Wiskunde: analyse – module 6 – laatste deel van analyse: integralen – samenvatting

---

(Y) VOORWOORD

*Dit is de samenvatting van analyse ter voorbereiding van het examen van module 6.
*Alle grafische voorstellingen zijn gemaakt met Geogebra of Paint.

(X) INHOUDSTAFEL

Over twee pagina's.

(Z) FOUTJE?

Contacteer de maker van deze samenvatting.

Inhoud

1) Differentiaal

1.1) Definitie en basisformules

*Definitie: de differentiaal van een reële functie f(x) is een benadering voor de toename van het argument x, Δy. De differentiaal dy komt overeen met de raaklijn.
--> Bij de identieke functie komt dy overeen met Δy.

*Formules voor het differentiëren:
$df(x) = dy = f'(x).dx$ --> dit is afleiden en een dx erachter zetten.
$df(x) = dy = f'(x).\Delta x$ --> Deze formule wordt duidelijk in de voorbeeldoefeningen.

1.2) Formules voor het differentiëren

*Differentiëren komt neer op afgeleide met een dx erachter zetten. Alle formules voor het afleiden moet je dus nog steeds kennen.

1.2.1) Basisformules

VEELTERM- EN RATIONALE FUNCTIES

$d(C) = 0$ (de afgeleide van een constant getal = 0)
$d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}\,.dx$
$d(x^n) = n\,.x^{n-1}\,.dx$

IRRATIONALE FUNCTIES

$d(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.dx$
$d(\sqrt[3]{x}) = d\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}\,.x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\,.x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\,.\sqrt[3]{x^2}}$
(elke andere functie dan de 2de machtswortel zet je om naar een rationale exponent!)

GONIOMETRISCHE FUNCTIES

$d(\sin x) = \cos x\ .dx$
$d(\cos x) = -\sin x\ .dx$
$d(\tan x) = \frac{1}{cos^2(x)}\,.dx$
$d(\cot x) = -\frac{1}{sin^2(x)}\,.dx$

CYCLOMETRISCHE FUNCTIES

$d(Bgsin\ x) = \frac{1}{1+x^2}\,.dx$ $\quad d(Bgcos\ x) = -\frac{1}{1+x^2}\,.dx$
$d(Bgtan\ x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.dx$ $\quad d(Bgcot\ x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.dx$

EXPONENTIËLE FUNCTIES

$d(a^x) = a^x\,.\ln(a)\,.dx$ $\quad d(e^x) = e^x\,.dx$

LOGARITMISCHE FUNTIES

$d(\log_a x) = \frac{1}{x\,.\ln a}\,.dx$ $\quad d(\ln x) = \frac{1}{x}\,.dx$

VERGEET DE KETTINGREGEL NIET!!!!

1.2.2) Rekenregels

De basisrekenregels voor het afleiden gelden ook voor het differentiëren:

$d(f + g) = df + dg$ (somregel)

$d(f \,.\, g) = df . g + f \,.\, dg$ (productregel)

$d(k \,.\, f) = k \,.\, df$ (een constant getal k mag je voor je differentiaal zetten)

$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \,.g - f \,.dg}{g^2}$ (quotiëntregel)

1.3) Toepassing: benadering van wortels (V)

Dit is verdieping, maar hebben we (in 6WEWA) behandeld in de les:

<u>**OEFENING 3a: voorbeeldoefening : bereken een benadering van $\sqrt{24}$**</u>

STAP 1: Herschrijf de wortel als een som of verschil met een wortel die je kent.

$\sqrt{24} = \sqrt{25 - 1}$

STAP 2: Besef dat de wortel in principe een functie is, dus mogen we dit herschrijven als…

$f(24) = f(25 - 1)$

--> je weet dat $f = \sqrt{iets}$

STAP 3: We herschrijven dit als een differentiaal

$f(24) = f(25 - 1) = f\big(25 + (-1)\big) = f(25 + \Delta x) = f(25) + \Delta y$

--> Waarom + Δx? Omdat er een verschil (Δ) in x-waarde is, nl. die -1! Daarna verandert die Δx in een Δy omdat we de functie uitrekenen!

STAP 4: Reken de wortel uit die je kent: f(25) = 5

$f(24) = 5 + \Delta y$

STAP 5: We benaderen Δy door dy

$f(24) = 5 + dy$

STAP 6: We vullen de formule van dy in.

$f(24) = 5 + f'(x). \Delta x$

$= 5 + \frac{1}{2\sqrt{25}}.(-1) = 5 + \frac{1}{2\,.5}.(-1) = 5 + \frac{1}{10}.(-1) = 4{,}9$

--> LET OP: we vullen in f'(x) onze 25 terug in, niet de 24!

4,9 is ons antwoord. Dit is een benadering van $\sqrt{24}$.

1.4) Voorbeeldoefeningen

1.4.1) Oefening 1: dy en Δy vergelijken

VOORAF:

*$dy = df(x) = f'(x). dx = f'(x). \Delta x$

*$\Delta y = y_2 - y_1$ (het verschil in y-waarden van een functie, grootste – kleinste waarde)

<u>OEFENING H: $y = \ln(x^2 + 1)$ met x = 2 en $\Delta x = 0{,}01$</u>

$f(x) = \ln(x^2 + 1)$

$df(x) = \frac{1}{x^2+1} \,.\, 2x \,.\, 0{,}01 = \frac{0{,}01\,.2x}{x^2+1} \to 2\ invullen \to = \frac{0{,}01\,.2.2}{2^2+1} = 8\,.\,10^{-3}$

$\Delta y = \ln(2{,}01^2 + 1) - \ln(2^2 + 1) = 7{,}98\,.\,10^{-3}$

--> Hieruit leer je: hoe kleiner Δx hoe beter je benadering!

Opmerkingen:
GROEN: vergeet de KETTINGREGEL niet!
GEEL: de grootste y-waarde is natuurlijk degene plus de Δx

1.4.2) Oefening 2: differentiëren

VOORAF:
*Integreren = afleiden met een dx erachter. Zie rekenregels pagina 3.
*Vergeet de kettinregel niet!

TWEE VOORBEELDOEFENINGEN:

s) $f(x) = \sqrt{Bgtan\sqrt{(\sin x)^2}}$ ***(aangepast)***

$df(x) = \frac{1}{2\sqrt{Bgtan\, x}}\ (wortel\ afleiden)\ .\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{(\sin x)^2}}}\ (Bgtan\ afleiden).\frac{1}{2\sqrt{(\sin x)^2}}\ (wortel\ afl.)$

$.2\sin x\ \ (haakjes\ voor\ de\ sinus\ afleiden).\cos x\ \ (sinus\ afleiden).dx\ (different.)$

- ➔ We hadden hier maar liefst 4x de kettingregel! Als je verschillende soorten functies (haakjes, cyclometrisch, goniometrisch, wortels …) in één hebt moet je elke soort functie stapsgewijs zoals hier afleiden. Dat is de kettingregel.
  --> *We noemen deze 'functies in functies' samengestelde functies.*
- ➔ Zo moeilijke oefeningen krijg je niet, maar ik hoop dat het gebruik van de kettingregel hieruit duidelijk is.
- ➔ Vergeet je dx niet!

u) $f(x) = 10^{2x}$

$df(x) = 10^{2x}\,.\ln 10\ .2\,.dx$

- ➔ Kettingregel!

1.4.3) Een vraagstukje…

OEFENING 5: Een fabrikant maakt een schijfvormige ijzeren plaat met straal x cm en oppervlakte y cm. Een fout Δx voor x geeft een fout Δy voor y. Bereken Δy voor x = 5 en $\Delta x = 0,1$

Eerst maken we een formule voor Δy.
--> Je weet dat: $\Delta y\ \approx dy$
→ $dy = df(x) = f'(x).dx = f'(x).\Delta x$
--------> Wat is f(x)? We hebben te maken met een schijf (cirkel), dus: $f(x) = \pi x^2$
--> met x = de straal (zie opgave). De oppervlakte van een cirkel is immers: $A = \pi r^2$

➔ DUS: $dy = df(x) = 2\pi x\ .dx = 2\pi x\ .\Delta x$

Nu vullen we de fout Δx (= de fout in de straal) in om Δy (de fout in oppervlakte) te benaderen:
$\Delta y\ \approx dy = 2\pi\ .5\ .0{,}1 = 3{,}14$

Als de fabrikant dus de straal per ongeluk 0,1 kleiner maakt, verandert de oppervlakte met 3,14 eenheden.

2) Onbepaalde integraal

2.1) Omgekeerde bewerking

*Integreren is de omgekeerde bewerking van afleiden (of differentiëren). Of zoals Mathijs het ooit mooi tijdens het oefenen had gezegd: “Integreren is ontafleiden.”

2.2) Integratiemethoden

We kennen 3 methoden om een onbepaalde integraal te berekenen. Aan de hand van wat je tijdens het afleiden (of differentiëren) moet doen, weet je welke methode je moet toepassen.

INTEGRATIEMETHODEN

- **Normaal afleiden** → **ONMIDDELIJKE INTEGRATIE**
- **Kettingregel** → **INTEGRATIE DOOR SUBSTITUTIE**
- **Productregel** → **PARTIËLE INTEGRATIE**

(1) Als je tijdens het afleiden een basisrekenregel moet gebruiken, moet je tijdens het integreren onmiddellijke integratie toepassen.
(2) Als je tijdens het afleiden de kettingregel moet toepassen, moet je tijdens het integreren een substitutie toepassen (en dus niet enkel onmiddellijke integratie!).
(3) Als je tijdens het afleiden de productregel moet toepassen, moet je tijdens het integreren partiële integratie toepassen.

We spreken in wat volgt de drie integratiemethoden in chronologische volgorde.

2.2.1) Onmiddelijke integratie

Integreren is het omgekeerde van afleiden. Na het integreren hoor je altijd een +C te zetten omdat je eigenlijk de primitieve functie (= verzameling van alle functies die één functie als afgeleide hebben) zoekt. Primitieve functies zijn op een constante C na bepaald.

2.2.1.1) Rekenregels

VEELTERM- EN RATIONALE FUNCTIES

$\int 1\,dx = x$ WANT $Dx = 1$

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ *(macht +1, macht naar onder)*

IRRATIONALE FUNCTIES

$\int \sqrt[n]{x^m}\,dx = \int x^{\frac{m}{n}}\,dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}$

Een irrationale functie zet je om naar een macht met rationale exponent, daarna pas je de regel “macht +1, macht naar onder” toe!

GONIOMETRISCHE FUNCTIES

$\int \sin x\, dx = -\cos x$ WANT $D\sin x = \cos x$ *(omgekeerde afleiden, dus min!)*

$\int \cos x\, dx = \sin x\ .dx$ WANT $D\cos x = -\sin x$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$ WANT $D\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x$ WANT $D\cot x = -\frac{1}{sin^2(x)}$

CYCLOMETRISCHE FUNCTIES

$\int \frac{1}{1+x^2}\, .dx = Bgtan\ x$ WANT $DBgtan\ x = \frac{1}{1+x^2}$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, .dx = Bgsin\ x$ WANT $DBgsin\ x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

EXPONENTIËLE FUNCTIES

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$ WANT $Da^x = a^x . \ln a$

$\int e^x dx = e^x$ WANT $De^x = e^x$

LOGARITMISCHE FUNTIES

$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$ WANT $Dln\ x = \frac{1}{x}$

→ Let op: $\int \frac{1}{x} dx \neq \int x^{-1} dx \neq \int \frac{x^0}{0} dx\ (macht + 1\ macht\ naar\ onder)$

--> De deling door 0 is immers niet gedefinieerd.

ALGEMENE REKENREGELS

$\int (f+g) dx = \int f\ dx + \int g\ dx$ ➔ integraal van een som = som van de integralen

$\int k\, .f\, .dx = k\, .\int f\ dx$ ➔ Een constante (getal) mag je voor je integraal zetten.

2.2.2.2) Voorbeeldoefeningen

1) $\int 3^x . 2^x\ dx = \cdots$ je intuïtie zou direct zeggen: partiële integratie want ik zie een product van twéé functies (= productregel). Maar, je kan een rekenregel van machten toepassen.

$= \int (3\, .2)^x\ dx$ $\quad [a^m . b^m = (a.b)^m]$

$= \int 6^x dx = \frac{6^x}{\ln 6}$ $\quad [\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}]$

2) $\int \frac{2x^2+x-4}{x} dx = \int \frac{2x^2}{x} + \frac{x}{x} - \frac{4}{x}\ dx$ (we mogen de teller altijd opsplitsen, bij noemers mag dit niet!)

$= \int \frac{2x^2}{x} + \int \frac{x}{x} - \int \frac{4}{x}$ (integraal van een som = som van de integralen)

$= \int 2x + \int 1 - \int 4 . \frac{1}{x}$ (uitwerken)

$= 2\int x + \int 1 - 4 . \int \frac{1}{x}$ (een constante mag voor de integraal worden gezet)

$= 2 . \frac{x^2}{2} + x - 4 . \ln(x) + C$ (onmiddelijke integratie)

$= x^2 + x - 4 . \ln(x) + C$ (vereenvoudigen)

3) $\int \sqrt{1+\cos 2x}\, dx = \int \sqrt{1 + cos^2 x - sin^2 x}$ (verdubbelingsformule: zie formuleblad goniometrie!)

$= \int \sqrt{1 + \cos^2 x - (1 - cos^2\ x)}$ (grondformule goniometrie: sin² + cos² = 1!)

$= \int \sqrt{1 + \cos^2 x - 1 + cos^2\ x}$ (haakjes uitwerken)

$= \int \sqrt{\cos^2 x + cos^2\ x}$ (1 – 1 heft elkaar op)

$= \int \sqrt{2 . \cos^2 x}$ (een optelling kan je korter schrijven door maal te doen)

$= \int \sqrt{2}\ . \sqrt{\cos^2 x}$ (je mag een product van 2 factoren onder een wortel splitsen)

$= \int \sqrt{2}\ . cos\ x$ (wortel uitwerken)

$= \sqrt{2} . \int \cos x$ (een constant getal mag voor de integraal gezet worden)

$= \sqrt{2} . \sin x + C$ (onmiddelijke integratie)

2.2.2) Integratie door substitutie

Integratie door substitutie steunt op het omkeren van de kettingregel van het afleiden. Wanneer je de kettingregel moet toepassen bij het afleiden, moet je bij het integreren een substitutie toepassen.

2.2.2.1) Voorbeeldoefening

Oefening 5i in de cursus:

$\int 2^{3x+1}\, dx$

$= \int 2^{3x} . 2^1\, dx$ $\qquad\qquad (a^{n+m} = a^n . a^m)$

$= 2 . \int 2^{3x}\, dx$

--> We hebben onze integraal nu vereenvoudigd. Als we de kettingregel moeten gebruiken tijdens het afleiden weten we dat we substitutie moeten toepassen.

➔ $D(2^{3x}) = 2^{3x} . \ln 2\ . 3$ *(we moeten de kettingregel inderdaad toepassen omdat we ook nog de afgeleide van 3x moeten nemen)*

$= 2 . \int 2^{3x}\, dx$

➔ SUBSTITUTIE: wat gaan we als substitutie nemen?

--> Meestal neem je hetgene wat 'in' je functie zit als substitutie, als die substitutie niet lukt probeer je een andere substitutie.

--> $3x = u$ (3x zit 'in' onze exponentiële functie)

⇔ $d(3x) = du$ (je neemt de differentiaal van het linker- en rechterlid)

⇔ $3dx = du$

⇔ $dx = \frac{du}{3}$

➔ We vervangen in de volgende tussenstap alle x'jes door u'tjes.

$= 2 . \int 2^{u} . \frac{du}{3}$

$= 2 . \frac{1}{3} . \int 2^u . du$ *(we mogen constante getallen voor de integraal zetten)*

$= \frac{2}{3} . \frac{2^u}{\ln(2)}$ (onmiddelijke integratie)

$= \frac{2 . 2^u}{3 . \ln(2)}$ (breuken maal elkaar)

$= \frac{2^1 . 2^u}{3 . \ln(2)}$ (als we 2 schrijven, weet je dat we eigenlijk natuurlijk 2^1 bedoelen)

$= \frac{2^{1+u}}{3 . \ln(2)}$ $(a^m . a^n = a^{m+n})$

$= \frac{2^{3x+1}}{3 . \ln(2)} + C$ (we hebben u terug ingevuld, dit is onze onbepaalde integraal!)

2.2.3) Partiële integratie

Partiële integratie steunt op het omkeren van de kettingregel, deze integratiemethode heeft één formule die je vanbuiten moet kennen:

$\int f(x) . \underbrace{g(x)dx}_{(= dg(x))} = f(x) . g(x) - \int g(x) . \underbrace{f'(x)dx}_{(= df(x))}$

--> Zoals je ziet in de formule keren we de rollen van f(x) en g(x) om door partiële integratie. f(x) wordt immers f(x)dx en g(x)dx wordt immers g(x). Als we f(x) en g(x) zo kiezen dat de integraal in het rechterlid vergemakkelijkt wordt, dan zal de partiële integratie ook lukken.

2.2.3.1) Voorbeeldoefening

Oefening 12q: $f(x) = Bgtan\ x$

$\int f(x)dx = \int Bgtan\ x\ \ dx$ --> je denkt nu zeker: waar is de vermenigvuldiging? Moet ik partiële integratie wel toepassen? Jawel. Met een beetje inzicht zie je dat er in je integraal eigenlijk staat: **1** . Bgtan x.

$= \int 1. Bgtan\ x\ \ dx$

Nu moet je je f(x) en g(x)dx bepalen voor de formule. Je f(x) differentieer je en je g(x)dx integreer je.
--> We pakken:

$f(x) = Bgtan\ x$ -----------------(differentiëren)------------> $f'(x)dx = \frac{1}{1+x^2}dx$

$g(x)dx = 1\ .dx$ -------------------(integreren)----------------> $g(x) = x$

We vullen de formule van partiële integratie nu in:

$\int 1. Bgtan\ x\ \ dx = Bgtan\ x\ .x - \int x\ .\frac{1}{1+x^2}dx$

$= Bgtan\ x\ .x - \int \frac{x}{1+x^2}dx$ (we vermenigvuldigen)

$\cancel{= Bgtan\ x\ .x - \int \left(\frac{x}{1} + \frac{x}{x^2}\right) dx}$

Maak deze fout nooit! Een noemer mag je nooit splitsen! We moeten terug een substitutie doorvoeren.

SUB: $1 + x^2 = u$

--> *Zoals ik zei substitueer je meestal hetgene wat 'in' je functie staat, in dit geval hetgene in je noemer (aangezien we een rationale functie hebben)*

⇔ $d(1 + x^2) = du$

⇔ $2x\ .dx = du$

$= Bgtan\ x\ .x - \int \frac{2x}{2(1+x^2)}dx$

--> Ik heb 2 toegevoegd in teller en noemer omdat we 2x . dx = du uitkwamen. Dit mag immers, omdat ik het in de teller en noemer heb gedaan.

$= Bgtan\ x\ .x - \int \frac{1}{2u}\ .du$ (substitutie is doorgevoerd)

$= Bgtan\ x\ .x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\ du$ (getallen mogen we voor de integraal zetten)

$= Bgtan\ x\ .x - \frac{1}{2}\ .\ln u$ (de integraal van 1/u = ln u)

$= Bgtan\ x\ .x - \frac{1}{2}\ .\ln(1 + x^2)$

→ Dit is de onbepaalde integraal!

2.2.4) Speciale integratiemethoden

Voor de boogsinus en boogtangens gelden nog steeds dezelfde werkwijzen maar zijn de integratiemethoden ietsje moeilijker. Daarom heb ik ze apart gezet.

2.2.4.1) Integratie van functies van de vorm $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

Voorbeeld 1: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$

$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{9\left(1-\frac{x^2}{9}\right)}} dx$ *(we hebben de 9 in onze wortel in de noemer afgezonderd)*

$= \int \frac{1}{3\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{9}\right)}} dx$ $(\sqrt{9} = 3)$

$= \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}} dx$ $\left(\frac{x^2}{9} = \left(\frac{x}{3}\right)^2\right)$

⇨ SUBSTITUTIE: $u = \frac{x}{3} \Leftrightarrow du = d\left(\frac{x}{3}\right) \Leftrightarrow du = \frac{1}{3} dx \Leftrightarrow dx = 3du$

$= \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot 3du$

$= \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot du$ *(constante getallen mogen voor de integraal gezet worden)*

$= 1 \cdot Bgsin\, u$ *(onmiddelijke integratie:* $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = Bgsin\, x$*)*

$= Bgsin \frac{x}{3}$ *(vervangen van u door x/3)*

Voorbeeld 2: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-(x+3)^2}}$

$\int \frac{1}{\sqrt{3-(x+3)^2}} dx$ --> We kunnen hier géén getallen afzonderen, we weten echter wel dat we waarschijnlijk naar de boogsinus moeten toewerken. De onmiddelijke integraal van $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ is immers gelijk aan $Bgsin\, x$…

--> Zoals ik al enkele keren heb gezegd moet je hetgene wat ‘in’ je functie zit als substitutie nemen. In dit geval dus $(x+3)^2$ *(zie formule onmiddelijke integraal van de boogsinus!)*.

⇨ SUBSTITUTIE: $x + 3 = u \Leftrightarrow d(x+3) = du \Leftrightarrow dx = du$

$= \int \frac{1}{\sqrt{3-u^2}} \cdot du$ --> Nu kunnen we getallen beginnen af te zonderen…

$= \int \frac{1}{\sqrt{3\left(1-\frac{u^2}{3}\right)}} du$

$= \int \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{3}}} du$ (rekenregels wortels: we mogen een wortel splitsen)

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{3}}} du$ (getallen mogen we voor de integraal zetten)

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2}} du$ (rekenregels machten: $\frac{u^2}{3} = \left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2$)

➔ We voeren een tweede substitutie uit: $v = \frac{u}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow dv = d\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)$

$\Leftrightarrow dv = \frac{1}{\sqrt{3}} du$

$\Leftrightarrow du = \sqrt{3}\, dv$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} . \int \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} . \sqrt{3}dv$

$= \sqrt{3} . \frac{1}{\sqrt{3}} . \int \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} . dv$ (getallen mogen we voor de integraal zetten)

$= Bgsin\ v$ (onmiddelijke integratie: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = Bgsin\ x$

$= Bgsin \frac{u}{\sqrt{3}}$ (we hadden immers gezegd: $v = \frac{u}{\sqrt{3}}$)

$= Bgsin \left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right)$ (we hadden immers gezegd: $u = x + 3$)

2.2.4.2) Integratie van functies van de vorm $f(x) = \frac{1}{\sqrt{c+bx+ax^2}}$ met $D \geq 0$ en $a > 0$

Om deze functie te integreren moet je ook toewerken naar de Bgsin(x).

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$

3 + 4x – 4x² moeten we nog omzetten naar de vorm: $a^2 - (bx + c)^2$

--> Enkel zo kunnen we naar de Bgsin toewerken. De formule voor de integraal van de Bgsin is immers…
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = Bgsin\ x$

$$
\begin{aligned}
. 3 + 4x - 4x^2 &= a^2 - (bx + c)^2 \\
&= a^2 - (b^2x^2 + 2bcx + c^2) \\
&= a^2 - b^2x^2 - 2bcx - c^2 \\
&= -b^2x^2 - 2bcx + (a^2 - c^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases} a^2 - c^2 = 3 \\ -2bc = 4 \\ -b^2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - (-1)^2 = a^2 - 1 = 3 \rightarrow a = 2 \\ -4c = 4 \rightarrow c = -1 \\ b = 2 \end{cases}
$$

--> DUS: $3 + 4x - 4x^2 = 2^2 - (2x - 1)^2$
$= 4 - (2x - 1)^2$

We vervangen dit in onze functie:

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3+4x-4x^2}} \rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-(2x-1)^2}}$

We berekenen de onbepaalde integraal:

$\int f(x)dx = \int \frac{1}{\sqrt{4-(2x-1)^2}} dx$

SUBSTITUTIE: $2x - 1 = u \Leftrightarrow d(2x - 1) = du \Leftrightarrow 2dx = du \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2}$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{4-u^2}} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{4-u^2}} du = \frac{1}{2} . \int \frac{1}{\sqrt{4\left(1-\frac{u^2}{4}\right)}} du = \frac{1}{2} . \int \frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{u}{2}\right)^2}} du = \frac{1}{4} . \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{2}\right)^2}} du$$

2DE SUBSTITUTIE: $\frac{u}{2} = v \Leftrightarrow d\left(\frac{u}{2}\right) = dv \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ du = dv \Leftrightarrow du = 2dv$

$= \frac{1}{4} . \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{2}\right)^2}} du = \frac{1}{4} . \int \frac{1}{\sqrt{1-(v)^2}} 2dv = \frac{2}{4} . \int \frac{1}{\sqrt{1-(v)^2}} dv = \frac{1}{2} . Bgsin\, v = \frac{1}{2} . Bgsin \frac{u}{2}$

$= \frac{1}{2} . Bgsin \frac{2x-1}{2} + C$

2.2.4.3) Integratie van functies van de vorm $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$

Bij deze soort functies moet je altijd terugwerken naar de Bgtan, er geldt immers: $\int \frac{1}{1+x^2} = Bgtan\, x$

De werkwijze hierbij verloopt vrijwel analoog als deze met de boogsinus.

$f(x) = \frac{1}{2+3x^2}$

$\int f(x)dx = \int \frac{1}{2+3x^2} dx$

$= \int \frac{1}{2(1+1{,}5x^2)} dx$

$= \frac{1}{2} . \int \frac{1}{1+1{,}5x^2} dx$

$= \frac{1}{2} . \int \frac{1}{1+\left(\sqrt{1{,}5}x\right)^2} dx$

⇨ We voeren een substitutie door: $u = \sqrt{1{,}5}x$

$\Leftrightarrow du = d(\sqrt{1{,}5}x)$

$\Leftrightarrow du = \sqrt{1{,}5}dx$

$\Leftrightarrow dx = \frac{du}{\sqrt{1{,}5}}$

$= \frac{1}{2} . \int \frac{1}{1+u^2} . \frac{du}{\sqrt{1{,}5}}$

$= \frac{1}{2} . \frac{1}{\sqrt{1{,}5}} . \int \frac{1}{1+u^2} . du$ (getallen mogen voor de integraal worden gezet)

$= \frac{1}{2\sqrt{1{,}5}} . Bgtan\, u$

$= \frac{1}{2\sqrt{1{,}5}} . Bgtan \left(\sqrt{1{,}5}x\right) + C$

2.2.4.4) Integratie van functies van de vorm $f(x) = \frac{1}{c+bx+ax^2}$ met $D < 0$ en $a > 0$

$f(x) = \frac{1}{5+4x^2+x^2}$

We moeten de noemer van de functie eerst omzetten naar de vorm: $a^2 + (bx + c)^2$. Voor de integraal van de boogtangens geldt immers dat: $\int \frac{1}{1+x^2} dx = Bgtan\, x$

. $5 + 4x + 1x^2 = a^2 + (bx + c)^2$

$= a^2 + b^2x^2 + 2bcx + c^2$

$= (a^2 + c^2) + 2bcx + b^2x^2$

➔ STELSEL: $\begin{cases} a^2 + c^2 = 5 \\ 2bc = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

→ DUS: $5 + 4x^2 + x^2 = 1^2 + (1x + 2)^2$
$= 1 + (x + 2)^2$

--> Terug invullen in f(x):

$$f(x) = \frac{1}{5+4x^2+x^2} = \frac{1}{1+(x+2)^2}$$

We berekenen nu de onbepaalde integraal:

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{1+(x+2)^2} dx$$

--> We voeren een substitutie uit:

$$u = x + 2 \Leftrightarrow du = d(x + 2) \Leftrightarrow du = dx$$

$$= \int \frac{1}{1+u^2} du$$

$$= Bgtan\, u$$

$$= Bgtan(x + 2) + C$$

2.3) Flowchart

3) Bepaalde integraal

Er is géén groot verschil tussen een bepaalde- en onbepaalde integraal behalve dat we nu integratiegrenzen gaan toevoegen aan de integraal.

3.1) Onder- en bovensommen

3.1.1) Formule en voorbeeldoefening

Formules: Wiskundige schrijfwijze formule onder- en bovensom: $\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x$

We kunnen de oppervlakte onder een grafiek bepalen met onder- en bovensommen van welbepaalde deelintervallen (meestal rechthoekjes)

De ondersom s_n bereken je met volgende formule: **laagste functiewaarde . lengte (x-as)**

De bovensom S_n bereken je met volgende formule: **hoogste functiewaarde . lengte (x-as)**

--> Let op: de onder- en bovensom is en blijft een som, je moet dus elke laagste functiewaarde . de lengte ook nog eens optellen (zie voorbeeldoefening).

Voorbeeldoefening:

Bepaal de onder- en bovensom van de functie y = x^2 in het interval [0, 3] met n = 3 (3 deelintervallen).

--> Onze deelintervallen zijn als volgt: 0 --------------- 1 -------------- 2 --------------- 3

--> De ondersom s_n van elk deelinterval bepalen we door de som te nemen van het product van de laagste functiewaarde . de lengte op de x-as.

--> In deelinterval [0, 1] is de ondersom dan: $f(0).1 = 0 . 1$ (immers: 0^2 = 0) $= 0$.

--> In deelinterval [1, 2] is de ondersom dan: $f(1).1 = 1 . 1 = 1$

--> In deelinterval [2, 3] is de ondersom dan: $f(2).1 = 2^2.1 = 4$

➔ We moeten hier nog de som van nemen: 0 + 1 + 4 = 5

--> De bovensom S_n van elk deelinterval bepalen we door de som te nemen van het product van de hoogste functiewaarde . de lengte op de x-as.

--> In deelinterval [0, 1] is de bovensom dan: $f(1).1 = 1$

--> In deelinterval [1, 2] is de bovensom dan: $f(2).1 = 2^2 = 4$

--> In deelinterval [2, 3] is de bovensom dan: $f(3).1 = 3^2 = 9$

→ De som hiervan nemen: 1 + 4 + 9 = 14

DUS: ondersom, s_3 = 5 en bovensom, S_3 = 14.

De werkwijze zou nu duidelijk moeten zijn! Houdt in je achterhoofd dat de onder- en bovensom een **benadering** is voor de **oppervlakte onder de grafiek**.

3.1.2) Overstap naar bepaalde integralen

Wiskundig kan bewezen worden dat volgende gelijkheid geldig is:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$$

Als we oneindig deelintervallen nemen in onze onder- en bovensom en dus de limiet voor het aantal deelintervallen (n) naar oneindig nemen, convergeert deze limiet naar een welbepaald getal. Dit getal is gelijk aan de bepaalde integraal (met integratiegrenzen).

We noemen b de bovengrens (grootste getal) en a de ondergrens (kleinste getal) van de integraal.

3.2) Bepaalde integraal

3.2.1) Limietdefinitie bepaalde integraal.

Integralen kunnen, zoals in deeltje 3.1.2 al gezien, als limieten geschreven kunnen worden.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$$

--> We vullen nu de wiskundige schrijfwijze van de onder- en bovensom in:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x$$

→ We gaan deze definitie nooit gebruiken om mee te rekenen, we gaan ze enkel gebruiken om eigenschappen van bepaalde integralen te bewijzen, je moet ze dus wel kennen.

Houd in je achterhoofd dat de integraal overeenkomt met de oppervlakte onder de grafiek.

3.2.2) Eigenschappen van integralen zonder bewijs

Verwisselen integratiegrenzen:

Eigenschap: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

--> Als je de integratiegrenzen van de integraal wil verwisselen, zet je een minteken ervoor.

Oppervlakte onder de grafiek als a = b:

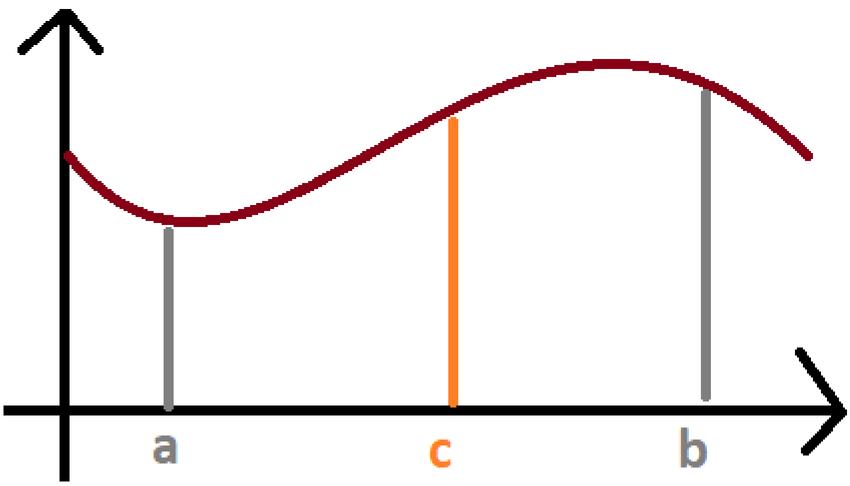
Eigenschap: $\int_a^a f(x)dx = 0$

--> Als je de oppervlakte onder de grafiek van hetzelfde getal berekent, wordt het natuurlijk nul.

Optelbaarheid van de bepaalde integraal:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

--> Je mag een ‘tussenstop’ maken in getal c als je de oppervlakte berekent.



3.2.3) Eigenschappen van integralen met bewijs

Lineariteit: de integraal van een som = de som van de integralen

We kennen deze regel al:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

<u>BEWIJS:</u> We starten vanaf het linkerlid…

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) + g(x_i)] \, .\, \Delta x \quad \textit{(limietdefinitie integralen)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} [f(x_i)\Delta x + g(x_i)\Delta x] \quad \textit{(}\Delta x \textit{ distributief in de haakjes brengen)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i).\, \Delta x + \sum_{i=0}^{n} g(x_i)\, .\, \Delta x \quad \textit{(sommatie distributief in haakjes)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i).\, \Delta x + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} g(x_i)\, .\, \Delta x \quad \textit{(limiet van een som = som van de limieten)}$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad \textit{(limietdefinitie integralen)}$$

<u>Een constant getal mag voor de integraal gezet worden:</u>

We kennen deze regel al:

$$\int_a^b k\, .\, f(x)dx = k\, .\int_a^b f(x)dx$$

<u>BEWIJS:</u> We starten vanaf het linkerlid…

$$\int_a^b k\, .\, f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} [k\, .\, f(x)]\, .\, \Delta x \quad \textit{(limietdefinitie integralen)}$$

$$= k\, .\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x)\, .\, \Delta x \quad \textit{(eigenschap: een constante mag voor de limiet)}$$

$$= k\, .\int_a^b k\, .\, f(x)dx \quad \textit{(limietdefinitie integralen)}$$

<u>Het ongelijkheidsteken blijft behouden bij bepaalde integralen:</u>

$$f(x) \le g(x) \qquad \rightarrow \qquad \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

<u>BEWIJS:</u> We starten vanaf de linkse ongelijkheid…

$f(x) \le g(x)$

⇔ $f(x).\, \Delta x \le g(x).\, \Delta x$ *(maal Δx)*

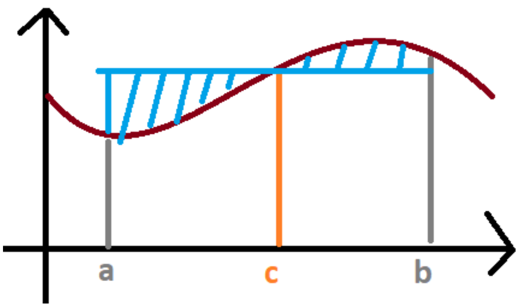
⇔ $\sum_{i=0}^{n} f(x_i).\, \Delta x \le \sum_{i=0}^{n} g(x_i)\ .\, \Delta x$ *(maal de sommatie)*

⇔ $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i).\, \Delta x \le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} g(x_i)\ .\, \Delta x$ *(maal de limiet)*

⇔ $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$ *(limietdefinitie integralen)*

3.3) Stellingen integraalrekening met bewijs

<u>Middelwaardestelling: er bestaat een getal c tussen de integratiegrenzen a en b van de integraal waarvoor geldt dat de integraal (oppervlakte onder de grafiek) door dit getal wordt weergegeven door een rechthoek (euclidische figuur).</u>



<u>Er bestaat</u> dus zo'n getal waardoor de integraal wordt weergegeven op een rechthoek.

Deze stelling is vooral theoretisch, in de praktijk kunnen we deze c niet bepalen of weten we ze niet. We leren deze stelling enkel om andere stellingen te bewijzen.

Bewijs: zie volgende pagina.

Eigenschap:

$$\exists\, c \in [a,b]: \int_a^b f(x)dx = f(c).(b-a)$$

BEWIJS:

- a = b
  --> Dan hebben we: $\int_a^a f(x)dx = f(c).(a-a)$
  ⬄ : $0 = 0$
- a < b
  --> Stel $m = minimum\ van\ f(x)\ in\ het\ interval\ [a,b]$
  $M = maximum\ van\ f(x)\ in\ het\ interval\ [a,b]$
  $B = \int_a^b f(x)dx$

  --> Dan geldt:
  $m(b-a) \leq B \leq M(b-a)$ *(de integraal gaat immers van het minimum naar het maximum)*
  ⬄ $m \leq \frac{B}{b-a} \leq M$ *(rekenen: ongelijkheidstekens veranderen niet omdat a < b, dus is a – b > 0 = POSITIEF)*
  ⬄ $\frac{B}{b-a} \in [m, M]$ *(andere schrijfwijze voor deze ongelijkheid)*

  ⬄ $\exists c \in]a,b[: f(c) = \frac{B}{b-a}$ *(tussenwaardestelling continue functies: er bestaat een c tussen de 2 grenswaarden van dat interval in onze functie)*

  ⬄ $\exists c \in]a,b[: f(c).(b-a) = B$ *(uitwerken)*

  ⬄ $\exists c \in]a,b[: f(c).(b-a) = \int_a^b f(x)dx$ *(we hadden gezegd dat $B = \int_a^b f(x)dx$)*
- a > b
  --> Dan hebben we: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
  $= -f(c).(a-b)$ *(definitie middelwaardestelling)*
  $= f(c).(b-a)$ *(minteken: alles keert om)*

Hoofdstelling van de integraalrekening:

Stelling:

$$G(x) = \int_k^x f(t)dt$$

Uitleg:

G(x) = primitieve functie *(herinnering: primitieve functie = verzameling van alle functies die een welbepaalde functie als afgeleide hebben)*. De primitieve functie is gelijk aan de integraal (+ C). Als we integreren gaan we altijd terug naar de primitieve functie (zie hoofdstuk 2: onbepaalde integraal), daarom klopt deze gelijkheid.

BEWIJS:

$DG(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{G(x+\Delta x) - G(x)}{\Delta x}$ *(limietdefinitie afgeleide functie)*

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\int_k^{\Delta x + x} f(t)dt - \int_k^x f(t)dt}{\Delta x}$ *(zie hoofdstelling van de integraalrekening)*

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_k^{\Delta x + x} f(t)dt + \int_x^k f(t)dt}{\Delta x}$ *(integratiegrenzen verwisselbaar:* $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$*)*

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{\Delta x + x} f(t)dt}{\Delta x}$ *(integralen zijn optelbaar:* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$*)*

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c).(\Delta x + x - x)}{\Delta x}$ *(middelwaardestelling:* $\exists\, c \in [a, b]: \int_a^b f(x)dx = f(c).(b-a)$*)*

$= \lim_{\Delta x \to 0} f(c)$ *(uitwerken + limiet nadert 0)*

$= f(x)$

3.4) Grondformule van de integraalrekening met bewijs

Grondformule:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

--> <u>Dit</u> is de formule die we constant gaan toepassen in de oefeningen. Als je de bepaalde integraal berekent doe je dat analoog met de onbepaalde integraal (je bepaalt m.a.w. de primitieve functie). Echter doe je aan het einde de grootste integratiegrens (b) min de kleinste integratie-grens (a). Zie voorbeeldoefeningen voor verduidelijking.

--> Als je de bepaalde integraal berekend, hoef je géén +C te schrijven, aangezien deze wegvalt!

<u>BEWIJS</u>:

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$

$= \int_a^k f(t)dt + \int_k^b f(t)dt$ *(integralen zijn optelbaar, je mag een 'tussenstop' in het getal k nemen:* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$*)*

$= -\int_k^a f(t)dt + \int_k^b f(t)dt$ *(integratiegrenzen mogen verwisseld worden met een min!)*

$= -G(a) + G(b)$ *(zie hoofdstelling van de integraalrekening)*

$= G(b) - G(a)$ *(de optelling is commutatief)*

$= F(b) + C - (F(a) + C)$ *(primitieve functies, een verzameling van functies die een welbepaalde functie als afgeleide hebben, zijn identiek op een constante C na --> de afgeleide van een constante is immers gelijk aan nul)*

$= F(b) - F(a)$ *(uitwerken: bewezen!)*

3.5) Integratiemethoden

De integratiemethoden van de bepaalde integraal verlopen bijna analoog met de integratiemethoden van de onbepaalde integraal. We kennen onmiddelijke integratie, substitutie en partiële integratie. Oneigenlijke en numerieke integratie komt bij dit hoofdstuk nog bij.

3.5.1) Onmiddelijke integratie

Rekenregels onmiddelijke integratie --> zie hoofdstuk 2

Onmiddelijke integratie verloopt analoog met de onbepaalde integraal.

Voorbeeldoefening:

$\int_2^8 \sqrt{2x} = \int_2^8 \sqrt{2}\,.\sqrt{x}$ (wortels mag je opsplitsen)

$= \sqrt{2}\,.\int_2^8 \sqrt{x}$ (constant getal mag voor de integraal)

$= \sqrt{2}\,.\int_2^8 x^{\frac{1}{2}}$ (wortel zetten we om naar een macht)

$= \sqrt{2}\,.\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_2^8$ (basisintegraal: macht plus één, macht naar onder)

Verschil met onbepaalde integraal: als we onze integraal uitwerken, zetten we ze tussen vierkante haakjes waarbij we de boven- en ondergrens aanduiden.

$= \sqrt{2}\,.\left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_2^8$ (delen door een breuk = maal het omgekeerde)

$= \sqrt{2}\,.\left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right]_2^8$ (macht omzetten naar een wortel)

$= \sqrt{2}\,.\left[\frac{2\sqrt{8^3}}{3} - \frac{2\sqrt{2^3}}{3}\right]$ (toepassen grondformule van de integraalrekening: $\int_a^b f(x)dx$ $F(b) - F(a)$)

$= 18{,}67$

3.5.2) Substitutie

Substitutie gaat zo goed als analoog met de onbepaalde integraal. We hebben 2 methodes voor de substitutie bij de bepaalde integraal, ik leg ze in 2 aparte voorbeeldoefeningen uit.

Voorbeeldoefening 1: We passen de integratiegrenzen aan

$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx =$

SUBSTITUTIE: $\ln x = u$

$\Leftrightarrow d(\ln x) = du$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} dx = du$

$= \int_1^e \frac{1}{x} dx\,.\ln x$

$= \int_1^e du\,.u$

$= \int_1^e u\,.du$

AANPASSEN INTEGRATIEGRENZEN: In deze stap passen we onze onder- en bovengrens aan u aan.

$x = e \rightarrow u = \ln x = \ln e = 1$

$x = 1 \rightarrow u = \ln 1 = 0$

$= \int_0^1 u\,.du$

$= \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1$ (onmiddelijke integratie)

$= \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}$ (grondformule van de integraalrekening: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$)

$= \frac{1}{2} = 0{,}5$

Voorbeeldoefening 2: We passen de integratiegrenzen niet aan

$\int_1^2 4x\,.\,5^{x^2+1}\,dx =$

SUBSTITUTIE: $x^2 + 1 = u$

$\Leftrightarrow\ d(x^2+1) = du$

$\Leftrightarrow\ 2x\,dx = du$

$= \int 4x\,.\,5^{x^2+1}dx$

(we doen alsof het een onbepaalde integraal is)

$= \int 5^{x^2+1}.\,2\,.\,2x\,.\,dx$

$= 2.\int 5^u.\,du$

(constante getallen mogen voor de integraal)

$= 2\,.\frac{5^u}{\ln 5}$ (onmiddelijke integratie)

$= 2\,.\frac{5^{x^2+1}}{\ln 5}$ (u terug vervangen)

$= 2\,.\left[\frac{5^{x^2+1}}{\ln 5}\right]_1^2$ (we voegen onze oorspronkelijke grenzen terug toe)

$= 2\,.\left[\frac{5^{2^2+1}}{\ln 5} - \frac{5^{1^2+1}}{\ln 5}\right]$ (grondformule integraalrekening)

$= 3852$

3.5.3) Partiële integratie

Partiële integratie verloopt volledig analoog met de onbepaalde integraal. We halen de formule opnieuw naar boven:

$$\int f(x).\,\underbrace{g(x)dx}_{(=\,dg(x))} = f(x).\,g(x) - \int g(x).\,\underbrace{f'(x)dx}_{(=\,df(x))}$$

Bij partiële integratie keerden we de rollen van f en g om. f differentiëren we, g integreren we.

Voorbeeldoefening:

$a)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,.\sin x\ \,dx$

$f(x) = x \rightarrow df(x) = 1$

$dg(x) = \sin x \rightarrow g(x) = -\cos(x)$

Reminder: je pak je f(x) en g(x) zodanig dat je integraal in het rechterlid niet moeilijker wordt! Deze keuze is anders bij elke oefening.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,.\sin x\ \,dx = 1\,.(-\cos x) - \int -\cos x\ .\,1\,.\,dx$

(we doen eventjes alsof we een onbepaalde integraal hebben)

$= \ -\cos x + \int \cos x\ \,dx$

$= -\cos x + \sin x$ (onmiddelijke integratie)

$= \sin x - \cos x$ (dit ziet er mooier uit)

$= [\sin x - \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$ (we plakken onze integratiegrenzen terug)

$= \sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} - (\sin 0 - \cos 0)$ (grondformule integraalrekening)

$= 2$ (uitrekenen)

3.5.4) Oneigenlijke integratie

Soms kan het zijn dat je een functie hebt die niet-continu is of een niet-reële boven- of ondergrens heeft. Als je dat voorhebt, dan moet je oneigenlijke integratie gebruiken. Bij oneigenlijke integratie ga je de niet-reële onder- of bovengrens benaderen met een limiet. Herinner jezelf uit het 5dejaar dat we met limieten getallen proberen te benaderen.

*Oneigenlijke integralen kan je herleiden tot 2 basisvormen.

$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\substack{k\to a \\ >}} \int_k^b f(x)dx \qquad met\ a = niet - reële\ ondergrens$

$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\substack{k\to b \\ <}} \int_a^k f(x)dx \qquad met\ b = niet - reële\ bovengrens$

--> Convergeert de limiet, dan is de integraal (= oppervlakte onder de grafiek) gelijk aan dat getal.

--> Divergeert de limiet, dan is de oppervlakte onder de grafiek gelijk aan oneindig.

Voorbeeldoefening 1:

$\int_{-\infty}^0 e^x = \lim\limits_{\substack{k\to -\infty \\ >}} \int_k^0 e^x$ (min oneindig = niet-reële ondergrens)

$= \lim\limits_{\substack{k\to -\infty \\ >}} [e^x]_k^0$ (onmiddelijke integratie: de integraal van e^x is gewoon e^x)

$= \lim\limits_{\substack{k\to -\infty \\ >}} e^0 - e^k$ (grondformule van de integraalrekening)

$= \lim\limits_{\substack{k\to -\infty \\ >}} e^0 - \lim\limits_{\substack{k\to -\infty \\ >}} e^k$ (limiet van een som = som van de limieten)

$= 1 - e^{-\infty}$ (limiet invullen --> in principe kunnen we niet rekenen met oneindig, we vullen enkel in om te redeneren!!!)

$= 1 - \frac{1}{e^{\infty}}$

--> Wat gebeurt er met $\frac{1}{e^{\infty}}$? Wel, e = 2,72. Als we een oneindig grote macht invullen dan wordt de noemer oneindig groot, daardoor gaat dit getal steeds dichter naar 0 toe gaan. Dat is dus onze limiet.

$= 1 - 0 = 1$

Voorbeeldoefening 2:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} dx =$

--> Je moet eerst bepalen welk getal, de onder- of bovengrens, aanleiding geeft tot een niet-reële uitkomst.

--> Vullen we 0 in, dan krijgen we: $\frac{1}{\sqrt{1-0}} = 1$

--> Vullen we $\frac{\pi}{2}$ in, dan krijgen we: $\frac{0}{\sqrt{1-1}} = \frac{0}{0} = onbepaald$ → DUS: $k \to \frac{\pi}{2}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} dx = \lim\limits_{\substack{k \to \frac{\pi}{2} \\ <}} \int_0^k \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} dx$

--> We voeren een substitutie door: $u = 1 - \sin x$

$\Leftrightarrow du = d(1 - \sin x)$

$\Leftrightarrow du = -\cos x \ dx$

$= \lim\limits_{\substack{k \to \frac{\pi}{2} \\ <}} \int_0^k \frac{-\cos x}{-\sqrt{1-\sin x}} dx$ (-1 toevoegen in teller en noemer)

$= \lim\limits_{\substack{k \to \frac{\pi}{2} \\ <}} \int_0^k \frac{du}{-\sqrt{u}}$

--> We lossen de integraal op alsof hij onbepaald is:

$\int \frac{du}{-\sqrt{u}} = -1 \,.\int \frac{1}{\sqrt{u}} du$

$= -1 \,.\int \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} du$

$= -1 \,.\int u^{-\frac{1}{2}} \ du$

$= -1 \,.\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$ (macht PLUS één, macht naar onder)

$= -1 \,.\, 2 \,.\, u^{\frac{1}{2}}$

$= -2 \,.\, u^{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{u} = -2\sqrt{1 - \sin x}$

--> We voegen de uitgewerkte integraal terug toe in onze oorspronkelijke opgave:

$= \lim\limits_{\substack{k \to \frac{\pi}{2} \\ <}} \left[-2\sqrt{1 - \sin x}\right]_0^k$

$= \lim\limits_{\substack{k \to \frac{\pi}{2} \\ <}} \left[-2\sqrt{1 - \sin k} - \left(-2\sqrt{1 - \sin 0}\right)\right]$ (grondformule integraalrekening)

$= \lim\limits_{\substack{k \to \frac{\pi}{2} \\ <}} \left[-2\sqrt{1 - \sin k} - \left(-2\sqrt{1 - 0}\right)\right]$ (sinus uitrekenen)

$= \lim\limits_{\substack{k \to \frac{\pi}{2} \\ <}} \left[-2\sqrt{1 - \sin k} + 2\right]$ (vereenvoudigen)

$= \lim\limits_{\substack{k \to \frac{\pi}{2} \\ <}} \left[-2\sqrt{1 - \sin k}\right] + \lim\limits_{k \to \frac{\pi}{2}} [2]$ (limiet van een som = som van de limieten)

$= -2 \,.\lim\limits_{\substack{k \to \frac{\pi}{2} \\ <}} \left[-2\sqrt{1 - \sin k}\right] + 2$ (constant getal voor limiet + limiet constante = getal)

--> Als k het getal $\frac{\pi}{2}$ nadert, wordt $\sin k = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \to dus\text{:} -2\sqrt{1-1} = -2.0$

$= -2 \,.\, 0 + 2$ (uitwerken)

$= 2$ (klaar!)

3.5.5) Numerieke integratie

Voor sommige integralen bestaan er geen normale rekenregels, hiervoor benaderen we de waarde van deze integralen. De benaderingsmethoden voor deze integralen noemen we numerieke integratie.

We kennen 3 verschillende numerieke integratieregels. We behandelen ze alle drie.

MIDDELPUNTSREGEL:

FORMULE: $\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n} . [som\ van\ middens\ in\ elk\ interval\ ingevuld\ in\ f(x)\ optellen]$

--> b = bovengrens
--> a = ondergrens
--> n = aantal deelintervallen waarin je benadert.

Voorbeeldoefening:

$\int_0^{0,8} e^{-x^2} . \cos x \ dx$ met n = 4

STAP 1: We maken een schematische voorstelling van de deelintervallen en hun middens

0 ------------------- 0,2 --------------------- 0,4 --------------------- 0,6 --------------------- 0,8

0,1 0,3 0,5 0,7

STAP 2: We vullen de formule in, we kennen immers de bovengrens (0,8) en de ondergrens (0)

$$\int_0^{0,8} e^{-x^2} . \cos x \ dx = \frac{0,8-0}{4} . [f(0,1) + f(0,3) + f(0,5) + f(0,7)]$$

$$= 0,2 . \left[e^{-0,1^2} . \cos(0,1) + e^{-0,3^2} . \cos(0,3) + e^{-0,5^2} . \cos(0,5) + e^{-0,7^2} . \cos(0,7)\right]$$

$$= 0,602$$

TRAPEZIUMREGEL:

FORMULE: $\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n} . [uiterste\ functiewaarden\ 1x + de\ rest\ 2x\ OPTELLEN]$

--> b = bovengrens
--> a = ondergrens
--> n = aantal deelintervallen waarin je benadert

Voorbeeldoefening:

$\int_1^2 x^x dx \quad met\ n = 10$

STAP 1: We maken een schematische voorstelling van alle deelintervallen en hun x-waarden:

1 ---- 1,1 ------ 1,2 --------- 1,3 ------- 1,4 ------ 1,5 ------ 1,6 ------- 1,7 ------- 1,8 ------- 1,9 -------- 2

STAP 2: We vullen de formule in, we kennen immers de bovengrens (2) en de ondergrens (1)

$$\int_1^2 x^x dx = \frac{2-1}{2.10} . [f(1) + f(2) + 2 . (f(1,1) + f(1,2) + f(1,3) + \cdots + f(1,9))]$$

$$= \frac{2-1}{2.10} . [1^1 + 2^2 + 2 . (1,1^{1,1} + 1,2^{1,2} + 1,3^{1,3} + \cdots + 1,9^{1,9}]$$

$$= 2,05$$

SIMPSON:

FORMULE: $\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3n} . [uiterste\ functiewaarden\ 1x + even\ 2x + oneven\ 4x]$

--> b = bovengrens
--> a = ondergrens
--> n = aantal deelintervallen waarin je benadert.

Voorbeeldoefening:

$\int_1^4 e^{\frac{1}{x}}\ met\ n = 6$

STAP 1: We maken een schematische voorstelling van alle deelintervallen met hun x-waarden:

1 -------------- 1,5 ------------ 2 ---------- 2,5 ------------- 3 ------------ 3,5 ------------- 4

STAP 2: We nummeren onze deelintervallen vanaf 0 tot een eindwaarde:

1 -------------- 1,5 ------------ 2 ---------- 2,5 ------------- 3 ------------ 3,5 ------------- 4
0 1 2 3 4 5 6

STAP 3: We vullen onze formule in, herinner jezelf dat je de uiterste waardes (0, 6) éénmaal neemt, de even waardes (2, 4) twéémaal en de oneven waardes (1, 3, 5) driemaal!

$$\int_1^4 e^{\frac{1}{x}} = \frac{4-1}{3\,.6}\,.\left[f(1) + f(4) + 2\,.\big(f(2) + f(3)\big) + 4\,.\big(f(1{,}5) + f(2{,}5) + f(3{,}5)\big)\right]$$

$$= \frac{4-1}{3\,.6}\,.\left[e^{\frac{1}{1}} + e^{\frac{1}{4}} + 2\,.\left(e^{\frac{1}{2}} + e^{\frac{1}{3}}\right) + 4\,.\left(e^{\frac{1}{1,5}} + e^{\frac{1}{2,5}} + e^{\frac{1}{3,5}}\right)\right]$$

$$= 4{,}86$$

4) Toepassingen