Samenvatting wiskunde: Analyse: afgeleiden I – 7u wiskunde – made by Abdellah

---

(Z) VOORWOORD
Dit is de samenvattingenreeks wiskunde voor de afgeleidentoets/examen, de samenvatting van afgeleiden wordt gesplitst in 3 delen om structuur aan te brengen.

Afgeleiden I = Introductie + rekenen met afgeleiden + afgeleid getal + L'Hôpital
Afgeleiden II = Herhaling rekenregels + rekenregels afleiden met afgeleid getal + benadering nulwaarden.
Afgeleiden III = Bewijzen van de rekenregels

Veel leerplezier!

(Y) FOUTENPROCEDURE
Foutje in de samenvatting? Dat kan. Ik ben je dan ook heel dankbaar als je het meld via Smartschool. A.d.h.v. de ernst van de fout wordt het direct of pas later aangepast.

FOUT VAN DE 0DE GRAAD: Spellingsfout, verkeerde zinsbouw, de/het-fout … = niet melden
FOUT VAN DE 1STE GRAAD: Voorbeeldoefening verkeerd, theorie onvolledig = melden
→ Fouten van de 1ste graad worden gecommuniceerd via Smartschool en later aangepast.
FOUT VAN DE 2DE GRAAD: Ernstige fout waardoor de theorie verkeerd wordt uitgelegd = melden
→ Fouten van de 2de graad worden zo snel mogelijk aangepast en gecommuniceerd via Smartschool.

(X) INHOUDSTAFEL
Zie volgende pagina.

Inhoud

3) Bewijzen rekenregels

3.1) Afgeleide functie van de constante functie

*De constante functie is een functie van de vorm y = c evenwijdig of samenvallend met de y-as.
*Voor een constante functie C geldt: **DC = 0**. Bewijs volgt hieronder:

$Neem\ f(x) = C:$

$f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (limietdefinitie afgeleide)

$= \lim\limits_{x \to a} \frac{C-C}{x-a}$ (f(x) = C maar de functiewaarde van f(a) is ook C!)

$= \lim\limits_{x \to a} \frac{0}{x-a}$ (Rekenen)

$= 0$ (rekenen)

3.2) Afgeleide van de identieke functie

*De identieke functie is de functie met voorschrift y = x, het beeldt elk getal op zichzelf af.
*Voor een identieke functie f(x) = x geldt: **Dx = 1**. Bewijs volgt hieronder:

$f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (limietdefinitie afgeleide)

$= \frac{x-a}{x-a}$ (f(x) = x en de functiewaarde f(a) is ook gewoon a)

$= 1$ (rekenen)

3.3) Afgeleide van de functie y = x^n

*Voor de veeltermfunctie met graad > 1 geldt: **$Dx^n = nx^{n-1}$**. Bewijs volgt hieronder:

$f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (limietdefinitie afgeleide)

$= \lim\limits_{x \to a} \frac{x^n-a^n}{x-a}$ (functiewaarden invullen)

$= \lim\limits_{x \to a} (x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})$ (Horner gebruiken --> deling door x-a)

$= a^{n-1} + a.a^{n-2} + \cdots + a^{n-2}a + a^{n-1}$ (n termen)

$= na^{n-1}$ (elke optelling kan je schrijven als een vermenigvuldiging)

3.3) Afgeleide van de functie $y = \frac{1}{x}$

__Bewijs met de quotiëntregel:__

$D\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{D1\,.x - 1\,.Dx}{x^2}$ (quotiëntregel)

$= \frac{0\,.1 - 1\,.1}{x^2}$ (afgeleiden berekenen)

$= -\frac{1}{x^2}$ (bewezen!)

3.5) Afgeleide van de rationale functie $y = \frac{1}{x^n}$

*Voor deze functie geldt: $D\left(\frac{1}{x^n}\right) = -n\,.\,a^{-n-1}$. Bewijzen volgen hieronder:

(1) Bewijs met de limietdefinitie

$f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (limietdefinitie afgeleide)

$= \lim\limits_{x \to a} \frac{\frac{1}{x^n}-\frac{1}{a^n}}{x-a}$ (functiewaarden invullen, op gelijke noemers zetten)

$= \lim\limits_{x \to a} \frac{a^n x^n}{x^n a^n (x-a)}$ (op gelijke noemers gezet, alles onder kleine breukstreep mag onder grote)

$= \lim\limits_{x \to a} \left(-\frac{x^{n-1}+a.x^{n-2}+\cdots+a^{n-2}.x+a^{n-1}}{a^n x^n}\right)$ (Horner uitgevoerd)

$= -\frac{n\,.a^{n-1}}{a^{2n}}$ (uitrekenen)

$= -n\,.\,a^{-n-1}$ (uitrekenen)

(2) Bewijs met de quotiëntregel

$D\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{D1\,.x^n - 1\,.Dx^n}{x^{2n}}$ (quotiëntregel)

$\Leftrightarrow x^{-n} = \frac{-2x^{n-1}}{x^{2n}}$ (uitrekenen)

$= -nx^{n-\,1-2n}$ (uitrekenen, noemer naar boven gebracht)

$= -nx^{-n-1}$ (rekenen met machten) = bewezen

3.6) Afgeleide van een som van functies

*Voor twee functies f en g geldt: **D(f + g) = Df + Dg**. Bewijs volgt hieronder.

$Stel\ h = f + g$

$\rightarrow h'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a}$ (limietdefinitie afgeleide)

$= \lim\limits_{x \to a} \frac{[f(x)+g(x)]-[f(a)+g(a)]}{x-a}$ (h invullen)

$= \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)+g(x)-g(a)}{x-a}$ (haakjes uitwerken, ordenen)

$= \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim\limits_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ (een som van limieten mag je splitsen

$= f'(a) + g'(a)$ (limietdefinitie omgekeerd toegepast --> bewezen!)

3.7) Afgeleide van een product van functies

*Voor twee functies f en g geldt: **D(f . g) = Df . g + f . Dg**. Bewijs volgt hieronder

$Stel\ h = f.g$

$\rightarrow h'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a}$ (limietdefinitie afgeleide)

$= \lim\limits_{x \to a} \frac{[f(x).g(x)]-[f(a).g(a)]}{x-a}$ (h invullen)

$= \lim_{x \to a} \frac{f(x).g(x) - f(a).g(x) + f(a).g(x) - f(a).g(x)}{x-a}$ (distributiviteit toegepast)

$= \lim_{x \to a} \frac{[f(x).f(a)].g(x) + f(a)[g(x) - g(a)]}{x-a}$ (afzonderen)

$= \lim_{x \to a} \frac{[f(x).f(a)].g(x)}{x-a} + \lim_{x \to a} \frac{[g(x).g(a)].f(a)}{x-a}$ (een som mag je splitsen bij limieten, comm.)

$= \lim_{x \to a} \frac{[f(x).f(a)]}{x-a}. g(x) + \lim_{x \to a} \frac{[g(x).g(a)]}{x-a} . f(a)$ (rekenen met breuken)

$= \lim_{x \to a} \frac{[f(x).f(a)]}{x-a}. \lim_{x \to a} g(x) + \lim_{x \to a} \frac{[g(x).g(a)]}{x-a} . \lim_{x \to a} f(a)$ (een product van lim's splitsen)

$= f'(a). g(a) + f(a). g'(a)$ (limietdefinitie afgeleide omgekeerd toepassen)
→ Bewezen!

Dit waren alle rekenregels die je moet bewijzen. Degene die je niet moet kunnen bewijzen heb ik hierin niet opgenomen.

4) Differentieerbaarheid en continuïteit

*Je moet het verband tussen afleiden en continuïteit kunnen aantonen, we bewijzen de stalling:

--> Als een functie f differentieerbaar is in een punt a, dan is ze continu in a.

→ We weten: $f \ is \ continu \ in \ a$ ⇔ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ (limieten)

→ We weten ook: $f \ os \ diffentieerbaar \ in \ a: f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

*Bewijs:

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} [f(x) - f(a) + f(a)]$ (dit verandert niks aan de limiet want – en + heft elkaar op)

$= \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} . (x-a) + f(a)\right]$ (delen door x-a, blijft hetzelfde want we doen ook .!)

$= \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} . (x-a)\right] + \lim_{x \to a} f(a)$ (een som van limieten mag je splitsen!)

= $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} . \lim_{x \to a} (x-a) + f(a)$ (product van limieten mag je splitsen, rekenen met lim

$= f'(a). 0 + f(a)$ (limietdefinitie afgeleiden toegepast + limieten uitgerekend)

$= f(a)$ (rekenen)

= BEWEZEN