

## Inhoud

1) Discrete kansvariabelen .....	2
1.0) Kansexperiment .....	2
1.1) Terminologie .....	2
1.1.1) Kansvariabele (= toevalsvariabele) .....	2
1.1.2) Kanfunctie $f$ .....	3
1.1.3) Verdelingsfunctie $F$ .....	3

# 1) Discrete kansvariabelen

## 1.0) Kansexperiment

- \*Een kansexperiment is een experiment waarvan de uitkomst niet op voorhand te bepalen valt.
- \*In deze samenvatting werken we met een fictief kansexperiment: We werpen een dobbelsteen...
  - > Als je 1 gooit, krijg je 1 euro (= +1 euro)
  - > Als je 6 gooit, moet je 1 euro weggeven (= -1 euro)
  - > Als je 2, 3, 4 of 5 gooit krijg je 0 euro.

## 1.1) Terminologie

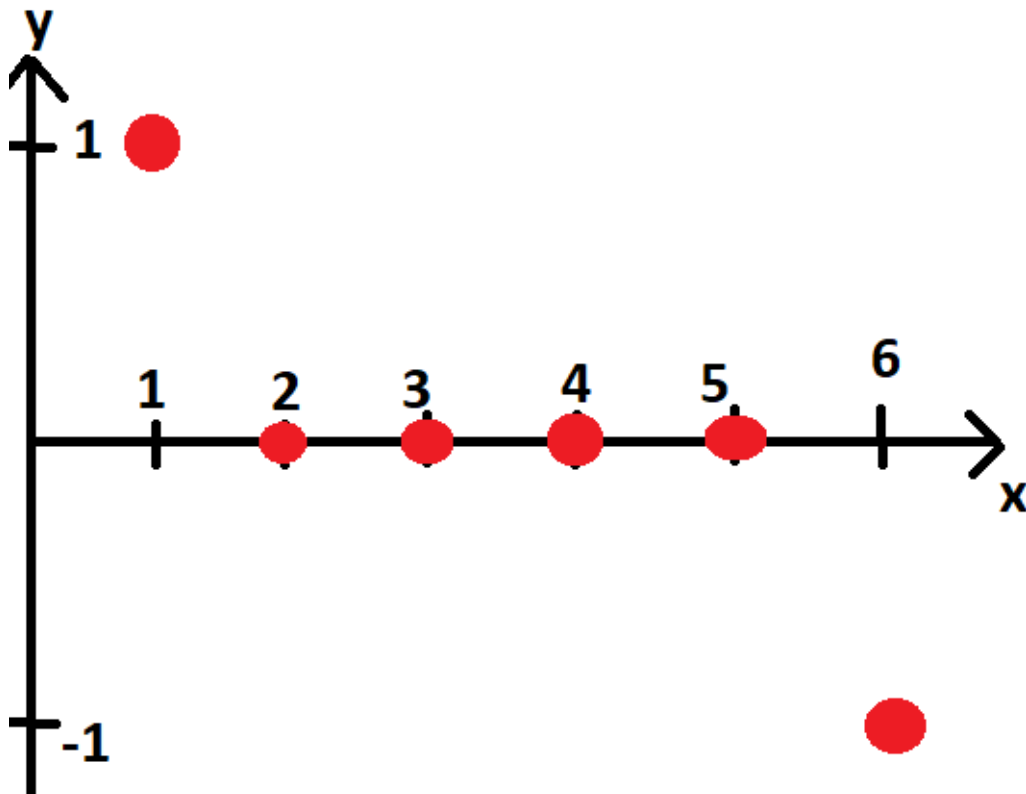
### 1.1.1) Kansvariabele (= toevalsvariabele)

- \*Kansvariabele  $X$  = functie die aan elke uitkomst in  $U$  een reëel getal koppelt.
  - > Voor ons kansexperiment:  $X(1) = 1$  (als je 1 gooit, krijg je 1 euro)
  - $X(6) = -1$  (als je 6 gooit, moet je 1 euro afgeven of krijg je -1 euro)
  - $X(2) = 0$
  - $X(3) = 0$
  - $X(4) = 0$
  - $X(5) = 0$

Als je 2, 3, 4 of 5 gooit krijg je 0 euro.

- Je ziet dus goed dat de kansvariabele  $X$  een functie is die aan elke uitkomst in  $U$  (1, 2, 3, 4, 5 of 6 gooien) een reëel getal toekent (nl. wat geld winnen en/of wat geld verliezen).

\*Grafische voorstelling voor dit kansexperiment:



## 1.1.2) Kanfunctie f

\*Kansfunctie  $f$  = functie die aan elke uitkomst in  $U$  een kans koppelt.

--> Voor ons kansexperiment:

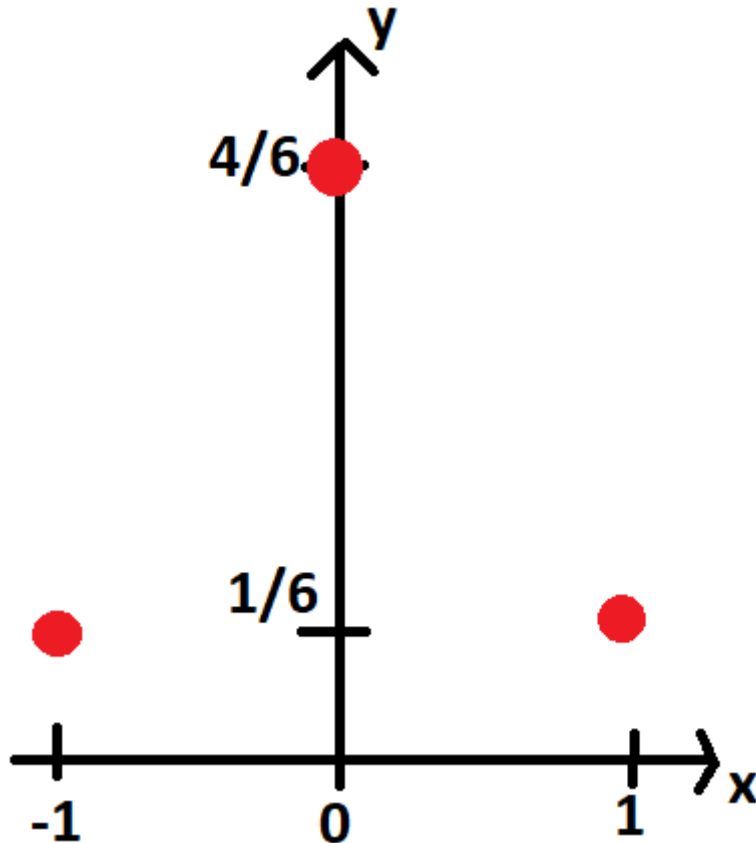
$U = \{-1, 0, 1\}$  (we kunnen immers 1 euro verliezen, niks krijgen of 1 euro winnen)

-->  $f(-1) = 1/6$  (we hebben 1/6 kans om 6 te gooien en dus -1 euro te winnen)

-->  $f(1) = 1/6$  (we hebben 1/6 kans om 1 te gooien en dus 1 euro te winnen)

-->  $f(0) = 4/6$  (we hebben 4/6 kans om 2, 3, 4 of 5 te gooien en niks te winnen)

\*Grafische voorstelling:



## 1.1.3) Verdelingsfunctie F

\*Verdelingsfunctie  $F$ : functie die aan elke uitkomst in  $U$  van het kansexperiment een kans koppelt en haar voorgaande kans daarbij optelt.

→ De verdelingsfunctie is dus m.a.w. de kans dat die gebeurtenis of MINDER optreedt.

--> Voor ons experiment:  $F(-1) = 1/6$

(je hebt immers 1/6 kans om 6 te gooien en dus 1 euro te verliezen)

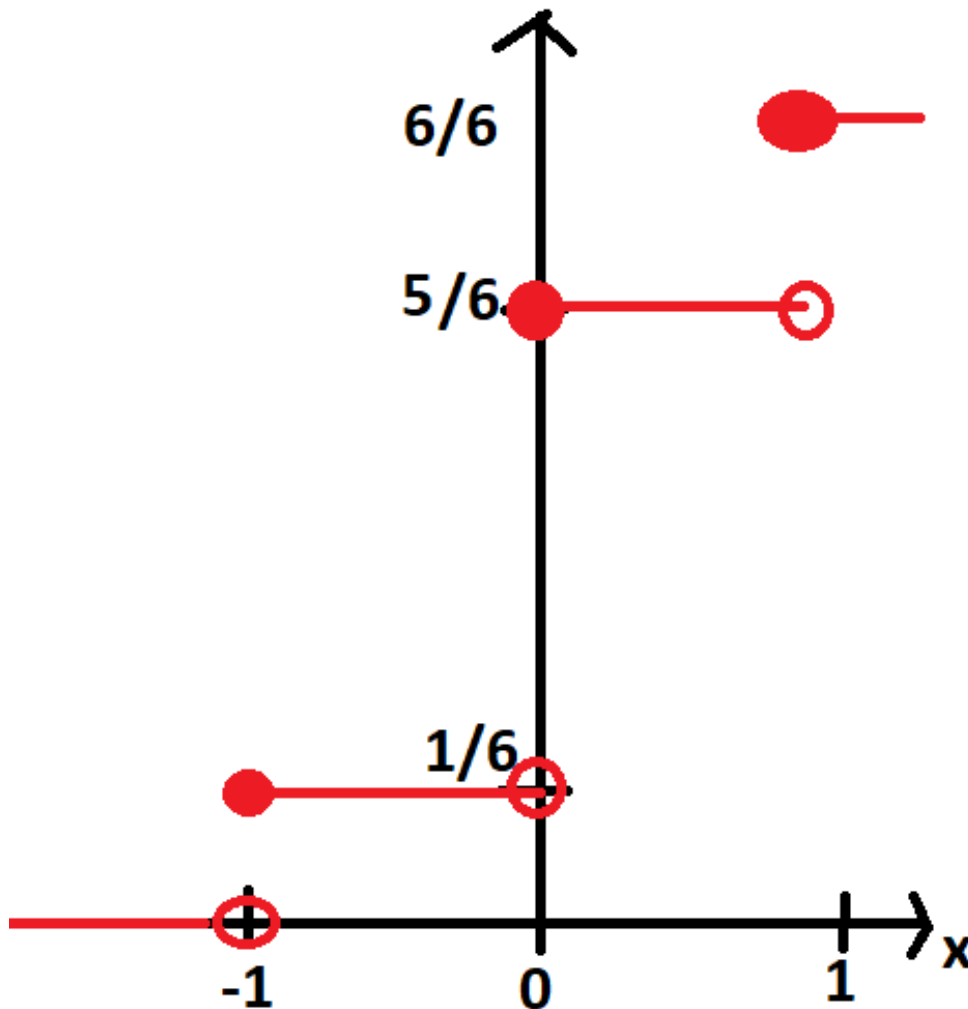
$F(0) = 5/6$

(je hebt immers 5/6 kans om 0 euro OF minder te winnen (dus: 1 euro verliezen!))

$F(1) = 6/6$

(je hebt immers 6/6 kans om 1 euro OF minder te winnen)

\*Grafische voorstelling:



### 1.1.4) Verwachtingswaarde $E(x)$

\*Verwachtingswaarde  $E(X)$  = gemiddelde uitkomst die je mag verwachten van het kansexperiment.

-->  $E(x) = \mu = \text{uitkomst} \cdot \text{kans} + \text{uitkomst}(2) \cdot \text{kans}(2) + \dots$

→ Voor ons kansexperiment:

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + (-1) \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{4}{6} = 0$$

--> Je hebt immers 1/6 kans dat je 1 euro wint, 1/6 kans dat je 1 euro verliest en 4/6 kans dat je niks wint.

Interpretatie: gemiddeld win je 0 euro van ons kansspel.

Als  $E(X) = 0$  spreken we van een **eerlijk** spel. Een kansspel is eerlijk als niemand gemiddeld gezien méér kan winnen t.o.v. de andere.

### 1.1.5) Spreidingsmaat 1: Variantie $\text{Var}(X)$

\*De variantie  $\text{Var}(X)$  is de kwadratische afwijking t.o.v. het gemiddelde (= de verwachtingswaarde).

-->  $\text{Var}(X) = (\text{uitkomst} - E(x))^2 \cdot \text{kans op uitkomst} + \dots$

→ Je doet dus de uitkomst (bv. 1 euro winnen) min de verwachtingswaarde, dat kwadrateer je en dan doe je dat maal de kans op elke uitkomst. Dit doe je voor elke uitkomst.

\*Voor ons kansspel wordt dit dus:

$$(1-0)^2 \cdot \frac{1}{6} + (-1-0)^2 \cdot \frac{1}{6} + (0-0)^2 \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

Interpretatie: De variantie is een **spreidingsmaat**, spreidingsmaten vertellen ons hoe de uitkomsten t.o.v. het gemiddelde gespreid zitten. In dit geval is onze variantie  $2/6$ , je hebt immers  $1/6$  kans om 1 euro te winnen maar ook  $1/6$  kans om een euro te verliezen.

## 1.1.6) Spreidingsmaat 2: standaardafwijking $\sigma$

\*De standaardafwijking is de positieve vierkantswortel van de variantie:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\text{Var}(X)} \\ &= \sqrt{\frac{2}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

\*De standaardafwijking is ook een spreidingsmaat.

## 1.2) Voorbeeldoefeningen

**Oefening 1b: een bakje bevat vijf knikkers: drie witte en twee rode. We trekken aselekt en tegelijk twee knikkers. X heeft als getalwaarde het aantal getrokken witte knikkers. Bepaal alle dingen.**

KANSFUNCTIE: functie die aan elke uitkomst in U een kans koppelt.

$$f(0) = f(0 \text{ witte knikkers})$$

--> Herhaling? X (je kan niet twee knikkers tegelijk trekken)

--> Volgorde? X (alle knikkers hebben dezelfde waarde!)

➔ DUS: combinatie

$$f(0) = P(0) = \frac{\text{gunstige mogelijkheden (=0 witte knikkers paken)}}{\text{totale mogelijkheden (=we pakken er twee in totaal)}}$$

$$= \frac{C_3^0 \cdot C_2^2}{C_5^2}$$

➔ We pakken 0 knikkers (= p = het aantal dat je neemt) uit een verzameling van 3 witte knikkers. Daarnaast pakken we 2 rode knikkers uit een verzameling van 2 rode knikkers. In totaal pakken we 2 knikkers uit een verzameling van 5.

$$= \frac{1}{10} \text{ (reken uit!)}$$

$$f(1) = P(1) = \frac{C_3^1 \cdot C_2^1}{C_5^2}$$

$$= \frac{6}{10} \text{ (reken uit!)}$$

$$f(2) = P(2) = \frac{3}{10} \text{ (je snapt de redenering nu wel)}$$

VERDELINGSFUNCTIE: functie die aan elke uitkomst in U een kans koppelt en de vorige kans daarbij optelt.

$$F(0) = \frac{1}{10}$$

$$F(1) = \frac{1}{10} + \frac{6}{10} = \frac{7}{10}$$

--> We tellen de kans op 0 knikkers er ook dus nog bij op.

$$F(2) = \frac{1}{10} + \frac{6}{10} + \frac{3}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

--> We tellen de kans op 0 en 1 knikkers er ook nog bij op.

VERWACHTINGSWAARDE:  $E(X) = \mu$

We berekenen de verwachtingswaarde (= gemiddelde uitkomst van de kansexperiment) door elke mogelijke gebeurtenis te vermenigvuldigen met zijn kans.

$$\begin{aligned}\mu &= \text{uitkomst} \cdot \text{kans} + \dots \\ &= \frac{1}{10} \cdot 0 + \frac{6}{10} \cdot 1 + \frac{3}{10} \cdot 2 = 1,2\end{aligned}$$

→ Je pakt dus de kans die je hebt berekend bij je kansfunctie en je vermenigvuldigt deze met de uitkomst van je kansexperiment.

STANDAARDAFWIJKING  $\sigma$ :

Om de standaardafwijking te berekenen nemen we een tussenstop via de variantie.

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= (\text{gebeurtenis} - \text{verwachtingswaarde})^2 \cdot \text{kans}_{\text{op gebeurtenis}} \\ &= (0 - 1,2)^2 \cdot \frac{1}{10} + (1 - 1,2)^2 \cdot \frac{6}{10} + (2 - 1,2)^2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{25}\end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \frac{3}{5}$$

**OEFENING 2:** We gooien een zuiver muntstuk driemaal op. De kansvariabele X heeft als getalwaarde het aantal keren kruis (= kop!). Bereken  $\mu$  en  $\sigma$ .

$$\mu = \text{kans} \cdot \text{gebeurtenis} + \dots$$

→ Hiervoor moeten we eerst de kansen (kansfunctie) berekenen.

Stel we gooien de muntstuk driemaal op:

**TOTALE MOGELIJKHEDEN:** \*1<sup>ste</sup> worp = 2 mogelijkheden (kop/munt)

\*2<sup>de</sup> worp = 2 mogelijkheden (kop/munt)

\*3<sup>de</sup> worp = 2 mogelijkheden (kop/munt)

→ EN-probleem:  $2 \times 2 \times 2 = 8$  mogelijkheden

**GUNSTIGE MOGELIJKHEDEN:** het aantal keren kruis (kop)

We schrijven de uitkomstenverzameling U op: K = kop // M = munt

{**KKK**, **MMM**, **KKM**, **KMK**, **MKK**, **KMM**, **MKM**, **MMK**}

GEEL = 3x kop

GROEN = 0x kop

ROOD = 2x kop

ROZE = 1x kop

Onze kansfuncties (kansen) worden dan:  $P = \frac{\text{gunstige mogelijkheden}}{\text{totale mogelijkheden}}$

$$f(0) = \frac{1}{8}$$

$$f(1) = \frac{3}{8}$$

$$f(2) = \frac{3}{8}$$

$$f(3) = \frac{1}{8}$$

Nu kunnen we onze  $\mu$  berekenen:

$\mu = \text{gebeurtenis} \cdot \text{kans} + \text{gebeurtenis}' \cdot \text{kans}' + \dots$

$$= 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1,5$$

Nu kunnen we onze  $\sigma$  berekenen:

$$\text{Var}(X) = (\text{gebeurtenis} - \mu)^2 \cdot \text{kans op gebeurtenis} + \dots$$

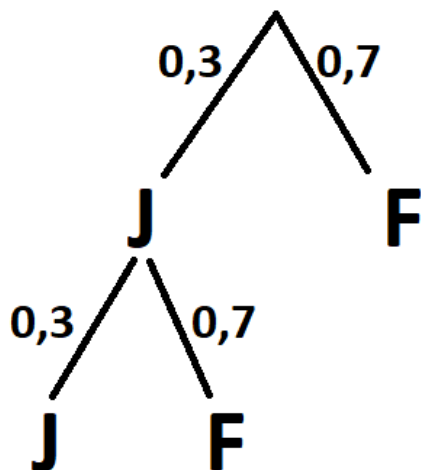
$$= (0 - 1,5)^2 \cdot \frac{1}{8} + (1 - 1,5)^2 \cdot \frac{3}{8} + (2 - 1,5)^2 \cdot \frac{3}{8} + (3 - 1,5)^2 \cdot \frac{1}{8}$$

$$= 0,75 = \frac{3}{4}$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**OEFENING 4:** Bij het opzoeken van onzuiverheden in een metaal gebruikt men een proef waarbij de kans om een bestaande fout te ontdekken gelijk is aan 0,7. Wordt een fout gevonden, dan stopt het onderzoek. Wordt geen fout gevonden, dan herhaalt men veiligheidshalve de proef een tweede keer, waarna het onderzoek stopt. Neem nu een stuk metaal dat onzuiverheden bevat en stel  $X$  de kansvariabele die als getalwaarde het aantal proeven heeft die bij het onderzoek uitgevoerd worden. Bereken  $\mu$  en  $\sigma$ .

We kunnen een kansboom opmaken. Hierbij is J de kans dat het experiment aangeeft dat er géén fout is in het metaal (= juist), F is de kans dat het experiment aangeeft dat er een fout is in het metaal.



We hebben, zoals de opgave ons heeft verteld, 0,7 kans dat de test zegt dat ons metaal fout is. Dan hebben we dus 0,3 kans dat de test zegt dat ons metaal juist is.

Als de test zegt dat ons metaal fout is stopt de test. Als ze zegt dat ons metaal juist is wordt de test veiligheidshalve herhaald.

De kansvariabele  $X$  = het aantal testen dat we moeten uitvoeren. Houd ook in je achterhoofd dat ons metaal 'onzuiver (= fout)' is.

--> We kunnen maximaal 2 testen uitvoeren.

$$f(1 \text{ test}) = 0,7$$

$$f(2 \text{ testen}) = 0,3 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,3 = 0,3$$

→ Je kan de eerste test juist hebben (= 0,3) EN de tweede fout (= 0,7). Of je kan de eerste test juist hebben (= 0,3) EN de tweede test juist hebben (= 0,3).

We hebben een EN-probleem en vermenigvuldigen dus.

Nu kunnen we onze verwachtingswaarde en standaardafwijking berekenen.

$$E(x) = \mu = \text{gebeurtenis} \cdot \text{kans} + \text{gebeurtenis}' \cdot \text{kans} + \dots$$

$$= 1 \cdot 0,7 + 2 \cdot 0,3 = 1,3$$

$$\text{Var}(X) = (1 - 1,3)^2 \cdot 0,7 + (2 - 1,3)^2 \cdot 0,3 = 0,21$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = 0,46$$

Oefening 6: Bij een bloedonderzoek naar syfilis bij de strijdkrachten van de Verenigde Staten is de kans op een positieve reactie van een individu 0,05. Om een groep van vijf personen te onderzoeken, voegt men hun vijf bloedmonsters samen en onderwerpt dit geheel aan de test. Is de reactie negatief, dan eindigt het onderzoek. Is de reactie positief, dan worden de vijf bloedstalen elk afzonderlijk aan de test onderworpen. De kansvariabele  $X$  heeft als getalwaarde het totaal aantal proeven dat we voor vijf personen moeten uitvoeren. Bereken  $\mu$  en  $\sigma$ .

De kans op een positieve reactie op de test = 0,05 (dan heb je syfilis)

De kans op een negatieve reactie op de test is dus 0,95

Het minimale aantal testen is 1, immers geldt dat ze de 5 bloedmonsters bijeen gieten en alles samen testen.

Het maximale aantal testen is 6, immers geldt dat als de 1<sup>ste</sup> test een positieve reactie toont, alle strijdkrachten nog eens apart worden getest.

We moeten dus de kansen berekenen op 1 of 6 testen...

$$f(1) = 0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,95$$

--> Er is 0,95 kans dat strijdkracht 1 géén syfilis heeft EN 0,95 kans dat strijdkracht 2 geen syfilis heeft EN 0,95 kans voor strijdkracht 3 ...  
 $= 0,95^5 = 0,77$

$$f(6) = ?$$

--> Allereerst kunnen **alle** soldaten syfilis hebben, dan is  $f(6) = 0,05^5$ .

--> OF **vier** soldaten kan syfilis hebben, is  $f(6)$  dan gelijk aan  $0,95 \cdot 0,05^4$ ?



--> Bijna. De **gezonde soldaat** (0,95) kan op 5 plaatsen staan, ik verduidelijk.

**G**   **Z**   **Z**   **Z**   **Z**

**Z**   **G**   **Z**   **Z**   **Z**

1                      2                      3                      4                      5  
**Z**   **Z**   **G**   **Z**   **Z**

**Z**   **Z**   **Z**   **G**   **Z**

**Z**   **Z**   **Z**   **Z**   **G**

De eerste soldaat kan gezond zijn of de tweede kan gezond zijn of de derde kan gezond zijn ... de gezonde soldaat kan op plaats 1, 2, 3, 4 of 5 staan. We moeten dus MAAL 5 doen, want het is een OF-probleem en de vermenigvuldiging is een kortere schrijfwijze voor de optelling.

--> Als OF **vier soldaten** ziek zijn, dan is de kans  $f(6) = 5 \cdot 0,95 \cdot 0,05^4$

--> OF **drie soldaten** zijn ziek, wat is de kans dan?

--> Als drie soldaten ziek zijn, zijn er 2 gezond. Op hoeveel plaatsen kunnen de gezonde soldaten staan?

G	G	Z	Z	Z
G	Z	G	Z	Z
1	2	3	4	5
G	Z	Z	G	Z
G	Z	Z	Z	G
Z	G	G	Z	Z
Z	G	Z	G	Z
Z	G	Z	Z	G
Z	Z	G	G	Z
Z	Z	G	Z	G
Z	Z	Z	G	G

Zoals je hier ziet kunnen de soldaten op 10 verschillende plaatsen staan.

-->  $f(6)$  voor 3 zieke soldaten is dan:  $10 \cdot 0,05^3 \cdot 0,95^2$

We vullen aan:  $f(6) = 0,05^5$  (alle soldaten ziek) +  $5 \cdot 0,05^4 \cdot 0,95$  +  $10 \cdot 0,05^3 \cdot 0,95^2$  +  $10 \cdot 0,05^2 \cdot 0,95^3$  +  $5 \cdot 0,05^4 = 0,226$

ter herinnering:  $f(1) = 0,77$

Nu kunnen we onze  $\mu$  berekenen.

$$\mu = E(X) = \text{kans} \cdot \text{gebeurtenis} + \text{kans}' \cdot \text{gebeurtenis}' + \dots$$

$$E(X) = 6 \cdot 0,226 + 1 \cdot 0,77 = 2,126$$

Hieruit kunnen we onze variantie en standaardafwijking bepalen.

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= (\text{gebeurtenis} - \text{verwachtingswaarde})^2 \cdot \text{kans}_{\text{op gebeurtenis}} + \dots \\ &= (1 - 2,126)^2 \cdot 0,77 + (6 - 2,126)^2 \cdot 0,226 = 4,36 \end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{4,36} = 2,09$$

**OEFENING 8:** Een patiënt meldt zich in het ziekenhuis. Na een reeks testen besluiten de artsen dat er 40% kans is dat de patiënt hepatitis heeft, 10% kans dat hij galstenen heeft, 45% kans dat hij levercirrose heeft en 5% kans dat hij kanker heeft. De kosten voor verdere behandeling zijn respectievelijk in euro weergegeven:

HEPATITIS	GALSTENEN	LEVERCIRROSE	KANKER
800	2500	1200	16000

Deze oefening is eigenlijk makkelijk.

Dus, we weten dat:

$$f(\text{hepatitis}) = 0,4$$

$$f(\text{galstenen}) = 0,1$$

$$f(\text{levercirrose}) = 0,45$$

$$f(\text{kanker}) = 0,05$$

Nu kunnen we de verwachtingswaarde  $\mu$  berekenen. Ik herhaal de formule voor de duizendste keer:

$$\begin{aligned} \mu = E(X) &= \text{kans} \cdot \text{gebeurtenis} + \text{kans}' \cdot \text{gebeurtenis}' + \dots \\ &= 0,4 \cdot 800 + 0,1 \cdot 2500 + 0,45 \cdot 1200 + 0,05 \cdot 16000 \\ &= 1910 \end{aligned}$$

Hoe moet je de verwachtingswaarde interpreteren? De patiënt zal gemiddeld 1910 euro moeten betalen, ongeacht wat hij heeft.

Hieruit kunnen we ook makkelijk onze standaardafwijking bepalen. Dit doe ik niet meer voor.

**OEFENING 10:** Bij een evaluatieproef worden drie vragen gesteld. Naast de vragen staan er respectievelijk 2, 3 en 4 mogelijke antwoorden opgesomd, waarvan één het juiste is. Er wordt een punt afgetrokken voor een verkeerd antwoord en er worden twee punten toegekend voor een juist antwoord. Je kiest lukraak voor elke vraag een antwoord. De kansvariabele heeft als getalwaarde je score. Bepaal  $\mu$  en  $\sigma$ .

“Je kiest lukraak voor elke vraag een antwoord.” = chique taal voor “je gokt.”

--> Voor 0 juiste antwoorden is je score -3 (-1 -1 -1)

--> Voor 1 juist antwoord is je score 0

--> Voor 2 juiste antwoorden is je score 3

--> Voor 3 juiste antwoorden is je score 6

--> Wat zijn je kansen bij gokken bij een test? Je kan 0 vragen, 1 vraag, 2 vragen of 3 juist hebben.

--> We moeten dus op voorhand  $f(-3)$ ,  $f(0)$ ,  $f(3)$  en  $f(6)$  uitrekenen.

→ Voor vraag 1 heb je  $\frac{1}{2}$  kans op juist, vraag 3 =  $\frac{1}{3}$  kans, vraag 4 =  $\frac{1}{4}$  kans

$$f(-3) = \frac{1}{2} (1ste\ vraag\ fout) \cdot \frac{2}{3} (2de\ vraag\ fout) \cdot \frac{3}{4} (3de\ vraag\ fout) = \frac{1}{4}$$

$$f(0) = \frac{1}{2} (1ste\ vraag\ fout) \cdot \frac{2}{3} (2de\ vraag\ fout) \cdot \frac{1}{4} (3de\ vraag\ juist) +$$

$$\frac{1}{2} (1ste\ vraag\ juist) \cdot \frac{2}{3} (2de\ vraag\ fout) \cdot \frac{3}{4} (3de\ vraag\ fout) +$$

$$\frac{1}{2} (1ste\ vraag\ fout) \cdot \frac{1}{3} (2de\ vraag\ juist) \cdot \frac{3}{4} (3de\ vraag\ fout) = \frac{11}{24}$$

$$f(3) = \text{OF je hebt je } 1^{ste} \text{ en } 2^{de} \text{ vraag juist} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$$

$$\text{OF je hebt je } 1^{ste} \text{ en } 3^{de} \text{ vraag juist} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\text{OF je hebt je } 2^{de} \text{ en } 3^{de} \text{ vraag juist} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$$

→ Alles + elkaar (OF-probleem) =  $\frac{1}{4}$

$$f(6) = \frac{1}{2} (1ste\ vraag\ juist) \cdot \frac{1}{3} (2de\ vraag\ juist) \cdot \frac{1}{4} (3de\ vraag\ juist) = \frac{1}{24}$$

Nu kunnen we makkelijk  $\mu$  en  $\sigma$  berekenen...

$$\mu = -3 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{11}{24} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{24} = 0,25$$

$$\text{Var}(X) = (-3 - 0,25)^2 \cdot \frac{1}{4} + (0 - 0,25)^2 \cdot \frac{11}{24} + (3 - 0,25)^2 \cdot \frac{1}{4} + (6 - 0,25)^2 \cdot \frac{1}{24} = 5,9375$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{5,9375} = 2,44$$

**OEFENING 12: Onderzoek of het volgende spel eerlijk is: bij het gooien met een vervalste dobbelsteen is de kans op zes ogen gelijk aan  $\frac{1}{4}$ , de kans op één oog is  $\frac{1}{12}$  en zijn kansen op elk van de andere uitkomsten is gelijk aan  $\frac{1}{6}$ . Een speler geeft een inzet van 4 euro, gooit eenmaal en krijgt voor elke oog 1 euro.**

De inzet van de speler wordt gezien als een winst van -4 euro.

We weten dat een spel eerlijk is als de verwachtingswaarde  $\mu$  gelijk is aan 0.

$$\mu = E(X) = \text{kans} \cdot \text{gebeurtenis} + \text{kans}' \cdot \text{gebeurtenis} + \dots$$

--> voor elke oog krijgt de speler 1 euro:

→ één oog = 1 euro --> kans =  $\frac{1}{12}$

twéé ogen = 2 euro

... --> kans =  $\frac{1}{6}$

zes ogen = 6 euro --> kans =  $\frac{1}{4}$

$$\mu = E(X) = \frac{1}{12} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{4} \cdot 6 = 3,91$$

→ Gemiddeld kan de speler dus 3,91 euro winst maken met dit spel. Echter moeten we  $\mu$  nog aftrekken van de inzet van de speler, 4 euro.

$$\mu = 3,91 - 4 = -0,09$$

→ De speler zal gemiddeld 9 cent verlies maken met dit spel. Het spel is oneerlijk.

**OEFENING 13: Voor een worp met een zuivere dobbelsteen moet een speler een inzet geven. Hij krijgt vijf euro terug als hij één gooit, 3 euro als hij twee ogen gooit en 1 euro als hij drie ogen gooit. In de andere gevallen krijgt hij niets terug. Hoe groot moet de inzet zijn voor een eerlijk spel?**

Eerst berekenen we de verwachtingswaarde  $\mu$ , a.d.h.v. de verwachtingswaarde weten we hoeveel hij moet inzetten voor een eerlijk spel.

$$\begin{aligned}\mu &= \text{kans} \cdot \text{gebeurtenis} + \text{kans}' \cdot \text{gebeurtenis}' + \dots \\ &= \frac{1}{6} \cdot 5 \text{ (hij krijgt 5 euro terug als hij 1 gooit)} \\ &\quad \frac{1}{6} \cdot 3 \text{ (hij krijgt 3 euro als hij 2 ogen gooit)} + \frac{1}{6} \cdot 1 \text{ (hij krijgt 1 euro als hij 3 ogen gooit)} \\ &= 1,5\end{aligned}$$

De speler moet dus 1,5 euro inzetten zodat het spel eerlijk is.

**OEFFENING 16: Speler A gooit met 2 zuivere dobbelstenen. Hij krijgt van speler B 10 euro als hij minder dan zes ogen op twee stenen samen werpt. Anders moet A 5 euro betalen aan B. In wiens voordeel is dit spel.**

Om te kijken in wiens voordeel dit spel is, moeten we de verwachtingswaarde berekenen. Om de verwachtingswaarde te kunnen berekenen, moeten we enkele kansen op voorhand berekenen.

Speler A gooit met 2 zuivere dobbelstenen.

**Totale mogelijkheden:**

--> Herhaling? TOEGESTAAN (je gooit met 2 dobbelstenen, je kan bv. 2x een zes gooien)

--> Volgorde? VAN BELANG (elk aantal ogen: 1,2 ... heeft een andere waarde)

$$\rightarrow W_n^p = n^p$$

--> n = aantal mogelijkheden = 6 (dobbelsteen heeft 6 vlakken)

--> p = aantal dat je kiest uit die n = 2 (je gooit met 2 dobbelstenen = 'je kiest' 2 ogen)

$$\text{----> } 6^2 = 36$$

**Gunstige mogelijkheden:**

Elke mogelijkheid waarbij de som van de 2 dobbelstenen minder dan zes ogen is, is gunstig: 1 + 1, 1 + 2, 1 + 3, 1 + 4

$$2 + 1, 2 + 2, 2 + 3$$

$$3 + 1, 3 + 2$$

$$4 + 1$$

→ In totaal 10 mogelijkheden.

De kans voor A om 10 euro te winnen (door minder dan 6 te gooien) is dus:

$$f(10) = \frac{10}{36}$$

De kans voor A om -5 euro te winnen (door meer dan 6 te gooien) is dus:

$$f(-5) = 1 - f(10) = 1 - \frac{10}{36} = \frac{26}{36}$$

De verwachtingswaarde is dan:

$$\mu = E(X) = \text{kans} \cdot \text{gebeurtenis} + \text{kans}' \cdot \text{gebeurtenis}' = 10 \cdot \frac{10}{36} + (-5 \cdot \frac{26}{36}) = -5/6$$

→ Dit spel is dus in de voordeel van speler B, aangezien A gemiddeld 5/6 euro verlies zal maken!

-