Samenvatting wiskunde – module 1 – wiskunderichtingen (7u) – made by Abdellah

---

(Y) VOORWOORD

Wiskunderichtingen: Deze samenvatting is bruikbaar voor 7u wiskunde, wiskundecursus van meneer Vandelaer.

Talenrichtingen: Samenvatting is niet bruikbaar aangezien hier teveel leerstof in staat.

(X) INHOUDSTAFEL

(B) ALGEBRA

(BI) MATRICES

(1A) DEFINITIE VAN EEN MATRIX

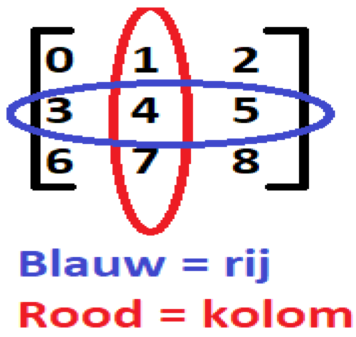
*Een matrix zijn eigenlijk getallen die in verband staan met elkaar

*Een A^{mxn} matrix is een matrix met m rijen en n kolommen

→ Matrix op foto hierlangs is dus: 3x3 matrix.

*Matrix hierlangs = vierkante matrix

→ Aantal rijen = aantal kolommen



(1B) Bijzondere matrices

(1) Rijmatrix: matrix met slechts één rij: bv. A^{1x3}

(2) Kolommatrix: matrix met slechts één kolom: bv. A^{2x1}

(3) Nulmatrix: matrix waarbij elk getal 0 is.

(4) Vierkante matrix: matrix die evenveel rijen als kolommen heeft → zie matrix in 1A

(5) Rijvector: elementen van een matrix in een bepaalde rij van die matrix.

→ Bijvoorbeeld: matrix in 1A: voor i = 2 (2de rij) is de rijvector 3, 4, 5.

(6) Kolomvector: elementen van een matrix in een bepaalde kolom van die matrix.

→ Bijvoorbeeld: matrix in 1A: voor i = 2 (2de kolom) is de kolomvector 1, 4, 7.

(1C) Bijzondere vierkante matrices

(1) Driehoeksmatrix

→ (a) Bovendriehoeksmatrix: alle elementen onder de hoofddiagonaal zijn 0.

→ (b) Onderdriehoeksmatrix: alle elementen boven de hoofddiagonaal zijn 0.

(2) Diagonaalmatrix: Alle elementen die niet tot de hoofddiagonaal behoren zijn 0.

(3) Scalaire matrix: Alle elementen van de hoofddiagonaal zijn aan elkaar gelijk.

(4) Eenheidsmatrix: alle elementen van de hoofddiagonaal zijn gelijk aan 1.

(5) Symmetrische matrix: alle elementen van de matrix liggen symmetrisch t.o.v. de hoofddiagonaal.

(6) Gelijke matrices: 2 matrices waarbij alle elementen gelijk zijn aan elkaar.

(7) Getransponeerde matrix: Rijen en kolommen met elkaar verwisselen, volgorde van de getallen worden echter behouden.

*Voorbeelden van deze bijzondere matrices

(1) $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ | (2) $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ | (3) $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ | (5) $= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ | (6): $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(7) $= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow getransponeerd: \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

- -

(1C) MATRICES OPTELLEN EN AFTREKKEN

*Deze bewerkingen zijn het makkelijkst: je telt of trekt elk element van de matrices op/af van elkaar.

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}} + \overset{B}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}} = \overset{C}{\begin{bmatrix} \boxed{2} & 4 \\ 7 & 9 \\ 12 & 14 \end{bmatrix}}$$

1+1 = 2

*Voordat je begint aan zo'n bewerking moet je nachecken of je de matrices kan optellen!

→ Matrices met een verschillende orde kan je niet optellen!

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}} + \overset{B}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}} = /$$

- -

(1D) MATRICES VERMENIGVULDIGEN

*Bij de vermenigvuldiging van matrices vermenigvuldig je elk element van elke rij met elk element van elke kolom en tel je die op. Voorbeeld hieronder.

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}} \cdot \overset{B}{\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}} =$$

$$\begin{bmatrix} 2.(-1) + (-1).1 + 0.3 & 2.2 + -1.(-3) + 3.(-4) \\ 2.(-1) + 0.1 + -4.0 & 2.2 + 0.(-3) + -4.(-4) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -2 & -12 \end{bmatrix}$$

Extra uitleg:
Je vermenigvuldigt dus als het ware elk element van een rij met elk element van een kolom. Dit vormt één nieuw element in de matrix.

DE VERMENIGVULDIGING VAN MATRICES IS NIET COMMUTATIEF!!!!

<u>De machtsverheffing van matrices doe je hetzelfde als de vermenigvuldiging, je vermenigvuldigt hier dus dan twee gelijke matrices met elkaar</u>. Of je gebruikt de truc van meneer Wanten die ik persoonlijk niet snap.

- -

(1E) Migratie- en Lesliematrices

*Je moet op de toets/examen een migratie- en/of Lesliematrix kunnen opstellen en er hoogstens één vermenigvuldiging mee kunnen uitvoeren. Verder hoef je niet te gaan.

→ Voorbeeldoefening: 12% van alle mensen uit het Atheneum verhuist naar het VJC
23% van alle mensen uit het VJC verhuist naar het Atheneum.
Beginpopulatie VJC = 1600, beginpopulatie Atheneum = 800

→ Is dit een migratie- of Lesliematrix? Migratie! Het is met personen.

Van

$$\text{Naar}\quad\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\text{A+} & \text{VJC}\end{array}\\ \begin{array}{c}\text{A+}\\ \text{VJC}\end{array} & \begin{bmatrix}0{,}88 & 0{,}23\\ 0{,}12 & 0{,}77\end{bmatrix} +\\ & \begin{array}{cc}1 & 1\end{array}\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}\begin{array}{c}\text{A+}\\ \text{VJC}\end{array} & \begin{bmatrix}800\\ 1600\end{bmatrix}\end{array}$$

Extra uitleg: dit is je beginpopulatie P0, deze heb je ook gegeven in de opgave. A+ begint met 800 leerlingen en 't VJC met 1600.

Nog meer uitleg:
Als je wilt weten wat er na één periode gebeurt vermenigvuldig je de migratiematrix met P0 en krijg je je uitkomst. De vermenigvuldiging staat in het vorig deeltje uitgelegd.

*Een Lesliematrix heeft volledig dezelfde werkwijze, echter hoeft de som daar niet 1 te zijn en moet je dus de matrix aanvullen met 0. Bij een Lesliematrix onderzoek je populaties (diersoorten)

- -

(1F) Deelmatrix van een matrix.

*Als je een rij of kolom uit een matrix haalt verkrijg je een deelmatrix van die matrix.

→ Neem bovenstaande migratiematrix in puntje 1E.

→ Een mogelijke deelmatrix hiervan is: [0,88   0,23], we hebben de onderste rij weggelaten.

→ Zo simpel is het.

- -

(1I) Elementaire rijoperaties met matrices

(A) Verwisselen van rijen in een matrix

Neem A = $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$ dan is $r_{1,2}(A) = \begin{pmatrix}3 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ ➔ $r_{1,2}$ betekent je verwisselt de 1ste rij met de 2de rij

(B) Rij vermenigvuldigen met een getal k

Neem A = $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$ dan is $r_{2(3)}(A) = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 9 & 9\end{pmatrix}$ ➔ $r_{2(2)}$ betekent je vermenigvuldigd 2de rij met 3.

→ Let op: soms schrijven we $r_{2(3)}$ als $3 \,.\, R_2$

(C) Rij i met k maal j-de rij optellen.

Neem A = $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$ dan is $r_{1,2(4)}(A) = \begin{pmatrix}2+3\,.\,4 & 1+3\,.\,4\\ 3 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14 & 8\\ 3 & 3\end{pmatrix}$

→ $r_{1,2(4)}$ betekent dus je telt in de 1ste rij elk element van de 2de rij op vermenigvuldigd met 4.

→ Let op: soms schrijven we $r_{1,2(4)}$ als $R_1 + 4 . R_2$.

(D) Een elementaire rijmatrix is een matrix die ontstaat door die chique elementaire rijoperaties op een eenheidsmatrix toe te passen (herinnering: eenheidsmatrix is een matrix waarbij de hoofddiagonaal van de matrix enkel de getallen '1' heeft).

(E) Een rijoperatie is hetzelfde als het links vermenigvuldigen met een elementaire matrix.

→ Als je een elementaire matrix hebt en een gewone matrix kan je ze vermenigvuldigen

→ Neem $r_{2(3)}$ (A) = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$ en A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

→ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 45 & 36 \end{pmatrix}$

- -

(BII) DETERMINANTEN

*Met een determinant kunnen we nakijken of een matrix een inverse heeft.

→ D = 0 --> matrix heeft geen inverse (hij is singulier)

→ D ≠ 0 --> matrix heeft een inverse (hij is regulier)

*Determinant van een 2 x 2 matrix:

$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ = 2 . 1 – 4 . 3 = 2 – 12 = -10

→ Oplossingsmethode: hoofddiagonaal – nevendiagonaal

*Determinant van een 3 x 3 matrix:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 . (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 2 . (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 3 . (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ = 1 (2 . 4 – 3 . 3) – 2 (4 – 6) + 3 (3 – 4)

= -1 + 4 – 3 = 0

--> Korte werkwijze: pak rij of kolom, bereken alle minoren van rij, tel op.

--> Bijzondere determinant: eigenschap: determinant met twee dezelfde rijen = 0

- -

(BIII) EIGENSCHAPPEN VAN DETERMINANTEN

EIGENSCHAP 1: transponeren verandert niks aan de determinant

EIGENSCHAP 2: Als je een rij of kolom van plaats verwisselt verandert de teken v/d determinant.

→ $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10 <=> \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10$

EIGENSCHAP 3: Een determinant met twee gelijke/evenredige rijen of kolommen = 0 (zie BII)

EIGENSCHAP 4: som van producten van een rij (of kolom) met de minoren van de elementen van een andere rij is gelijk aan 0

EIGENSCHAP 5: Je mag een gemeenschappelijke factor van een rij buiten de determinant brengen

→ $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 . \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

EIGENSCHAP 6: Determinanten met twee dezelfde rijen (of kolommen) en één verschillende mag je de rijen (of kolommen) behouden) en de verschillende bij elkaar optellen.

EIGENSCHAP 7: Je mag elementaire rijoperaties uitvoeren op een determinant (zie matrices)

- -

(BIV) REGULIERE MATRICES

*Matrix is regulier indien D is niet gelijk aan 0 ⇔ singulier als D = 0

→ Reguliere matrices hebben een inverse (omgekeerde)

*Formule om inverse te berekenen: $inv\ (A) = \frac{1}{\det A} . adj\ A$

→ De adjunct bereken je door de minor van elk element v/d matrix te berekenen en de matrix uiteindelijk te transponeren

*Voorbeeld adjunct:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

→ Om de inverse te berekenen bereken je de determinant en vul je gewoon de formule in.

*Om de rang te bepalen van een matrix kijk je na of de determinant 0 is, indien dat zo is ga je een 'orde' lager en kijk je of die determinant 0 is of niet, als het niet 0 is heb je de rang gevonden

→ Bv.: de determinant van de matrix hierboven is niet 0 (reken maar uit) dus de rang is 3!

- -

(BV) STELSELS VAN LINEAIRE VERGELIJKINGEN (OPLOSSEN MET GAUSS-METHODE)

*Vorig jaar leerden we stelsels oplossen met substitutie en combinatie, dit jaar komt er iets bij.

*Werkwijze: (1) maak van de stelsel een verhoogde matrix (AT)

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+2y+2z=3 \\ 3x+y+z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}$$

(2) Voer elementaire rijoperaties uit op de matrix totdat je de uitkomst af kan lezen of verder kan werken met substitutie.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array} \text{----(K2 – 2K1)---->} \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}$$

→ Hier heb je een nulrij die een onware uitspraak geeft (0x + 0y + 0z = -3!!!), als je hiermee te maken hebt heeft de stelsel géén oplossingen!

→ Als er stond (0x + 0y + 0z = 0), dan was het een ware uitspraak, je mag dan de nulrij weglaten, verder rekenen met de rest en de onbekenden vrij kiezen. Het stelsel heeft dan oneindig veel oplossingen

→ Als je géén nulrij hebt blijf je verder elementaire rijoperaties uitvoeren totdat je het antwoord hebt of verder kan werken met substitutie.

(BVI) STELSELS VAN LINEAIRE VERGELIJKINGEN BESPREKEN (MET DETERMINANTEN)

*In dit hoofdstuk draait het vooral om: oplosbaarheid van stelsels nakijken + algemene oplossing geven.

- -

(BVI_a) OPLOSBAARHEID VAN STELSELS NAKIJKEN

*Je bepaalt de rang van de verkregen matrix:

is de rang r = het aantal rijen m, dan is het stelsel oplosbaar.

is de rang r tussen 0 en m, dan is er verder onderzoek nodig

→ Maak alle karakteristieke determinanten (KD), als alle KD's nul zijn dan heb je oplossingen

→ Hoe maak je KD's? Kijk naar het volgend uitgewerkt voorbeeld (volgende pagina):

→ Je bepaalt de rang (dit geval 2), je pakt de HD, dan rand je de HD (je voegt de bovenste rijen en uitkomten eraan toe).

→ In ons voorbeeld was de eerste KD niet gelijk aan nul → géén oplossing!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 8 \\ \boxed{4 \quad 8} & & 12 & \boxed{16} \\ \boxed{3 \quad 4} & & 5 & \boxed{1} \\ \boxed{3 \quad 2} & & 6 & \boxed{1} \end{array}\right]$$

$$KD = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 16 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{K1 - 3K3} \begin{vmatrix} -44 & 8 & 16 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \longrightarrow 2 \begin{vmatrix} -44 & 4 & 16 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$\longrightarrow$ $2.(-44)(1) = -88 \neq 0$

is de rang 0 dan kijk je naar de uitkomsten → uitkomsten zijn 0, dan kies je onbekenden vrij, je hebt hier oneindig veel oplossingen

→ uitkomsten zijn niet 0, dan heb je géén opl, strijdig!

(BVI$_b$) IS DE RANG R = HET AANTAL RIJEN M? LOS OP MET STELSELS VAN CRAMER!

Los op in $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} 7x - 4y = 52 \\ 2x + 5y = -22 \end{cases}$

$D = \det A = \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 43 \neq 0$ → **DUS DE RANG = 2 = m**

Het stelsel is dus een stelsel van Cramer en heeft één enkele oplossing.

$D_1 = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 52 \\ -22 \end{matrix}} & \begin{matrix} -4 \\ 5 \end{matrix} \end{vmatrix} = 172$ $\qquad D_2 = \begin{vmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 2 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 52 \\ -22 \end{matrix}} \end{vmatrix} = -258$

X **Bij D1 vervang je x-waarden door uitkomsten, bij D2 y-waarden** Y

Voor de enige oplossing (x_0, y_0) geldt dus:

$x_0 = \frac{D_1}{D} = 4$ $\qquad y_0 = \frac{D_2}{D} = 6$

Zelfde werkwijze 3x3 stelsels

Besluit: $Opl = \{(4{,}6)\}$

(BVII) BIJZONDERE PROBLEMEN EN TOEPASSINGEN OP STELSELS EN DETERMINANTEN

*Stelsels van homogene vergelijkingen:

→ We spreken van een stelsel van homogene vergelijkingen als alle uitkomsten nul zijn.

*Stelsel van homogene vergelijkingen heeft andere oplossingen dan nuloplossing:

⇔ Stelsel is singulier (herinnering: singulier als D = 0)

→ Met deze stelling kunnen we de lineaire afhankelijkheid van vectoren nakijken.

→ VOORBEELD: we onderzoeken k(2,1) en l(1, 5)...

→ $\begin{cases} 2k + l = 0 \\ k + 5l = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ = 2 . 5 – 1 . 1 = 8 → De matrix is regulier: enkel de nuloplossing geld

→ **k en l zijn dus lineair onafhankelijk**

*Oplossen van 2x3 homogene vergelijkingen met rang 2:

→ VOORBEELDOEFENING:

$\begin{cases} 2x + 5y + 6z = 0 \\ 3x + 6y + z = 0 \end{cases}$ ➔ Maak de 3 determinanten a.d.h.v. de formule

$D1 = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$ = -31 ; $D2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ = -16 ; $D3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$ = -3

→ Hoe the fuck maak je D1+D2+D3? Voor D1 laat je de kolom met de x-waarden weg, voor D2 laat je de kolom met de y-waarden weg, voor D3 de kolom met de z-waarden.

*Algemene en particuliere oplossingen van een stelsel:

→ Een oplossing waar geen parameter (onbekende) staat is een particuliere oplossing.

→ Bijvoorbeeld: (4, 5, 0) is een algemene oplossing

→ Een algemene oplossing is een oplossing waar een parameter in staat.

→ Bijvoorbeeld: (3t, 5t, t) is een oplossing

→ De oplossingenverzameling is de algemene- en particuliere oplossing opgeteld

→ In onze voorbeelden: (4 + 3t, 5 + 5t, t)

*Collineaire punten bepalen: collineaire punten zijn punten op éénzelfde rechte

$P(x_1, y_1), L(x_2, y_2), M(x_3, y_3)\ zijn\ colinneair <=> \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ = 0

*Concurrente rechten bepalen: concurrente rechten zijn rechten die door éénzelfde punt gaan

$a_1: 5x + 3y + 7 = 0$

$a_2: 10x + 6y + 14 = 0$ ➔ Zijn rechten concurrent? ➔ $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 10 & 6 & 14 \\ 20 & 12 & 8 \end{vmatrix}$ = 0 (evenredige rijen)

$a_3: 20x + 12y + 8 = 0$

➔ rechten zijn concurrent als hun determinant gelijk is aan nul.

*Oppervlakte van parallellogram bepalen als 3 coördinaten gegeven zijn:

→ De absolute waarde van de determinant van deze 3 punten

→ VOORBEELD: punten = (1, 2), (2, -1), (3, 4)

→ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -1 & -5 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ = 1 [(-2 . (-5)) – (-1. (-2)] = 10 – 2 = 8

→ Hier heb ik een rijoperatie toegepast: R1-R3, R2 – R3