Samenvatting wiskunde – goniometrische vergelijkingen – examen M4

(Y) VOORWOORD

Dit is de samenvatting wiskunde ter voorbereiding van het examen van M4. Deze samenvatting behandelt énkel goniometrische vergelijking in de bundel van goniometrische functies. In totaal heb ik 3 samenvattingen over goniometrische functies.

SAMENVATTING 1: Goniometrische vergelijkingen (deze!)
SAMENVATTING 2: Goniometrische functies (zie website)
SAMENVATTING 3: Goniometrische functies – verloop (zie website)

(X) FOUTJE

Dat kan, stuur fouten door naar Abdellah.

(Z) INHOUDSTAFEL

Over twéé pagina's

Samenvatting wiskunde – examen module 4 – *goniometrische vergelijkingen*

Inhoud

1) Goniometrische vergelijkingen

Goniometrische vergelijkingen kunnen soms een bitch zijn.

1.1) Inleiding

1.1.1) Graden & radialen

Omdat we graag met getalwaarden willen werken, gebruiken we ALTIJD radialen. Echter is de werkwijze voor goniometrische vergelijkingen oplossen in graden hetzelfde.

180° = π rad

--> De eenheid 'rad' laten we (bijna) altijd weg.

Zorg altijd dat je rekenmachine op radialen staat als je goniometrische vergelijkingen oplost!
→ [SHIFT] --> [SETUP] --> [4: Rad]

1.1.2) Betekenis van $\frac{x}{n}$

Uit samenvatting wiskunde (goniometrie) module 2 halen we volgende passage:

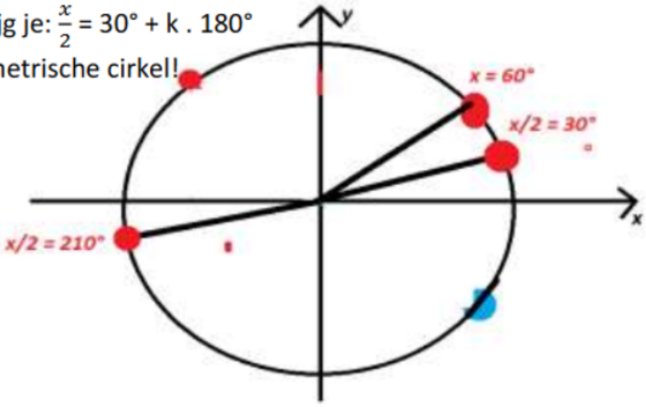
(2A) BETEKENIS VAN $\frac{x}{n}$

*Stel x = 60°

→ Je begrijpt: een hoekgrootte heeft oneindig veel maatgetallen → x = 60° + k . 360°

→ Als je deze hoekgrootte deelt door 2 krijg je: $\frac{x}{2}$ = 30° + k . 180°

→ Nu heb je twéé hoeken op de goniometrische cirkel!



Meer moet je niet weten, je moet gewoon weten dat als je x deelt door een natuurlijk getal je méérdere hoekgrootten hebt (2 = 2 hoekgrootten, 3 = 3 hoekgrootten, 4 = 4 hoekgrootten …), wel nooit delen door nul! Want… **wie deelt door nul is een snul**.

--> Als je x deelt door een getal, moet je k . 360° (= k . 2π) ook delen, dat mag je niet vergeten!

1.2) Basis goniometrische vergelijkingen

1.2.1) de sinusvergelijking: $\sin x = a$

Formule: $\sin\beta = \sin\alpha \Leftrightarrow \beta = \alpha + k\,.\,2\pi \quad \vee \quad \beta = (\pi - \alpha) + k\,.\,2\pi$

--> Herinnering: V = logische 'of'

--> Herinnering: De goniometrische cirkel herhaalt zich om de 2π radialen (= 360°), daarom tellen we bij elke oplossing + k . 2π met k een geheel getal (géén kommagetal!)

- -

Neem als voorbeeld: $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{4}$

--> Je neemt de [SHIFT][SINUS] op je rekenmachine, beter bekend als de boogsinus. Dit is gewoon de omgekeerde bewerking van de sinus.

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\,.\,2\pi \quad \vee \quad x = \pi - \frac{\pi}{4} + k\,.\,2\pi$

--> Deze tussenstap is gewoon de formule invullen…

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\,.\,2\pi \quad \vee \quad x = \frac{3\pi}{4} + k\,.\,2\pi$

$$Opl = \left\{\frac{\pi}{4} + k\,.\,2\pi\ ,\frac{3\pi}{4} + k\,.\,2\pi\right\}$$

- -

1.2.1.1) Bijzondere gevallen van de sinusvergelijking

(1) $\boldsymbol{\sin x = 0}$

$\Leftrightarrow \sin x = \sin(0)$ (je pakt de boogsinus van 0)

$\Leftrightarrow x = 0 + k\,.\,2\pi \quad \vee \quad x = \pi + k\,.\,2\pi$

--> Deze 2 oplossingen kan je schrijven als één oplossing, je ziet immers dat de oplossing om de π radialen (= 180°) terugkomt.

$\Leftrightarrow \boldsymbol{x = k\,.\,\pi}$

(2) $\boldsymbol{sin\ x = 1}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\,.\,2\pi$

--> De sinus lees je af op de y-as, deze is maximaal bij 90° oftewel π/2.

(3) $\boldsymbol{sin\ x = -1}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k\,.\,2\pi$

--> Als de sinus maximaal is op 1, is ze minimaal op -1 en dus -π/2.

Je kan deze bijzondere gevallen makkelijk nagaan op je rekenmachine.

1.2.2) de cosinusvergelijking: $\cos x = a$

Formule: $\cos\beta = \cos\alpha \Leftrightarrow \beta = \alpha + k\,.\,2\pi \quad \vee \quad \beta = -\alpha + k\,.\,2\pi$

--> Dit kan je herschrijven als… $\Leftrightarrow \beta = \pm\,\alpha + k\,.\,2\pi$

--> Deze notatie is voor de *luie* wiskundigen onder jullie.

- -

Neem als voorbeeld: $\cos 3x = \cos(2x + 5)$

$\Leftrightarrow 3x = (2x + 5) + k\,.\,2\pi \quad \vee \quad 3x = -(2x + 5) + k\,.\,2\pi$

--> Dit is je formule letterlijk toegepast, let op: $(2x + 5) = \alpha$, je kan de boogcosinus nu ook niet op je rekenmachine nemen.

$\Leftrightarrow 3x = (2x + 5) + k\,.\,2\pi \quad \vee \quad 3x = -2x - 5 + k\,.\,2\pi$

--> Een veelgemaakte fout die ik heb gezien toen ik met mensen voor de toets van goniometrische vergelijkingen in de bib leerde was het volgende…

$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} + k\,.\,\frac{2}{3}\pi \quad \vee \quad x = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} + k\,.\,\frac{2}{3}\pi$

$$Opl = \left\{\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} + k\,.\,\frac{2}{3}\pi \quad , \quad -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} + k\,.\,\frac{2}{3}\pi\right\}$$

→ Dit is 100% FOUT. Het is juist dat je moet delen als je 3x hebt, maar kijk eens:

je hebt in je oplossingenverzameling je onbekende x nog zitten! Je moet éérst naar je onbekende x afzonderen en daarna pas delen!

$\Leftrightarrow 3x - 2x = 5 + k\,.\,2\pi \quad \vee \quad 3x + 2x = -5 + k\,.\,2\pi$
$\Leftrightarrow x = 5 + k\,.\,2\pi \quad \vee \quad 5x = -5 + k\,.\,2\pi$
$\Leftrightarrow x = 5 + k\,.\,2\pi \quad \vee \quad x = -1 + k\,.\,\frac{2}{5}\pi$

--> Als je een getal voor je x hebt moet je nog delen door dat getal! Let op: vergeet niet om je k . 2π ook te delen!

- -

Er zijn enkele speciale cosinusvergelijkingen, echter kan je deze nagaan met je rekenmachine of de goniometrische cirkel (= G.C.), ik behandel ze hier daarom slechts kort.

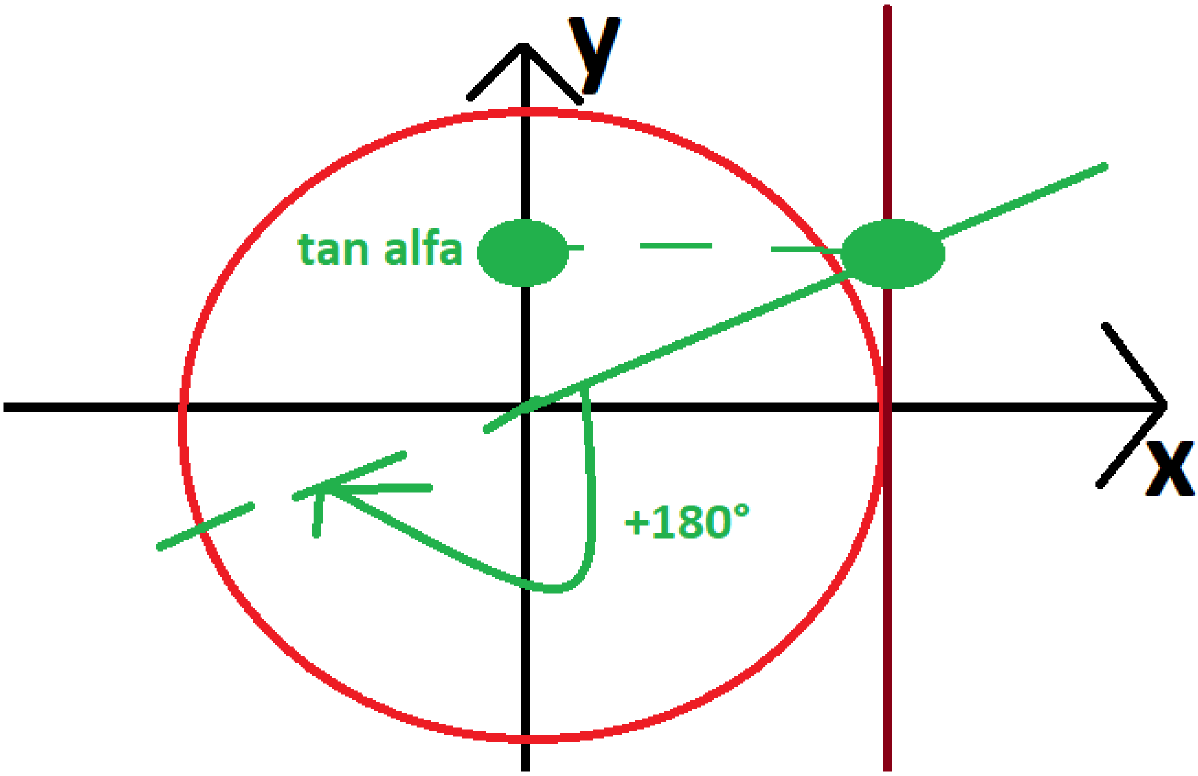
$\cos x = 0$	$\Leftrightarrow$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\cos x = 1$	$\Leftrightarrow$	$x = 2k\pi$
$\cos x = -1$	$\Leftrightarrow$	$x = (2k+1)\pi$

Deze NIET vanbuiten leren, ze zijn makkelijk na te checken met de G.C. of je ZRM.

1.2.3) De tangensvergelijking: $\tan x = a$

Formule: $\tan \beta = \tan \alpha \Leftrightarrow \beta = \alpha + k\,.\,\pi$

--> Bij de tangensvergelijking moet je goed onthouden dat je + k . π doet i.p.v. + k . 2π.



Hierboven zie je de meetkundige constructie van de tangensfunctie, je leest de tangens af als de y-waarde van de snijpunt tussen de donkerrode rechte en je hoekgrootte. Echter is dat 180° (= π radialen) verder ook zo. Daarom doen we + k . π.

Neem als voorbeeld: $\tan 4x = 33$

⇔ $\tan 4x = \tan(1{,}54)$

--> Je pakt opnieuw gewoon de boogtangens van 33, afgeronde waarde.

⇔ $4x = 1{,}54 + k\,.\pi$

--> Nu nog delen door 4, vergeet niet je k . π ook te delen door 4!

⇔ $x = 0{,}39 + k\,.\frac{\pi}{4}$

$Opl = \left\{0{,}39 + k\,.\frac{\pi}{4}\right\}$

Zo simpel is het…

Er zijn enkele bijzondere gevallen op de tangensvergelijking. Leer ze niet vanbuiten, je kan ze ook vinden met je ZRM en de formule toe te passen!

$\tan x = 0$	$\Leftrightarrow$	$x = k\pi$
$\tan x = 1$	$\Leftrightarrow$	$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$
$\tan x = -1$	$\Leftrightarrow$	$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

1.2.4) Speciale basisvergelijkingen

Er zijn sommige basisvergelijkingen waarbij je op het zicht ziet dat je géén oplossing hebt…

$\underline{\sin x = 2}$

--> Neem eens de boogsinus van 2? $Bgsin\ (2) = MATH\ ERROR$.

-->--> De straal van de goniometrische cirkel is 1, daarom kan je géén boogsinus van 2 nemen. Deze vergelijking heeft géén oplossingen.

$Opl = \emptyset$

Alle vergelijkingen met een sinus of cosinus groter dan 1 hebben géén oplossingen.

Let op:

$\underline{\sin x = \sin(2)}$

--> Deze vergelijking heeft wél oplossingen, de sinus van 2 kan je nemen.

$\underline{\tan(x) = 33}$

--> Zoals je zag heeft deze vergelijking ook oplossingen, de tangens is immers niet beperkt tot de straal van de goniometrische cirkel!

1.3) Moeilijkere goniometrische vergelijkingen

Natuurlijk bestaan er véél goniometrische vergelijkingen die moeilijker zijn dan de basisvergelijkingen, deze behandelen we in dit onderdeel.

Voor moeilijkere goniometrische vergelijkingen heb je je formuleblad voor goniometrie nodig (zie volgende pagina). Daarnaast heb je ook je formules voor verwante hoeken nodig (over 2 pagina’s)

De basisvergelijkingen mag je echter ook niet vergeten, daar komt het altijd op neer aan het einde!

1.3.1) Formuleblad goniometrie

Je mag dit formuleblad goniometrie gebruiken op het examen.

Optellingsformules:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta + \sin\alpha \,.\, \sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta - \sin\alpha \,.\, \sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \,.\, \cos\beta - \cos\alpha \,.\, \sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \,.\, \cos\beta + \cos\alpha \,.\, \sin\beta$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha . \tan\beta}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha . \tan\beta}$$

Verdubbelingsformules:

$$\sin 2\alpha = 2.\sin\alpha \,.\, \cos\alpha \qquad \sin 2\alpha = \frac{2.\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad \cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$= 2.\cos^2\alpha - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2.\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

Halveringsformules:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

Formules van Simpson:

$$2.\sin\alpha \,.\, \cos\beta = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta) \qquad \sin\alpha + \sin\beta = 2.\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$2.\cos\alpha \,.\, \sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2.\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$2.\cos\alpha \,.\, \cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta) \qquad \cos\alpha + \cos\beta = 2.\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$2.\sin\alpha \,.\, \sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2.\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Let op: voor het ingangsexamen geneeskunde moet je de verdubbelingsformules vanbuiten kennen.

1.3.2) Formules van verwante hoeken

Je gaat bij moeilijkere goniometrische vergelijkingen soms de formules van verwante hoeken moeten toepassen…

(1) GELIJKE HOEKEN

$\sin(x + k\,.\,2\pi) = \sin x$
$\cos(x + k\,.\,2\pi) = \cos x$
$\tan(x + k\,.\,2\pi) = \tan x$
$\cot(x + k\,.\,2\pi) = \cot x$

(2) TEGENGESTELDE HOEKEN

$\sin(-x) = -\sin(x)$
$\cos(-x) = \cos(x)$
$\tan(-x) = -\tan(x)$
$\cot(-x) = -\cot(x)$

(3) COMPLEMENTAIRE HOEKEN

*Complementair = hoeken die samen 90° (= π/2) vormen

$\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
$\tan(x) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
$\cot(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

(3) ANTICOMPLEMENTAIRE HOEKEN*

*Deze kan je vinden door i.p.v. x in RL -x in te vullen. Deze zijn minder belangrijk.

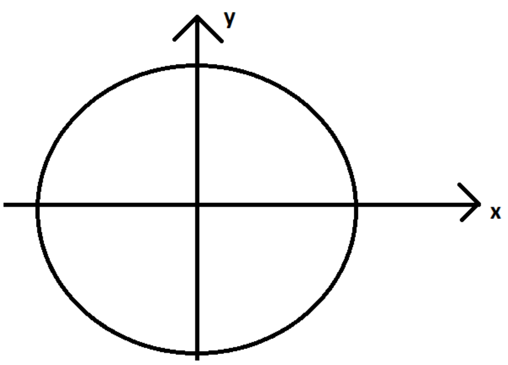
(4) SUPPLEMENTAIRE HOEKEN

*Supplementair = hoeken die samen 180° (= π) vormen

$\sin(\pi - x) = \sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\tan(\pi - x) = -\tan x$
$\cot(\pi - x) = -\cot x$

(5) ANTISUPPLEMENTAIRE HOEKEN

$\sin(\pi + x) = -\sin x$
$\cos(\pi + x) = -\cos x$
$\tan(\pi + x) = \tan x$
$\cot(\pi + x) = \cot x$



Je kan deze formules afleiden uit de goniometrische cirkel.

Als je meer hierover wilt weten, ga dan naar samenvatting wiskunde module 2 goniometrie.

1.3.2) Voorbeeldoefeningen

1.3.2.1) Voorbeeldoefening 1: $\tan 4x + \cot x = 0$

$\tan 4x + \cot x = 0$

--> Minder slimme studenten zeggen nu: aahja, Abdellah, $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ en werken van daar verder. Dit raad ik 100% af, je gaat immers een breuk in je vergelijking zetten dan moet je nog op gelijke noemers zetten ga je met een voorwaarde zitten en blablabla, je maakt het dan moeilijker dan het al is.

⇔ $\tan 4x = -\cot x$

--> Oeioei, we hebben geen formule voor tangens en cotangens? En die minteken zit ons ook nog te ambeteren. Kunnen we die minteken wegwerken?

-->--> Hmmm, ken je de formules voor verwante hoeken nog? Ik wel.

FORMULES VOOR TEGENGESTELDE HOEKEN

$\sin(-x) = -\sin(x)$
$\cos(-x) = \cos(x)$
$\tan(-x) = -\tan(x)$
$\cot(-x) = -\cot(x)$

Deze formules vallen gemakkelijk na te gaan via de goniometrische cirkel. Ben je vergeten hoe dat moet? Dan verwijs ik je met alle plezier door naar samenvatting wiskunde M2 goniometrie.

--> We passen de laatste formule dus omgekeerd toe: $-\cot(x) = \cot(-x)$

⇔ $\tan(4x) = \cot(-x)$

--> Fijn, nu is die minteken daar weg, maar we hebben nog steeds géén formule voor tangens en cotangens. Wat doen we nu?

-->--> Hmmm, je kan met verwante hoeken de cotangens als een tangens schrijven…

FORMULES VOOR COMPLEMENTAIRE HOEKEN

$\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
$\tan(x) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
$\cot(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Zie samenvatting wiskunde module 2 goniometrie voor extra uitleg bij deze formules. Ik ga in deze samenvatting hier niet dieper op in omdat het hier gaat om goniometrische vergelijkingen kunnen oplossen, niet op de formules gebruiken.

--> We passen de laatste formule dus letterlijk toe…

⇔ $\tan(4x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right)$

⇔ $\tan(4x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

⇔ $4x = \frac{\pi}{2} + x + k\,.\,\pi$ (basisformule voor de tangensvergelijking)

⇔ $3x = \frac{\pi}{2} + k\,.\,\pi$ (x overbrengen)

⇔ $x = \frac{\pi}{6} + k\,.\frac{\pi}{3}$ (3 overbrengen)

$Opl = \left\{\frac{\pi}{6} + k\,.\frac{\pi}{3}\right\}$

Zo simpel is het!

1.3.2.2) *Voorbeeldoefening 2:* $\sin 5x + \sin x = 0$

OPLOSSINGSMETHODE: via tegengestelde hoeken

$\sin 5x + \sin x = 0$
⇔ $\sin 5x = -\sin x$
--> We kennen de formule voor tegengestelde hoeken: $\sin(-x) = -\sin(x)$
⇔ $\sin(5x) = \sin(-x)$
⇔ $5x = -x + k\,.\,2\pi$ ∨ $5x = \pi - (-x) + k\,.\,2\pi$
⇔ $5x = -x + k\,.\,2\pi$ ∨ $5x = \pi + x + k\,.\,2\pi$
⇔ $6x = k\,.\,2\pi$ ∨ $4x = \pi + k\,.\,2\pi$
⇔ $x = k\,.\,\frac{2}{6}\pi$ ∨ $x = \frac{\pi}{4} + k\,.\,\frac{2}{4}\pi$
⇔ $x = k\,.\,\frac{\pi}{3}$ ∨ $x = \frac{\pi}{4} + k\,.\,\frac{\pi}{2}$

$Opl = \left\{k\,.\,\frac{\pi}{3} \quad , \quad \frac{\pi}{4} + k\,.\,\frac{\pi}{2}\right\}$

Easy, toch?

1.3.2.3) *Voorbeeldoefening 3:* $\tan 4x\ .\cot x = 1$

OPLOSSINGSMETHODE: Definitie van tangens

$\tan 4x\ .\cot x = 1$
--> We brengen de cotangens over
⇔ $\tan 4x = \frac{1}{\cot x}$
--> We weten dat $\tan x = \frac{1}{\cot x}$
⇔ $\tan 4x = \tan x$
⇔ $4x = x + k\,.\,\pi$ (basistangensvergelijking)
⇔ $3x = k\,.\,\pi$
⇔ $x = k\,.\,\frac{\pi}{3}$ (uitgewerkt)

$Opl = \left\{k\,.\,\frac{\pi}{3}\right\}$

1.3.2.4) *Voorbeeldoefening 4:* $4\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1$

$4\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1$
⇔ $2\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1$ ∨ $2\cos\left(\frac{x}{2}\right) = -1$
--> In deze tussenstap heb ik het kwadraat overgebracht door de vierkantswortel te nemen.
-->--> Let op dat als je de vierkantswortel neemt van $4\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2$ dat je <u>ook</u> de vierkantswortel van 4 neemt! Niet vergeten!
-->--> Let op! Een kwadraat heeft altijd 2 oplossingen (mag je nog steeds niet vergeten!)

⇔ $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ∨ $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2}$
--> In de volgende stap weet je al wat je moet doen: van alles de boogcosinus nemen!

⇔ $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ∨ $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
⇔ $\frac{x}{2} = \pm\frac{\pi}{3} + k\,.\,2\pi$ ∨ $\frac{x}{2} = \pm\frac{2\pi}{3} + k\,.\,2\pi$

⬄ $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k\,.\,4\pi \quad \vee \quad x = \pm\frac{4\pi}{3} + k\,.\,4\pi$

--> Let op: als je jouw :2 overbrengt wordt dat . 2, dan moet je jouw k . 2π natuurlijk ook . 2 doen!

$Opl = \left\{\pm\frac{2\pi}{3} + k\,.\,4\pi \quad , \pm\frac{4\pi}{3} + k\,.\,4\pi\right\}$

1.3.2.5) Voorbeeldoefening 5: $cos^2(2x) = sin^2(2x)$

OPLOSSINGSMETHODE: makkelijk

$cos^2(2x) = sin^2(2x)$

⬄ $\cos(2x) = \sin(2x)$

--> Sommige mensen *(kuch: Ortwin)* geloven niet dat dit mag. Dit mag, je neemt de vierkantswortel in zowel LL als RL, we nemen een eenvoudig getallenvoorbeeld:

$64 = 64$ ⬄ $8^2 = 8^2$ ⬄ $8 = 8$ --> Dit is allemaal hetzelfde!

==> De makkelijkste werkwijze is de sinus als een cosinus schrijven via tegengestelde hoeken…

⬄ $\cos(2x) = \cos(\pi - 2x)$

⬄ $2x = (\pi - 2x) + k\,.\,2\pi \quad \vee \quad 2x = -(\pi - 2x) + k\,.\,2\pi$

⬄ $2x = \pi - 2x + k\,.\,2\pi \quad \vee \quad \cancel{2x} = -\pi \cancel{+2x} + k\,.\,2\pi$

⬄ $4x = \pi + k\,.\,2\pi \quad \vee \quad 0x = -\pi + k\,.\,2\pi$

--> Deze laatste vergelijking is vals!

⬄ $x = \frac{\pi}{4} + k\,.\frac{\pi}{2}$

$Opl = \left\{\frac{\pi}{4} + k\,.\,2\pi\right\}$

1.3.2.6) Voorbeeldoefening 6: $\sin 2x = 2\sin x$

Oplossingsmethode: formuleblad

$\sin 2x = 2\sin x$

⬄ $\sin 2x - 2\sin x = 0$ (overbrengen…)

⬄ $2\sin x\cos x - 2\sin x = 0$ ($\sin 2x = 2\sin x\cos x$ --> verdubbelingsformule op formuleblad)

⬄ $2\sin x\ (\cos x - 1) = 0$ (afzonderen van gemeenschappelijke termen)

⬄ $2\sin x = 0 \quad \vee \quad \cos x - 1 = 0$

⬄ $\sin x = 0 \quad \vee \quad \cos x = 1$

⬄ $\sin x = \sin(0) \quad \vee \quad \cos x = \cos(0)$ (boogsinus en -cosinus nemen)

⬄ $x = 0 + k\,.\,2\pi \quad \vee \quad x = \pi + k\,.\,2\pi \quad \vee \quad x = \pm 0 + k\,.\,2\pi$

--> We hebben hier 2 dezelfde oplossingen, we laten ééntje hiervan dus weg.

⬄ $x = 0 + k\,.\,2\pi \quad \vee \quad x = \pi + k\,.\,2\pi$

--> Als je dit zo in je oplossingsverzameling schrijft, is het al goed. Echter kan je deze twéé oplossingen nog schrijven als één oplossing (voor degenen die ietsje beter zijn in wiskunde).

⬄ $x = k\,.\,\pi$

$Opl = \{k\,.\,\pi\}$

1.3.2.6) Voorbeeldoefening 6: $1 + \cos x - \cos\frac{x}{2} = 0$

$1 + \cos x - \cos\frac{x}{2} = 0$

Ik moet toegeven dat deze een moeilijke was en ik hier eventjes aan heb gezeten.

Ik heb voor deze oefening dé werkwijze gevonden zonder dat er oplossingen verdwijnen.

$1 + \cos x - \cos\frac{x}{2} = 0$

⬄ $1 + \left[2\,cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right] - \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ (verdubbelingsformule: $\cos x = 2\,.\,cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$)

⇔ $1 + 2cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$

⇔ $2\,cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ (vereenvoudigen)

⇔ $cos\left(\frac{x}{2}\right)\left[2\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right] = 0$ (gemeenschappelijke termen afzonderen)

⇔ $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \quad \vee \quad 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0$

⇔ $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \quad \vee \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$

⇔ $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \vee \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

⇔ $\frac{x}{2} = \pm\frac{\pi}{2} + k\,.\,2\pi \quad \vee \quad \frac{x}{2} = \pm\frac{\pi}{3} + k\,.\,2\pi$

⇔ $x = \pm\pi + k\,.\,4\pi \quad \vee \quad x = \pm\frac{2\pi}{3} + k\,.\,4\pi$

En je hebt je oplossingen gevonden!

$$Opl = \left\{\pm\pi + k\,.\,4\pi \quad ; \quad \pm\frac{2\pi}{3} + k\,.\,4\pi\right\}$$

1.3.2.7) Voorbeeldoefening 7: $\cos 3x - \cos 2x + \cos x = 0$

$\cos(3x) - \cos(2x) + \cos(x) = 0$

--> Hmmm, hoe zal je deze vergelijking oplossen… Wacht eens even?

⇔ $\cos(3x) + \cos(x) - \cos(2x) = 0$

⇔ $\cos(2x + x) + \cos(2x - x) - \cos(2x) = 0$

--> Je kan 3x schrijven als 2x + x en x kan je schrijven als 2x – x.

--> Waarom doen we dit? Nu kan je de formule van Simpson (zie formuleblad) van rechts naar links toepassen!

⇔ $2\cos 2x\ .\cos x - \cos 2x = 0$

⇔ $\cos 2x\ [\,2\cos x - 1] = 0$

⇔ $\cos 2x = 0 \quad \vee \quad 2\cos x - 1 = 0$

⇔ $\cos 2x = 0 \quad \vee \quad \cos x = \frac{1}{2}$

⇔ $\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \vee \quad \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

⇔ $2x = \pm\frac{\pi}{2} + k.\,2\pi \quad \vee \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + k\,.\,2\pi$

⇔ $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\,.\,\pi \quad \vee \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + k\,.\,2\pi$

$$Opl = \left\{\pm\frac{\pi}{4} + k\,.\,\pi \quad ; \quad \pm\frac{\pi}{3} + k\,.\,2\pi\right\}$$

Dat was toch niet zo moeilijk, hé? :)

1.3.2.8) Voorbeeldoefening 8: $\sin 5x + \sin x = \cos 2x - \cos 4x$

$\sin 5x + \sin x = \cos 2x - \cos 4x$

--> We gaan onze vergelijkingen opnieuw herschrijven zodat we onze goeie, oude vriend Simpson kunnen gebruiken…

⇔ $\sin(3x + 2x) + \sin(3x - 2x) = \cos(3x - x) - \cos(3x + x)$

⇔ $2\sin(3x)\ .\cos(2x) = 2\sin(3x)\ .\sin(x)$

--> We hebben in deze tussenstap Simpson in LL en RL toegepast.

⇔ $\cos(2x) = \sin(x)$ **(*)**

--> RL en LL delen door 2 sin (3x).
⇔ $1 - 2sin^2(x) = \sin(x)$
--> We hebben hier een verdubbelingsformule toegepast: $\cos(2x) = 1 - 2\ sin^2(x)$
⇔ $1 - 2sin^2(x) - \sin(x) = 0$
⇔ $-2sin^2(x) - \sin(x) + 1 = 0$
⇔ $2\ sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$
--> Laatste stap hebben we RL en LL maal (-1) gedaan om mintekens weg te werken.

HULPONBEKENDE: $y = \sin(x)$

⇔ $2y^2 + y - 1 = 0$
--> $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4.2.(-1) = 1 + 8 = 9$
--> $y_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-1+3}{2.2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
--> $y_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-1-3}{2.2} = -\frac{4}{4} = -1$

Nu kunnen we onze hulponbekende terug vervangen…
$y = \frac{1}{2} \quad \vee \quad y = -1$

⇔ $\sin x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \sin x = -1$
⇔ $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad \vee \quad \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$
⇔ $x = \frac{\pi}{6} + k\,.2\pi \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{6} + k\,.2\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{2} + k\,.2\pi \quad \vee \quad x = \frac{3\pi}{2} + k\,.2\pi$

En je vergelijking is opgelost! Al deze oplossingen zijn correct (nagecheckt!), in de verbetersleutel staan ze gewoon anders genoteerd.

1.3.2.9) Voorbeeldoefening 9: $\sin 2x + 2\ sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2\cos x = 1$

$\sin 2x + 2sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2\cos x = 1$
⇔ $\sin 2x + 2\,.\left[\frac{1-\cos x}{2}\right] + 2\cos x = 1$ (halveringsformule toegepast)
⇔ $\sin 2x + 1 - \cos x + 2\cos x = 1$
⇔ $\sin 2x + \cos x = 0$ (*)
--> We gaan nu de wellicht meest bekende verdubbelingsformule toepassen:
$\sin 2x = 2\sin x\cos x$
⇔ $2\sin x\ .\cos x + \cos x = 0$
⇔ $\cos x\ [2\sin x + 1] = 0$
⇔ $\cos x = 0 \quad \vee \quad 2\sin x + 1 = 0$
⇔ $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \vee \quad \sin x = -\frac{1}{2}$
⇔ $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \vee \quad \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
⇔ $x = \pm\frac{\pi}{2} + k\,.2\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{6} + k\,.2\pi \quad \vee \quad x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + k\,.2\pi$
⇔ $x = \pm\frac{\pi}{2} + k\,.2\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{6} + k\,.2\pi \quad \vee \quad x = \frac{7\pi}{6} + k\,.2\pi$

Bravo! Je hebt je oefening nu juist opgelost!

$Opl = \left\{\pm\frac{\pi}{2} + k\,.2\pi \ ; \quad -\frac{\pi}{6} + k\,.2\pi \ ; \quad x = \frac{7\pi}{6} + k\,.2\pi\right\}$

Merk op dat er meerdere oplossingsmethoden mogelijk zijn, je had de cos x bij (*) kunnen overbrengen, daar dan een sinus van kunnen maken via tegengestelde en complementaire hoeken en dan verder kunnen oplossen.

1.3.2.10) Voorbeeldoefening 10: $\cos^4 x - \sin^4 x = 0$

$\cos^4 x - \sin^4 x = 0$
⇔ $(\cos^2 x)^2 - (\sin^2 \mathrm{x})^2 = 0$
--> Dit is een merkwaardig product: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
⇔ $(cos^2x + sin^2x).(cos^2x - sin^2x) = 0$
--> We kunnen hetzelfde merkwaardig product in de 2de factor toepassen: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
⇔ $(cos^2x + sin^2x).[(\cos x - \sin x).(\cos x + \sin x)] = 0$
--> Eerste factor = grondformule van de goniometrie: $cos^2x + sin^2x = 1$
⇔ $1.(\cos x - \sin x).(\cos x + \sin x) = 0$
--> Deze vergelijking valt uiteen…
⇔ $\cos x - \sin x = 0$ ∨ $\cos x + \sin x = 0$
⇔ $\cos x = \sin x$ ∨ $\cos x = -\sin x$
⇔ $\cos x = \sin x$ ∨ $\cos x = \sin(-x)$ (tegengestelde hoeken!)
⇔ $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ∨ $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
We lossen elke vergelijking apart op voor de overzichtelijkheid.

⇔ $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
⇔ $x = \frac{\pi}{2} - x + k.2\pi$ ∨ $x = -\frac{\pi}{2} + x + k.2\pi$
⇔ $2x = \frac{\pi}{2} + k.2\pi$ ∨ $0 = -\frac{\pi}{2} + k.2\pi$
⇔ $x = \frac{\pi}{4} + k.\pi$ → VALSE vergelijking

⇔ $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
⇔ $x = \frac{\pi}{2} + x + k.2\pi$ ∨ $x = -\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + k.2\pi$
⇔ $0x = \frac{\pi}{2} + k.2\pi$ ∨ $x = -\frac{\pi}{2} - x + k.2\pi$
⇔ $VALSE\ VGL.$ ∨ $2x = -\frac{\pi}{2} + k.2\pi$
⇔ $x = -\frac{\pi}{4} + k.\pi$

We hebben onze oplossingen dus gevonden.

$Opl = \left\{\pm\frac{\pi}{4} + k.2\pi\right\}$

Makkelijk, hé?

1.3.2.10) Voorbeeldoefening 10: $\cos 2x - \cos x = \sin 2x - \sin x$

$\cos 2x - \cos x = \sin 2x - \sin x$
→ Met de verdubbelingsformules kom je er NIET met deze oefening, je zal altijd één sinus of één cosinus overhouden! Niet sukkelen met de verdubbelingsformules (was ik één uur mee aan het sukkelen op deze oefening.

==> $(\cos 2x - \cos x)^2 = (\sin 2x - \sin x)^2$
--> We kwadrateren LL en RL. Als je kwadrateert moet je een enkele pijl zetten (irrationale functies!)

⇔ $\cos^2 2x - 2\cos 2x\ .\cos x + \cos^2 x = \sin^2 2x - 2\sin 2x\ .\sin x + \sin^2 x$
--> Op de blauwgemarkeerde deeltjes kan je Simpson nu toepassen…

⇔ $\cos^2 2x - [\cos(2x - x) + \cos(2x + x)] + \cos^2 x = \sin^2 2x - [\cos(2x - x) - \cos(2x + x)] + \sin^2 x$

⇔ $\cos^2 2x - [\cos(x) + \cos(3x)] + \cos^2 x = \sin^2 2x - [\cos(x) - \cos(3x)] + sin^2 x$

⇔ $\cos^2 2x \cancel{- \cos x} - \cos 3x + \cos^2 x = \sin^2 2x \cancel{- \cos x} + \cos 3x + \sin^2 x$

⇔ $\cos^2 2x - \cos 3x + \cos^2 x = \sin^2 2x + \cos 3x + \sin^2 x$

⇔ $.\cos^2 2x - \sin^2 2x - 2\cos 3x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$

--> Op de groene gedeelten gaan we nu de verdubbelingsformule toepassen:
$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$

⇔ $\cos(4x) - 2\cos 3x + \cos(2x) = 0$

⇔ $.\cos(4x) + \cos(2x) - 2\cos(3x) = 0$

--> Op de roosgemarkeerde delen kan je nu Simpson opnieuw toepassen. :)

⇔ $\cos(3x + x) + \cos(3x - x) - 2\cos(3x) = 0$

⇔ $2\cos(3x)\ .\cos(x) - 2\cos(3x) = 0$

WAT JE NU ABSOLUUT NIET MAG DOEN!!!!

⇔ $\cancel{2\, cos\ (3x)}.\, cos\ (x) = \cancel{2\, cos\ (3x)}$
--> DOOR TE DELEN GA JE OPLOSSINGEN DIE ER ZIJN NIET MEER VINDEN!!!!

WAT JE NU WEL DOET… :)

⇔ $2\cos(3x)\ \ [\cos(x) - 1] = 0$ (afzonderen van gemeenschappelijke termen)

⇔ $2\cos(3x) = 0 \quad \vee \quad \cos(x) - 1 = 0$

⇔ $\cos(3x) = 0 \quad \vee \quad \cos(x) = 1$

⇔ $\cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \vee \quad \cos(x) = \cos(0)$

⇔ $3x = \pm\frac{\pi}{2} + k\,.\,2\pi \quad \vee \quad x = \pm 0 + k\,.\,2\pi$

⇔ $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\,.\frac{2\pi}{3} \quad \vee \quad x = k\,.\,2\pi$

Omdat je hebt gekwadrateerd moet je nachecken of er valse oplossingen zijn, je vult $\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$ en 0 in op je rekenmachine. Je vindt dat je voor $-\frac{\pi}{6}$ een valse uitspraak krijgt. Dit is dan ook géén oplossing.
--> Herinner je van irrationale functies dat je oplossingen kan bijmaken door te kwadrateren.

$Opl = \left\{-\frac{\pi}{6} + k\,.\,2\pi \quad ; \quad k\,.\,2\pi\right\}$

Dat was makkelijk! :)

Neen, ik was hier één uur aan bezig. Graaggedaan om jullie al deze tijd te doen besparen! :-)

1.3.2.11) *Voorbeeldoefening 11:* $\tan^2 x + 2\tan x - 3 = 0$

$\tan^2 x + 2\tan x - 3 = 0$

--> We voeren een hulponbekende in: $y = \tan x$

$y^2 + 2y - 3 = 0$

==> $D = b^2 - 4ac$

$= 2^2 - 4 . 1 . (-3)$

$= 4 + 12 = 16$

➔➔ $y_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-2+4}{2.1} = \frac{2}{2} = 1$

$y_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-2-4}{2.1} = -\frac{6}{2} = -3$

=============> DUS: $y = 1$ ∨ $y = -3$

→ We kunnen dit terug vervangen door $y = \tan x$

$\tan x = 1$ ∨ $\tan x = -3$

⇔ $\tan x = \tan\frac{\pi}{4}$ ∨ $\tan x = \tan(-1{,}25)$

⇔ $x = \frac{\pi}{4} + k.\pi$ ∨ $x = -1{,}25 + k.\pi$

$Opl = \left\{\frac{\pi}{4} + k.\pi \ ; \ -1{,}25 + k.\pi\right\}$

Dit was niet zo moeilijk.

1.3.2.12) *Voorbeeldoefening 12:* $\cos^2 x = 7(\sin x + 1)$

$cos^2 \text{x} = 7(sin\,\text{x} + 1)$

⇔ $\cos^2 x = 7\sin x + 7$

--> We kennen de grondformule van de goniometrie: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

⇔ $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

⇔ $1 - \sin^2 x = 7\sin x + 7$

⇔ $1 - \sin^2 x = 7\sin x + 7$

⇔ $-\sin^2 x - 7\sin x - 6 = 0$

⇔ $\sin^2 x + 7\sin x + 6$ (RL en LL maal -1)

➔ HULPONBEKENDE: $y = \sin x$

⇔ $y^2 + 7y + 6 = 0$

➔ $D = b^2 - 4ac$

$= 7^2 - 4.1.6$

$= 49 - 24$

$= 25$

======================> $y_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-7+5}{2.1} = -1$

$y_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-7-5}{2.1} = \frac{-12}{2} = -6$

We kunnen onze hulponbekende terug vervangen…

$\sin(x) = -1$ ∨ $\sin(x) = -6$

--> Je ziet direct dat deze vergelijking géén oplossing heeft aangezien de straal van de goniometrische cirkel 1 is!

⇔ $\sin(x) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k\,.\,2\pi \quad \vee \quad x = \pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + k\,.\,2\pi$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k\,.\,2\pi \quad \vee \quad x = \frac{3\pi}{2} + k\,.\,2\pi$

--> $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{3\pi}{2}$ zijn de zelfde beeldpunten op de goniometrische cirkel, -90° = 270° omdat -90° + 360° = 370°. Je moet dus slechts één van beiden opschrijven in je oplossingsverzameling.

$Opl = \left\{-\frac{\pi}{2} + k\,.\,2\pi\right\}$

1.3.2.13) Voorbeeldoefening 13: $\tan 3x + 2\cot 3x = 3$

$\tan 3x + 2\cot 3x = 3$

$\Leftrightarrow \tan 3x + 2\left(\frac{1}{\tan 3x}\right) = 3$ (we maken hier gebruik van de definitie van cotangens)

$\Leftrightarrow \tan 3x + \frac{2}{\tan 3x} = 3$ (vereenvoudigen)

$\Leftrightarrow \frac{tan^2 3x}{\tan 3x} + \frac{2}{\tan 3x} = 3$ (op gelijke noemers zetten)

$\Leftrightarrow \frac{\tan^2 3x + 2}{\tan 3x} - 3 = 0$ (3 overbrengen)

$\Leftrightarrow \frac{\tan^2 3x + 2}{\tan 3x} - \frac{3\tan 3x}{\tan 3x} = 0$ (3 op gelijke noemers zetten)

$\Leftrightarrow \tan^2 3x + 2 - 3\tan 3x = 0$ ($\tan 3x \neq 0 \rightarrow wie\ deelt\ door\ nul, is\ een\ snul!$)

$\Leftrightarrow \tan^2 3x - 3\tan 3x + 2 = 0$

➔ HULPONBEKENDE: $y = \tan x$

$\Leftrightarrow y^2 - 3y + 2 = 0$

➔ $D = b^2 - 4ac$

$= (-3)^2 - 4\,.\,2\,.\,1$

$= 9 - 8$

$= 1$

---------------------------------> $y_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3)+1}{2\,.\,1} = \frac{4}{2} = 2$

$y_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = 1\ (ga\ zelf\ na!)$

==> DUS:

$y = 2 \quad \vee \quad y = 1$

$\Leftrightarrow \tan(3x) = 2 \quad \vee \quad \tan(3x) = 1$

$\Leftrightarrow \tan(3x) = \tan(1{,}11) \quad \vee \quad \tan(3x) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow 3x = 1{,}11 + k\,.\,\pi \quad \vee \quad 3x = \frac{\pi}{4} + k\,.\,\pi$

$\Leftrightarrow x = 0{,}37 + k\,.\,\frac{\pi}{3} \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{12} + k\,.\,\frac{\pi}{3}$

$Opl = \left\{0{,}37 + k\,.\,\frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{\pi}{12} + k\,.\,\frac{\pi}{3}\right\}$

ET VOILA! We zijn er!

1.3.2.14) voorbeeldoefening 14: $\cos^2 4x = 1 - \sin^2 4x$

$\cos^2 4x = 1 - \sin^2 4x$

--> Je kent de grondformule van de goniometrie: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

-->--> DUS: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

⇔ $\cos^2 4x = \cos^2 4x$

--> Dit zijn 2 dezelfde termen, voor elke $x \in \mathbb{R}$ is deze vergelijking dus waar.

$Opl = \mathbb{R}$

1.3.2.15) Voorbeeldoefening 15: $\sqrt{3}\cos x + \sqrt{3} = \sin x$

$\sqrt{3}\cos x + \sqrt{3} = \sin x$

--> We gebruiken hier best de t-formules…

⇔ $\sqrt{3}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) + \sqrt{3} = \frac{2t}{1+t^2}$

⇔ $\sqrt{3}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) - \frac{2t}{1+t^2} + \frac{\sqrt{3}(1+t^2)}{1+t^2} = 0$ (overbrengen en op gelijke noemers zetten…)

⇔ $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2} + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}t^2}{1+t^2} = 0$ (haakjes uitwerken…)

⇔ $\frac{\sqrt{3}\cancel{-\sqrt{3}t^2}-2t+\sqrt{3}\cancel{+\sqrt{3}t^2}}{1+t^2} = 0$ (breuken samensmelten)

⇔ $\frac{2\sqrt{3}-2t}{1+t^2} = 0$ (optelling uitvoeren)

⇔ $2\sqrt{3} - 2t = 0$ (VOORWAARDE: $1 + t^2 \neq 0$)

⇔ $-2t = -2\sqrt{3}$

⇔ $t = \sqrt{3}$ (je weet dat $t = \tan\frac{x}{2}$)

⇔ $\tan\frac{x}{2} = \sqrt{3}$

⇔ $\tan\frac{x}{2} = \tan(\frac{\pi}{3})$

⇔ $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + k\,.\,\pi$

⇔ $x = \frac{2\pi}{3} + k\,.\,2\pi$

Bij de t-formules is er soms een **verborgen oplossing aanwezig**. Je weet dat $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, stel eens x = π, dan krijg je: $t = \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Je weet ook dat $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = MATH\ ERROR = niet\ gedefinieerd.$

Je moet bij de t-formules dus altijd nachecken op x = $\pi + k\,.\,2\pi$ ook een oplossing kan zijn! Dit is je verborgen oplossing.

Verborgen oplossing?

$\sqrt{3}\cos x + \sqrt{3} = \sin x$

⇔ $\sqrt{3}\,.\cos\pi + \sqrt{3} = \sin\pi$

⇔ $!\,0 = 0!$

Dus: $x = \pi + k\,.\,2\pi$ is ook een oplossing!

$Opl = \left\{\frac{2\pi}{3} + k\,.\,2\pi\,;\pi + k\,.\,2\pi\right\}$

1.3.2.16) *Voorbeeldoefening 16:* $3\cos^2 8x + 1 = 7\sin^2 4x$

$3\cos^2 8x + 1 = 7\sin^2 4x$

⇔ $3\cos^2 8x + 1 = 7\left(\frac{1-\cos 8x}{2}\right)$

--> Halveringsformule toegepast!

⇔ $3\cos^2 8x + 1 = \frac{7-7\,cos\,8x}{2}$

⇔ $6\cos^2 8x + 2 = 7 - 7\,cos\,8x$

⇔ $6\cos^2 8x + 7\cos 8x - 5 = 0$

HULPONBEKENDE: $y = \cos 8x$

⇔ $6y^2 + 7y - 5 = 0$

➔ $D = b^2 - 4ac$

$= 7^2 - 4\,.\,6\,.\,(-5)$

$= 169$

$y_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{1}{2}$

$y_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = -\frac{5}{3}$

⇔ $y = \frac{1}{2}$ V $y = -\frac{5}{3}$

⇔ $\cos 8x = \frac{1}{2}$ V $\cos 8x = -\frac{5}{3}$

⇔ $\cos 8x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ V $\cos 8x = MATH\ ERROR$ (straal goniometrische cirkel!)

⇔ $8x = \pm\frac{\pi}{3} + k\,.\,2\pi$

⇔ $x = \pm\frac{\pi}{24} + k\,.\,\frac{2\pi}{8}$

⇔ $x = \pm\frac{\pi}{24} + k\,.\,\frac{\pi}{4}$

$Opl = \left\{\pm\frac{\pi}{24} + k\,.\,\frac{\pi}{4}\right\}$

1.3.2.17) *voorbeeldoefening 17:* $\sin^2 x - 2 = \cos^3 x + \cos x$

⇔ $\sin^2 x - 2 = \cos^3 x + \cos x$

→ Niet te ver zoeken; je kent de grondformule van de goniometrie ==> $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

⇔ $1 - \cos^2 x - 2 = \cos^3 x + \cos x$

⇔ $1 - cos^2 x - 2 - cos^3 x - \cos x = 0$

⇔ $-\cos^3 x - \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

⇔ $\cos^3 x + \cos^2 x + \cos x + 1 = 0$ (RL en LL maal -1)

HULPONBEKENDE: $y = \cos x$

⇔ $y^3 + y^2 + y + 1 = 0$

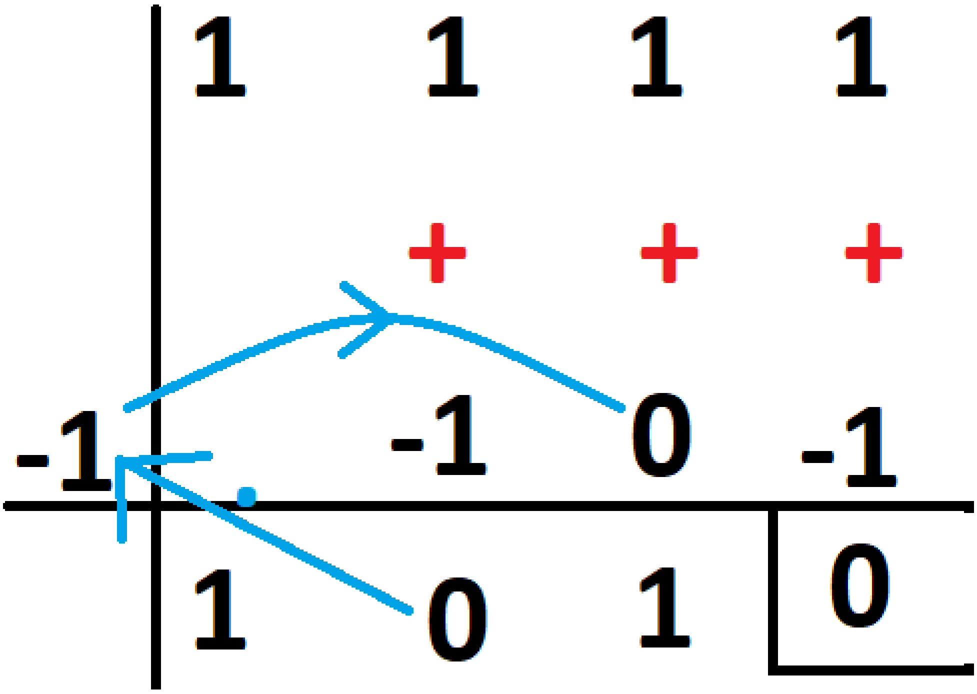
--> Derdegraadsvergelijking los je op met Horner:

STAP 1: deler zoeken…

1? $1 + 1 + 1 + 1 \neq 0$

-1? $-1 + 1 - 1 + 1 = 0$

--> Onze functie is dus deelbaar door (x+1) --> want: -1+1 = 0



We verkrijgen dus: $(y+1)(y^2+1)=0$

⇔ $y+1=0 \quad \vee \quad y^2+1=0$

⇔ $y=\ -1 \quad \vee \quad y^2\ =\ -1$

--> Tweede vergelijking is VALS: $y\ \in\ \mathbb{R}$!

$y=-1$

⇔ $\cos x=-1$

⇔ $\cos x=\cos(\pi)$

⇔ $x=\ \pm\pi+k\,.\,2\pi$

--> Dit zijn 2 dezelfde oplossingen, immers geldt: $-\pi+2\pi=\pi$

→ Dus: je moet maar ééntje opschrijven…

⇔ $x=\pi+k\,.\,2\pi$

→ Dit is ook juist, de verbetersleutel heeft een andere notatie: $x=(2k+1)\pi$

$Opl=\{\pi+k\,.\,2\pi\}$

2) Zelftest ingangsexamen geneeskunde

2.0) Regels en benodigdheden

2.0.1) Afspraak

Je mag voor het ingangsexamen geneeskunde GEEN zakrekenmachine gebruiken.

2.0.2) Formularium fysica: getalwaarden sin, cos, tan

$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$	$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}=0{,}87$	$\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}=0{,}58$
$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}=0{,}71$	$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}=0{,}71$	$\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=1$
$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}=0{,}87$	$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$	$\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}=1{,}73$

2.1) Opgaven

*OPGAVE 1:

Goniometrische vergelijkingen Vraag 3 Augustus 2010

! Selected ★★★☆☆

- Gegeven de vergelijking $4\sin^2(2x) = 1$.
- Hoeveel reële oplossingen kan je vinden tussen 0 en π?

<A> 2
<B> 3
<C> 4
<D> 6

*OPGAVE 2:

Vraag 4 Juli 2009

★★★☆☆

- Hoeveel oplossingen zijn er voor de vergelijking $\sin^2(2x) = 1/2$ die liggen tussen 0° en 360°?

<A> 1
<B> 2
<C> 4
<D> 8

*OPGAVE 3:

Vraag 2 Augustus 2008

! Selected

★★☆☆☆

- Wat is de waarde van x in $4\cos^2(3x+60°) = 3$?

<A> 320°
<B> 330°
<C> 340°
<D> 360°

*OPGAVE 4:

Vraag 2 Juli 2008

★★☆☆☆

- Wat is de waarde van x in $\cos^2(3x+75°) = 1$?

<A> 325°
<B> 305°
<C> 335°
<D> 315°

*OPGAVE 5:

Vraag 3 Augustus 2001

★★☆☆☆

- Welke van de volgende waarden van x voldoet aan de vergelijking
- $2\cos^2(3x+30°) = 1$?

<A> 140°
<B> 145°
<C> 150°
<D> 155°

*OPGAVE 6:

Vraag 3 Juli 2000

★★☆☆☆

- Welke van de volgende waarden van x voldoet aan de vergelijking:
- 2cos(2x+30°) = 1

<A> 120°
<B> 135°
<C> 150°
<D> 165°

2.2) Oplossingen

2.2.1) Oplossing opgave 1

OPGAVE 1:

$4\sin^2 2x = 1$

⬄ $\sin^2 2x = \frac{1}{4}$

⬄ $\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ V $\sin 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

⬄ . $\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ V $\sin 2x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ (zie formuleblad fysica)

--> We lossen beide vergelijkingen apart op voor de overzichtelijkheid.

⬄ $2x = \frac{\pi}{4} + k\,.\,2\pi$ V $2x = \pi - \frac{\pi}{4}\left(= \frac{3\pi}{4}\right) + k.\,2\pi$

⬄ $x = \frac{\pi}{8} + k\,.\,\pi$ V $x = \frac{3\pi}{8} + k\,.\,\pi$

⬄ $2x = -\frac{\pi}{4} + k\,.\,2\pi$ V $2x = \pi + \frac{\pi}{4}\left(= \frac{5\pi}{4}\right) + k\,.\,2\pi$

⬄ $x = -\frac{\pi}{8} + k\,.\,\pi$ V $x = \frac{5\pi}{8} + k\,.\,\pi$

De oplossingen die we hebben gevonden zijn dus:

(1) $x = \frac{\pi}{8} + k\,.\,\pi$

(2) $x = \frac{3\pi}{8} + k\,.\,\pi$

(3) $x = -\frac{\pi}{8} + k\,.\,\pi$

--> Dit zit niet in het interval]0, π[, we kunnen er echter π bij tellen (k = 1).

➔ $x = -\frac{\pi}{8} + \pi = \frac{7\pi}{8}$

→ Dit zit in het interval]0, π[:)

(4) $x = \frac{5\pi}{8} + k\,.\,\pi$

We hebben dus 4 oplossingen in het gevraagde interval!

C = OK --> 4 oplossingen!

2.2.2) Oplossing opgave 2

We lossen de oefening niet in radialen, maar in graden op, omdat het gegeven interval in graden is gegeven.

<u>OPGAVE 2:</u>

$\sin^2 2x = \frac{1}{2}$

⇔ $\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ∨ $\sin 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

⇔ $\sin 2x = \sin(45°)$ ∨ $\sin 2x = \sin(-45°)$

$!!!\ \sin(x) = -\sin x\ !!!$

⇔ . $2x = 45° + k\,.\,360°$ ∨ $2x = -45° + k\,.\,360°$

→ We lossen elke vergelijking opnieuw apart op.

⇔ $x = 22{,}5° + k\,.\,180°$ ∨ $x = 180° - 22{,}5° + k\,.\,180°$

⇔ $x = 22{,}5° + k\,.\,180°$ ∨ $x = 157{,}5° + k\,.\,180°$

⇔ $x = -22{,}5° + k\,.\,180°$ ∨ $x = 180° + 22{,}5° + k\,.\,180°$

⇔ $x = -22{,}5° + k\,.\,180°$ ∨ $x = 202{,}5° + k\,.\,180°$

We hebben dus 4 oplossingen gevonden:

(1) $x = 22{,}5° + k\,.\,180°$

(2) $x = 157{,}5° + k\,.\,180°$

(3) $x = -22{,}5° + k\,.\,180°$

(4) $x = 157{,}5° + k\,.180°$

Vergelijkingen (1), (2) en (4) hebben een oplossing tussen 0° en 360° als k = 0 en k = 1.
Vergelijking (3) heeft een oplossing tussen 0° en 360° als k = 1 en k = 2.

In totaal komen we dus aan 8 oplossingen in het gevraagde interval. D = OK.

2.2.3) Oplossing opgave 3

$4\cos^2(3x + 60°) = 3$

⇔ $\cos^2(3x + 60°) = \frac{3}{4}$

⇔ $cos(3x + 60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ∨ $cos\ (3x + 60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\mathbf{!!!!!!!\ \cos(180° - x) = -\cos x\ !!!!!!!}$

⇔ . $\cos(3x + 60°) = \cos(30°)$ ∨ $\cos(3x + 60°) = \cos(180° - 30°)$

⇔ . $\cos(3x + 60°) = \cos 30°$ ∨ $\cos(3x + 60°) = \cos\ (150°)$

--> We lossen beide vergelijkingen opnieuw apart op

⇔ $\cos(3x + 60°) = \cos 30°$

⇔ $3x + 60° = 30° + k\,.\,360°$ ∨ $3x + 60° = -30° + k\,.\,360°$

⇔ $3x = -30° + k\,.\,360°$ ∨ $3x = -90° + k\,.\,360°$

⇔ $x = -10° + k\,.\,120°$ ∨ $x = -30° + k\,.\,120°$

We checken al na of één van deze oplossingen een juist antwoord is…

(1) $x = -10° + 3\,.\,120° = -10° + 360° = 350°$

--> 350° zit jammer genoeg niet in onze gegeven oplossingen.

(2) $x = -30° + 3\,.\,120° = -30° + 360° = 330°$
--> 330° zit in onze gegeven oplossingen --> B = OK

Nu hoef je de blauwe vergelijking niet meer uit te werken!

2.2.4) Oplossing opgave 4

Opgave 4:

$\cos^2(3x + 75°) = 1$
⇔ $\cos(3x + 75°) = 1$ ∨ $\cos(3x + 75°) = -1$
--> De corresponderende hoekgrootte van de cosinus voor 1 staat niet op je formuleblad fysica. Echter kan je redeneren, de cosinus lees je af op de x-as, bij 0° is je cosinus 1!

⇔ $\cos(3x + 75°) = \cos(0)$ ∨ $\cos(3x + 75°) = \cos(180°)$
!!!!!! $\mathbf{\cos(180° - x) = -\cos(x)}$!!!!!!

⇔ $3x + 75° = 0 + k\,.\,360°$ ∨ $3x + 75° = 180° + k\,.\,360°$
⇔ $3x = -75° + k\,.\,360°$ ∨ $3x = 105° + k\,.\,360°$
⇔ $x = -25° + k\,.\,120°$ ∨ $x = 35° + k\,.\,120°$

We hebben dus 2 oplossingen gevonden...
(1) $x = -25° + k\,.\,120°$
--> Oplossing voor k = 3? $x = -25° + 360° = 335° = antwoord\ C \rightarrow C = OK$
(2) $x = 35° + k\,.\,120°$
--> We hoeven dit niet na te checken want we weten dat C = OK!

2.2.5) Oplossing opgave 5

Opgave 5:

$2\cos^2(3x + 30°) = 1$
⇔ $\cos^2(3x + 30°) = \frac{1}{2}$
⇔ $cos(3x + 30°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ∨ $cos(3x + 30°) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
⇔ $cos(3x + 30°) = \cos(45°)$ ∨ $\cos(3x + 30°) = \cos(180° - 45°)$
!!!!!!!!!!!!!!! $\mathbf{\cos(180° - x) = -\cos x}$!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
⇔ . $\cos(3x + 30°) = \cos(45°)$ ∨ $\cos(3x + 30°) = \cos(135°)$
⇔ $3x + 30° = 45° + k\,.\,360°$ ∨ $3x + 30° = -45° + k\,.\,360°$
⇔ $3x = 15° + k\,.\,360°$ ∨ $3x = -75° + k\,.\,360°$
⇔ $x = 5° + k\,.\,120°$ ∨ $x = -25° + k\,.\,120°$
--> We zien direct dat noch voor k = 1 noch voor k = 2 géén oplossingen van onze antwoordmogelijkheden in deze oplossingen zitten. We checken dus de blauwe vergelijking na...

⇔ $3x + 30° = 135° + k\,.\,360°$ ∨ $3x + 30° = -135° + k\,.\,360°$
⇔ $3x = 105° + k\,.\,360°$ ∨ $3x = -165° + k\,.\,360°$
⇔ $x = 35° + k\,.\,120°$ ∨ $x = -55° + k\,.\,120°$

--> We zien direct: oplossing 1 --> k = 1 --> x = 155° ==> D = OK!

2.2.6) Oplossing opgave 6

Opgave 6:

$2\cos(2x + 30°) = 1$
$\Leftrightarrow \cos(2x + 30°) = \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow \cos(2x + 30°) = \cos(60°)$ (zie formuleblad fysica)
$\Leftrightarrow 2x + 30° = 60° + k\,.\,360°$ $\quad\vee\quad$ $2x + 30° = -60° + k\,.\,360°$
$\Leftrightarrow 2x = 30° + k\,.\,360°$ $\quad\vee\quad$ $2x = -90° + k\,.\,360°$
$\Leftrightarrow x = 15° + k\,.\,180°$ $\quad\vee\quad$ $x = -45° + k\,.\,180°$

Als we bij oplossing 2 k = 1 nemen, krijgen we 135° --> B = OK!