Wiskunde (7u) – examen M4 – kegelsneden – made by Abdellah – Atheneum Plus Hasselt

---

(Z) VOORWOORD
Dit is de samenvatting ter voorbereiding van het examen wiskunde voor M4.

In de samenvattingenreeks van kegelsneden behandelen we volgende hoofdstukken:
H1: inleiding kegelsneden
H2: parabolen
H3: Ellipsen
H4: Hyperbolen

(X) FOUTJE?
Dat kan, meld het via Smartschool aan mij (Abdellah)

(Y) INHOUDSTAFEL
Over twee pagina's.

Inhoud

3) De ellips

3.1) Definitie

3.1.1) definitie

De ellips E is een verzameling punten van het vlak, waarvoor de afstanden tot twee gegeven (brand)punten F_1 en F_2 constant is en gelijk is aan 2a. (a ∈ $\mathbb{R}_0^+$)

De punten F_1 en F_2 noemen we de brandpunten van de ellips.

Definitie met symbolen: $E = \{D \in \pi \mid d(D, F_1) + d(D, F_2) = 2a\}$

--> Lees deze symbolen zo…

‘E=’ betekent een ellips is

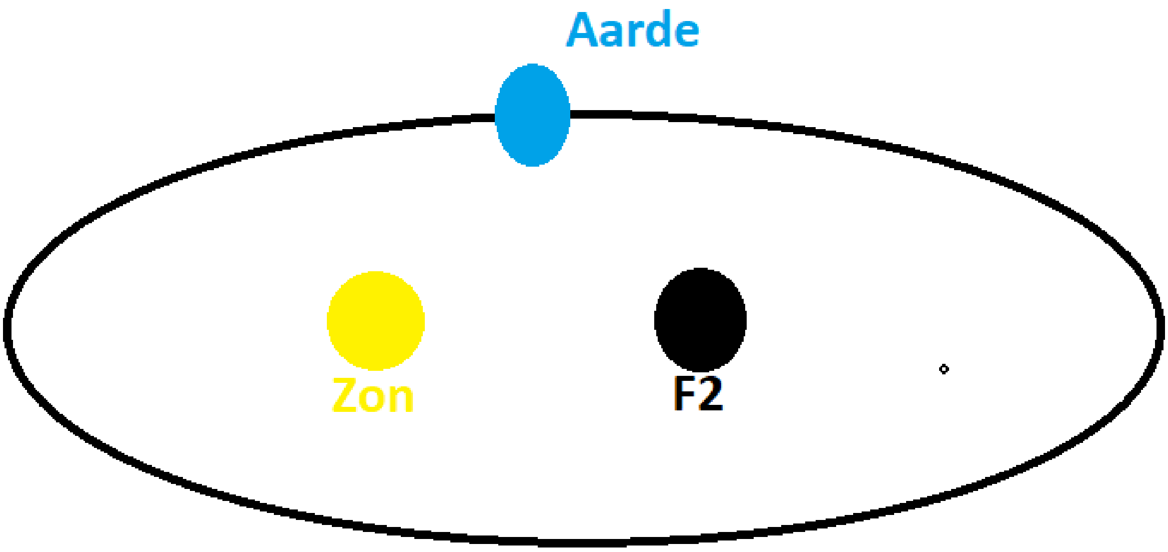
‘D ∈ π’ een verzameling punten van het vlak

| = waarvoor geldt.

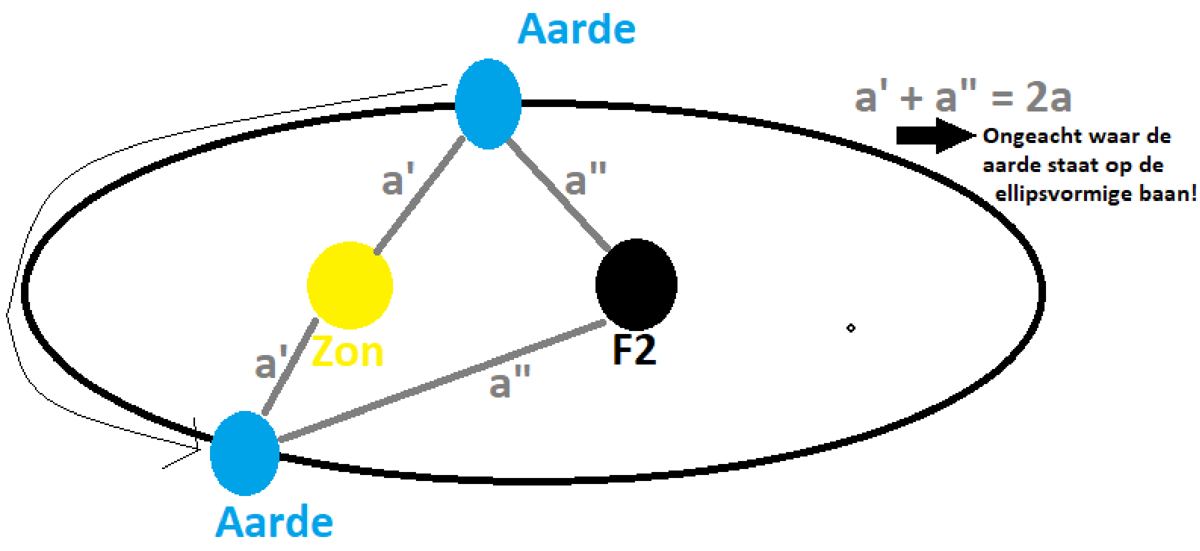
$d(D, F_1) + d(D, F_2) = 2a$ betekent de afstand (distance) tussen het punt D en eerste brandpunt opgeteld met het afstand tussen het punt D en tweede brandpunt is 2a.

3.1.2) Voorbeeld in dagelijks leven: het zonnestelsel

*De planeten maken een ellipsvormige beweging rond de zon in het zonnestelsel.
*De zon staat in één van de brandpunten bij de ellipsvormige baan van de aarde rond de zon.



*De definitie zegt dus dat de afstand tussen de aarde en zon en de afstand tussen de aarde en het brandpunt, ongeacht de plaats van de aarde op de ellipsvormige baan, altijd gelijk is aan 2a.



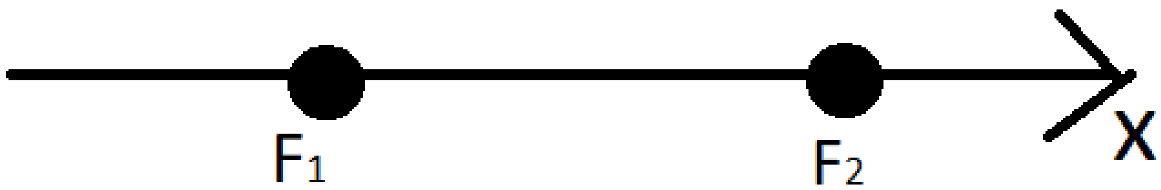
3.2) Cartesische vergelijking

3.2.1) Keuze van het assenstelsel

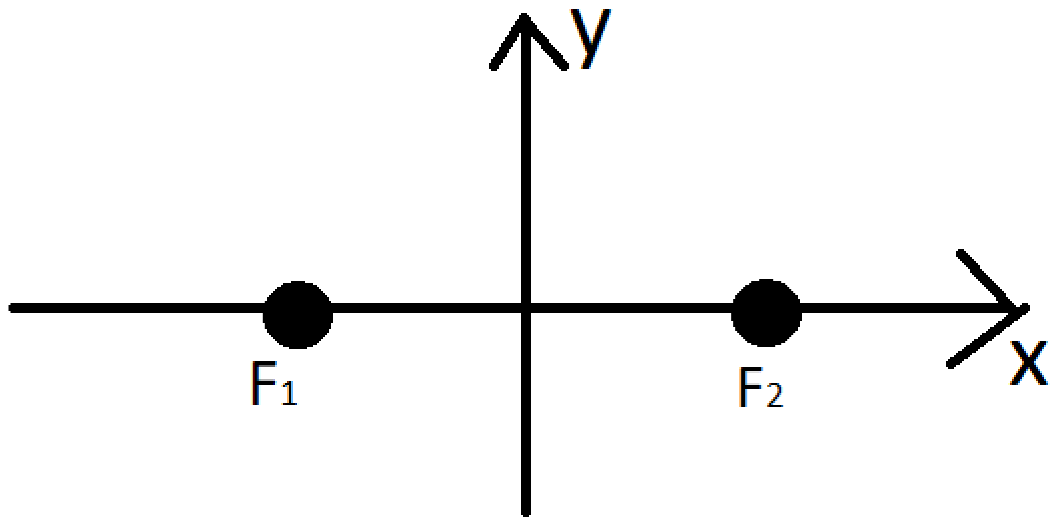
We beginnen met 2 brandpunten:

We kiezen een positief orthonormaal assenstelsel, dit betekent dat we een assenstelsel kiezen waarbij beide assen loodrecht op elkaar staan en de afstand tussen de ijkingen gelijk is.

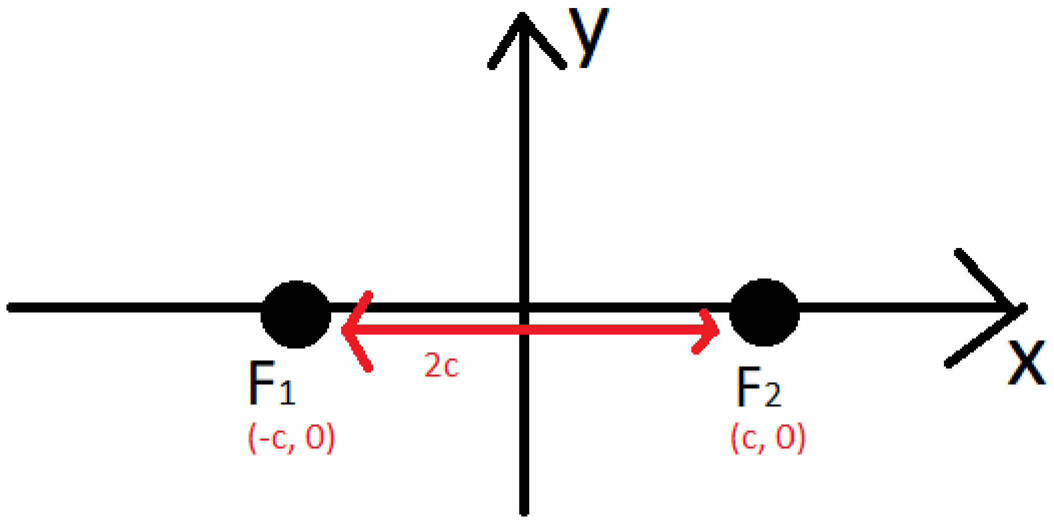
De x-as laten we samenvallen met rechte F_1F_2 zodat F_1 voor F_2 ligt.



Voor de y-as nemen we de middelloodlijn van F_1 en F_2.



We stellen de afstand tussen punten F_1 en F_2 gelijk aan 2c. Hieruit volgt dat…
$F_1 = (-c, 0)$
$F_2 = (c, 0)$
--> afstand tussen beide punten is 2c.



Nu heb je je assenstelsel goed gekozen!

3.2.2) Bewijs voor cartesische vergelijking

Als $D(x_1, y_1)$ een willekeurig punt van het vlak is en op een ellips ligt, dan geldt…

$D \in E \Leftrightarrow |DF_1| + |DF_2| = 2a$ (definitie van de ellips: som van afstanden punt tot beide brandpunten moet gelijk zijn aan 2a)

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x_1 - (-c)\right)^2 + (y_1 - 0)^2} + \sqrt{(x_1 - c)^2 + (y_1 - 0)^2} = 2a$$

(formule voor afstand tussen 2 punten is hier letterlijk in toegepast)

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_1 + c)^2 + (y_1)^2} + \sqrt{(x_1 - c)^2 + (y_1)^2} = 2a$$

(vereenvoudigen: -(- = + en 0 mag je weglaten)

→ Omdat beide leden van onze vergelijking positief zijn mogen we ze kwadrateren.

Als je positieve getallen kwadrateert geldt géén kwadrateringsvoorwaarde, je zal dus géén oplossingen bijmaken door te kwadrateren.

⇔ $\left(\sqrt{(x_1+c)^2+(y_1)^2}+\sqrt{(x_1-c)^2+(y_1)^2}\right)^2=4a^2$

(we hebben beide leden gekwadrateerd om de wortels weg te werken, we hebben dus zowel LL als RL tot de 2de macht gedaan)

--> Nu kunnen (moeten) we het dubbel product uitvoeren:

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

⇔ $\underbrace{(x_1+c)^2}_{a^2}+\underbrace{y_1^2+2.\sqrt{(x_1+c)^2+(y_1)^2}\sqrt{(x_1-c)^2+(y_1)^2}+(x_1-c)^2}_{+2\quad a\quad b\quad +\quad b^2}+y_1^2=4a^2$

⇔ $x_1^2+2x_1c+c^2+y_1^2+2.\sqrt{(x_1+c)^2+(y_1)^2}\sqrt{(x_1-c)^2+(y_1)^2}+(x_1-c)^2+y_1^2=4a^2$

(Dubbel product opnieuw uitgevoerd in de éérste term).

⇔ $x_1^2\cancel{+2x_1c}+c^2+y_1^2+2.\sqrt{(x_1+c)^2+(y_1)^2}\sqrt{(x_1-c)^2+(y_1)^2}+x_1^2\cancel{-2x_1c}+c^2$
$+y_1^2=4a^2$

(Dubbel product uitgevoerd in voorlaatste term (na wortels, groen gemarkeerd in vorige stap)

⇔ $2x_1^2+2y_1^2+2c^2+2.\sqrt{(x_1+c)^2+(y_1)^2}\sqrt{(x_1-c)^2+(y_1)^2}=4a^2$

(Vereenvoudigen: tegengestelde termen schrappen en gelijke termen optellen)

⇔ $2x_1^2+2y_1^2+2c^2+2.\sqrt{x_1^2+2x_1c+c^2+(y_1)^2}\,.\sqrt{x_1^2-2x_1c+c^2+(y_1)^2}=4a^2$

(Dubbel product onder wortel uitvoeren)

⇔ $2x_1^2+2y_1^2+2c^2+2.\sqrt{(x_1^2+2x_1c+c^2+(y_1)^2)(x_1^2-2x_1c+c^2+(y_1)^2)}=4a^2$

(Als je twéé wortels vermenigvuldigd mag je ze onder gelijke noemers zetten)

⇔ $2x_1^2+2y_1^2+2c^2+2.\sqrt{(\underbrace{x_1^2+y_1^2+c^2}_{a}\underbrace{+2x_1c}_{+\ b})\,.\,(\underbrace{x_1^2+y_1^2+c^2}_{a}\underbrace{-2x_1c}_{-\ b})}=4a^2$

(y_1^2 en $2x_1c$ hebben we van plaats gewisseld --> optelling is commutatief!)

(merk het merkwaardig product op: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$)

⇔ $2x_1^2+2y_1^2+2c^2+2.\sqrt{(x_1^2+y_1^2+c^2)^2-(2x_1c)^2}=4a^2$

(We hebben hier het merkwaardigproduct $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ toegepast!)

⇔ $2.\sqrt{(x_1^2+y_1^2+c^2)^2-(2x_1c)^2}=4a^2-(2x_1^2+2y_1^2+2c^2)$

(We brengen het groenblauwe gedeelte over)

⇔ $\sqrt{(x_1^2+y_1^2+c^2)^2-(2x_1c)^2}=2a^2-(x_1^2+y_1^2+c^2)$ **(2)**

(We delen beide leden door 2)

Nu moeten we kwadrateren, we gebruiken voorlopig een enkele pijl (we weten niet of er een kwadrateringsvoorwaarde geldt). Later bewijzen we dat de weg terug, de equivalentie (⇔) hier ook geldt.

==> $(x_1^2+y_1^2+c^2)^2-(2x_1c)^2=[2a^2-(x_1^2+y_1^2+c^2)^2]^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

⇔ $(x_1^2+y_1^2+c^2)^2-(2x_1c)^2=4a^4-2.2a^2.(x_1^2+y_1^2+c^2)+(x_1^2+y_1^2+c^2)^2$

➔ Gelijke term in LL en RL mag je schrappen: $(x_1^2+y_1^2+c^2)^2$

⇔ $-(2x_1c)^2=4a^4-4a^2(x_1^2+y_1^2+c^2)$

(Kwadraat uitwerken in LL)

⇔ $-(4x_1^2c^2)=4a^4-4a^2(x_1^2+y_1^2+c^2)$

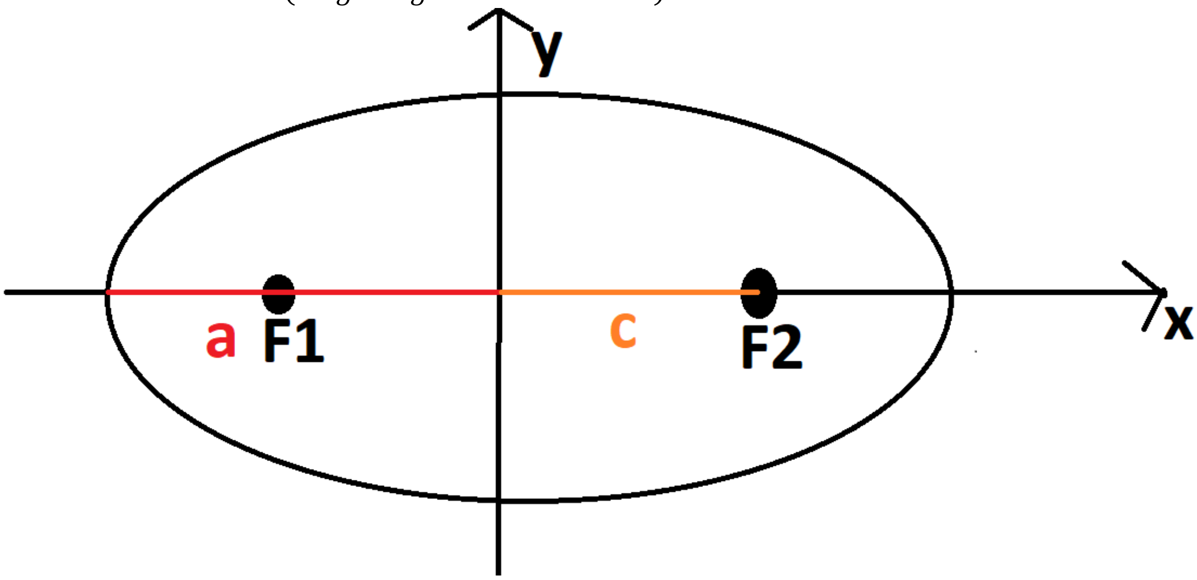
⇔ $-(x_1^2c^2)=a^4-a^2(x_1^2+y_1^2+c^2)$

(RL en LL delen door 4)

⇔ $-(x_1^2c^2)=a^4-(a^2x_1^2+a^2y_1^2+a^2c^2)$

(RL distributief uitwerken)

⇔ $-(x_1^2c^2) = a^4 - a^2x_1^2 - a^2y_1^2 - a^2c^2$
(- voor de haakjes wegwerken)
⇔ $a^2x_1^2 - x_1^2c^2 + a^2y_1^2 = a^4 - a^2c^2$
(We brengen alle termen met onbekenden, x en y, naar RL, alles zonder onbekende in LL)
⇔ $x_1^2(a^2 - c^2) + a^2\,y_1^2 = a^2(a^2 - c^2)$
(Gemeenschappelijke termen afzonderen in LL en RL)
→ $b^2 = a^2 - c^2$ $(mag\ aangezien\ a^2 - c^2 > 0)$



a komt overeen met de afstand van de oorsprong tot het einde van de ellips, c komt overeen met de afstand van de oorsprong tot een brandpunt. Je ziet hier perfect dat a² - c² dus altijd positief is.

⇔ $x_1^2b^2 + a^2\,y_1^2 = a^2b^2$ (formule 1: wordt vaak gebruikt maar niet algemeen)
($b^2 = a^2 - c^2$)
⇔ $\frac{x_1^2b^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y_1^2}{a^2b^2} = 1$ (RL en LL delen door a²b²)
⇔ $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ (deling in LL uitvoeren)
→ Dit is de **cartesische vergelijking van een ellips**. Maar we zijn nog niet klaar, we moeten de equivalentie (de pijl terug) no ook nog bewijzen. We vertrekken vanuit de cartesische vergelijking van de ellips en werken terug naar waar we de enkele pijl hebben gezet (2).
==> $(x_1^2 + y_1^2 + c^2)^2 - (2x_1c)^2 = [2a^2 - (x_1^2 + y_1^2 + c^2)^2]^2$ (hier hebben we de enkele pijl gezet)

Om dit te kunnen vervangen door een dubbele pijl moet RL > 0 aangezien je anders oplossingen bijmaakt die er niet zijn. Als RL < 0 geldt er immers een kwadraterings-voorwaarde.
--> Dus we moeten nu bewijzen dat: $2a^2 - (x_1^2 + y_1^2 + c^2)^2 > 0$

$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ ⇔ $\frac{x_1^2}{a^2} \leq 1 \;\;\wedge\;\; \frac{y_1^2}{b^2} \leq 1$
(Als de kwadraat van twee getallen 1 is, zijn beide getallen natuurlijk kleiner dan of gelijk aan 1 maar absoluut NIET groter)
⇔ $x_1^2 \leq a^2 \;\;\wedge\;\; y_1^2 \leq b^2$ (noemers naar boven halen aan de andere kant)
⇔ $x_1^2 + y_1^2 \leq a^2 + b^2$ (je mag twee ongelijkheden bij elkaar optellen, je telt LL en RL afzonderlijk met elkaar op)
⇔ $x_1^2 + y_1^2 + c^2 \leq a^2 + b^2 + c^2$ (we voegen c² toe aan LL en RL, dit doet niks aan onze

ongelijkheid maar we voegen het toe om aan het bewijs te komen. Kevin zei dat je dit gewoon moest aannemen)

⇔ $x_1^2 + y_1^2 + c^2 \leq a^2 + a^2 - c^2 + c^2$ (daarstraks zeiden we: $b^2 = a^2 - c^2$)

⇔ $x_1^2 + y_1^2 + c^2 \leq a^2 + a^2$ (uitwerken)

⇔ $x_1^2 + y_1^2 + c^2 \leq 2a^2$ (uitwerken)

⇔ $0 \leq 2a^2 - (x_1^2 + y_1^2 + c^2)$ (LL naar LL brengen)

→ Omdat we hebben bewezen dat RL strikt positief of nul is geldt er géén kwadrateringsvoorwaarde. ==> Mag dus vervangen worden door een dubbele ⇔ vervangen worden.

We hebben nu dus bewezen dat als:

$D \in E \Leftrightarrow |DF_1| + |DF_2| = 2a \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$

Als een punt op een ellips zit zijn de afstanden tussen de 2 brandpunten opgeteld gelijk aan 2a, dat komt overeen met de cartesische vergelijking: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$

De cartesische vergelijking van de ellips is dus:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

3.3) Onderzoek van de ellips

*E (ellips) is de grafiek t.o.v. het georthonormeer assenstelsel van de relatie f met:

$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\}$

(afzonderen naar y²)

--> Een georthonormeerd assenstelsel is een assenstelsel waarop de x, y en z-as loodrecht op elkaar staan en dezelfde schaalverdeling heeft.

--> De ellips is een relatie aangezien één x-waarde twéé y-waarden heeft.

$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)}\}$ (kwadraat uitwerken!)

$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = +\frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)} \;\vee\; -\frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}\}$ (b/a buiten wortel zetten)

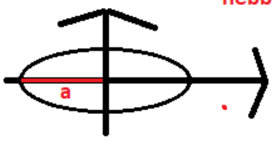
--> We hebben dus 2 verschillende functies:

$f_1 = +\frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$

$f_2 = -\frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$

Het volstaat om één van beide functies te onderzoeken aangezien je de ellips kan spiegelen om de x-as.

- $dom\ f_1 = [-a, a]$ Het domein van de functie gaat van -a tot a aangezien we de afstand a hebben gedefinieerd als de afstand van O tot het einde van de ellips



Herinnering: het domein is alle mogelijke x-waarden van je relatie!

- f_1 is continu in $[-a, a]$ (Een irrationale functie is continu in elk punt van haar domein)

Een irrationale functie (f1 die we onderzoeken) is een functie met x onder één of meerdere wortels en die is continu in elk punt van haar domein.

- snijpunt met de x-as: $y = 0 \quad \Rightarrow x = a \vee x = -a \quad \Rightarrow (a, 0)$ en $(-a, 0)$ Snijpunten bepalen kan je wel hoop ik.

  snijpunt met de y-as: $x = 0 \quad \Rightarrow y = b \vee y = -b \quad \Rightarrow (0, b)$

  Voor f_2 vinden we dus $(0, -b)$

- $f_1' = D\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right)$ (we willen de afgeleide bepalen van de functie)

  $= \frac{b}{a} D(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ (je mag een constante, b/a in dit geval, voor de afgeleide zetten)

  $= \boxed{\frac{b}{2a}(a^2 - x^2)^{\frac{-1}{2}}}$ $\boxed{D(a^2 - x^2)}$

  Eerst alles buiten haakjes afleiden: macht naar voor, macht eentje minder

  Dan alles in de haakjes afleiden: macht naar voor, macht eentje minder

  (toepassing van de kettingregel: éérst alles buiten je macht afleiden daarna alles in je macht afleiden, die 2 doe je maal elkaar)

  --> let op! a² is een getal (constante) en moet je dus NIET afleiden, enkel de onbekende x moet je afleiden!!!!!

  $= \frac{b.(-2x)}{2a\sqrt{a^2-x^2}}$ (negatieve macht mag je onder de breukstreep zetten en tot de macht 1/2de kan je als vierkantswortel schrijven)

  $= \frac{-bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$ (uitwerken: delen door 2)

- $f_1'' = D\frac{-bx}{a\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{b}{a}\frac{Dx.\sqrt{a^2-x^2} - x.D\sqrt{a^2-x^2}}{a^2-x^2} = -\frac{b}{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2} - x.\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2}$

  $= -\frac{b}{a}\frac{\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2} = -\frac{b}{a}\frac{\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2} = -\frac{b}{a}\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot \frac{1}{a^2-x^2}$

  $= -\frac{ab}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

  (quotiëntregel toepassen en regels voor afleiden van irrationale functies toepassen)

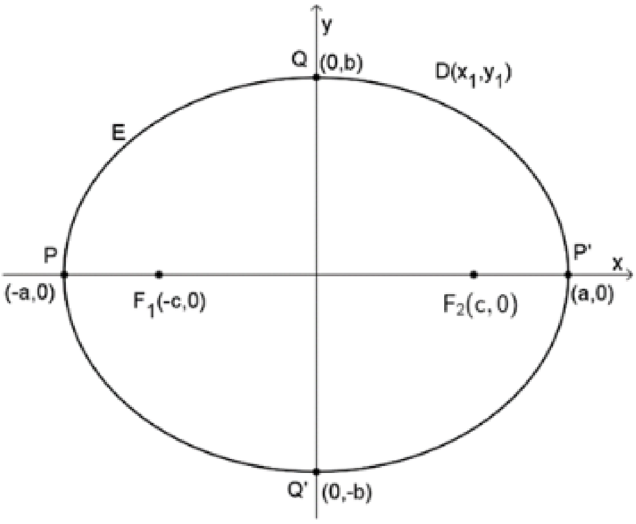
- Samenvattende tabel:

x	///	$-a$		0		a	///
				HR			
f_1'	///	|	+	0	−	|	///
f_1''	///	|	−	−	−	|	///
f_1	///	0	↗	Max: b	↘	0	///
f_1	///	VR	∩	∩	∩	VR	///

Je maakt je tekenverloop door testgetallen in je eerste- en tweede afgeleide in te voeren. Die – voor de breukstreep bij de 2de afgeleide maakt hem altijd negatief.

Als de eerste afgeleide niet bestaat dan is de rico van de raaklijn in feite oneindig, die raaklijnen noemen we verticale raaklijnen (= VR)
Als de eerste afgeleide 0 is heb je een extremawaarde (maximum of minimum) bereikt, dan is de rico van de raaklijn ook 0, dit komt overeen met een horizontale raaklijn. Die raaklijn noemen we de horizontale raaklijn = HR.

- Grafiek:

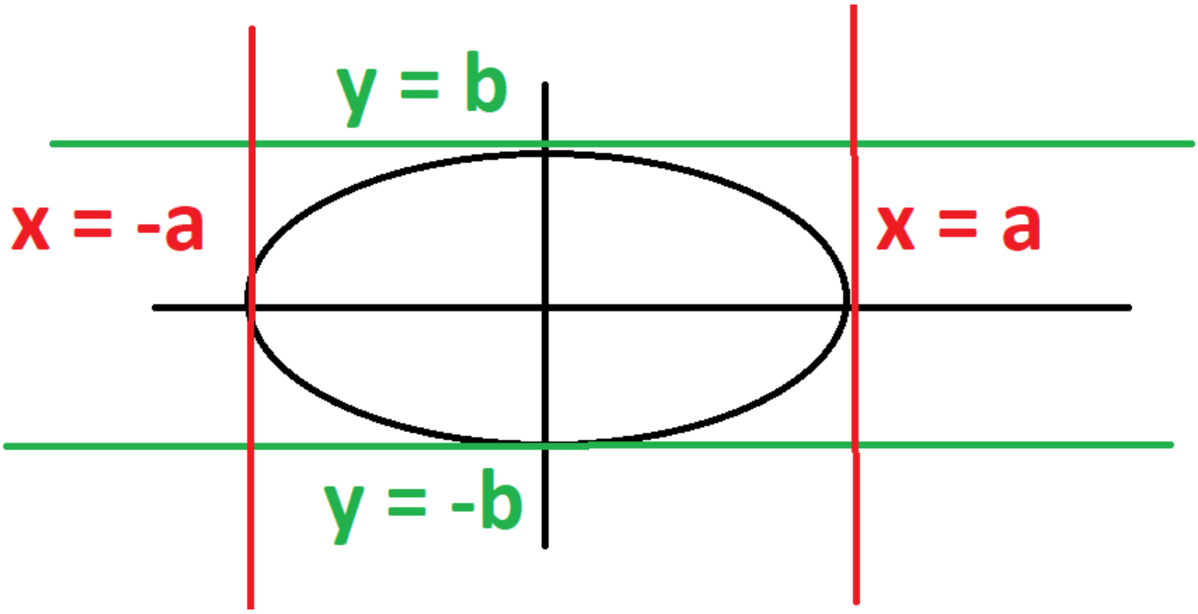


*Opmerkingen:
(I) PP' = x-as = hoofdas = 2a
--> De x-as noemen we de hoofdas
(II) QQ' = y-as = kleine as/nevenas
(III) Indien F_1 en F_2 samenvallen is c = 0 en dan is a = b (dan zijn beide afstanden gelijk).
De vergelijking wordt dan: $\frac{x_1^2}{a} + \frac{y_1^2}{a} = 1 \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = a^2$ (met a de straal v/d cirkel)
Dat groen gemarkeerde is de cartesische vergelijking van een cirkel. **Een cirkel is dus als het ware een speciale ellips**.
(IV) De verhouding $e = \frac{c}{a}$ noemt men de **excentriciteit** van de cirkel. Omdat c < a zal 0 < e < 1. De excentriciteit van een cirkel is 0 (omdat c = 0!).
--> De excentriciteit van een parabool = 1 omdat de afstand tussen de richtlijn en het brandpunt hetzelfde was, dus is die verhouding 1.

3.4) Raaklijnen

3.4.1) Topraaklijnen

*De raaklijnen aan de toppen van de ellips noemen we topraaklijnen
--> De vergelijkingen zijn: $x = a; x = -a; y = b; y = -b$



3.4.2) Andere raaklijnen

STELLING

In punt D(x_1, y_1) van een ellips E met vergelijking $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$ is de vergelijking van de raaklijn t aan E: $\frac{x_1x}{a}+\frac{y_1y}{b}=1$.

BEWIJS

We weten dat de eerste afgeleide = rico van de raaklijn.

--> $f'(x)=\frac{-bx_1}{a\sqrt{a^2-x_1^2}}$

--> De functie waarvan we de eerste afgeleide hebben berekend was: $y=\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}$

--> we zonderen de wortel as: $\frac{ay}{b}=\sqrt{(a^2-x^2)}$

--> Dit vervangen we erin: $f'(x)=\frac{-bx_1}{a\,.\frac{ay_1}{b}}$

$=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$ (delen door breuk is maal het omgekeerde: maal b)

We weten dat de algemene vergelijking v/d rechte is: $y-\ y_1=m(x-x_1)$

--> m kennen we nu: $y-\ y_1=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\ ((x-x_1)$

$\Leftrightarrow a^2y_1y-a^2y_1^2=-b^2x_1(x-x_1)$ (noemer naar boven halen)

$\Leftrightarrow a^2y_1y-a^2y_1^2=\ -bxx_1+b^2x_1^2$ (RL distributief uitwerken)

$\Leftrightarrow \frac{y_1y}{b^2}\ -\frac{y_1^2}{b^2}=-\frac{xx_1}{a^2}+\frac{x_1^2}{a^2}$ (RL en LL delen door a^2b^2)

$\Leftrightarrow \frac{xx_1}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}$ (overbrengen)

$\Leftrightarrow \frac{xx_1}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$ (cartesische vergelijking van de ellips)

Als één van coördinaat 0 is (bij de topraaklijnen) dan verkrijg je x = a, x = -a, y = b of y = -b.

3.5) Vergelijking van de normaal

*Je weet dat de normaal loodrecht staat op de raaklijn.

--> Het verband tussen de rico's van 2 rechten die loodrecht om elkaar staan:

$m_R \, . \, m_N = -1 \; (met\ R = raaklijn\ en\ N = normaal)$
⇔ $m_N = -\frac{1}{m_R} = -\frac{1}{-\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}} = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$ (we kennen de rico van de raaklijn, dat is de 1ste afgeleide).

Nu we de rico van de normaal ook kennen, kunnen we ze invullen in de algemene vergelijking van een rechte $y - y_1 = m(x - x_1)$

⇔ $y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$

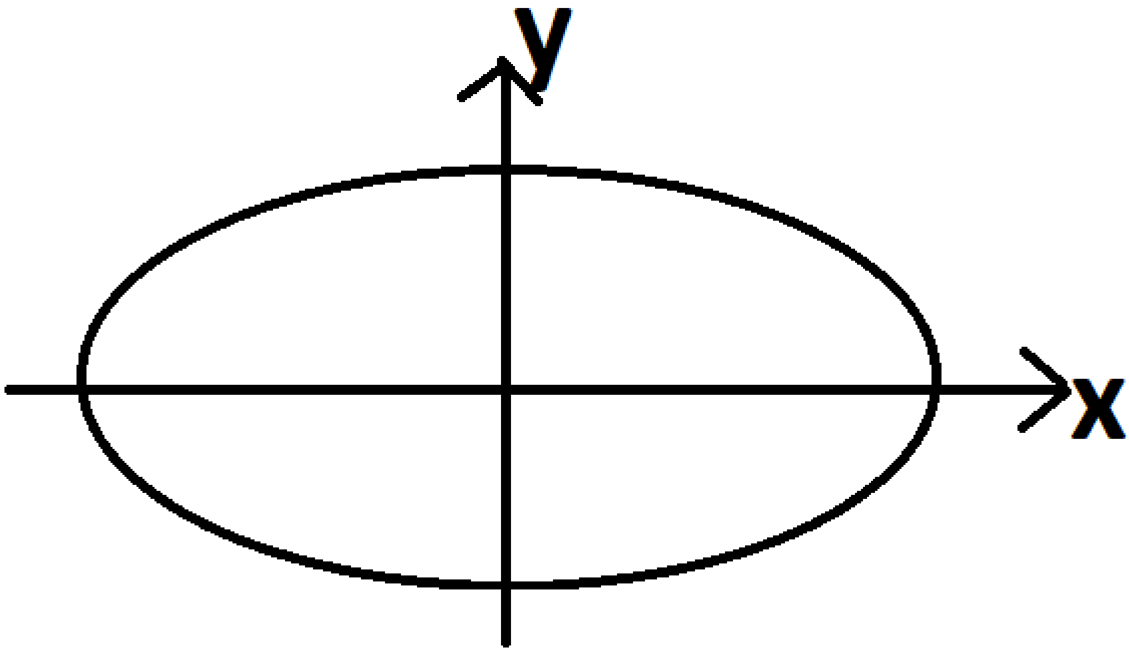
--> Dit is de vergelijking van de normaal in de punt van een ellips.

Kevin Wanten tip #8475: Als je de raaklijn uitrekent, zonder dan af naar de vorm y = ax + b, dan is a je rico. Dan kan je de rico van de normaal makkelijk vinden door de formule $m_N = -\frac{1}{m_R}$. Anders moet je die andere formule onthouden.

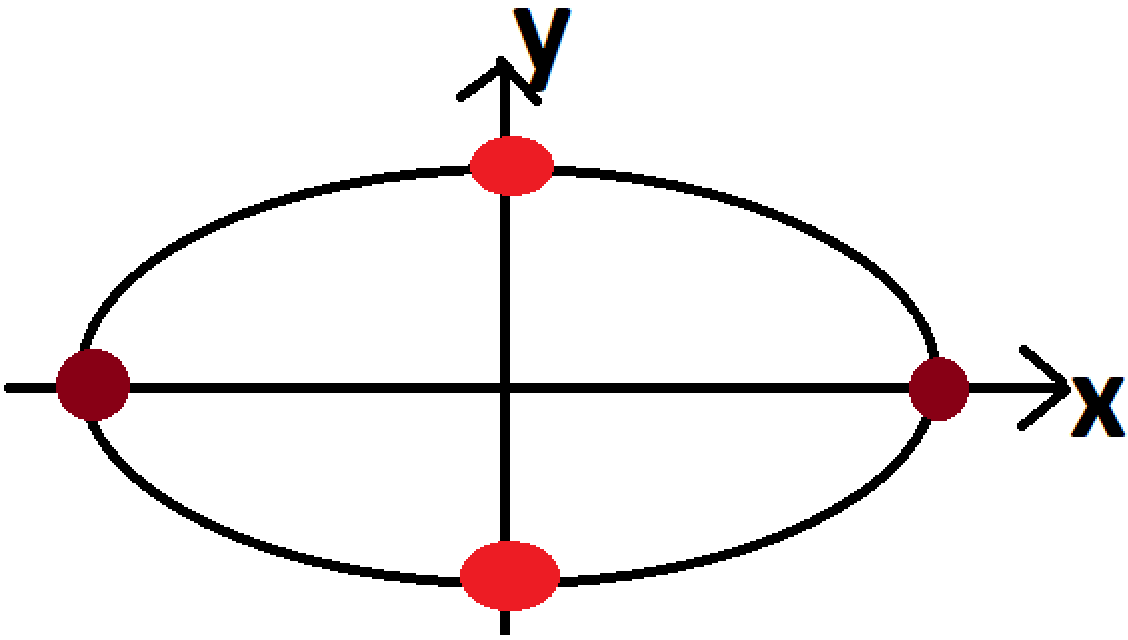
3.6) Meetkundige constructies

3.6.1) Constructie van brandpunten als ellips gegeven is

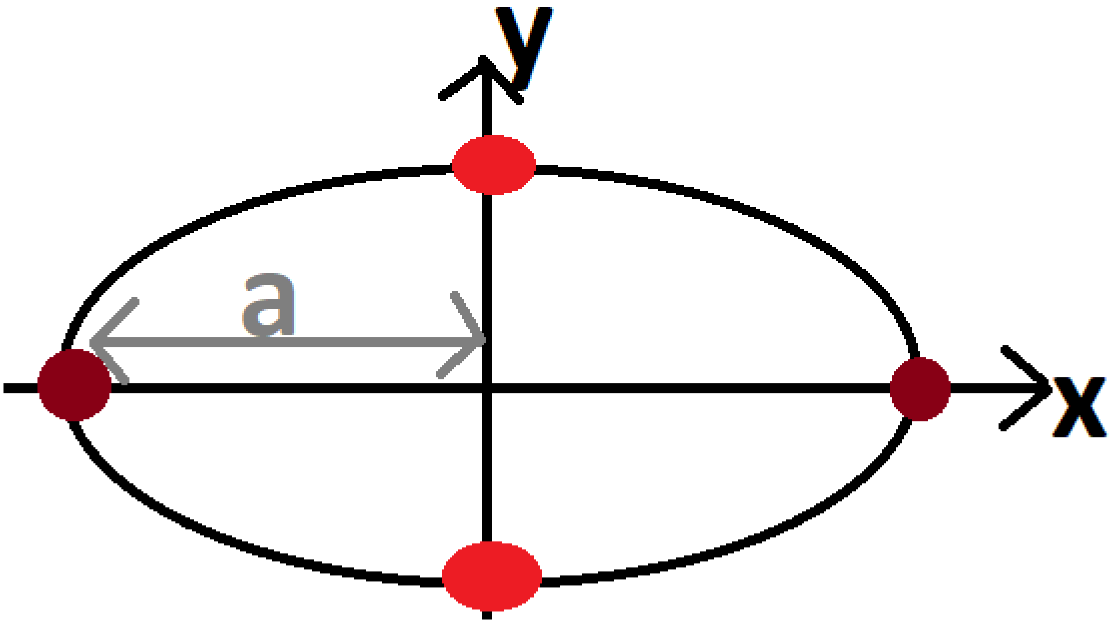
BEGINSITUATIE



Je hebt een geijkt assenstelsel gegeven met een ellips, je weet dan in principe al 4 punten

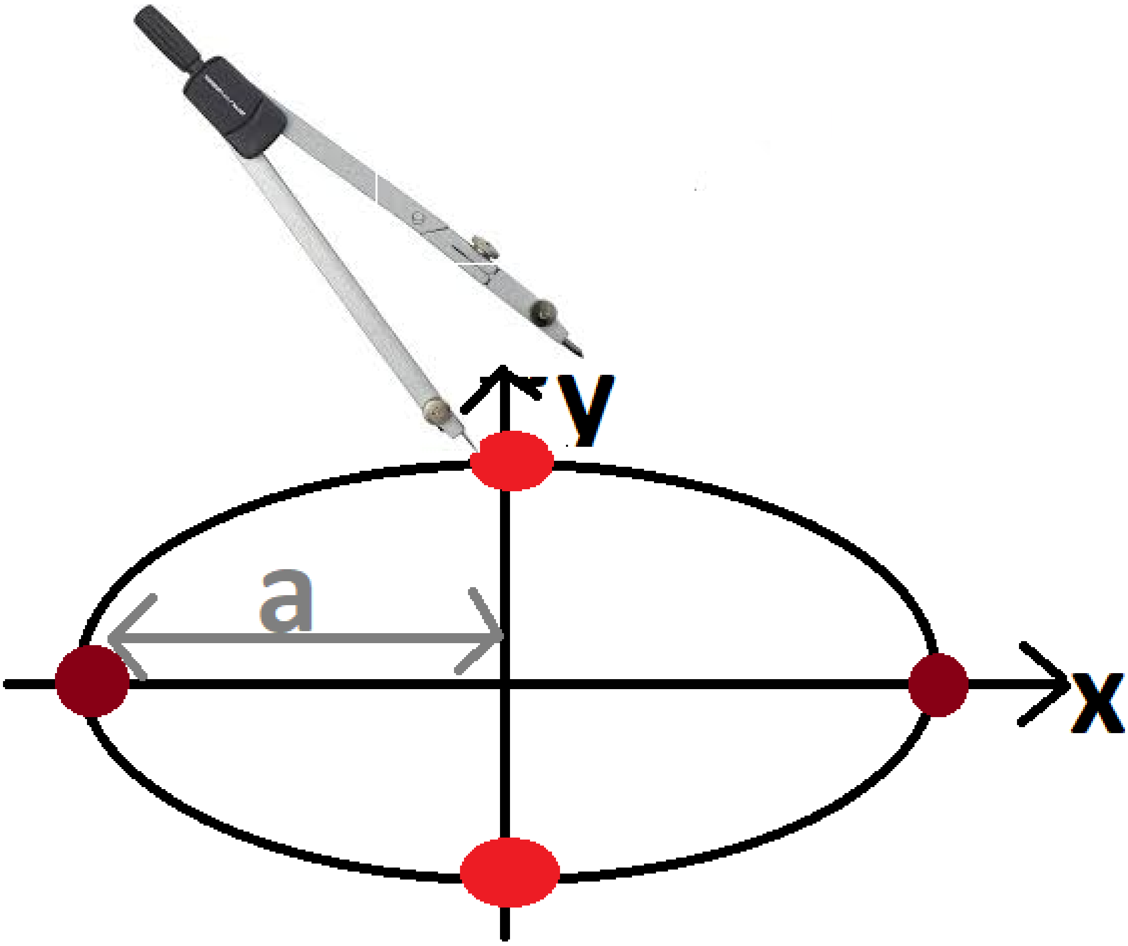


De 4 punten kan je aflezen op het assenstelsel. Je weet ook dat de afstand tussen één donkerrood punt en de oorsprong gelijk is aan a. We stellen die afstand bijvoorbeeld gelijk aan 2.

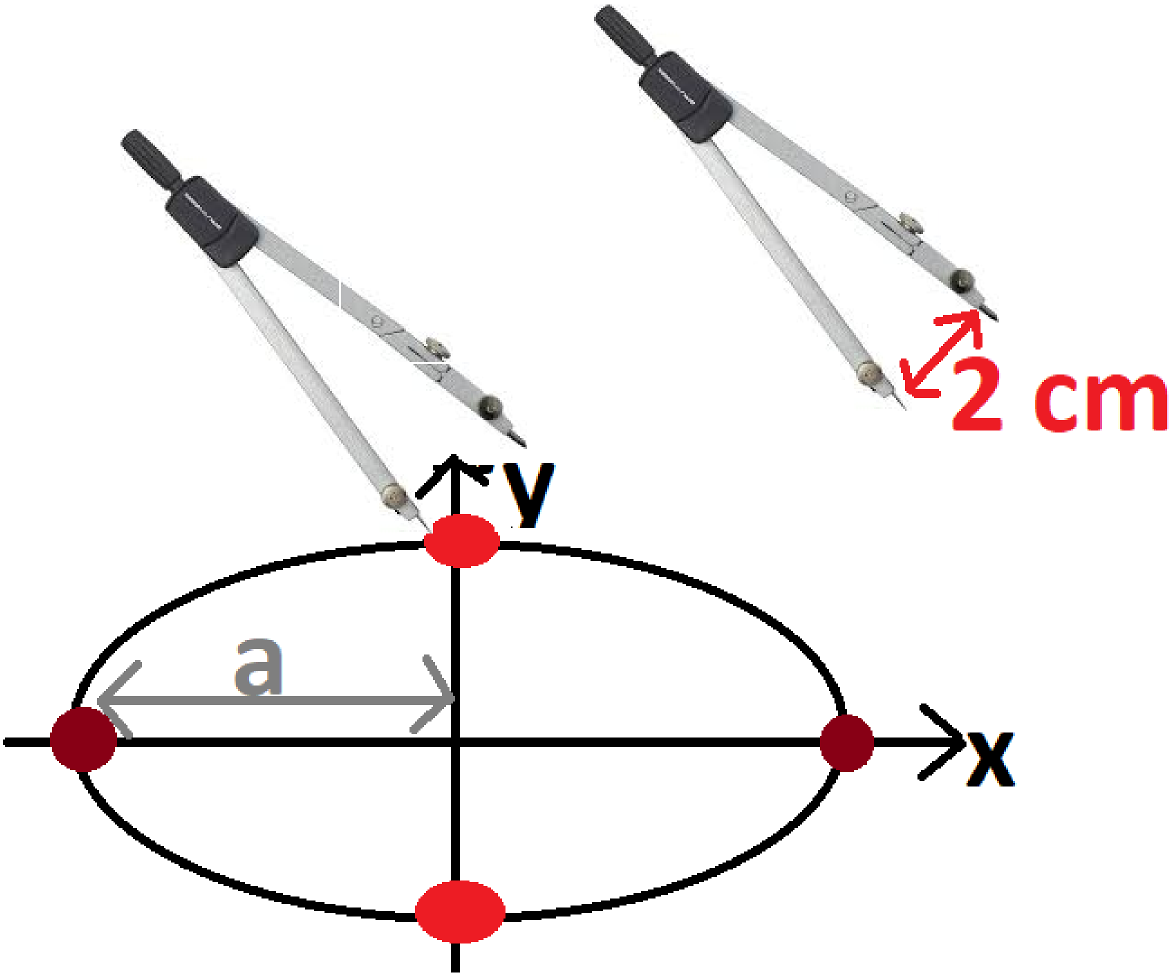


In ons geval is dus: a = 2 (cm).

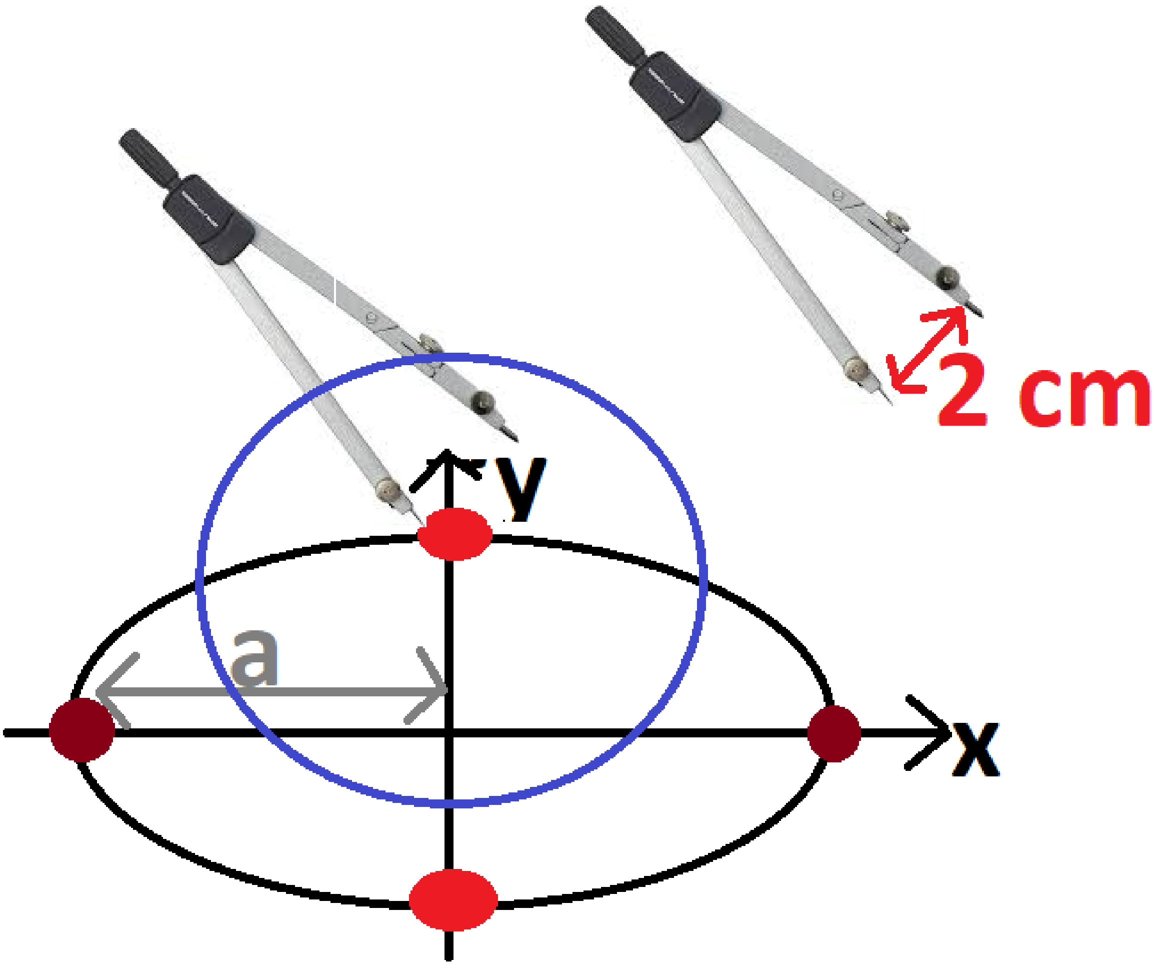
<u>CONSTRUCTIE</u>
(1) Je zet je passerpunt in het bovenste lichtrode puntje.



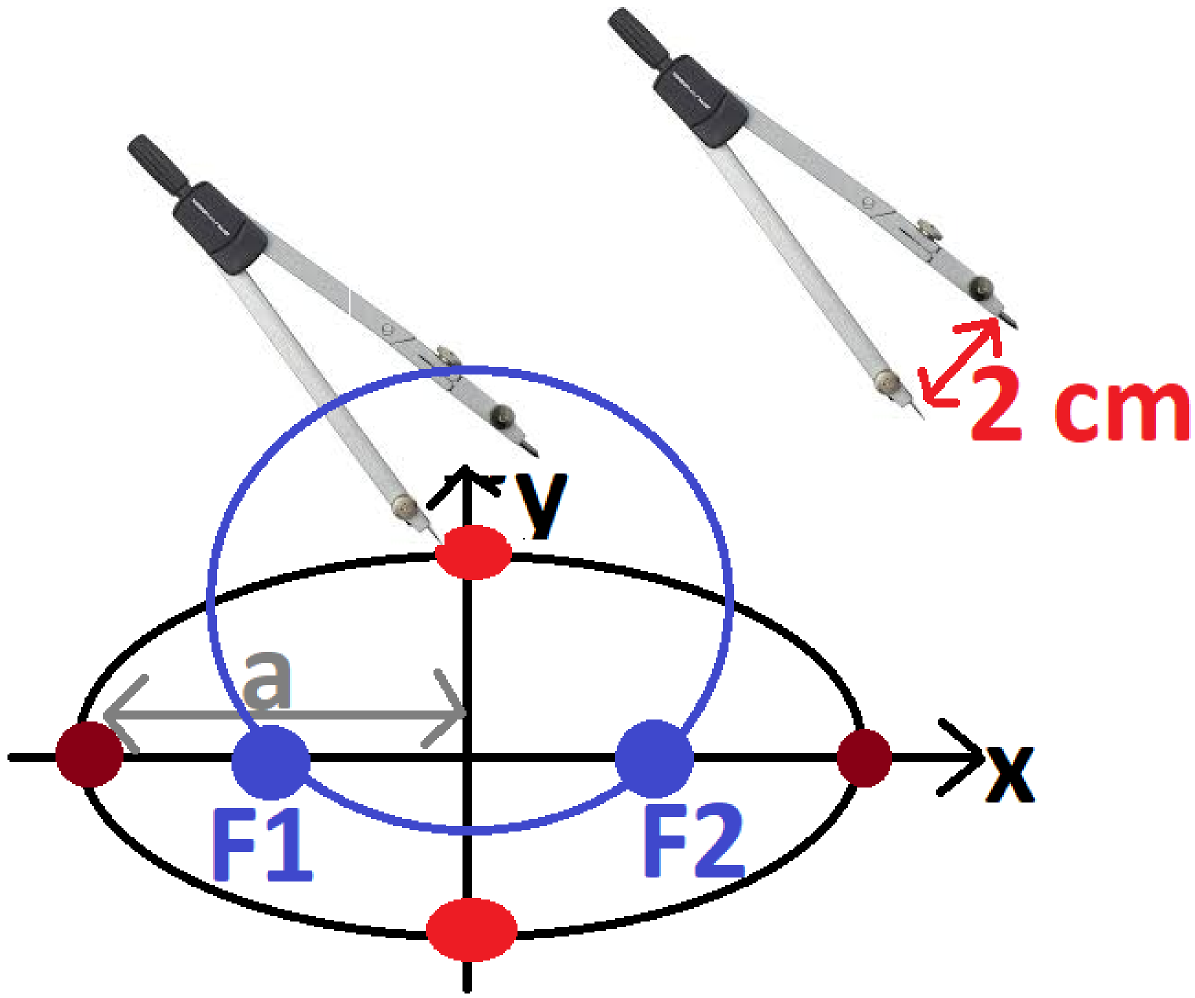
Je stelt je passeropening gelijk aan de waarde van a, in ons geval zeiden we a = 2 cm. Je passeropening moet dus 2 cm zijn.



We trekken een cirkel met straal 2cm (opmerking: nauwkeurigheid op paint is natuurlijk niet perfect maar jullie weten wat ik bedoel).



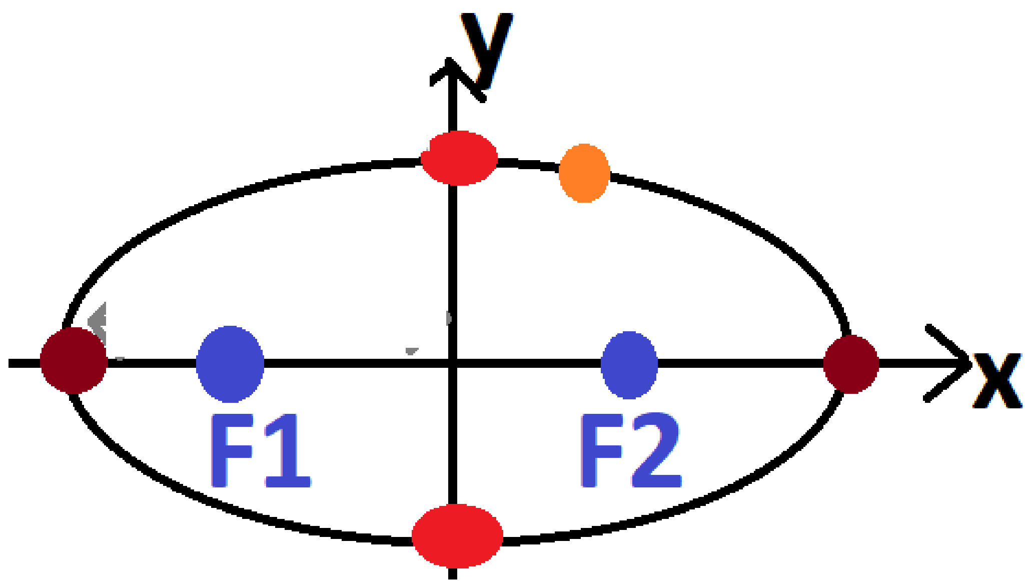
De snijpunt met je cirkel en x-as zijn nu je brandpunten F1 en F2.



3.6.2) Constructie van raaklijn en normaal in een punt

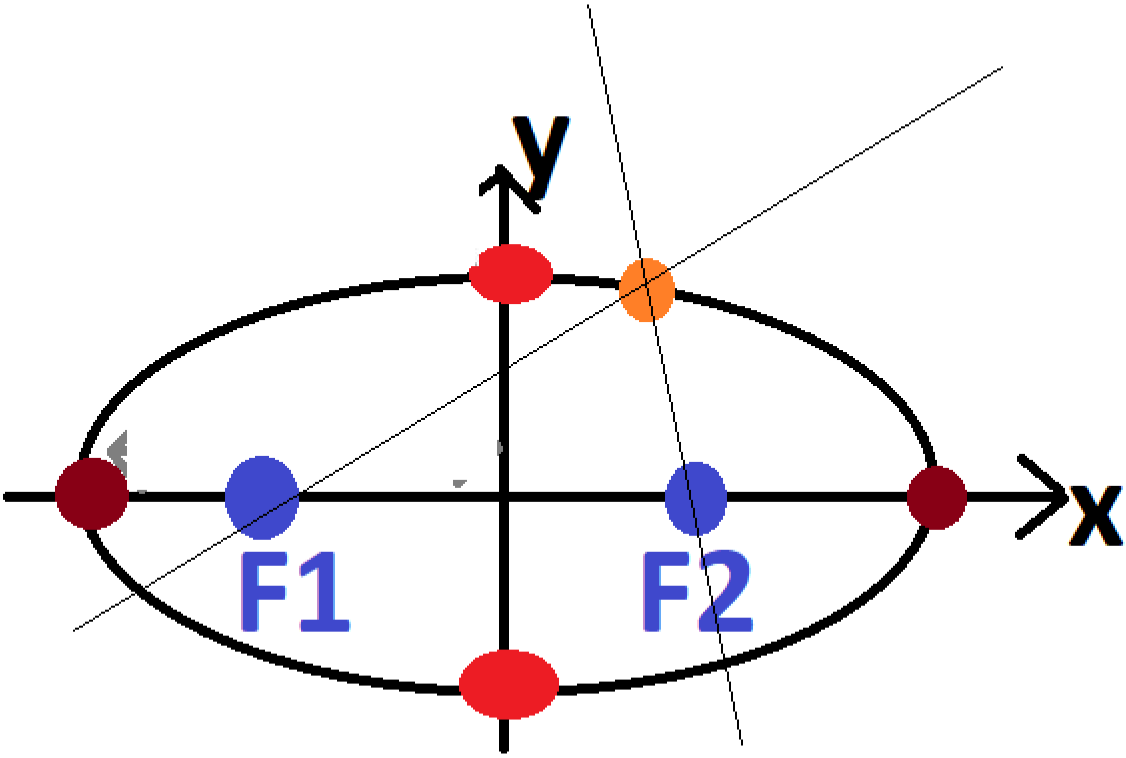
BEGINSITUATIE

We hebben nu beide brandpunten gevonden, nu willen we de raaklijn en normaal aan het oranje punt construeren. We maken gebruik van de hoofdeigenschap: de normaal en raaklijn zijn de bissectrices van de rechten die het punt met de ene brandpunt maakt en het punt met de andere brandpunt.

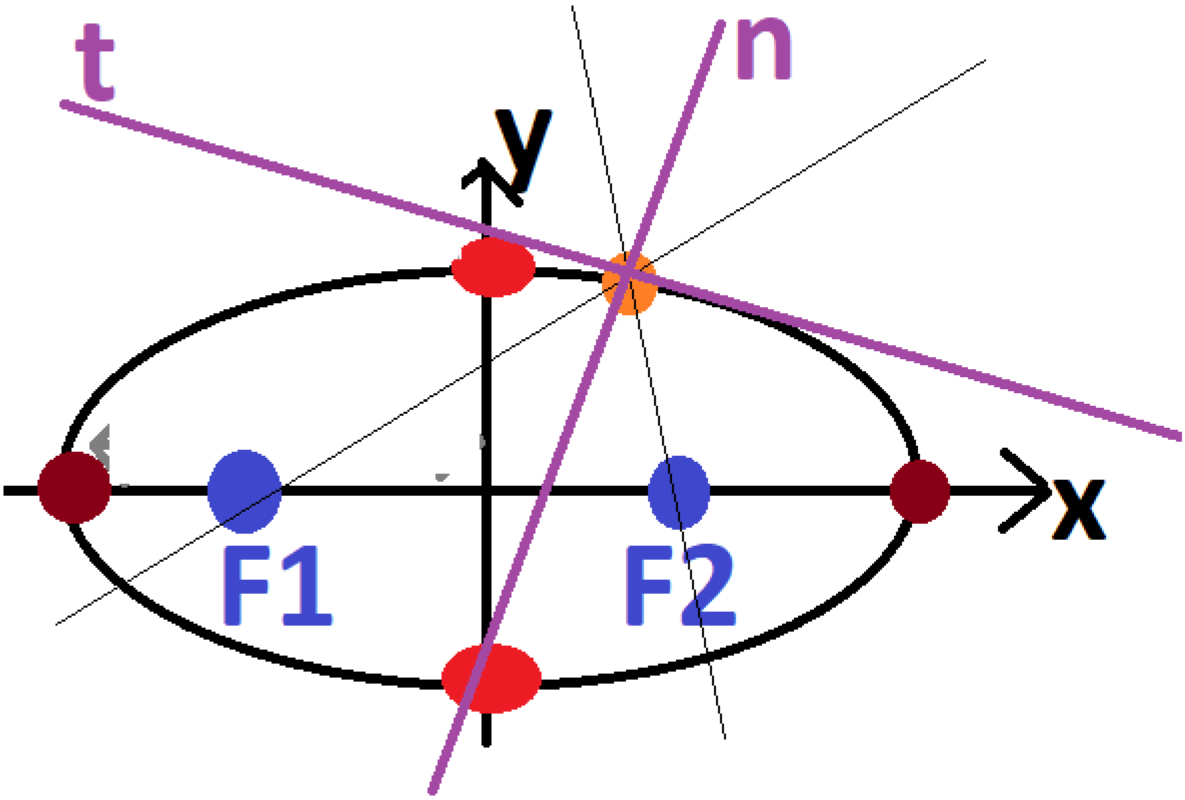


CONSTRUCTIE

Je tekent als eerst de rechten gemaakt door het punt en de brandpunten.



De bissectrices van de rechten (= een rechte die de hoek tussen 2 rechten in 2 verdeelt) zijn de normaal en de raaklijn.



3.7) Toepassingen van de ellips

3.7.1) Toepassing in de kosmografie

Planeten (zoals de aarde) bewegen rond sterren (in ons geval: de zon) rond een ellipsvormige baan.
De zon staat, zoals al gezien, in één van de brandpunten.
Manen en satellieten bewegen ook rond de aarde in een ellipsvormige baan.

3.7.2) Toepassingen in de geneeskunde

Om nierstenen te verwijderen gebruikt men een niersteenverbrijzelaar, dit is een ellipsvormige kuip. In één van de brandpunten worden schokgolven opgewekt terwijl de patiënt zodanig wordt gelegd dat het niersteentje in één van de brandpunten zit. De schokgolven weerkaatsen volgens de wet 'invalshoek = terugkaatsingshoek' (= gevolg van de hoofdeigenschap). Daardoor zullen de schokgolven samenkomen op de plaats van het niersteentje en wordt het dus als het ware verbrijzeld.

3.8) Voorbeeldoefeningen

3.8.1) Oefening 8: analyse van een ellips a.d.h.v. een gegeven cartesische vergelijking

OPGAVE: Geef van de volgende ellipsen de lengte van de assen, de coördinaten van de brandpunten, de vergelijkingen van de topraaklijnen en de excentriciteit. Maak een schets van de ellips.

A) $\boldsymbol{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 81}$

Uit deze vergelijking <u>kan je nog niks</u> afleiden aangezien in het niet in de standaardvorm staat, de standaardvorm is namelijk $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

--> We moeten dus gelijk aan 1 stellen, we brengen de 81 over. We doen dus maal $\frac{1}{81}$.

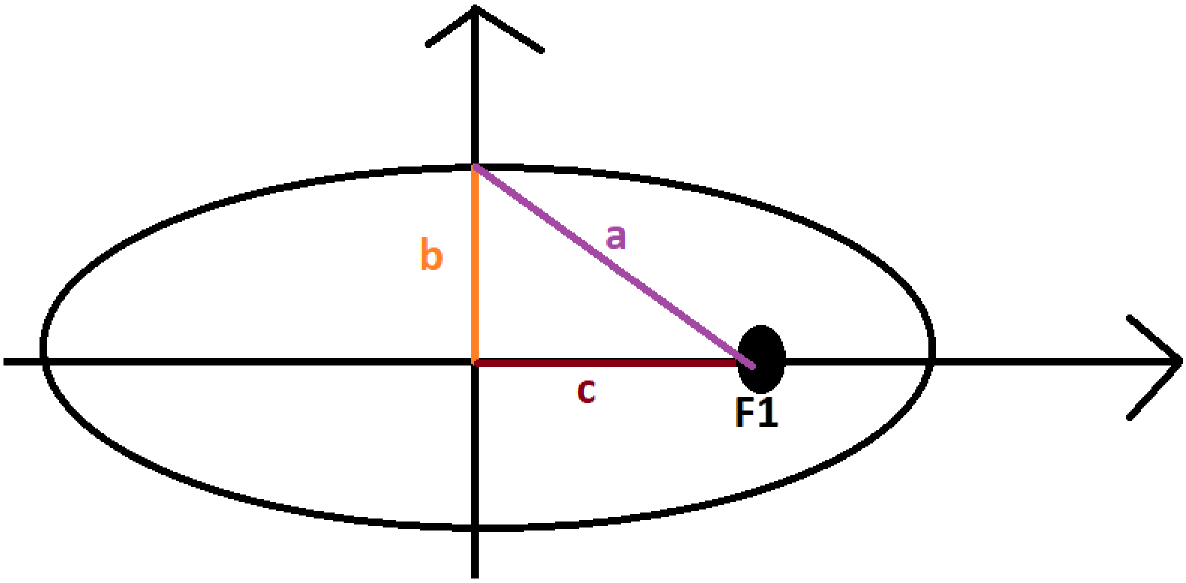
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 81 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5}\right).\frac{1}{81} = 81.\frac{1}{81}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{9.81} + \frac{y^2}{5.81} = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{729} + \frac{y^2}{405} = 1$$

Nu je de standaardvorm hebt, kan je al véél dingen afleiden…
--> We noemen de x-as de grote as en de y-as de kleine as.
--> De afstand tussen de oorsprong en het einde van de ellips op de x-as = a.
➔ Uit de standaardvorm leiden we af dat $a^2 = 729$ en dus $a = 27$
--> Om de lengte van de grote as te weten moeten we 2a pakken (want de ellips gaat langs twee kanten van de x-as hé). Dus 2a = 54.
--> De afstand tussen de oorsprong en het einde van de ellips op de y-as = b.
➔ Uit de standaardvorm leiden we af dat $b^2 = 405$ en dus $b = 20{,}12$.
--> Om de lengte van de kleine as (y-as) te weten pakken we 2b. $2b = 40{,}24$.

VOORLOPIG HEBBEN WE:
Lengte grote as = 2a = 54
Lengte kleine as = 2b = 40,24

De coördinaten van brandpunten F_1 en F_2 zijn respectievelijk (-c, 0) en (c, 0).

Er bestaat een verband tussen a, b en c op de ellips. Namelijk…



Je leest het al af: de stelling van Pythagoras --> $a^2 = b^2 + c^2$
--> hieruit kan je c afleiden: $c^2 = a^2 - b^2$
$= 729 - 405\ (afgeleid\ uit\ de\ standaardvorm)$
$= 324$
$\Leftrightarrow c = 18$
--> Nu ken je dus ook de coördinaten van je brandpunten.
$F_1(-c, 0)$ en $F_2(c, 0)$
--> Dit wordt… $F_1(-18, 0)$ en $F_2(18, 0)$.

VOORLOPIG HEBBEN WE:
Lengte grote as = 2a = 54
Lengte kleine as = 2b = 40,24
Brandpunten = $(-18, 0)$ en $(18, 0)$ --> Afgeleid uit formule $a^2 + b^2 = c^2$

Nu moeten we de vergelijkingen van de topraaklijnen zoeken, die zijn heel makkelijk. Zoals al besproken hebben de topraaklijnen volgende vergelijkingen…
$x = a \qquad y = b$
$x = -a \qquad y = -b$
--> Dit zijn de raaklijnen aan de uiteindes van de ellips. Die kan je opnieuw afleiden uit de standaard-vorm. We hadden de ellips E: $\frac{x^2}{729} + \frac{y^2}{405} = 1$.
--> Hieruit leid je af: $a^2 = 729 \Leftrightarrow a = 27$
$b^2 = 405 \Leftrightarrow b = 20{,}12$
--> Dus de topraaklijnen zijn…
$x = 27 \qquad y = 20{,}12$
$x = -27 \qquad y = -20{,}12$

VOORLOPIG HEBBEN WE:
Lengte grote as = 2a = 54
Lengte kleine as = 2b = 40,24
Brandpunten = $(-18, 0)$ en $(18, 0)$

Topraaklijnen:
x = 27 **x = -27**
y = 20,12 **y = -20,12**

De excentriciteit e moeten we nu zoeken…
--> De excentriciteit hebben we gedefinieerd met volgende formule: $e = \frac{c}{a}$
--> Meneer Wanten heeft ook gezegd dat e bij een ellips altijd tussen de 0 en 1 moet zitten.
(Bij een parabool is e = 1 en bij een hyperbool is e > 1)

--> We kennen c (= 18) en a (= 27).
--> Dus: $e = \frac{c}{a} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$

VOORLOPIG HEBBEN WE:
Lengte grote as = 2a = 54

Lengte kleine as = 2b = 40,24

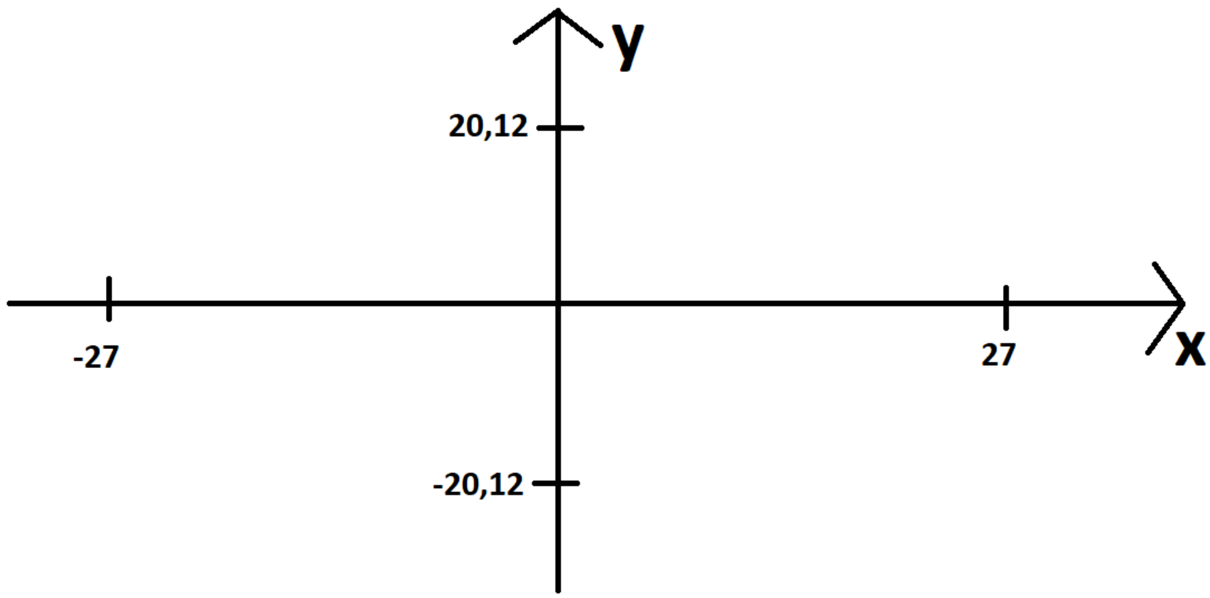
Brandpunten = $(\mathbf{-18, 0})$ **en** $(\mathbf{18, 0})$

Topraaklijnen:
x = 27 **x = -27**
y = 20,12 **y = -20,12**

Excentriciteit: $\frac{2}{3}$

Nu moeten we de ellips tekenen, we weten dat de lengte van de grote as = 54. Dus de afstand van de oorsprong tot en met het einde van de ellips t.o.v. de x-as is 27 in positieve zin, idem -27 in negatieve zin. De ellips eindigt dus op de x-as in punten (-27, 0) en (27, 0). Daarom is de vergelijking van de topraaklijnen ook x = 27 en x = -27.

Idem eindigt de ellips op de y-as op punten (20,12; 0) en (-20,12; 0).



Ik heb deze punten al aangeduid op de grafiek omdat dit de eindes van onze ellips zijn. Je hebt nu al 4 punten. Als je nog één punt op de ellips zoekt, heb je er 8. Omdat een ellips symmetrie vertoont langs alle kanten heb je door één punt te zoeken er gelijk 4.

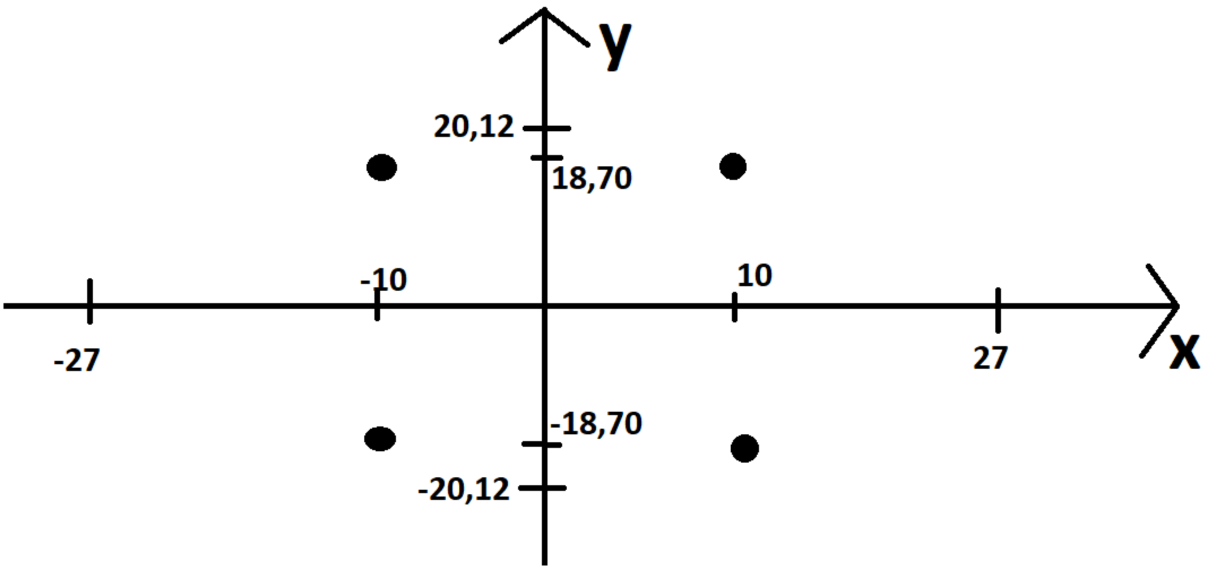
We zoeken nog een punt op onze ellips: $E: \frac{x^2}{729} + \frac{y^2}{405} = 1$
--> Eén vergelijking met 2 onbekenden: je mag één onbekende vrij kiezen.
--> We nemen x = 10 en kijken welke y-waarde we eruit krijgen.

$$\Leftrightarrow \frac{10^2}{729} + \frac{y^2}{405} = 1 \Leftrightarrow \frac{100}{729} + \frac{y^2}{405} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{405} = 1 - \frac{100}{729} \Leftrightarrow y^2 = 405\left(1 - \frac{100}{729}\right) = 350$$
$$\Leftrightarrow y = 18{,}70$$

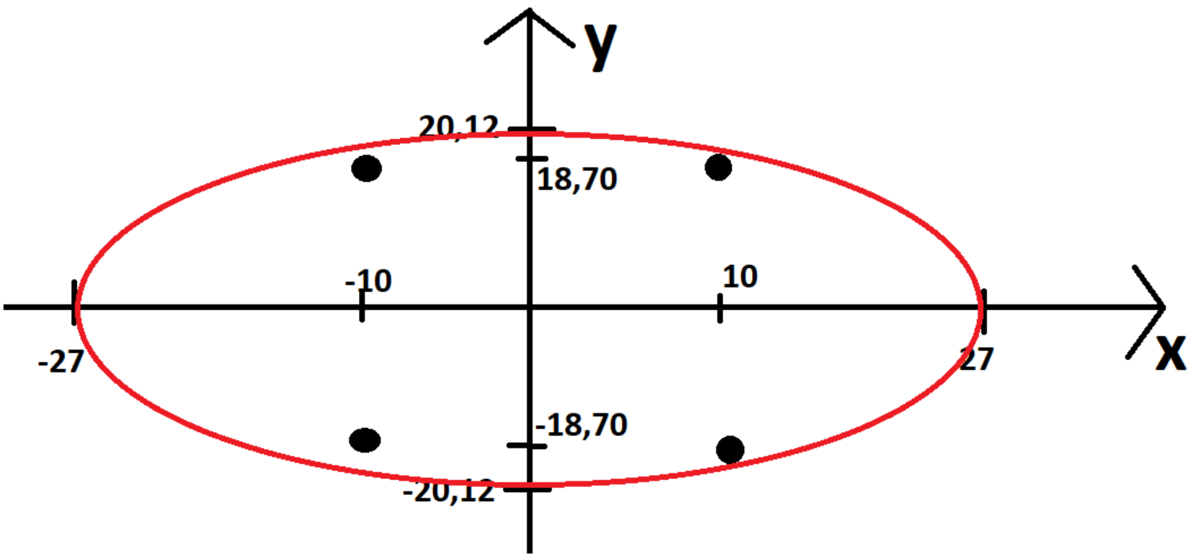
We hebben nu het punt: $(10; 18{,}70)$ gevonden.

Omdat de ellips symmetrisch is langs alle kanten hebben we nu ook:
$(-10; 18{,}70)$
$(10; -18{,}70)$
$(-10; -18{,}70)$

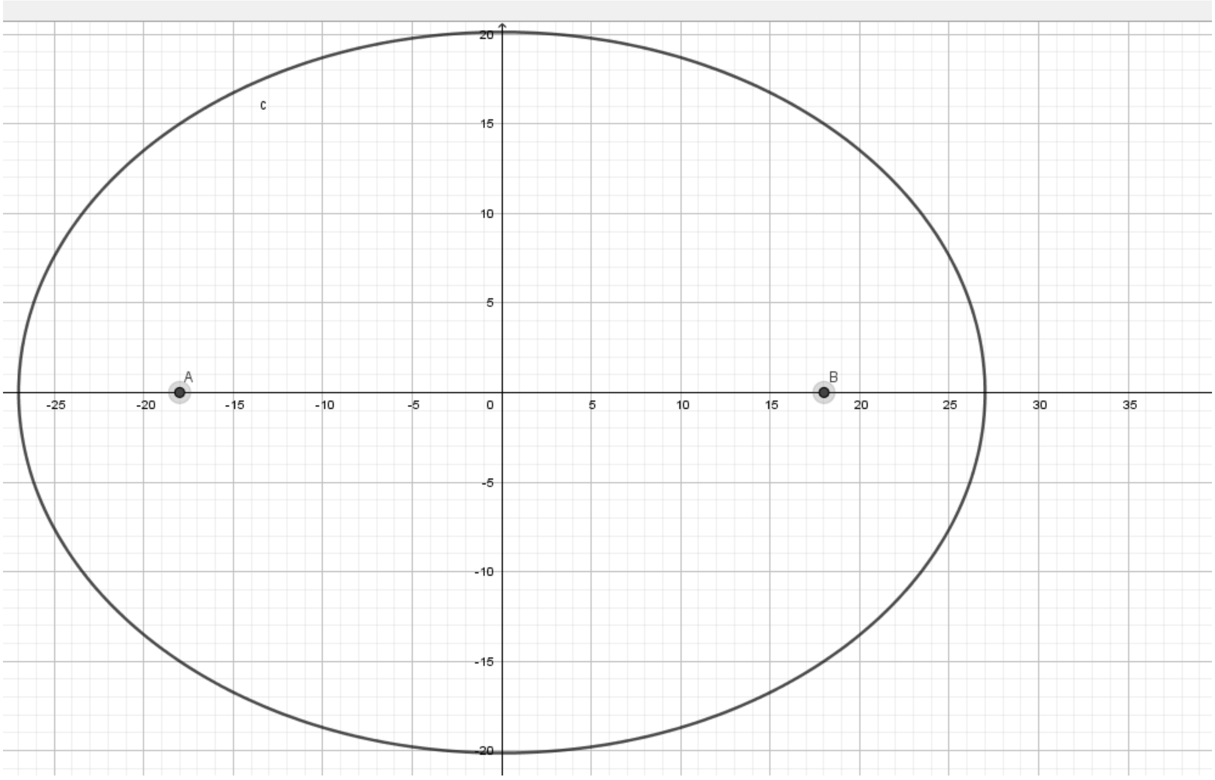
We duiden die punten aan op onze grafiek.



Nu hebben we de 4 snijpunten met de assen (= uiteindes van onze ellips) en 4 extra punten. Kevin zegt dat 8 punten meer dan genoeg zijn om een ellips te tekenen. We tekenen dus!



De nauwkeurigheid op paint is natuurlijk niet perfect. Hier is de ellips getekend met geogebra.



Onze schets komt er, bij benadering, goed mee overeen.

3.8.2) Een kosmografisch vraagstukje…: opgave 9

OPGAVE: Voor de beweging van de aarde rond de zon is de lengte van de halve grote as per definitie gelijk aan 1AE (1AE = 1 astronomische eenheid = 150 000 000 km). De excentriciteit van de baan is 0,01671022.

a) Bepaal de vergelijking van de ellips.

--> We hebben gegeven dat de halve lange as = 1 --> de grote/lange as = 2a ⇔ dus a = 1 (halve!)

--> We hebben gegeven dat de excentriciteit 0,01671022 is.

--> $e = \frac{c}{a} \Leftrightarrow c = e\,.\,a = 0{,}01671022\,.\,1 = 0{,}01671022$

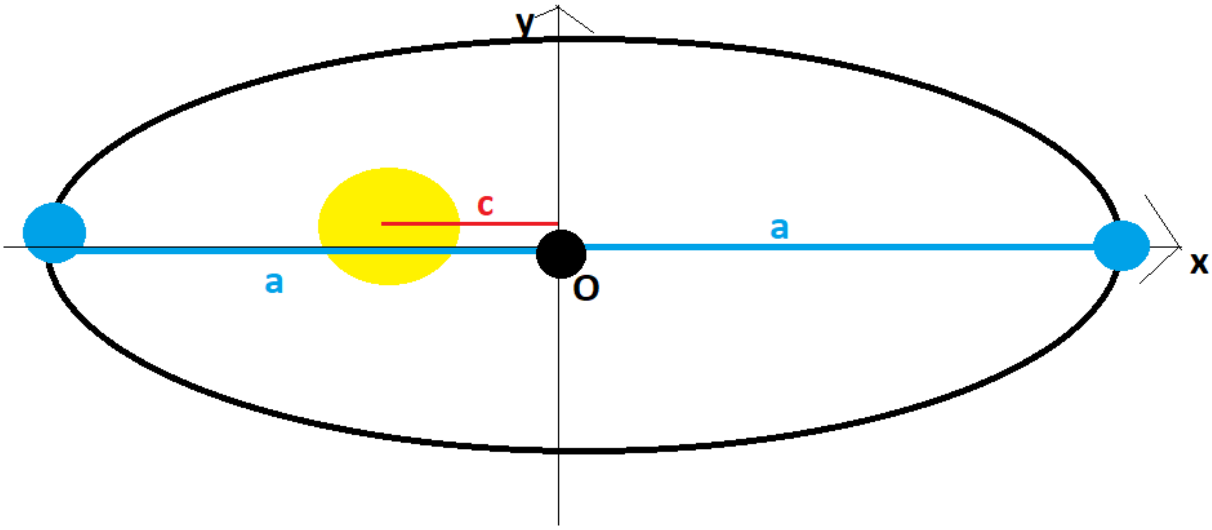
--> Uit onze c kunnen we b halen: $b^2 = a^2 - c^2 = 1^2 - 0{,}0167022^2 = 0{,}99441615$

--> $a^2 = 1$

--> Algemene vergelijking ellips: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow DUS\!: \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{0{,}9944615} = 1$

--> We hebben gezien dat bij een cirkel de brandpunten samenvallen dus a = b = 1. Hier zie je dat b bijna 1 is. De baan van de aarde rond de zon beschrijft een ellips, maar <u>bijna</u> een cirkel. Er zijn dus weldegelijk 2 verschillende brandpunten.

b) Bepaal de grootste en kleinste afstand tussen de aarde en zon.



De kleinste afstand is a – c, wanneer de aarde het dichtsbij de zon staat. De grootste afstand is a + c, wanneer de aarde het verst van de zon staat.

Kleinste afstand: a – c = 1 - 0,01671022 = 0,98328978 AE

Grootste afstand: a + c = 1 + 0,01671022 = 1,101671022 AE

3.8.3) Vergelijking van de ellips bepalen

OPGAVE: Bepaal de vergelijking van een ellips met de x- en y-as als symmetrieassen en waarbij…

<u>A) F(6, 0) het brandpunt is en waarbij de ellips gaat door punt D(-2, 1)</u>

--> $D \text{ is een punt op de ellips} \rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{(-2)^2}{a^2}+\frac{1^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$

-->--> $F(6,0) \text{ is het brandpunt} \rightarrow \text{dus } c=6$

-->-->--> Stelling van Pythagoras: $b^2=a^2-c^2=a^2-36$

We weten nu dus dat $b^2 = a^2 - 36$. We vullen dit in…

$\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{4}{a^2}+\frac{1}{a^2-36}=1$ --> We hebben een vergelijking met één onbekende, we werken uit…

$\Leftrightarrow \frac{4}{a^2}=1-\frac{1}{a^2-36}$

$\Leftrightarrow \frac{4}{a^2}=\frac{a^2-36}{a^2-36}-\frac{1}{a^2-36}$

$\Leftrightarrow \frac{4}{a^2}=\frac{a^2-37}{a^2-36}$

$\Leftrightarrow a^2(a^2-37)=4(a^2-36)$ (kruisproducten)

$\Leftrightarrow a^4-37a^2=4a^2-144$

$\Leftrightarrow a^4-41a^2+144=0$ (dit is een bikwadratische vergelijking, moet je oplossen met een hulponbekende: $b = a^2$)

$\Leftrightarrow b^2-41b+144=0$

$D=b^2-4ac=(-41)^2-4.1.144=1105$

--> $b_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-41)+\sqrt{1105}}{2\,.\,1} = 37{,}1201$
--> $b_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-41)-\sqrt{1105}}{2\,.\,1} = 3{,}8792$

We hebben gezegd dat a² = b, dus…
--> $a^2 = 37{,}1201$ ∨ $a^2 = 3{,}8792$
⇔ $a = +6{,}09$ $a = 1{,}97$
$\cancel{a = -6{,}09}$ $\cancel{a = -1{,}97}$ → Je mag geen negatieve lengte hebben!

--> We weten inmiddels dat: $b^2 = a^2 - 36$
⇔ $b^2 = 6{,}09^2 - 36$ ∨ $b^2 = 1{,}97^2 - 36$
⇔ $b^2 = 1{,}0881$ ∨ $\cancel{b^2 = -32{,}1191}$
--> Je kan geen negatieve lengte hebben!

Dus:
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{6{,}09^2} + \frac{y^2}{1{,}09^2} = 1$

Opmerking: in de cursus kwamen ze y²/1,06² uit maar ik heb tijdens de oefening (voor de overzichtelijkheid) al afgerond terwijl de cursus dit pas op het einde doet.

d) de ellips door de twee punten A(0,3) en B(-4, 1) gaat.
We hebben gegeven dat deze twee punten op de ellips liggen. Dus kunnen we ze invullen in de vergelijking $\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 1$

Punt A: $\frac{0}{a^2} + \frac{3^2}{b^2} = 1$
⇔ $\frac{3^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow 3^2 = b^2 \Leftrightarrow b^2 = 3^2 = 9$

Punt B: $\frac{-4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ --> We weten dat b² = 9
⇔ $\frac{(-4)^2}{a^2} + \frac{1^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{16}{a^2} = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{16}{a^2} = \frac{8}{9} \Leftrightarrow 16\,.\,9 = 8a^2$
⇔ $144 = 8a^2 \Leftrightarrow 18 = a^2 \Leftrightarrow a^2 = 18$

Nu kennen we de vergelijking van onze ellips E:
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

--> $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$

e) de halve grote as gelijk is aan 5 en de ellips door het punt P(-2, 4) gaat.
Grote as = x – as = 2a
--> Halve grote as = a = 5 --> dus: a = 5

En we hebben het punt P ∈ E gegeven, dus deze oefening is eigenlijk makkelijker dan oefening d, we moeten gewoon invullen en afzonderen…

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

⇔ $\frac{(-2)^2}{5^2} + \frac{4^2}{b^2} = 1$

⇔ $\frac{4}{25} + \frac{16}{b^2} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{16}{b^2} = 1 - \frac{4}{25}$

$\Leftrightarrow \frac{16}{b^2} = \frac{21}{25} \Leftrightarrow 21b^2 = 16\,.\,25 \Leftrightarrow 21b^2 = 400 \Leftrightarrow b^2 = \frac{400}{21} = 19{,}04$

Hieruit volgt dus:

$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{19{,}04} = 1$

g) De excentriciteit gelijk is aan 2/3 en de halve kleine as gelijk is aan 3

We weten dat… $e = \frac{c}{a}$

--> e = 2/3

--> $c = e\,.\,a = \frac{2}{3}a$

We weten dat… $a^2 = b^2 + c^2$

--> Omdat de halve kleine as gelijk is aan 3, weten we gelijk ook dat b = 3.

$\Leftrightarrow a^2 = 3^2 + \left(\frac{2}{3}a\right)^2$

$\Leftrightarrow a^2 = 9 + \frac{4}{9}a^2$

$\Leftrightarrow a^2 - \frac{4}{9}a^2 = 9$

$\Leftrightarrow a^2\left(1 - \frac{4}{9}\right) = 9$

$\Leftrightarrow a^2\left(\frac{5}{9}\right) = 9 \Leftrightarrow a^2 = 9\,.\,\frac{9}{5} = \frac{81}{5}$

Nu kunnen we onze vergelijking invullen:

$\frac{x^2}{\frac{81}{5}} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{5x^2}{81} + \frac{y^2}{9} = 1$ (delen door een breuk is maal het omgekeerde!

i) F(3,0) het brandpunt is en de ellips rakend is aan t: x + 3y – 5 = 0

De algemene vergelijking van de raaklijn aan een ellips is: $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ (1)

--> We hebben als raaklijn echter de algemene cartesische vergelijking van een rechte gegeven. We moeten de vergelijking dus omvormen…

$x + 3y - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x + 3y = 5$ (LL en RL delen door 5)

$\Leftrightarrow \frac{x}{5} + \frac{3y}{5} = 1$ (2)

Je mag vergelijkingen (1) en (2) aan elkaar gelijkstellen omdat ze allebei gelijkgesteld werden aan hetzelfde getal, namelijk 1.

.$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ en .$\frac{x}{5} + \frac{3y}{5} = 1$

--> Hieruit volgt:

$\frac{x_1}{a^2} = \frac{1}{5}$ en $\frac{y_1}{b^2} = \frac{3}{5}$

--> Hieruit volgt:

$\Leftrightarrow x_1 = \frac{a^2}{5}$ en $y_1 = \frac{3b^2}{5}$

Het raakpunt voldoet ook aan de vergelijking: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Het raakpunt zit m.a.w. ook op de ellips (natuurlijk, als het niet op de ellips zat zou het niet kunnen raken).

We hebben x en y al gevonden op de vorige pagina, namelijk...

$x_1 = \frac{a^2}{5}$ en $y_1 = \frac{3b^2}{5}$

We vullen deze in, in de vergelijking van de ellips…

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{a^2}{5}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{3b^2}{5}\right)^2}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{a^4}{25}}{a^2} + \frac{\frac{9b^4}{25}}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{25} + \frac{9b^2}{25} = 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 9b^2 = 25 \quad (3)$$

--> We weten ook dat $b^2 = a^2 - c^2$
--> $b^2 = a^2 - 3^2 = a^2 - 9$
➔ Dit kunnen we terug invullen in vergelijking (3)

$$a^2 + 9(a^2 - 9) = 25$$

$\Leftrightarrow a^2 + 9a^2 - 81 = 25$
$\Leftrightarrow a^2 + 9a^2 = 106$
$\Leftrightarrow 10a^2 = 106$
$\Leftrightarrow a^2 = 10{,}6$
--> Als we a^2 hebben kunnen we b^2 berekenen uit vergelijking (3)…
--> $a^2 + 9b^2 = 25 \Leftrightarrow 10{,}6 + 9b^2 = 25 \Leftrightarrow 9b^2 = 14{,}4 \Leftrightarrow b^2 = 1{,}6$

De vergelijking wordt dus…
$$\frac{x^2}{10{,}6} + \frac{y^2}{1{,}6} = 1$$

<u>Algemene werkwijze voor de moeilijke oefeningen zoals i</u>
--> Zet de vergelijking van de raaklijn om naar de standaardvorm voor de parabool.
--> Zet de algemene vergelijking en de gegeven vergelijking gelijk aan elkaar.
--> Haal x_1 en y_1 hieruit.
--> Vul je gevonden x en y in in de algemene vergelijking van de ellips.
--> Zonder af naar de vorm $a^2 + b^2$ = iets
--> Gebruik de formule $b^2 = a^2 - c^2$ om a^2 of b^2 te vinden.
--> Vul je gevonden a-waarde/b-waarde terug in in de andere vergelijking en haal de andere waarde eruit.
--> Bepaal de vergelijking van de ellips.

3.8.4) De snijpunten bepalen van een ellips en een rechte

<u>B) Bepaal de snijpunten van… E: $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ en r: -4x + 2y + 6 = 0</u>

Snijpunten zoeken = stelsel maken…

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ -4x + 2y + 6 = 0 \end{cases}$$

--> Het makkelijkste is om y af te zonderen in vergelijking 2 en te substitueren (in te vullen) in vergelijking 1…

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ 2y = 4x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

--> Nu vullen we de 2de vergelijking in, in de eerste vergelijking…

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} + (2x-3)^2 = 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{2} + ((2x)^2 - 2.2x.3 + 3^2) = 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{2} + 4x^2 - 12x + 9 = 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4{,}5x^2 - 12x + 9 = 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4{,}5x^2 - 12x + 8 = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

--> $D = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4.4{,}5.8 = 0$

--> één wortel in $\mathbb{R}$: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2.4{,}5} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

--> Nu heb je één x-waarde, je moet nog weten welke y-waarde hieruitkomt…

$$y = 2x - 3 = 2.\frac{4}{3} - 3 = \frac{8}{3} - 3 = \frac{8}{3} - \frac{9}{3} = -\frac{1}{3}$$

Het snijpunt is: $\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$

--> Omdat je maar één snijpunt heb gevonden, heb je een raakpunt.

3.8.5) Vergelijking van de raaklijn en normaal algebraïsch bepalen…

We bepalen de vergelijking van de raaklijn en normaal met gegeven ellips in het punt P:

$E: \frac{x^2}{25} + \frac{4y^2}{25} = 1$ en $P(4, \dots)$ met $P_y > 0$

--> Je moet eerst het y-coördinaat van punt P bepalen, dit doe je door de gegeven x in te vullen…

$$\frac{4^2}{25} + \frac{4y^2}{25} = 1 \Leftrightarrow \frac{16}{25} + \frac{(4y^2)}{25} = 1 \Leftrightarrow \frac{4y^2}{25} = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow \frac{4y^2}{25} = \frac{25}{25} - \frac{16}{25} \Leftrightarrow \frac{4y^2}{25} = \frac{9}{25} \Leftrightarrow 4y^2 = \frac{9.25}{25}$$

$$\Leftrightarrow 4y^2 = 9 \Leftrightarrow y^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow y = \pm\frac{3}{2}$$

--> - 3/2 mogen (moeten) we verwerpen aangezien de cursus de voorwaarde $P_y > 0$ stelde.

➔ We hebben dus coördinaat $P\left(4, \frac{3}{2}\right)$.

--> De algemene vergelijking van de raaklijn aan de ellips is…

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

--> Je kent x_1 en y_1 nu, je vult dus in… a^2 en b^2 ken je uit de gegeven vgl van de ellips.

$$\Leftrightarrow \frac{x.4}{25} + \frac{4y.\frac{3}{2}}{25} = 1$$

(huh? Waarom hebt ge 4y ipv y? Omdat we in de vergelijking van onze ellips 4y² hebben, die 4y moet je overnemen!!!)

$\Leftrightarrow \frac{4x}{25} + \frac{6y}{25} = 1$

$\Leftrightarrow 4x + 6y = 25 \Leftrightarrow 6y = 25 - 4x \Leftrightarrow y = \frac{25}{6} - \frac{4}{6}x \Leftrightarrow y = -\frac{4}{6}x + \frac{25}{6}$

$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{25}{6}$

-----------> Rico raaklijn is -2/3

--> $m_N \,.\, m_R = -1 \Leftrightarrow m_N = -\frac{1}{m_R}$

$\Leftrightarrow m_N = -\frac{1}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

> Opmerking:
> Je kan de rico van de normaal ook vinden met de formule $\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$ (ga zelf na!)

--> Nu je de rico van de normaal hebt gevonden, vul je deze in in de algemene vergelijking van de rechte…

$y - y_1 = m(x - x_1)$
$\Leftrightarrow y - \frac{3}{2} = 1{,}5(x - 4)$
$\Leftrightarrow y - 1{,}5 = 1{,}5x - 6$
$\Leftrightarrow y = 1{,}5x - 6 + 1{,}5$
$\Leftrightarrow y = 1{,}5x - 4{,}5$