van respectievelijk de secans-functie en de cosecansfunctie.

--> Zowel de cosinus-, als sinusfunctie hebben geen asymptoten omdat ze geen getal tot in het oneindige benaderen.

--> Een verticale asymptoot kan je altijd hebben bij een breuk. Een verticale asymptoot kwam overeen met de nulwaarden van je noemer (= polen).

(7) TEKENVERLOOP

*Met het tekenverloop onderzoek je welk teken y heeft als het argument x heel haar domein doorloopt.

(8) STIJGEN EN DALEN, VERTICALE RAAKLIJNEN, HORIZONTALE RAAKLIJNEN, EXTREMA, BUIGPUNTEN, VORM VAN DE KROMME, GRAFIEK

Ik heb deze punten samengezet omdat ze neerkomen op één ding: je eerste- en tweede afgeleide bepalen.

Je eerste afgeleide [f'(x)] bepaalt het volgende:

(1) stijgen en dalen --> als f'(x) > 0 (positief) dan stijgt je functie
als f'(x) < 0 (negatief) dan daalt je functie

(2) Horizontale raaklijn --> als f'(x) = 0, dan is de rico van je raaklijn 0 en heb je een zogenaamde horizontale raaklijn of HR.

(3) Extremawaarden (herinnering: extrema = maximum/minimumwaarden)
--> Als f'(x) = 0 dan heb je een extremawaarde bereikt. Het is aan jou om uit te maken of je een maximum of minimum bereikt.
--> Als je functie eerst steeg en daarna daalde, heb je een maximum bereikt. Als je functie eerst daalde en daarna steeg, heb je een minimum bereikt.

Je tweede afgeleide [f''(x)] bepaalt het volgende:

(1) Vorm van de kromme:
--> Is f''(x) > 0 (positief), dan is je functie convex of U-vormig.
--> Is f''(x) < 0 (negatief), dan is je functie concaaf of ∩-vormig.
--> Is f''(x) = 0, dan heb je een buigpunt (bp) bereikt. Een buigpunt is een overgang van convex naar concaaf of vice versa. Bij een buigpunt (f'' = 0) verandert de vorm van je kromme dus als het ware.

Je eerste en tweede afgeleide bepalen allebei het volgende:

(1) De verticale raaklijnen:
--> Je weet dat de eerste afgeleide de rico van de raaklijn aan de functie is. De tweede afgeleide is dan dus eigenlijk als het ware de rico van de raaklijn van de eerste afgeleide. Als zowel f'(x) als f''(x) niet bestaan, is die rico eigenlijk ∞ en heb je een verticale raaklijn (VR).

(2) De grafiek die je schetst:
--> Dit is je eindproduct; je maakt een grafiek met al je bevindingen!

(9) TROTS ZIJN OP JEZELF

Je mag trots zijn op jezelf dat je een héél verloop van een goniometrische functie hebt gemaakt!

Zonder er nog woorden aan vuil te maken gaan we van start aan de voorbeeldoefeningen!

2.2) Voorbeeldoefeningen

1) oefening 14n in de cursus

Gegeven functie: $f(x) = \tan(x) - \sin(x)$

Gevraagd: verloop van de functie

Oplossing:

(1) FUNCTIEWAARDETABEL

$f(x) = \tan(x) - \sin(x)$
--> We maken makkelijk een functiewaardetabel met ons groene rekenmachine.
[MODE] --> [4: TABLE]
→ Dan vol je jouw voorkeuren in je rekenmachine in.

X	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	-π	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	-2π
Y	0	IIIIIIIIIIII	0	IIIIIIIIIIII	0	IIIIIIIIIIII	0	IIIIIIIIIIII	0

--> Je kan kent nu ook al één nulwaarde (let op: er kunnen meerdere nulwaarden zijn) en één asymptoot.

(2) DOMEIN
$f(x) = \tan(x) - \sin(x)$
--> Goh, de sinusfunctie heeft als domein $\mathbb{R}$ en de tangensfunctie $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\,.\pi\}$. Welke fucking domein moet je dan nu nemen?
-->--> Wel, de tangensfunctie bestaat niet bij $\frac{\pi}{2}$ en je kan iets dat niet bestaat niet aftrekken van iets anders. Je moet dus de domein van de tangensfunctie nemen.

DUS: $dom\ f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\,.\pi\}$.

(3) CONTINUÏTEIT
Een functie is continu in elk punt van haar domein.

CONTINUÏTEIT = $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\,.\pi\}$

(4) PERIODICITEIT
Je moet de periode niet uitrekenen aangezien lbl = 1. Echter stoot je hier opnieuw tegen een probleem. De tangensfunctie herhaalt zichzelf om de π x-waarden terwijl de sinusfunctie zichzelf pas herhaalt om de 2π x-waarden. Welke periodiciteit moet je dan nu in Gods naam nemen?

Bij een optelling (of aftrekking) van 2 goniometrische functies neem je de grootste periodiciteit die je hebt. In ons geval nemen we dus: $periode = 2\pi$.
--> Dit kan je intuïtief aanvoelen: de sinusfunctie komt pas na 2π terug dus komt de gehele functie ook pas na 2π terug.

LET OP: Bij een vermenigvuldiging of deling van 2 goniometrische functies geldt de regel van de grootste periodiciteit nemen niet. Daar moet je meer onderzoek verrichten.

(5) SNIJPUNTEN ASSEN
$f(x) = \tan(x) - \sin(x)$
*x-as: y = 0 ⇔ $0 = \tan(x) - \sin(x)$
⇔ $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \sin(x) = 0$
⇔ $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{\sin(x).\cos(x)}{\cos(x)} = 0$
⇔ $\sin(x) - \sin(x)\,.\cos(x) = 0$ **[VOORWAARDE: $\cos(x) \neq 0$, WIE DEELT DOOR NUL IS IMMERS EEN SNUL]**
⇔ $\sin(x)\ [1 - \cos(x)] = 0$ [afzonderen van gemeenschappelijke term sin(x)]
⇔ $\sin(x) = 0 \quad \vee \quad 1 - \cos(x) = 0$ [Herinnering: ∨ = logische 'of']
⇔ $\sin(x) = 0 \quad \vee \quad \cos(x) = 1$
⇔ $\sin(x) = \sin(0) \quad \vee \quad \cos(x) = \cos(0)$ [Boogsinus en boogcosinus nemen]
⇔ $x = 0 + k\,.2\pi \quad \vee \quad x = \pi + k\,.2\pi \quad \vee \quad x = \pm 0 + k\,.2\pi$

--> We hebben de sinus en cosinus uitgewerkt.

⇔ $x = 0 + k\,.\,2\pi \quad \vee \quad x = \pi + k\,.\,2\pi$

We zijn nog niet klaar, we moeten nu nog onze voorwaarde $\cos(x) \neq 0$ nachecken.

==> $\cos x = 0$

⇔ $\cos x = \cos(\frac{\pi}{2})$

⇔ $x = \pm\frac{\pi}{2} + k\,.\,2\pi$

--> Deze oplossingen zitten niet in onze gevonden nulwaarden. Onze nulwaarden gelden dus.

DUS: snijpunten x-as ➔ $x = 0 + k\,.\,2\pi \quad \vee \quad x = \pi + k\,.\,2\pi$

Snijpunt y-as: x = 0

--> $f(x) = \tan(x) - \sin(x)$

==> $y = \tan(0) - \sin(0) = 0$ → DUS: y = 0

(6) ASYMPTOTISCH GEDRAG

$f(x) = \tan(x) - \sin(x)$

*Zoals je weet heeft de tangensfunctie $x = \frac{\pi}{2} + k\,.\,\pi$ als verticale asymptoot.

*De sinusfunctie heeft daarentegen géén asymptoot.

Omdat je iets wat niet bestaat niet kan aftrekken van iets wat bestaat, bestaat de gewone functie $f(x) = \tan(x) - \sin(x)$ ook niet voor $x = \frac{\pi}{2} + k\,.\,\pi$ en zal ze daar oneindig naderen.

Je hebt géén horizontale asymptoot en ook géén schuine.

DUS: V.A. ➔ $x = \frac{\pi}{2} + k\,.\,\pi$

(7) TEKENVERLOOP

Bij het tekenverloop onderzoek je het teken van het beeld y als het argument x haar heel domein doorloopt. Echter stoten we hier op een probleem, goniometrische functies zijn periodiek, gaan we het tekenverloop tot in het oneindige onderzoeken?

Wel, neen, wij beperken ons tot één periode-interval, omdat goniometrische functies zichzelf toch constant herhalen.

Voor onze functie, $f(x) = \tan(x) - \sin(x)$, onderzoeken we het tekenverloop in het interval $[0, 2\pi]$.

Let op: je zet in je tekenverloop alle nulwaarden én asymptoten (als ze er zijn) in één periode-interval. Je onderzoekt met testgetallen het teken van y tussen die asymptoten en nulwaarden. Je verkrijgt volgend tekenverloop.

Tekenverloop in $[0, 2\pi]$:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y	0	+	IIIIIIIIII	-	0	+	IIIIIIIIIIII	-	0

(8) STIJGEN EN DALEN, VERTICALE RAAKLIJNEN, HORIZONTALE RAAKLIJNEN, EXTREMA, BUIGPUNTEN, VORM VAN DE KROMME, GRAFIEK

(A) VOORBEREIDEND WERK: Afleiden + nulwaardes van de afgeleiden!

We leiden onze functie $f(x) = \tan x - \sin x$ op voorhand al 2 keren af.

$f'(x) = \frac{1}{cos^2 x} - \cos x = \frac{1}{cos^2 x} - \frac{cos^3 x}{cos^2 x} = \frac{1-cos^3 x}{cos^2 x}$

$f''(x) = \frac{(0-3cos^2 x.(-\sin x)).cos^2 x-[(1-cos^3 x).2\cos x.(-\sin x)]}{\cos^4 x}$ (KETTINGREGEL NIET VERGETEN)

--> LET OP: veelgemaakte fout:

$D(\cos x) = -\sin(x) \rightarrow NIET \sin(x)$

$= \frac{+3\cos^4 x.\sin x-[2\cos x.(-\sin(x))-2\cos^4 x.(-\sin x)]}{\cos^4 x}$ (uitwerken)

$= \frac{+3\cos^4 x.\sin x+2\cos x.\sin x-2\cos^4 x.\sin x}{\cos^4 x}$ (uitwerken…)

$= \frac{\cos x.\sin x[+3\cos^3 x+2-2\cos^3 x]}{\cos^4 x} = \frac{\sin x[2+cos^3 x]}{\cos^3 x}$ (je hebt nu goed afgeleid!)

We hebben nu dus…

$f'(x) = \frac{1-cos^3 x}{cos^2 x}$

$f''(x) = \frac{\sin x[2+cos^3 x]}{\cos^3 x}$

Nu moet je de nulwaardes van je eerste afgeleide zoeken voor de extremawaarde en buigpunten.

NULWAARDES f'(x):

$f'(x) = \frac{1-cos^3 x}{cos^2 x}$

==> $0 = \frac{1-cos^3 x}{cos^2 x}$

⇔ $1 - cos^3 x = 0$ (VOORWAARDE: $cos^2 x \neq 0$)

⇔ $\cos^3 x = 1$

⇔ $\cos x = 1$

⇔ $\cos x = \cos(0)$

⇔ $x = 0 + k.2\pi$

We moeten onze voorwaarde nog nachecken: $cos^2 x \neq 0$

==> $\cos^2 x = 0$

⇔ $\cos x = 0$

⇔ $x = \frac{\pi}{2} + k.2\pi$

De oplossingen van onze voorwaarde vallen niet samen met de oplossingen die we hebben berekend, dus onze nulwaarden zijn geldig.

--> Nu weet je echter ook dat *de eerste afgeleide* *NIET* *bestaat in* $x = \frac{\pi}{2} + k.2\pi$

NULWAARDES f''(x):

$f''(x) = \frac{\sin x[2+cos^3 x]}{\cos^3 x}$

==> $0 = \frac{\sin x[2+cos^3 x]}{\cos^3 x}$

⇔ $\sin x\,[2 + cos^3 x] = 0$ (VOORWAARDE: $\cos^3 x \neq 0$)

⇔ $\sin x = 0 \quad \vee \quad 2 + cos^3 x = 0$

⇔ $\sin x = 0 \;\vee\; cos^3 x = -2$

⇔ $\sin x = 0 \;\vee\; \cos x = \sqrt[3]{-2}$

⇔ $\sin x = 0 \;\vee\; \cos x = -1{,}26$ (verwerpen want cos kan NIET kleiner dan -1!!!)

⇔ $\sin x = 0$

⇔ $\sin x = \sin(0)$

⇔ $x = 0 + k\,.\,2\pi \quad \vee \quad x = \pi + k\,.\,2\pi$

We moeten onze voorwaarde nog nachecken: $\cos^3 x \neq 0$
--> dit wordt: $x = \frac{\pi}{2} + k\,.\,2\pi$

De oplossing van onze voorwaarde zit niet in onze nulwaardes, dus onze nulwaardes zijn geldig.

Je weet nu ook dat de 2de afgeleide niet bestaat voor: $x = \frac{\pi}{2} + k\,.\,2\pi$.

<u>We vatten eventjes samen wat we nu hebben:</u>
$f'(x) = \frac{1-cos^3 x}{cos^2 x}$
→ NULWAARDEN: $x = 0 + k\,.\,2\pi$
→ BESTAAT NIET IN: $x = \frac{\pi}{2} + k\,.\,2\pi$

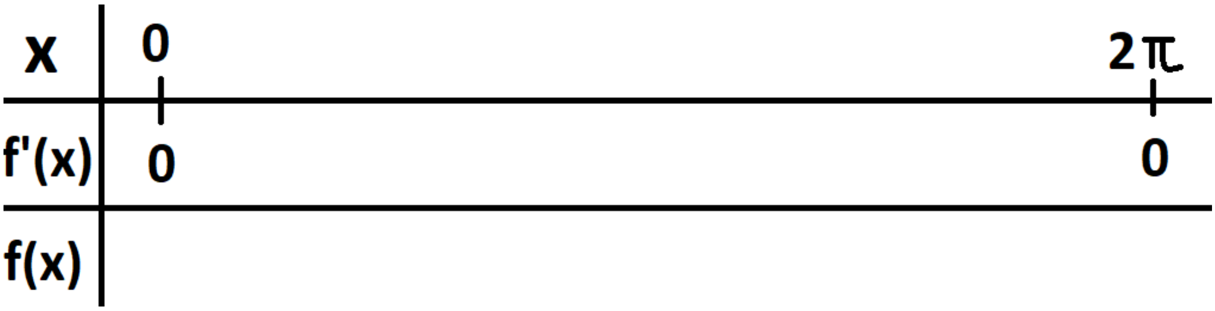
$f''(x) = \frac{\sin x[2+cos^3 x]}{\cos^3 x}$
→ NULWAARDEN: $x = 0 + k\,.\,2\pi \quad en \quad x = \pi + k\,.\,2\pi$
→ BESTAAT NIET IN: $x = \frac{\pi}{2} + k\,.\,2\pi$

<u>(B) TABEL MAKEN VOOR DE EERSTE AFGELEIDE</u>
Dat tabel ziet er zo uit…

x	
f'(x)	
f(x)	

Je zet de nulwaardes en waardes waarin je eerste afgeleiden niet bestaat binnen éénzelfde periode-interval (in ons geval: [0, 2π] erin).

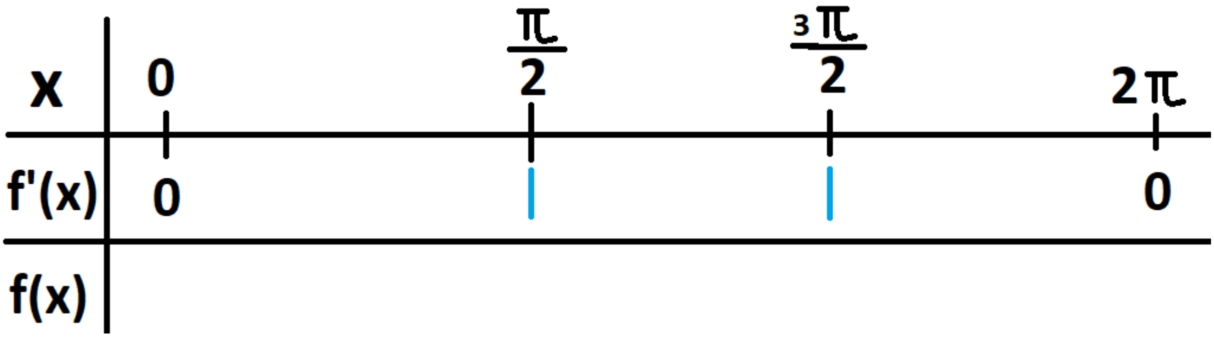
Hieronder de tabel met nulwaardes erin.



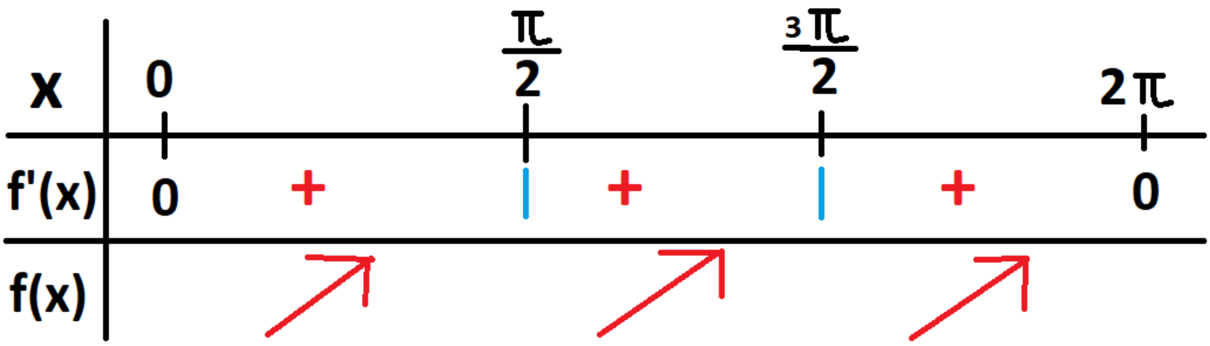
Nu gaan we onze asymptoten in onze tabel zetten.

V.A. ➔ $x = \frac{\pi}{2} + k\,.\pi$

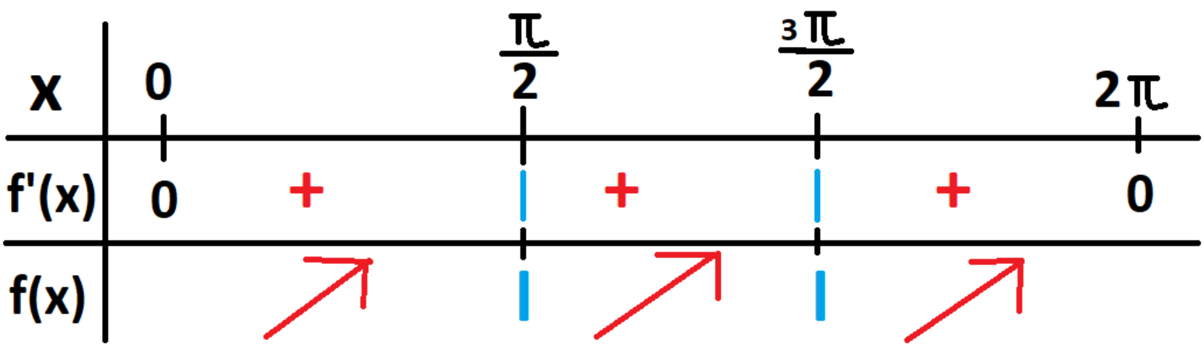
--> Als de echte functie niet bestaat voor deze x-waardes, bestaat de eerste afgeleide functie ook niet voor deze x-waardes. Dit is logisch, je kan geen rico van de raaklijn hebben als je géén punt hebt om aan te raken.



We maken het tekenverloop van f'(x) ==> $f'(x) = \frac{1-cos^3x}{cos^2x}$ en verkrijgen…

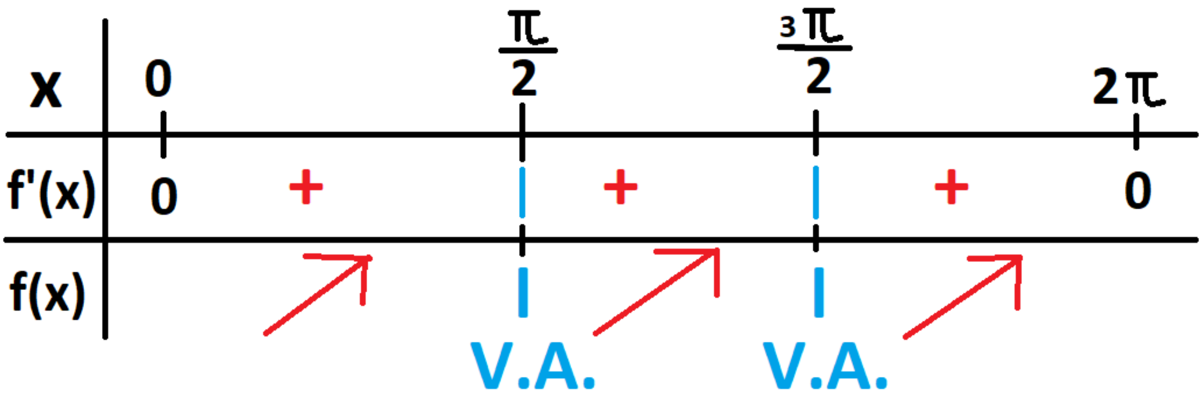


We weten inmiddels ook al dat de functie stijgt als de eerste afgeleide positief is.
Daarnaast weten we dat de functie bij $\frac{\pi}{2} + k\,.\pi$ niet bestaat. We kunnen dat ook al aanduiden.

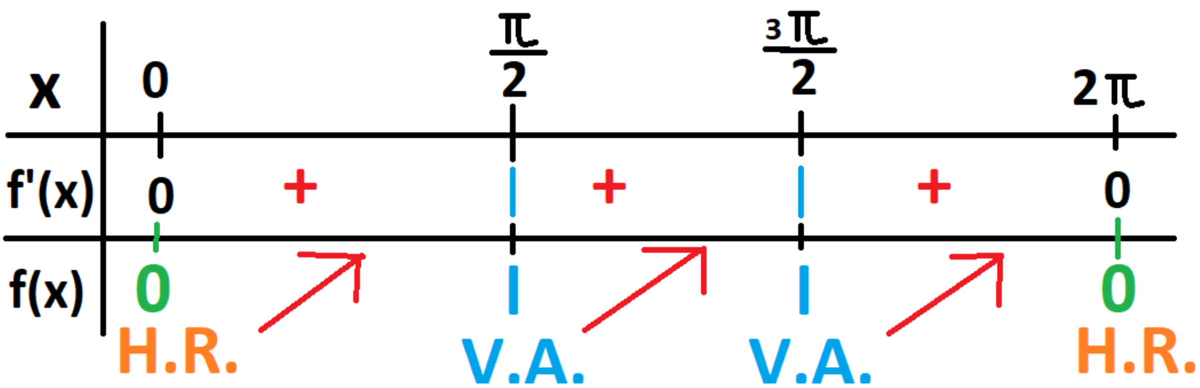


Als je éérste afgeleide én je functie niet bestaat in een bepaald punt, heb je een verticale asymptoot. Let op het verschil tussen een verticale asymptoot en een verticale raaklijn.
--> Bij een verticale asymptoot bestaat je gewone functie niet in dat punt.
--> Bij een verticale raaklijn bestaat je gewone functie wél in dat punt.

We duiden aan dat we 2 verticale asymptoten hebben.



Als f'(x) = 0, dan is de rico van je raaklijn 0 en heb je dus een horizontale raaklijn (H.R.). We duiden dat aan. Daarnaast vullen we ook de nulwaarden in voor f(x).



Ziezo, je hebt je bespreking van je eerste afgeleide nu volledig gedaan. Op naar de tweede afgeleide.

(C) TABEL MAKEN VOOR TWEEDE AFGELEIDE

Je maakt nu op analoge wijze een tabel voor de tweede afgeleide, we herhalen wat we al hadden gevonden…

$f''(x) = \frac{\sin x[2+cos^3 x]}{\cos^3 x}$

→ NULWAARDEN: $x = 0 + k\,.\,2\pi$ $\quad en \quad$ $x = \pi + k\,.\,2\pi$

We gieten de nulwaarden en asymptoten alvast in de tabel…

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f''(x)$	0		|		0		|		0
$f(x)$	0		|				|		0
			V.A.				V.A.		

Wacht, we weten ook dat onze gewone functie een nulwaarde in π heeft. We schrijven die natuurlijk ook op.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f''(x)$	0		|		0		|		0
$f(x)$	0		|		0		|		0
			V.A.				V.A.		

We maken het tekenverloop van de tweede afgeleide, $f''(x) = \frac{\sin x[2+cos^3 x]}{\cos^3 x}$, en verkrijgen dan volgende waarden…

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f''(x)$	0	+	|	-	0	+	|	-	0
$f(x)$	0		|		0		|		0
			V.A.				V.A.		

We trekken onze besluiten. Herinner je de meetkundige betekenis van de tweede afgeleide!

--> Als f''(x) > 0, is de functie convex of ∪-vormig.

--> Als $f''(x) < 0$, is de functie concaaf of ∩-vormig.

--> Als $f''(x) = 0$, dan heb je een buigpunt (bp) bereikt, dit is een overgang van convex naar concaaf of vice versa. Let op: je functie verandert ook van vorm als de 2de afgeleide ergens niet bestaat, dan kan je het echter geen buigpunt meer noemen omdat dat punt niet bestaat.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
f''(x)	0	+	|	-	0	+	|	-	0
f(x)	0 bp	∪	V.A.	∩	0 bp	∪	V.A.	∩	0 bp

<u>(D) OVERZICHT TABEL EERSTE- EN TWEEDE AFGELEIDE</u>

<u>Eerste afgeleide:</u>

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
f'(x)	0	+	|	+	|	+	0
f(x)	0 H.R.	↗	V.A.	↗	V.A.	↗	0 H.R.

<u>Tweede afgeleide:</u>

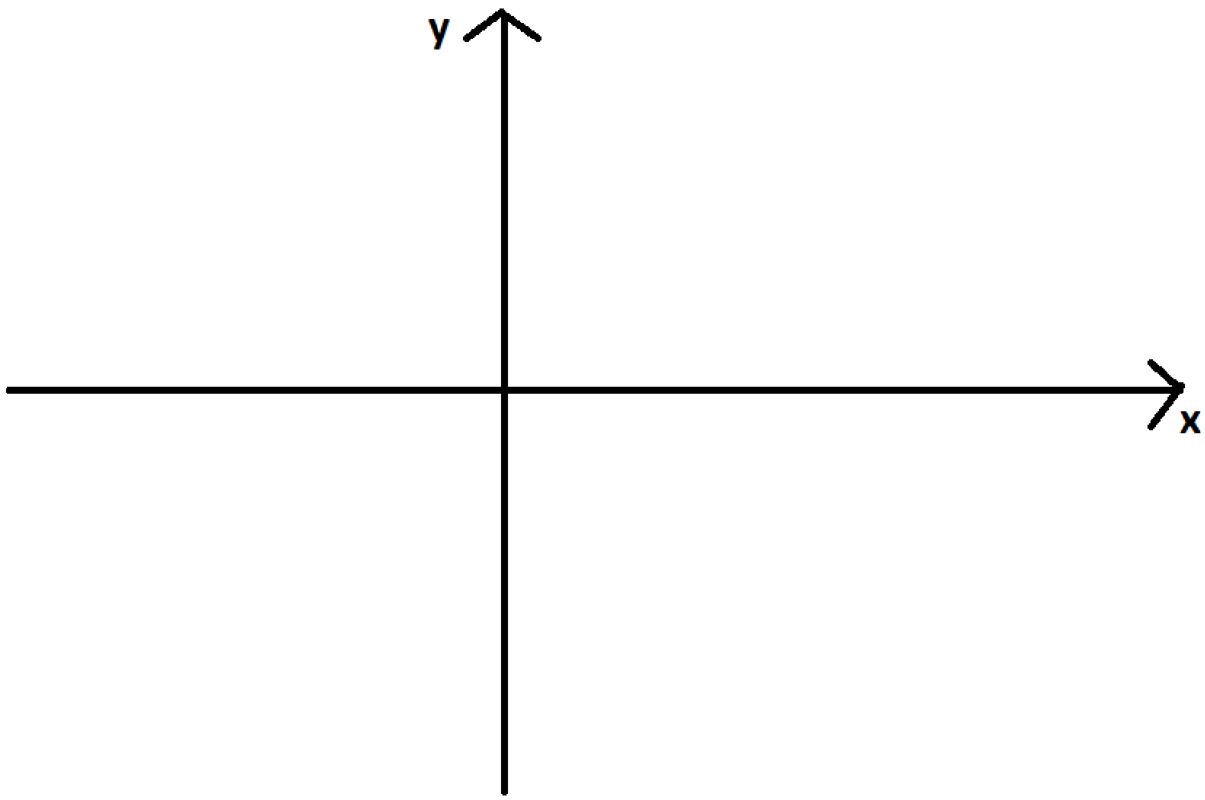
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
f''(x)	0	+	|	-	0	+	|	-	0
f(x)	0 bp	∪	V.A.	∩	0 bp	∪	V.A.	∩	0 bp

Aan de hand van deze verkregen tabellen gaan we nu onze grafiek maken.

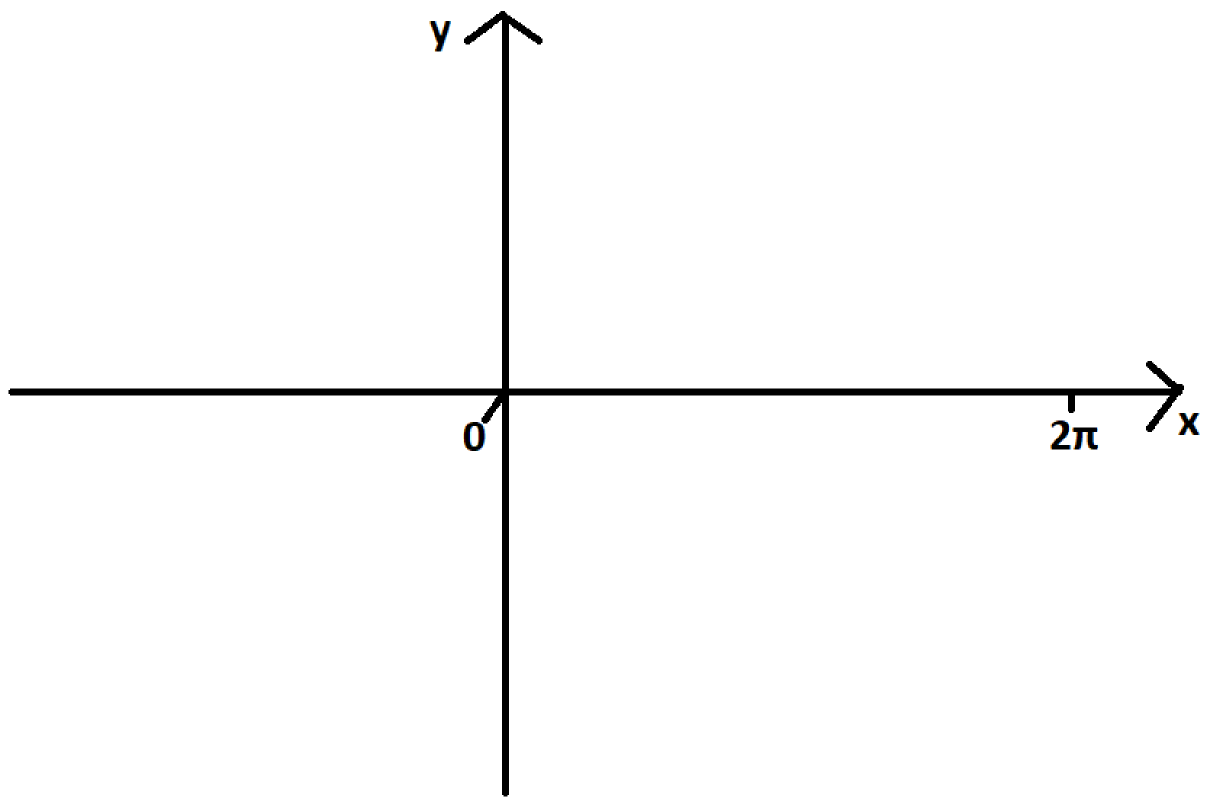
<u>(E) GRAFIEK SCHETSEN</u>

We gaan een grafiek maken…

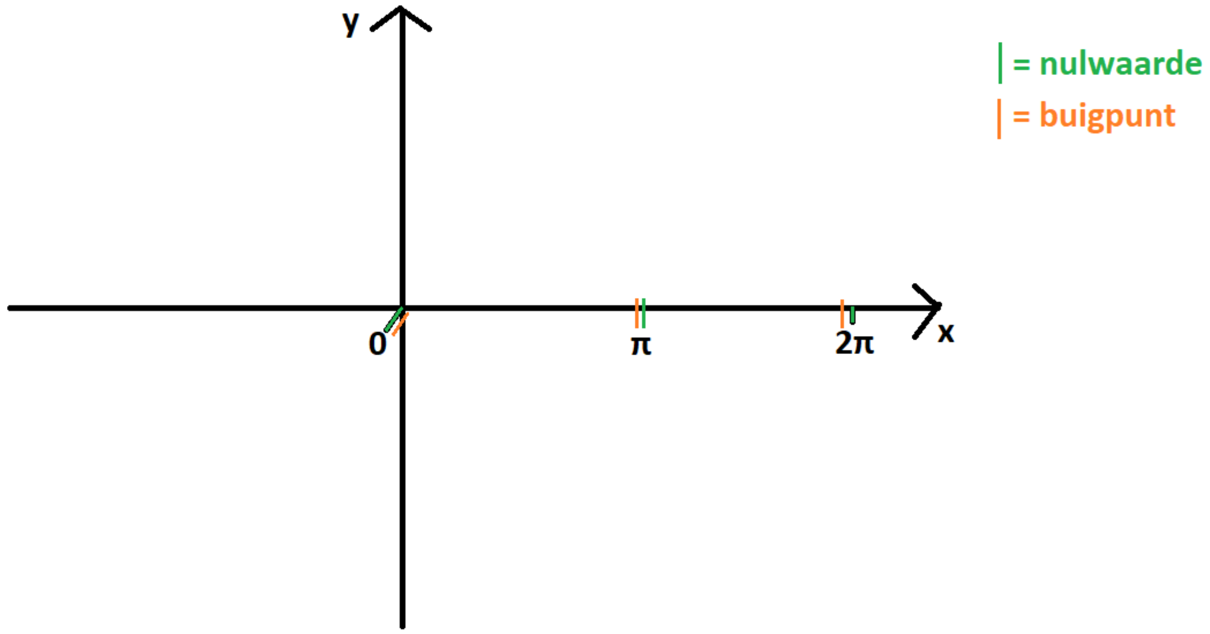
<u>STAP 1: teken een assenstelsel.</u>



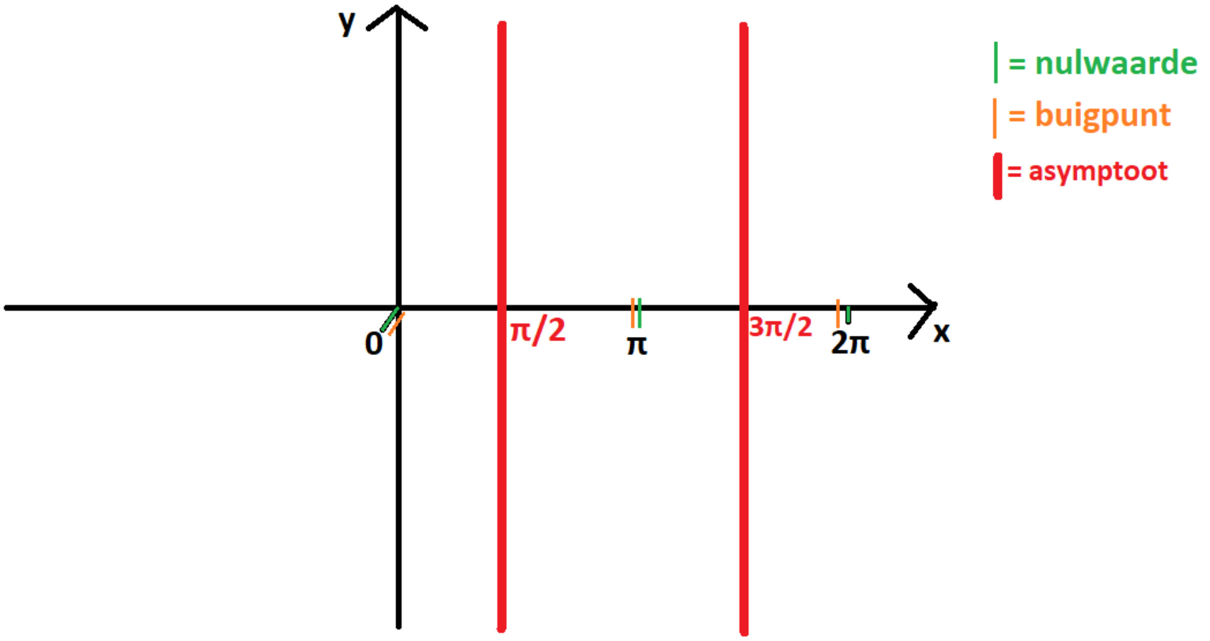
STAP 2: Duid de grenswaarden van je onderzochte periode-interval aan.
--> Wij onderzochten [0, 2π].



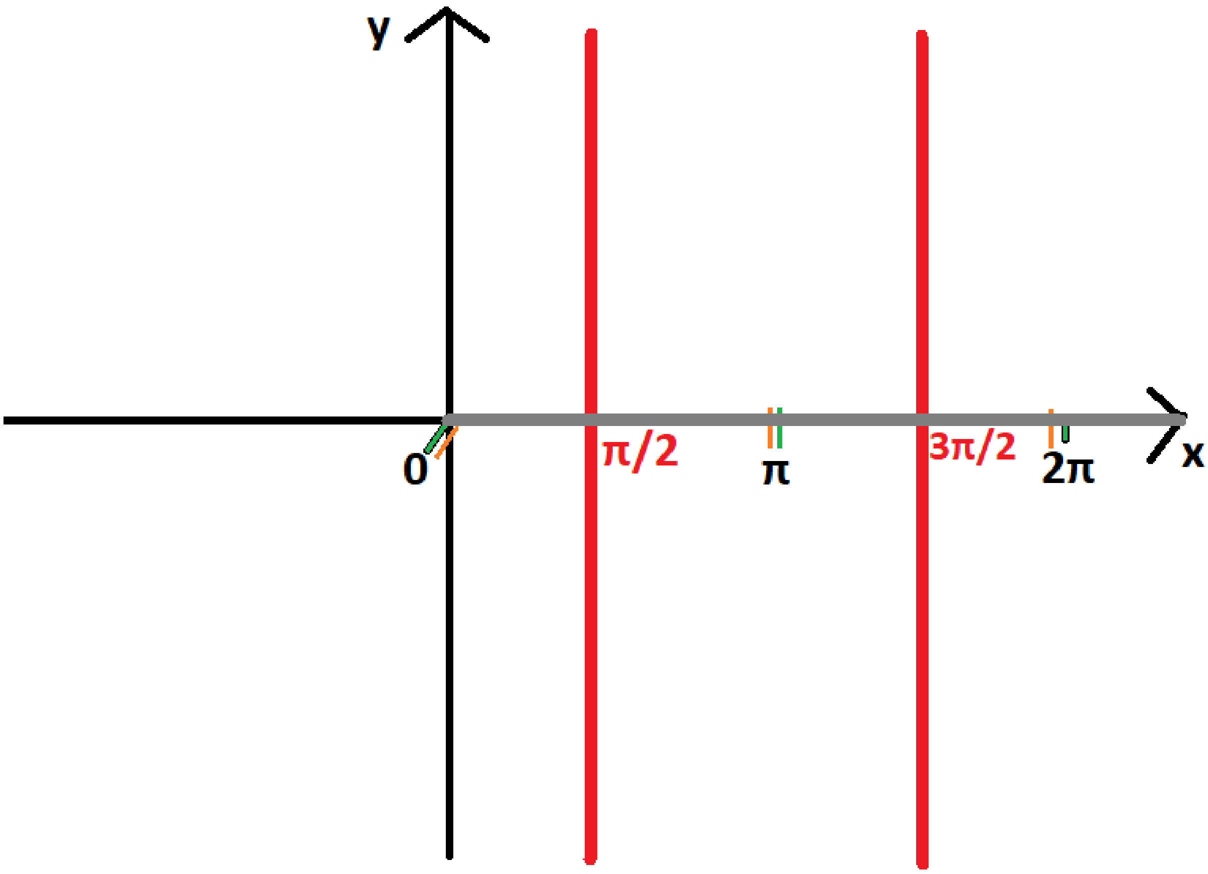
STAP 3: Duid je bijzondere punten binnen je periode-interval aan (snijpunten x- en y-as, buigpunten, extremawaarden … op voorwaarde dat ze er zijn natuurlijk).



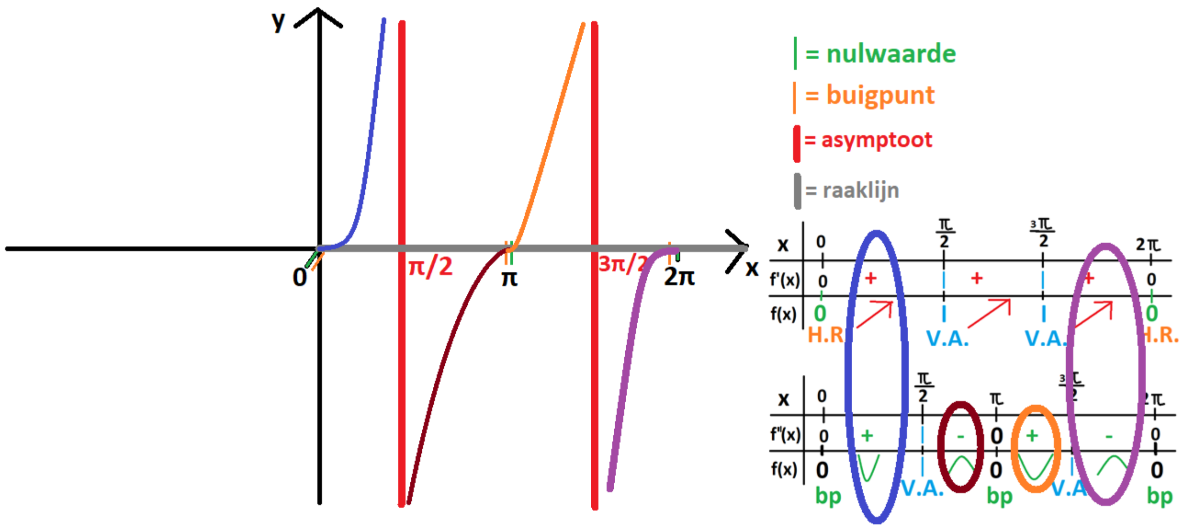
STAP 4: Duid je asymptoten, op voowaarde dat ze bestaan, binnen je periode-interval aan



STAP 5: Duid je raaklijn(en) aan



STAP 6: Schets je grafiek a.d.h.v. de door jou opgemaakte tabellen van de eerste- en tweede afgeleide functie



Let op: Bij 0 en 2π heb je een H.R., dit betekende horizontale raaklijn. Bij π heb je daarentegen géén H.R.. Je moet bij x = 0 en x = 2 laten zien dat de functie de x-as dan raakt, dus je moet dan langer op de x-as blijven!

(9) TROTS ZIJN OP JEZELF

Wees trots op jezelf dat je dit verloop hebt gevonden! Proficiat!

We gaan door naar het volgend leerstofonderdeel: limieten.

3) Limieten

3.1) Merkwaardige limiet: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

Je moet één bijzondere limiet kennen, namelijk $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

3.2) Andere limieten uitrekenen

Het uitrekenen van andere limieten gebeurt analoog met alle andere functies die we tot nu toe hebben gezien.

3.3) Voorbeeldoefeningen

<u>Oefening 11 in de cursus:</u>

t) $\lim_{x \to +\infty} \left(x \, . \sin \frac{1}{x}\right)$

--> We kunnen deze limiet numeriek opzoeken, met het numeriek opzoeken van limieten nemen vullen we een waarde kortbij de gegeven x-waarde in (in dit geval: oneindig) en kijken we hoeveel f(x) wordt. Bij het numeriek opzoeken van limieten steunen we dus letterlijk op de meest elementaire definitie van limieten: met een limiet proberen we een getal te benaderen.

--> We vullen 10000000 bijvoorbeeld in omdat dit een vrij groot getal is (x nadert immers oneindig!)

--> $10000000 \, . \sin \left(\frac{1}{10000000}\right) = 1$

→ Deze limiet gaat 1 dus naderen

--> We kunnen deze limiet ook algebraïsch (met een vleugje inzicht) oplossen. Wat doet de vergelijking die we hebben gekregen als x oneindig groot wordt?

--> De sinus wordt dan oneindig klein (aahja, want: $\sin \frac{1}{x}$)

--> Als de sinus oneindig klein wordt, nadert ze 0. Als je oneindig invult heb je duss…

$\infty \, . \sin 0 = \infty \, . 0 = ONBEPAALD$

--> Het klinkt misschien gek, maar je kan oneindig niet maal 0 doen, dit is een onbepaalde vorm. Dit hebben we in module 2 geleerd, we herhalen ter verfrissing de belangrijkste rekenregels met ∞.

(1BI) BELANGRIJKSTE REKENREGELS MET ONEINDIG

*De meeste rekenregels zijn voor de hand liggend, echter is er iets speciaals.

*VOORBEELDOEFENINGEN: (1) 7 +(+∞) = +∞

→ Een getal vermeerdert met oneindig is oneindig.

(2) 12 +(-∞) = 12 - ∞ = - ∞

→ Een getal vermindert met oneindig is min oneindig.

(3) 0.(± ∞) = /

→ Nul vermenigvuldigd met oneindig is onbepaald.

→ **Wie oneindig vermenigvuldigt met nul, is een snul**.

(4) +∞+(-∞) = /

→ We kunnen niet het symmetrisch element pakken van ∞

(5) (-4) . $(+\infty)^4$ + 3 . (-∞) = -∞

Merk op dat je de haakjesregel die in R geldt ook voor oneindig geldt, echter als je iets vermenigvuldigt ermee of optelt en aftrekt blijft het oneindig.

Je moet ervoor zorgen dat je iets krijgt waarom je L'hôpital kan toepassen.

$x \,.\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

--> Je weet dat delen door een breuk = maal het omgekeerde. We passen deze eigenschap omgekeerd toe.

We maken gebruik van een hulponbekende. We stellen immers dat: $y = \frac{1}{x}$. Als x naar oneindig gaat, gaat onze y dan naar 0. Je breuk wordt immers oneindig klein.

$\lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y}$

Dit is de merkwaardige limiet. Het antwoord op deze vraag is 1.

o) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\tan 4x} = \frac{0}{0}$

--> We bekomen 0/0 en moeten dus L'hôpital toepassen, dit betekende teller en noemer apart afleiden. Je mag de kettingregel echter zeker en vast niet vergeten!

$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\tan 4x} = (H) \frac{\cos 2x\ .2}{\frac{1}{cos^2 4x}.4} = \frac{2}{4}\cos 2x\ \ .cos^2 4x$

--> We vullen onze limiet nu opnieuw in: $= \frac{2}{4}\,.\cos(2\,.0)\,.cos^2\,(4\,.0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

p) $\lim_{x \to 2} \frac{\cos(x) - \cos 2}{x-2} = \frac{0}{0}$

--> DUS: L'hôpital --> (H): $\frac{-\sin(x)-0}{1-0} \to 2\ opnieuw\ invullen\ geeft\ volgend\ getal{:}\ -0{,}91$

j) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin(x)} = \frac{0}{0}$

--> DUS: L'hôpital --> (H): $\frac{1}{\cos(x)} \to 0\ opnieuw\ invullen\ geeft\ volgend\ getal{:}\,1$

k) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 6x}{\tan 4x} = \frac{0}{0}$

--> DUS: L'hôpital --> (H): $\frac{\frac{6}{cos^2 6x}\cdot}{\frac{4}{cos^2 4x}\cdot} = \frac{6\,cos^2 4x}{4\,cos^2 6x} \to \frac{\pi}{2}\ opnieuw\ invullen\ geeft\ volgend\ getal{:}\,1{,}5$

l) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 4x}{16x}$

--> Dit komt 0/0 uit, maar we gaan een andere manier dan L'hôpital proberen gebruikmakend van de formule van de merkwaarde limiet $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

--> $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 4x}{\cos 4x}}{16x} = \frac{\sin 4x}{\cos 4x \cdot 16x} = \frac{\frac{\sin 4x}{4x}}{\frac{\cos 4x \cdot 16x}{4x}} = \frac{1}{\cos 4x \cdot 4} = \frac{1}{4}$

z) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) - \sin x}{x^3} = \frac{\frac{\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) - \sin x}{x}}{\frac{x^3}{x}} = \frac{\frac{\sin x}{x \cdot \cos x} - \frac{\sin x}{x}}{x^2} = \frac{\frac{\sin x}{x}\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)}{x^2} = \frac{1 \cdot \left(\frac{\cos x - 1}{\cos x}\right)}{x^2}$

$= \frac{\cos x - 1}{x^2 \cdot \cos x} = \frac{0}{0}$

--> L'hôpital: $\frac{-\sin x - 0}{2x \cdot \cos x + x^2 \cdot (-\sin x)} = \frac{0}{0}$

--> L'hôpital : $\frac{\cos x}{2 \cdot \cos x + 2x \cdot (-\sin x) + 2x \cdot (-\sin x) + x^2 \cdot (-\sin x)}$

--> Hele blauwe term wordt 0 wegens een x aanwezig

$= \frac{\cos x}{2 \cos x} = \frac{1}{2}$

4) Vraagstukken

4.1) Oefening 15 cursus

Oefening 15 is een best wel makkelijke oefening en bespreken we daarom ook niet volledig in deze samenvatting.

15. (B) De verkoop van badpakken en bikini's is seizoensgebonden. Uit onderzoek weet een bedrijf dat het in de t-de week van het jaar een winst W (in honderden euro's) realiseert, gegeven door de formule:

$$W = 4 - 4\cos\left(\frac{\pi}{26}t\right) \qquad \text{met } t \in \{1{,}2, \dots, 52\}$$

a. Bereken W voor $t = 13, t = 26, t = 40$ en $t = 50$.

b. Schets de grafiek.

a) **We vullen éérst t = 13 in…**

$$\begin{aligned} W &= 4 - 4\cos(\tfrac{\pi}{26}t) \\ &= 4 - 4\cos(\tfrac{\pi}{26}\,.\,13) \\ &= 4 - 4\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) \\ &= 4 - 4\,.\,0 = 4 \end{aligned}$$

--> Voor t = 13 is W dus 4. De winst is dus 400 euro, je mag niet vergeten dat de winst in honderden euro's staat.

b) **De grafiek schetsen**…

--> Evenwichtsstand: d ➔ y = 4.

--> pulsatie b = $\frac{\pi}{26}$.

--> $periode = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{26}} = 2\pi\,.\frac{26}{\pi} = 52$

➔ De functie herhaalt zich om de 52, dat is ook logisch. Het herhaalt zich om de 52 weken = 1 jaar.

--> fase (verschuiving) = $-\frac{c}{b}$ = 0

--> Er is géén c aanwezig dus de verschuiving = 0.

--> amplitude = -4

--> dit betekent dat je een uitrekking van 4 t.o.v. de y-as krijgt, je moet de functie omkeren omdat je een minteken krijgt.

Op basis van deze gegevens kan je de grafiek schetsen. Weet je niet meer hoe je sinus-/cosinusfuncties schetst, ga dan naar samenvatting goniometrie II.

4.2) Oefening 16 cursus

Oefening 16 luidt als volgt…

16. (B) Een volwassen persoon in rust ademt elke vier seconden ongeveer 0,8 liter lucht in en uit. Het volume V (in liter) aan lucht in de longen, t seconden na het uitademen, wordt gegeven door:

$$V = 3{,}6 - 0{,}4\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \qquad \text{met } t \in [0{,}4[$$

a. Hoeveel lucht blijft er minimaal in de longen?

b. Hoeveel lucht is er maximaal in de longen?

c. Hoeveel lucht bevatten de longen na 0,5 seconden, na 1,5 seconden, na 2 seconden?

d. Hoeveel lucht ademt een persoon in tijdens de tijdspannes $\left[0,\frac{1}{2}\right[$, $\left[\frac{1}{2},1\right[$, $\left[1,\frac{3}{2}\right[$, $\left[\frac{3}{2},2\right[$?

e. Wanneer bevatten de longen in de tijdspanne $[0{,}4[$ meer dan 3,5 liter lucht?

f. Maak een grafiek van de functie die t afbeeldt op V.

a) Hoeveel lucht blijft er minimaal in de longen?

--> Als ik het woordje minimaal of maximaal hoor, denk ik direct aan afgeleiden omdat je een extremawaarde moet zoeken (herinnering: nulwaarden eerste afgeleide = extremawaarde).

--> Bij goniometrische vraagstukken kan het echter makkelijker…

$V = 3{,}6 - 0{,}4\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

--> Wanneer is deze functie minimaal of m.a.w. zo klein mogelijk? Aahja, het verschil tussen die twee getallen moet dan zo groot mogelijk zijn.

--> De vraag komt nu neer op: wanneer is de cosinus maximaal? We weten al uit samenvatting goniometrie II dat de cosinusfunctie maximaal is bij 0 radialen. Dit kwam overeen met het getal 1.

➔ We verkrijgen dus: $V = 3{,}6 - 0{,}4 \,.\, \cos(0) = 3{,}6 - 0{,}4 \,.\, 1 = 3{,}2\ l$

--> Er is dus altijd minimaal 3,2 l lucht in de longen.

Opmerking: zoals ik al zei kan je de gegeven functie afleiden, nulwaarden van je eerste afgeleiden zoeken, het tekenverloop maken en daaruit de extremawaarden (maxima/minima) afleiden, echter moet dit niet bij dit vraagstuk en in de wiskunde houden we het het liefst zo makkelijk mogelijk, nietwaar?

b) Hoeveel lucht blijft er maximaal in de longen?

$V = 3{,}6 - 0{,}4\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

--> Deze functie is maximaal als het verschil (-) tussen beide getallen zo klein mogelijk is.

--> Het verschil tussen beide getallen is zo klein mogelijk als de cosinus minimaal is.

--> De vraag komt dus neer op: wanneer is de cosinus minimaal? Hmmmm, eventjes kijken op de goniometrische cirkel en je ziet dat de cosinus bij $\frac{\pi}{2}$ (90°) minimaal is. Dan is de cosinus immers 0. Dus…

$$V = 3{,}6 - 0{,}4 \,.\, \cos\frac{\pi}{2} = 3{,}6 - 0{,}4 \,.\, 0 = 3{,}6 - 0 = 3{,}6\ l$$

c) Hoeveel lucht bevatten de longen na 0,5 seconden, 1,5 seconden en 2 seconden?
Deze vraag is een weggevertje, dit is letterlijk gewoon t invullen. t staat immers in seconden, je vult t = 0,5, t = 1,5 en t = 2 drie keren apart in. Ik doe daarom ook maar ééntje voor.

<u>t = 0,5</u>
$V = 3{,}6 - 0{,}4\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$
$= 3{,}6 - 0{,}4\cos\left(\frac{\pi}{2}.\frac{1}{2}\right) = 3{,}6 - 0{,}4\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3{,}6 - 0{,}4\,.\frac{\sqrt{2}}{2} = 3{,}6 - 0{,}2\,.\sqrt{2} = 3{,}32\ l$

d) Hoeveel lucht ademt een persoon in tijdens de tijdspannes $[\mathbf{0}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}[, [\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \mathbf{1}[$ …
Deze oefening is ook makkelijk, ik doe één voor, de rest verloopt op analoge wijze. Ik pak het interval [0; 0,5[.

Om dit te berekenen, bereken je als eerst hoeveel lucht er zit in de longen bij t = 0.
--> $V = 3{,}6 - 0{,}4\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 3{,}6 - 0{,}4\cos\left(\frac{\pi}{2}\,.0\right) = 3{,}6 - 0{,}4 = 3{,}2$
(dit hebben we eigenlijk al gedaan, dit is hoeveel lucht er minimaal in de longen zit)

Daarna bereken je hoeveel lucht er in de longen zit bij t = 0,5.
--> Dit hebben we al gedaan, zie berekening bij vraag c: $V = 3{,}32\ l$

De hoeveelheid ingeademde lucht is de lucht die je bij 0,5s in je longen hebt – de lucht die je als eerst in je longen had, bij t = 0s.

$V(ingeademd) = V(einde) - V(begin) = 3{,}32\ l - 3{,}20\ l = 0{,}12\ l$

e) Wanneer bevatten de longen in de tijdspanne [0, 4[meer dan 3,5 l lucht?
--> Als ik lees “meer dan” gaat er in m’n hersenen direct een alarm af: we hebben te maken met een ongelijkheid.
-->--> $3{,}5 < 3{,}6 - 0{,}4\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$
⇔ $0 < 0{,}1 - 0{,}4\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$
⇔ $0{,}1 - 0{,}4\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) > 0$
--> Zoals je hopelijk nog weet los je een ongelijkheid op als een gelijkheid, zoek je nulwaarden en bepaal je het tekenverloop.
➔ $f(x) = 0{,}1 - 0{,}4\cos(\frac{\pi}{2}t)$
--> $0 = 0{,}1 - 0{,}4\cos(\frac{\pi}{2}t)$
⇔ $-0{,}1 = -0{,}4\cos(\frac{\pi}{2}t)$
⇔ $0{,}1 = 0{,}4\cos(\frac{\pi}{2}t)$
⇔ $\frac{0{,}1}{0{,}4} = \cos(\frac{\pi}{2}t)$
⇔ $\cos(1{,}32) = \cos(\frac{\pi}{2}t)$
⇔ $\frac{\pi}{2}t = \pm 1{,}32 + k\,.2\pi$
⇔ $t = \frac{2}{\pi}(\pm 1{,}32 + k\,.2\pi)$
⇔ $t = \pm 0{,}84 + \frac{2}{\pi}.k\,.2\pi$
⇔ $t = \pm 0{,}84 + k\,.4$

Nu moet je, zoals al gezegd het tekenverloop maken. Het tekenverloop moet echter in onze gegeven interval (referentieverzameling).

We kunnen onze gevonden t's al opsplitsen:

$t = -0{,}84 + k \,.\, 4$ ∨ $t = 0{,}84 + k \,.\, 4$

➔ Die eerste t zit allereerst niet in onze referentieverzameling en is daarnaast ook fysisch onmogelijk. De tijd is een scalaire grootheid en kan nooit kleiner zijn dan 0.

--> Zit de eerste t wél in onze referentieverzameling als we er één periode bij tellen? Hmmm… Laten we eens eventjes kijken… :))))))))))))))))))))))

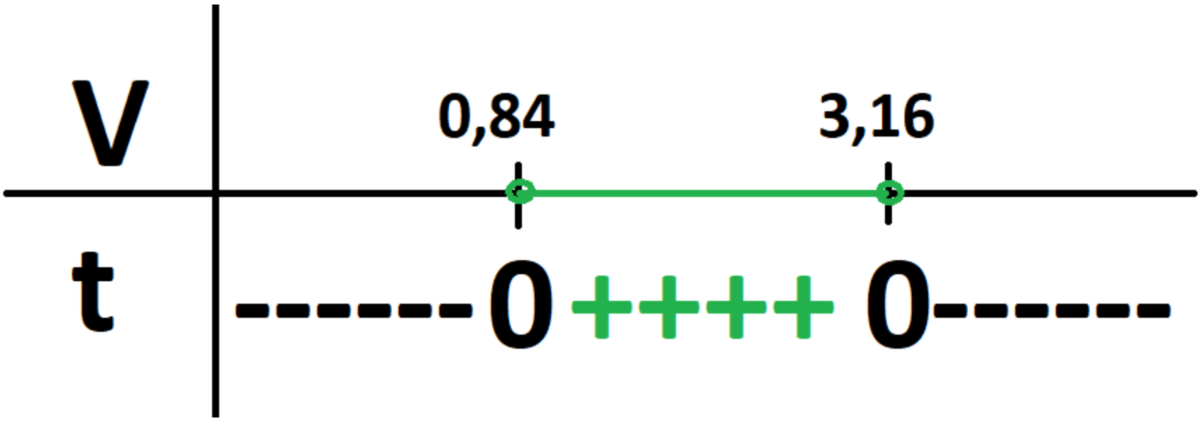
$t = -0{,}84 + 4 = 3{,}16$

--> Ja! 3,16 zit in ons interval (referentieverzameling).

➔ De tweede t zit al in onze referentieverzameling. Als we er één periode bij tellen gaat het buiten onze referentieverzameling.

We hebben dus 2 nulwaarden: 0,84 en 3,16.

Maken we het tekenverloop van de functie $f(x) = 0{,}1 - 0{,}4\cos(\frac{\pi}{2}t)$ bekomen we volgende tabel.



We zijn enkel geïnteresseerd in de positieve waarden, omdat we méér dan 3,5 l lucht willen hebben.

Dat is in het interval]0,84 ; 3,16[.

4.3) Oefening 17 cursus

Oefening 17 luidt als volgt:

17. (B) Sommige mensen geloven dat het leven van een mens verloopt in cycli van goede en slechte dagen. Ze onderstellen drie cycli, *bioritmen* genoemd, die allen beginnen bij de geboorte (t is het aantal dagen sinds de geboorte).

- Fysiek bioritme (vitaliteit, sterkte, energie), voorgesteld door een sinusfunctie met een periode van 23 dagen:

$$y = \sin\left(\frac{2\pi}{23}t\right)$$

- Emotioneel bioritme (creativiteit, stemming, welbehagen) voorgesteld door een sinusfunctie met een periode van 28 dagen:

$$y = \sin\left(\frac{2\pi}{28}t\right)$$

- Intellectueel bioritme (hersenarbeid, inzicht, studiebereidheid, geheugen), voorgesteld door een sinusfunctie met een periode van 33 dagen:

$$y = \sin\left(\frac{2\pi}{33}t\right)$$

Voor $y = 1$ is het betreffende bioritme uiterst gunstig, voor $y = -1$ uiterst ongunstig.

a. Maak t.o.v. eenzelfde assenstelsel de grafiek van elk bioritme. Je leest erop af hoe er in een leven vele combinaties van hoogten en laagten zijn.

b. Beschrijf de toestand 5537 dagen na de geboorte. Dat is, afhankelijk van het aantal verlopen schrikkeljaren, 15 jaar en 58 dagen of 15 jaar en 59 dagen.

c. Bepaal je leeftijd in dagen en bereken de toestand van je bioritmen.

a) Grafiek maken van de 3 gegeven functies.

De grafiek van deze functies maken is supersimpel. Ik doe enkel de grafiek van het fysiek bioritme voor.

$y = \sin\left(\frac{2\pi}{23}t\right)$

--> amplitude a = 1

--> pulsatie b = $\frac{2\pi}{23}$ ➔ $periode = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{23}} = 23$

--> fase (verschuiving t.o.v. x-as) = $-\frac{c}{b} = 0$ (want: c = 0)

--> evenwichtsstand y = d ⇔ y = 0

Zoals je ziet aan je functie komt het er slechts op neer aan de sinusfunctie uitrekken t.o.v. de x-as (de periode is nu immers 23), voor de rest blijft de functie hetzelfde.

Echter moet je weten waar je sinusfunctie haar extremawaarden bereikt, je weet inmiddels echter al dat extrema = nulwaarden eerste afgeleide.

$0 = \cos\left(\frac{2\pi}{23}t\right)$

$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{23}t = \frac{\pi}{2} + k\,.\,2\pi$

$\Leftrightarrow t = \pm\frac{\pi}{2}\,.\,\frac{23}{\cancel{2\pi}} + k\,.\,\frac{23}{2\pi}\,.\,2\pi = \pm 5{,}75 + k\,.\,23$

--> Voor t = 5,75 bereikt onze cosinus een maximum. Nu moet je die t-waarde invullen in de gewone functie om de bijbehorende y-waarde te weten te komen.

==> Aahja want als je 5,75 invult krijg je cosinus $\frac{\pi}{2}$ en zoals je weet is de cosinus dan maximaal, het heeft dan de getalwaarde 1.

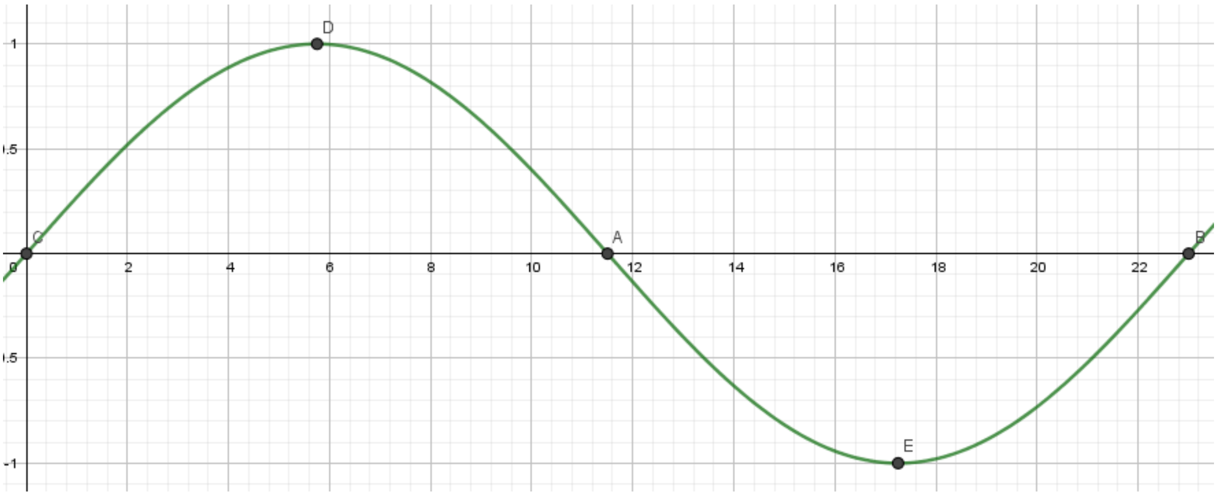
→ $y = \sin\left(\frac{2\pi}{23}t\right) = \sin(\frac{2\pi}{23}\,.5{,}75) = 1$

➔ Dus: (5,75; 1) = maximum

➔ Op analoge wijze vindt je: (-5,75; 1) = minimum

--> Echter kan -5,75 niet. Dagen kunnen immers niet negatief zijn, we moeten hier +23 bij tellen en verkrijgen (17,25;0)

Nu kan je de grafiek tekenen.



b) Wat is de toestand van een persoon na 5537 dagen?

Dit is de 3 functies gewoon letterlijk invullen.

$$fysiek: y = \sin\left(\frac{2\pi}{23}\,.t\right)$$
$$= \sin\left(\frac{2\pi}{23}\,.5537\right) = -0{,}99$$

Op analoge wijze vindt je…

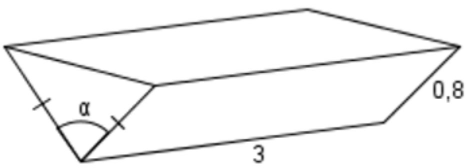
$emotioneel: y = -1$

$intellectueel: y = -0{,}97$

Deze persoon is dus in een zeer, met de nadruk op zeer, ongunstige toestand.

4.4) Oefening 18 cursus

18. (B) Een waterbak heeft de vorm van een recht prisma. De gegevens zijn vermeld op de figuur. Voor welke waarde van α is de inhoud maximaal?

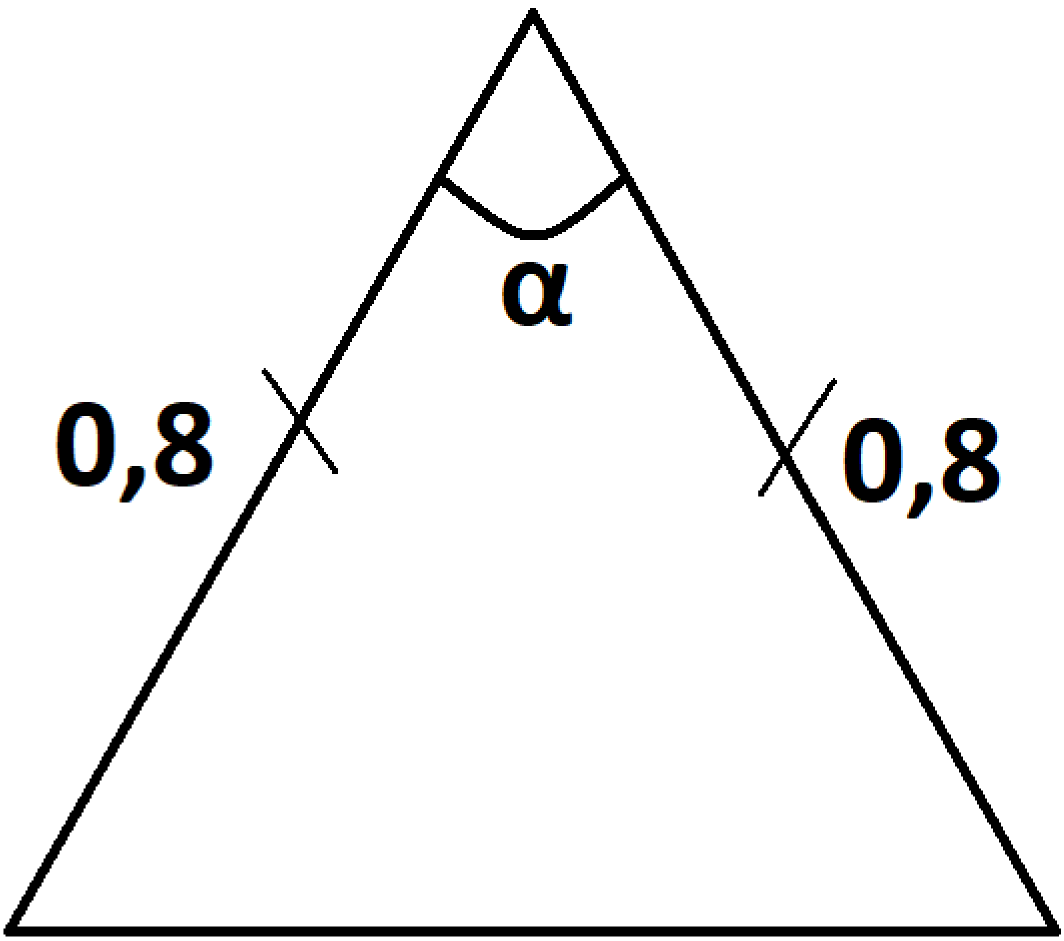


Opmerking: oefening 20 van de cursus verloopt analoog met deze oefening. Beide werkwijzen zijn, bijna, hetzelfde.

We werken in de wiskunde niet zo graag met problemen in 3D, iedereen heeft wel nog steeds trauma's van ruimtemeetkunde module 3. We reduceren een 3D-probleem het liefst tot een 2D-probleem, dat is leuker voor ons.

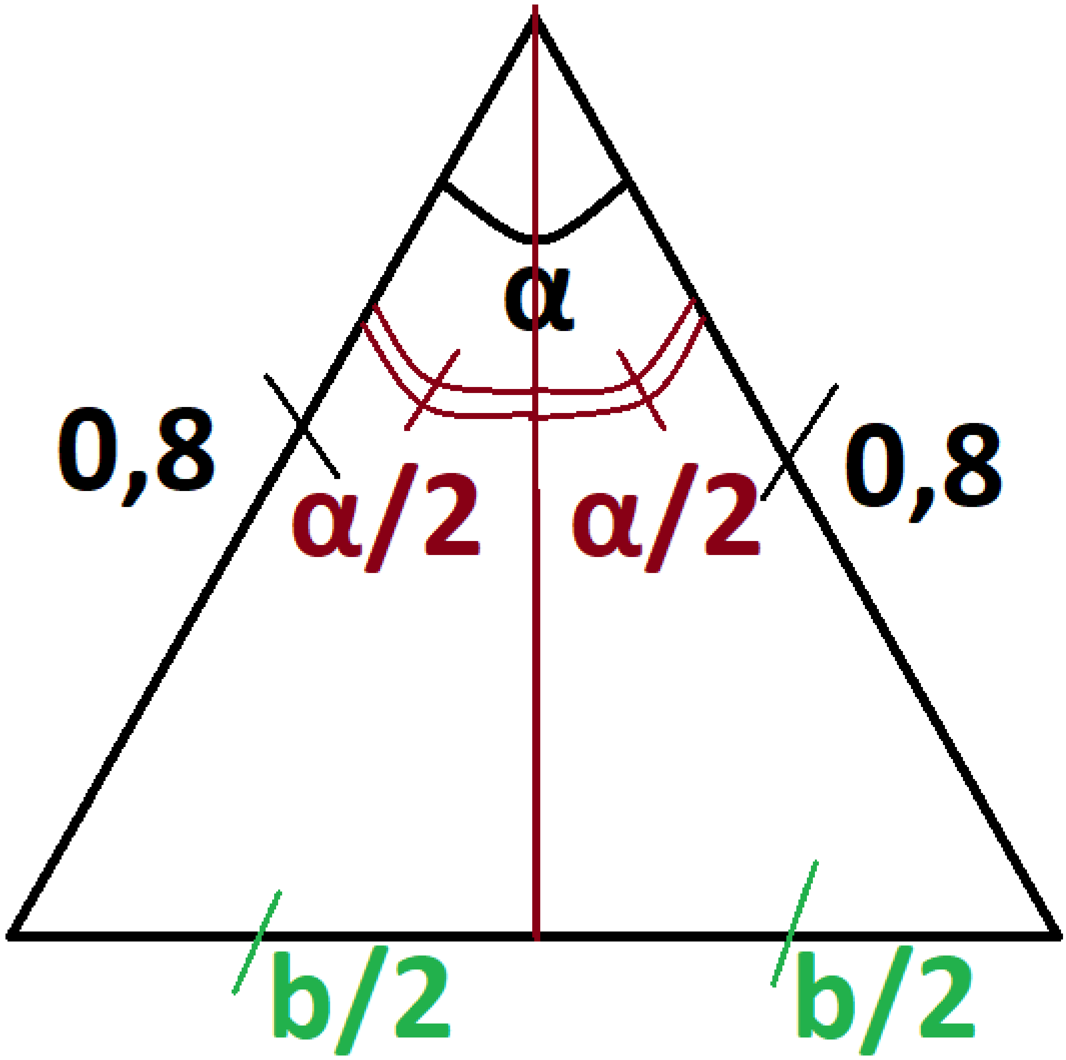
De volume van iets bereken je altijd door: $V = A\,.\,l = oppervlakte\ grondvlak\ .\,hoogte$
--> De hoogte is echter constant, die is 3 zoals je ziet op de figuur. De oppervlakte van de grondvlak, namelijk de driehoek, zal dus de grootte van de volume (= inhoud) bepalen.
--> Het volstaat dus om enkel de grondvlak te onderzoeken.

Let op: je hebt een gelijkbenige driehoek en kan uit de 3D-figuur afleiden dat de gelijkbenige zijden elk lengte 0,8 hebben.



Dit is ons probleem gereduceerd tot een 2D-probleem. Echter is dit géén rechthoekige driehoek en dat haten we ook in de wiskunde. Rechthoekige driehoeken zijn veel leuker want jeweetzelf SOSCASTOA geldt enkel in rechthoekige driehoeken.

Als we de bissectrice van de tophoek van onze driehoek pakken en die laten snijden met de basis, verkrijgen we 2 rechthoekige driehoeken. Dat is véél leuker.



We hebben nu 2 congruente, rechthoekige driehoeken.

Je weet ook dat de oppervlakte van een driehoek is gedefinieerd door volgende formule:
$A = \frac{b.h}{2}$

Je kan SOSCASTOA 2x toepassen:

SOS: $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{b}{2}}{0{,}8} \Leftrightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{1{,}6} \Leftrightarrow b = 1{,}6\,.\sin\frac{\alpha}{2}$

--> Je kent de basis nu.

CAS: $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{h}{0{,}8} \Leftrightarrow h = 0{,}8\,.\cos\frac{\alpha}{2}$

--> Je kent de hoogte nu. De hoogte h valt fyi samen met de bissectrice uit de tophoek.

Je kent de formule voor de oppervlakte van een driehoek: $A = \frac{b.h}{2}$
--> Die oppervlakte is maximaal als b . h = maximaal.

$b\,.h = max \Leftrightarrow 1{,}6\,.\sin\frac{\alpha}{2}\,.0{,}8\,.\cos\frac{\alpha}{2} = max.$

$\Leftrightarrow 0{,}8\,\left[2\sin\frac{\alpha}{2}\,.\cos\frac{\alpha}{2}\right] = max$

$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\,.\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = max$ (maximum = nulwaarden eerste afgeleide)

--> Dit is een verdubbelingsformule die op je formuleblad staat.

$\Leftrightarrow \sin(\alpha) = max$

Wanneer is de sinus maximaal? Eventjes nadenken… Aahja! Wanneer de sinus de waarde $\frac{\pi}{2}$ bereikt. Deze waarde komt overeen met 90°.

De oppervlakte is dus maximaal voor $\alpha = 90°$.

4.5) Oefening 19 cursus

Oefening 19 luidt als volgt…

19. (B) Het maatgetal I van de stroomsterkte van een wisselstroom na t seconden wordt gegeven door (c, ω, ψ zijn strikt positieve constanten):

a. $I = c.\sin \omega t$ b. $I = c.\sin(\omega t + \psi)$

Bepaal in elk van deze gevallen de waarden van t waarvoor I een maximum bereikt.

Als ik lees maximum gaat er direct een belletje af in mijn hersenen: éérste afgeleide. Dat is omdat ik een te goede student ben, het kan bij goniometrische functies veel makkelijker.

a) $\boldsymbol{I = c\,.\sin wt}$

--> Dit product is maximal als de sinus maximaal is. De sinus kan maximum 1 worden. Bij welke hoekgrootte was de sinus ook alweer 1? Aahja! Bij $\frac{\pi}{2}$!

--> Het komt er op neer dan $wt = \frac{\pi}{2}$ ==> Ben je volledig? Neen, de sinusfunctie herhaalt zichzelf om de 2π, dus…

$\Leftrightarrow wt = \frac{\pi}{2} + k\,.2\pi$ (perfect! Nu nog afzonderen naar t…)

$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2w} + \frac{k\,.2\pi}{w}$ (goed gedaan! Je oefening is opgelost)

b) $\boldsymbol{I = c\,.\sin(wt + \Psi)}$

--> Analoge werkwijze als oefening a, de sinus is maximaal bij π/2.

➔ $wt + \Psi = \frac{\pi}{2} + k\,.2\pi \Leftrightarrow wt = \frac{\pi}{2} - \Psi + k\,.2\pi \Leftrightarrow$ … (je kan zelf wel afzonderen, hoop ik)

Opmerking: Zoals al aangehaald kan je de afgeleiden bepalen, nulwaarden van de afgeleiden zoeken, stijgen en dalen bepalen om zo de maxima te zoeken. Waarom echter moeilijk doen als het makkelijker kan?

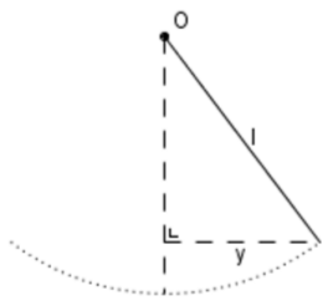
4.6) Oefening 21 cursus

Oefening 21 van de cursus is een weggevertje, deze oefening zou geen problemen moeten vormen.

21. (B) Voor een slinger met lengte l (in meter) geldt de formule:

$$y = a.\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

Hierin is y de afwijking t.o.v. de verticale na t seconden, a de maximale afwijking en g de gravitatieversnelling ($9.81\ m/s^2$).



a. Schrijf de formule voor een pendel met lengte 2 meter met een maximale afwijking van 50 cm.

b. Na hoeveel seconden wijkt de slinger 30 cm af van de verticale?

a) dit is letterlijk het invullen van de formule. Let op: l staat in meter, dus 0,50m.

$$y = 2\,.\sin\sqrt{\frac{g}{0{,}50}}t$$

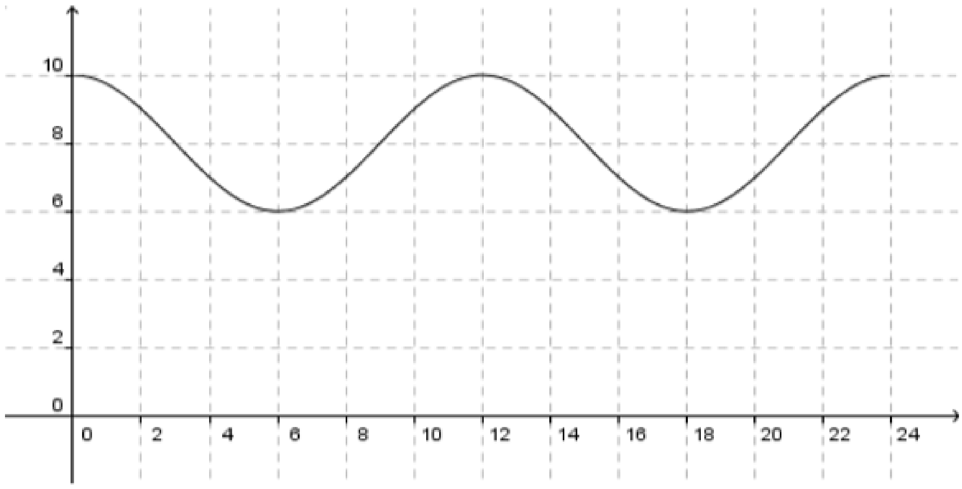
b) Dit is y = 30 cm = 0,30 m invullen in onze functie gevonden functie in a en t afzonderen.

4.7) Oefening 22 in de cursus

Oefening 22 luidt als volgt…

22. (B) De getijden worden veroorzaakt door de aantrekkingskracht van de maan op de aarde. Door de dagelijkse omwenteling van de aarde krijgt men in 24 uur (*) tweemaal eb en tweemaal vloed.

In een badplaats stelt men vast dat de hoogte h (in meter) van het water aan de pier in een bepaalde periode van het jaar het volgende verloop heeft:



Dat is een kromme met een vergelijking van de vorm $h = a.\cos(bt) + d$, met t in uur.

a. Bepaal de waarden van a, b en d.

b. In welke periode van de dag staat het water lager dan 7 meter?

(*) De situatie is hierboven enigszins vereenvoudigd. Het verloop van de getijden heeft plaats in een "maandag", dat is in 24 uur en 50 minuten in plaats van 24 uur.

a) Bepaal de waarden van a, b en d

Dit is makkelijk: a = amplitude = maximale uitwijking op de y-as.

--> Je ziet dat de cosinusfunctie maximaal 2 eenheden uitwijkt (8 --> 10) en (8 --> 6).

d = evenwichtsstand --> rechte y = d 'door het midden' van je functie.

--> Nu is de evenwichtsstand: y = 8 (zie je makkelijk, 8 is als het ware het middel van onze golvende cosinusfunctie). Bij de normale cosinusfunctie is de evenwichts-stand y = 0.

b = pulsatie. Je kan b uit de formule halen: $periode = \frac{2\pi}{b}$

--> Je periode kan je aflezen: na hoeveel x-waarden herhaalt mijn functie zich?

--> Je ziet dat de functie zich na 12 x-waarden herhaalt; periode = 12.

--> DUS: $b = \frac{2\pi}{periode} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$

Je kan je functievoorschrift nu opstellen: $h = 2\,.\cos(\frac{\pi}{6}t) + 8$

b) In welke periode van de dag staat het water lager dan 7 meter?
Lager dan: nu zou een belletje moeten rinkelen in je hoofd: ONGELIJKHEID!

Je weet inmiddels al hoe je een ongelijkheid oplost: afzonderen, nulwaarden, tekenverloop. We bespreken deze stappen kort (kort omdat goniometrische ongelijkheden oplossen al uitgebreid in een andere vraagstuk is voorgekomen).

<u>(1) AFZONDEREN</u>

$h = 2\,.\cos(\frac{\pi}{6}t) + 8$

==> $7 > 2\,.\cos(\frac{\pi}{6}t) + 8$

⇔ $0 > 2\,.\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 1$

⇔ $2.\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 1 < 0$

<u>(2) NULWAARDEN</u>

$f(x) = 2.\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 1$

➔ $0 = 2.\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 1$

⇔ $-\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

⇔ $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

⇔ ... (ga zelf na!)

⇔ $t = -4 + 12k$ ∨ $t = 4 + 12k$

--> Bij t = -4 ben ik 4 uur in de vorige dag. We moeten hierbij dus 1 periode, nl. 12 bij tellen.
--> DUS: t = 8

--> We kunnen bij t = 8 echter nog één periode bijtellen en binnen dezelfde dag blijven. Dus: 8 + 12.
--> t = 20

--> t = 4 is een mogelijke t-waarde.

--> We kunnen hier nog één periode bij tellen en nog steeds in dezelfde dag blijven: t = 16

<u>(3) TEKENVERLOOP</u>

Je hebt nu 4 nulwaarden, stop ze allemaal in een tekenverlooptabel. Check het tekenverloop na met testgetallen.

t		4		8		12		16	
h	+	0	-	0	+	0	-	0	+

We willen het water kleiner dan 7m, de negatieve oplossingen zijn correct. Je kan nu de intervallen aflezen, nl.: $]4{,}8[\ en\ ]12{,}16[$

4.8) Oefening 23 in cursus

23. (B) De lengte L (in uren) van een dag in Vlaanderen wordt benaderd door de formule:

$$L = 12 + 4{,}5\sin\left(\frac{2\pi}{365}x\right)$$

Hierin is x het aantal dagen verlopen sinds 21 maart, het begin van de lente.

a. Wanneer is de dag voor het eerst 14 uur lang?

b. Wanneer is de dag voor het eerst nog maar 9 uur lang?

c. Hoeveel uur schijnt de zon maximaal op één dag in Vlaanderen? Wanneer gebeurt dat?

d. Hoeveel uur schijnt de zon minimaal op één dag in Vlaanderen? Wanneer gebeurt dat?

<u>a en b) werkwijze</u>

Bij a en b ga ik enkel uitleggen wat je moet doen: je moet respectievelijk 14 en 9 uur invullen in de plaats van L. Dan bekom je een sinusvergelijking en moet je x afzonderen.

<u>c) Hoeveel uur schijnt de zon maximaal op één dag in Vlaanderen? Wanneer gebeurt dat?</u>

$L = 12 + 4{,}5\sin\left(\frac{2\pi}{365}x\right)$

--> L is maximaal als die som maximaal is.

--> Je weet inmiddels al dat de sinus maximaal is bij het getal 1.

--> De sinus bereikt haar maximum bij $\frac{\pi}{2}$.

--> Je kan de vraag dus herformuleren naar: voor welke x-waarde wordt de sinus $\frac{\pi}{2}$?

→ Ja, zo simpel is het, het komt gewoon hier op neer.

Dus eigenlijk los je volgende vergelijking op: $\frac{2\pi}{365}x = \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}.\frac{365}{2\pi} = \frac{365}{4} = (afgerond)\ 92$

→ 92 dagen na 21 maart schijnt de zon haar maximaal aantal uren in Vlaanderen.

<u>d) Hoeveel uur schijnt de zon minimaal op één dag in Vlaanderen? Wanneer gebeurt dat?</u>

Analoge redenering: $L = 12 + 4{,}5\sin\left(\frac{2\pi}{365}x\right)$

--> De sinus is minimaal bij -1 --> hoekgrootte dat hiermee overeenkomt = $-\frac{\pi}{2}$

→ DUS: $\frac{2\pi}{365}x = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = (afgerond) - 92$

--> Dit gebeurt 92 dagen VOOR 21 maart, oftewel -92 + 365 = 273. De zon schijnt haar minimaal aantal uren 92 dagen voor maart of 273 dagen na maart.

Veel succes op de toets of het examen!