Samenvatting fysica – module 4 – tweedimensionale bewegingen – made by Abdellah

---

(Y) VOORWOORD

Dit is de samenvatting fysica ter voorbereiding van het examen van module 4 dat gaat over mechanica, de mechanica is, zoals je nog steeds weet, bewegingsleer. Let op: ik heb per toets samengevat, dit is dus niet de volledige samenvatting voor het examen!

SAMENVATTING 1: Beschrijving van een beweging (zie website)
SAMENVATTING 2: Eéndimensionale bewegingen (zie website)
SAMENVATTING 3: Twéédimensionale bewegingen (deze samenvatting!)

(X) FOUTJE

Dat kan. Meld fouten a.u.b. via messenger aan mij, ik ben je alvast dankbaar!

(Z) INHOUDSTAFEL

Over twee pagina's.

Inhoud

1) Algemeen

1.1) Definitie 2D-beweging

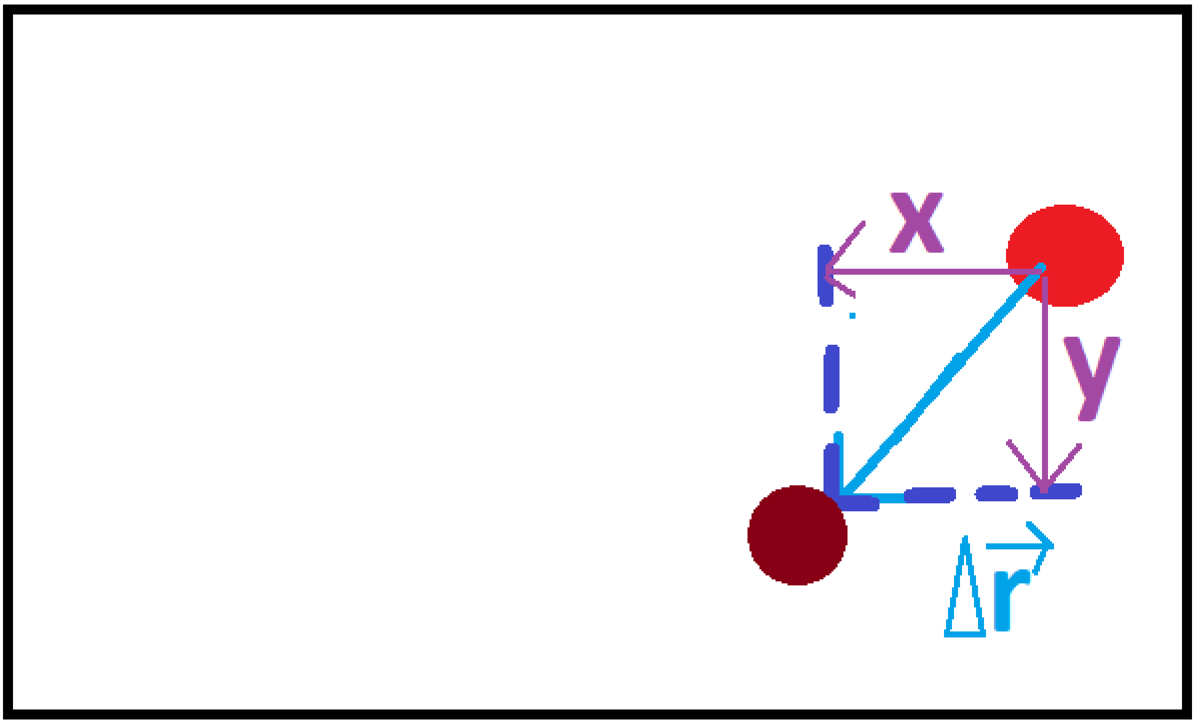
Definitie: een tweedimensionale beweging is een beweging die beschreven kan worden in een vlak.
--> **Niet:** beweging die beschreven kan worden door een rechte (= 1D-beweging, zie andere samenvatting).
--> **Niet:** beweging die beschreven kan worden in een ruimte (= 3D-beweging, leren we niet).

1.2) Voorbeeld: poolen aan pooltafel

Op school hebben we, op onze speelplaats van de 3^de^ graad, een pooltafel. De beweging die de bal beschrijft tijdens het poolen is een tweedimensionale beweging.

Aanschouw hierlangs een vereenvoudigde voorstelling van de pooltafel die wij op onze school hebben. Het rode bolletje is de bal in rust.

Twee jaargenoten willen poolen, dan gaan ze het balletje in beweging brengen met de keu (die constant kapot gaat). Laten we eens kijken naar de verplaatsing die de bal dan ondergaat.



De verplaatsingsvector $\Delta\vec{r}$ komt overeen met de volledige verplaatsing die het balletje ondergaat en bereken je grafisch door: $\Delta\vec{r} = \vec{r_e} - \vec{r_b}$.
--> Deze verplaatsing gebeurt natuurlijk in een welbepaald tijdsinterval Δt.
--> De verplaatingsvector kan je in een tweedimensionale beweging altijd ontbinden in een x- en y-component waaroor geldt: $\vec{r} = \vec{x} + \vec{y}$.

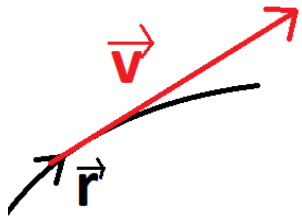
1.3) Snelheidsvector

De gemiddelde snelheidsvector $\overrightarrow{v_g}$ in een welbepaald tijdsinterval Δt wordt als volgt gedefinieerd:

$\overrightarrow{v_g} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

De ogenblikkelijke snelheidsvector is natuurlijk de afgeleide van de plaatsvector. Je weet ook nog steeds uit de wiskunde dat de eerste afgeleide overeenkomt met de rico van de raaklijn.

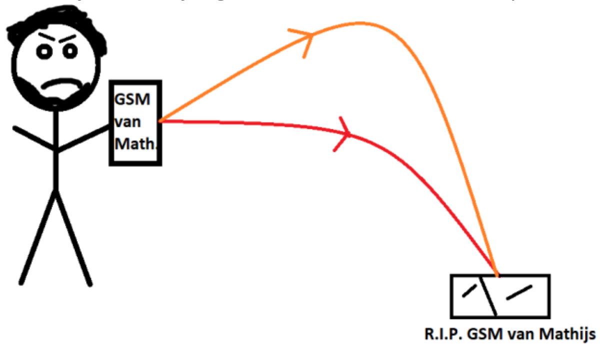
--> Dat betekent dat de ogenblikkelijke snelheidsvector altijd raakt aan de plaatsvector/baan van de beweging. De zin van de snelheidsvector is gelijk aan de bewegingszin.



1.4) Twee soorten bewegingen

Nu we over het algemeen weten wat een tweedimensionale beweging is en hoe het allemaal in elkaar zit gaan we ons verdiepen op twee soorten tweedimensionale bewegingen die wij zien in het middelbaar. Hier haal ik ze al kort aan.

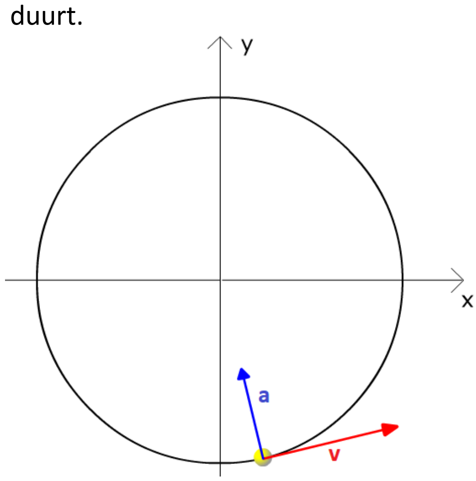
(1) De horizontale worp: Als onze wiskundeleerkracht, Kevin, genoeg heeft van Mathijs die constant op zijn gsm zit en die beslist te gooien doorheen het lokaal en ze niet omhoog gooit, dan beschrijft Mathijs' gsm een horizontale worp.



--> Let op: *de rode vector is de verplaatsingsvector bij een horizontale worp. De worp gebeurt letterlijk horizontaal en gaat niet omhoog.

*de oranje vector is de verplaatsingsvector bij een schuine worp, dit is als Kevin Mathijs' gsm toch omhoog gooit. De schuine worp leren wij niet op school.

(2) De eenparig cirkelvormige beweging (= ECB): Een eenparig cirkelvormige beweging of ECB is een beweging waarbij het massapunt een cirkel omschrijft en elke omwenteling even lang duurt.



Elke omwenteling duurt even lang bij een ECB omdat we te maken hebben met een cirkel natuurlijk. Bij een ECB werken we in radialen. We zeggen niet dat de hoekgrootte van een cirkel 360° is maar 2π rad. Herinnering: π rad = 180°.

Merk al direct op:

(1) de versnelling, a, is gericht naar het middelpunt van de cirkel.

(2) v raakt aan de cirkel (zoals we al hebben gezien is dit altijd zo bij 2D-bewegingen).

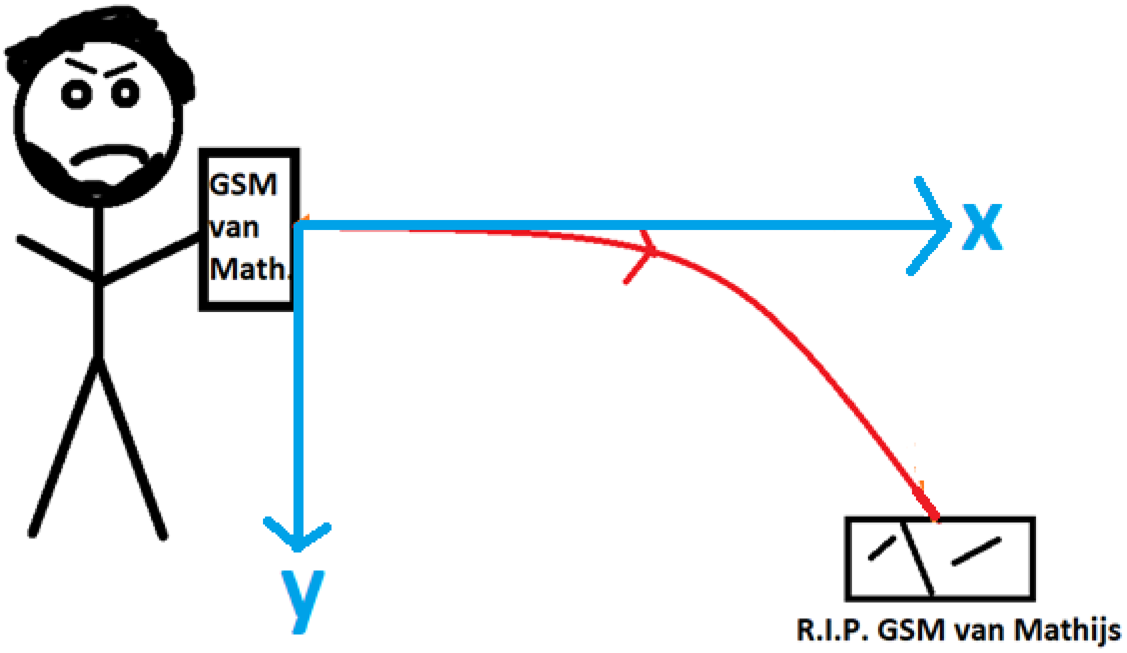
2) De horizontale worp (= HW)

Een horizontale worp (= HW) is, zoals we al weten, een worp waarbij een voorwerp recht naar voren wordt gegooid.

2.1) Onafhankelijkheidswet der bewegingen

2.1.1) Ontbinding HW in een x- en y-component

We kunnen, zoals we al weten, elke verplaatsing ontbinden in een x- en y-component. We hernemen het voorbeeld waarbij Kevin Mathijs' gsm doorheen het lokaal gooit omdat hij er genoeg van heeft en wilt dat Mathijs oplet.



We hebben de horizontale worp ontbonden in een x- en y-component. Dit is belangrijk omdat de bewegingen in de x- en y-component onafhankelijk van elkaar gebeuren.

2.1.2) Onafhankelijkheidswet

De **onafhankelijkheidswet** luidt: "Als **voorwerpen** onderworpen zijn aan **verschillende bewegingen** die **tegelijkertijd** gebeuren, dan gebeuren die **bewegingen onafhankelijk** van elkaar."

De beweging van Mathijs' gsm, die Kevin doorheen de klas gooit, heeft dus één aparte beweging in haar x-component en één aparte beweging in haar y-component, die onafhankelijk van elkaar gebeuren.

De vraag luidt nu: welke beweging gebeurt er in de x-component en welke in de y-component?

2.1.3) De bewegingen in x- en y-component bij HW

Men kan experimenteel bewijzen dat de volgende bewegingen gebeuren in een vrije val.

(1) x-component: ERB

--> Formules:

(A) $x(t) = v \,.\, \Delta t$

(B) $v = cte.$

--> De beweging die het voorwerp in de x-component beschrijft is een ERB oftewel eenparig rechtlijnige beweging. Dit is ook logisch, stel dat Kevin Mathijs' gsm doorheen de klas gooit volgens een HW, dan geeft Kevin Mathijs' gsm een beginsnelheid mee maar kan de gsm op zich niet meer versnellen omdat er in de x-richting geen kracht meer op werkt.

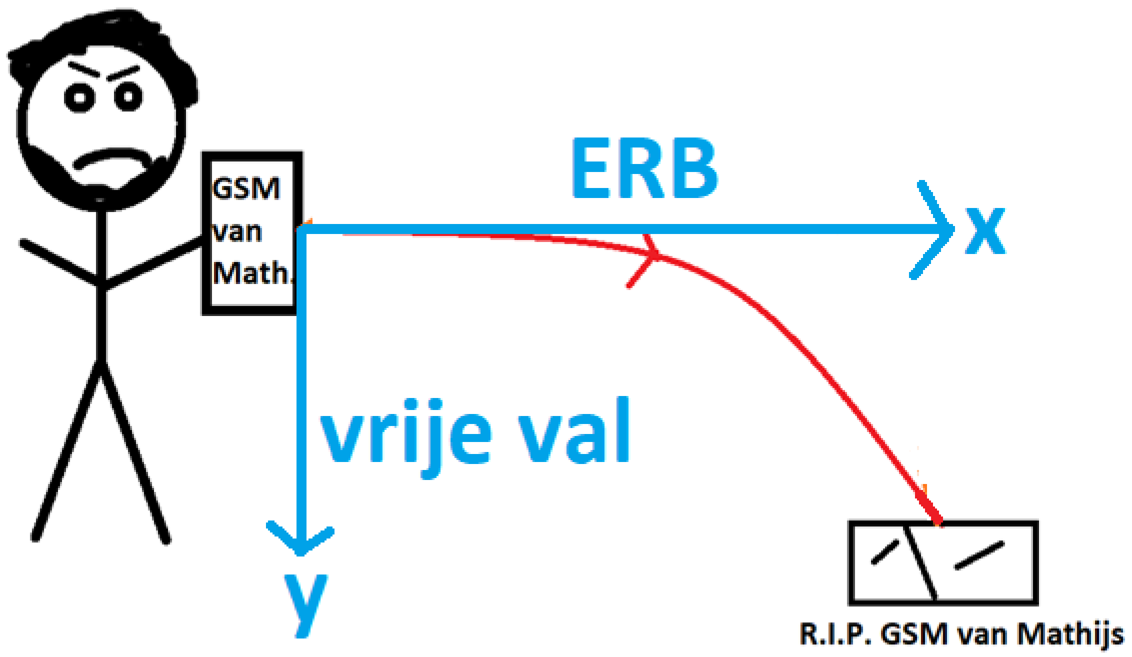
(2) y-component: vrije val

--> Formules:

(A) $y(t) = \frac{g}{2} \,.\, \Delta t^2$

(B) $v(t) = g \,.\, \Delta t$

--> De beweging die het voorwerp in de y-component beschrijft is een vrije val, dit was een speciale EVRB (zie samenvatting hoofdstuk 2). Dit is ook logisch, de gsm blijft niet zweven maar wordt naar de grond getrokken door de aantrekkingskracht van de aarde. Mathijs' gsm ondergaat een vrije val als Kevin deze doorheen het klaslokaal gooit.



2.2) De baanvergelijking

De baanvergelijking geeft alle achtereenvolgende plaatsen van een voorwerp weer die een horizontale worp beschrijft.

(verdieping) de baanvergelijking afleiden.

--> We kennen plaatsfuncties voor een ERB en een vrije val, echter gelden die allebei bij een horizontale worp en kunnen we ze dus in een stelsel gieten.

$$\begin{cases} x(t) = v\,.\Delta t \\ y(t) = \frac{g}{2}\,.\Delta t^2 \end{cases}$$

--> We gebruiken substitutie om dit stelsel op te lossen.

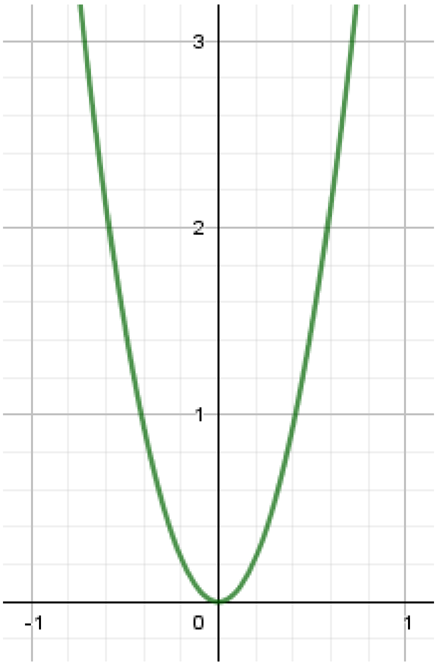
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta t = \frac{x}{v} \\ y(t) = \frac{g}{2}\,.\left(\frac{x}{v}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta t = \frac{x}{v} \\ y(t) = \frac{g}{2}\,.\frac{x^2}{v^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta t = \frac{x}{v} \\ y(t) = \frac{g}{2v^2}\,.x^2 \end{cases}$$

--> De vergelijking die je hebt verkregen noemen we de baanvergelijking.

De formule voor de baanvergelijking bij een horizontale worp is gelijk aan:

$$y(x) = \frac{g}{2\,.v_{0x}^2}\,.x^2$$

De grafiek van de baanvergelijking is een parabool met haar top in de oorsprong.



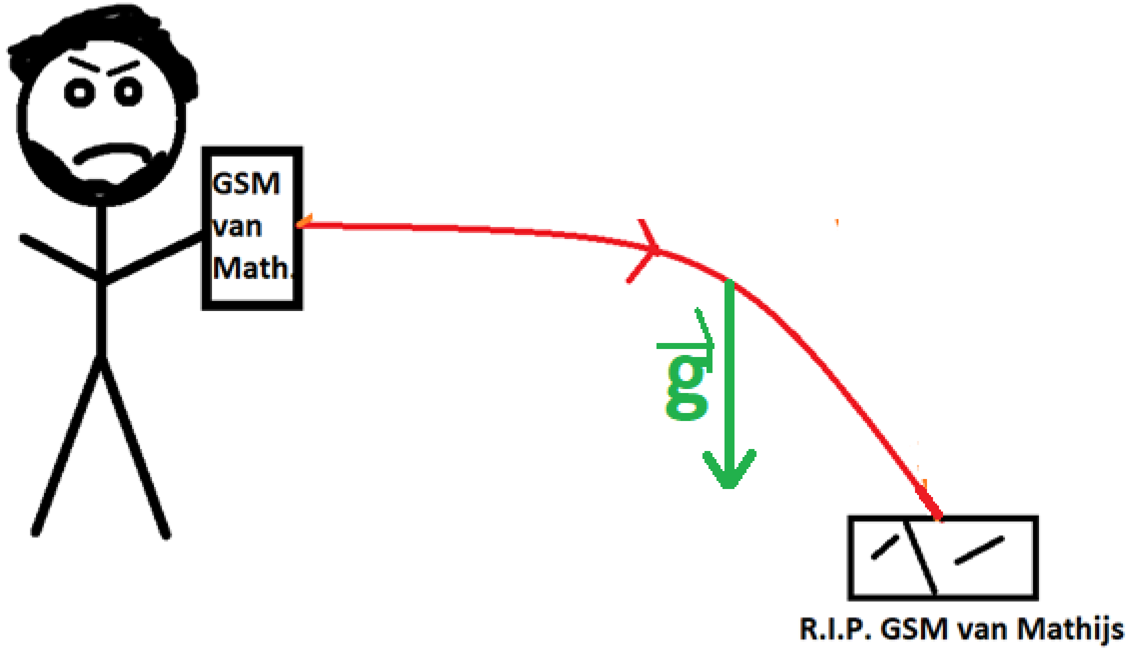
Het is ook best logisch dat haar top in de oorsprong ligt. De baanvergelijking geeft immers de plaatscoördinaten (x en y) van het bewegend voorwerp weer.

Een voorwerp begint natuurlijk pas te bewegen vanaf het punt (0,0).

2.3) Tangentiële- en normaalversnelling

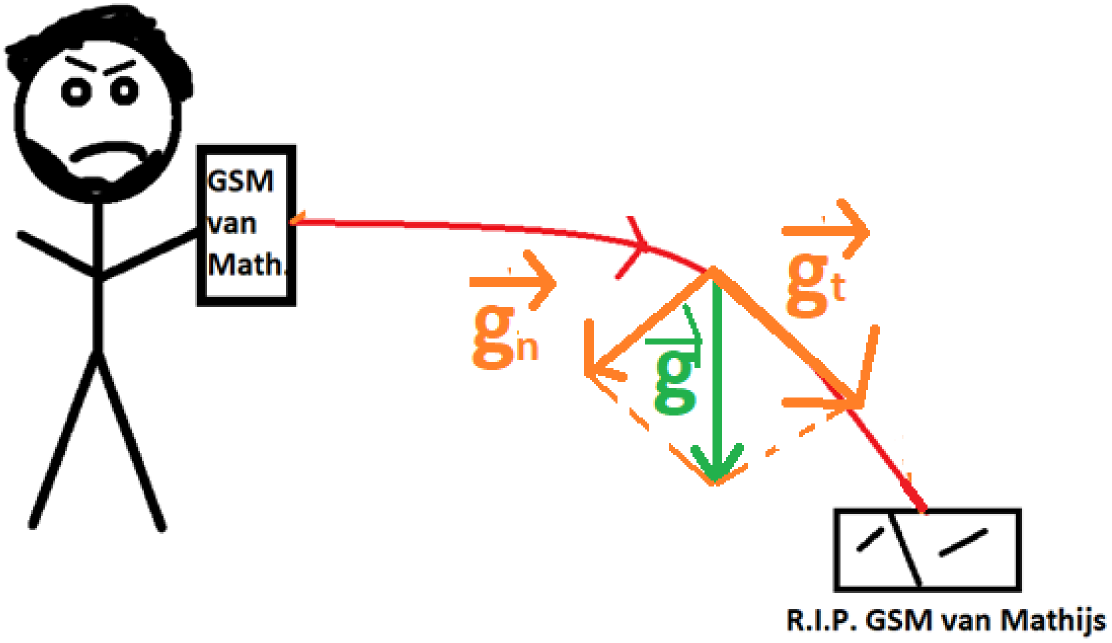
Op elk moment werkt de zwaarteveldsterkte (= zwaarteversnelling) op een voorwerp in rust of in beweging. Je weet dat we de zwaarteveldsterkte uitdrukken als g en de grootte van g gelijk is aan $9{,}81\,\frac{N}{kg}$ of in de kinematica gebruiken we liever $9{,}81\,\frac{m}{s^2}$ (maar: N/kg en m/s² is allebei juist).

g is altijd aanwezig, de aarde zit je constant naar onder te duwen. De aarde oefent ook een aantrekkingskracht uit op Mathijs' gsm wanneer Kevin deze doorheen de klas gooit. We tekenen eventjes de vector.



2.3.1) Ontbinden van versnelling g in g_x en g_y

We kunnen vectoren, zoals je al weet, ontbinden in een x- en y-component. Dat gaat dan natuurlijk ook met de versnelling g. We ontbinden de zwaarteveldversnelling g, die op Mathijs' gsm werkt, in de verschillende componenten.



We noemen $\overrightarrow{g_n}$ de normaalversnelling. De normaal staat immers altijd loodrecht op eenderwelk ding. We noemen $\overrightarrow{g_t}$ de tangentiële versnelling, deze raakt aan de baan van de beweging.

De normaal- en tangentiële versnelling hebben verschillende functies die we in het volgend puntje bespreken.

2.3.2) Functies van g_n en g_y

(1) Normaalversnelling g_n:

✓ altijd loodrecht op baan van beweging

✓ verantwoordelijk voor de richtingsverandering van de snelheid (v).

==> DUS: verantwoordelijk voor de kromming van de baan.

(2) Tangentiële versnelling g_t:

✓ raakt altijd aan de baan van beweging.

✓ verantwoordelijk voor de snelheidsverandering van de snelheid v.

2.4) Voorbeeldoefeningen horizontale worp

2.4.1) Kennis

VRAAG 1: Zijn de volgende uitspraken waar? Verbeter indien nodig.

A) De snelheidsvector raakt altijd aan de baan van de beweging.
--> Zoals we hebben gezien is dit **WAAR**. De (ogenblikkelijke) snelheidsvector raakt altijd aan de baan van de beweging bij een 2D-beweging.
B) De versnellingsvector raakt altijd aan de baan van de beweging.
--> Dit is **ONWAAR**. De versnellingsvector raakt niet altijd aan de baan van de beweging (denk maar bijvoorbeeld aan het verschil tussen de tangentiële en de normaalversnelling).
C) Bij een EVRB is er geen normaalversnelling.
--> Dit is **WAAR**. Een normaalversnelling kan je immers enkel hebben bij een HW.

VRAAG 2: In punt A is de kromming van een baan groter dan in punt B. Wat weet je dan over de grootte van de normaalversnelling in beide punten?

Zoals je weet is de normaalversnelling g_n verantwoordelijk voor de kromming van de baan. Hoe groter de normaalversnelling, hoe groter de kromming van de baan zal zijn.
--> DUS: de normaalversnelling is groter in punt A dan in punt B.

VRAAG 4: De horizontale worp bestaat uit twee bewegingen die tegelijkertijd gebeuren. Welke?

Zoals we weten bestaat de horizontale worp uit twee onafhankelijke bewegingen die tegelijkertijd

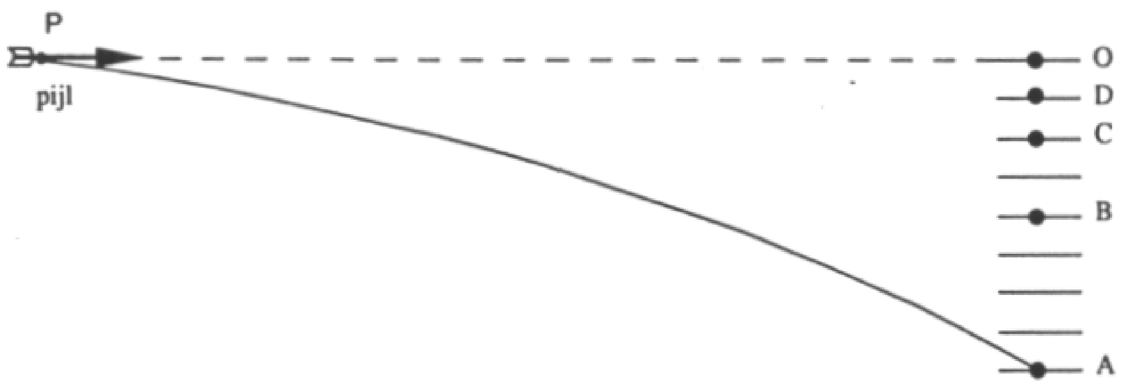
gebeuren. We kunnen de horizontale worp opsplitsen in een x- en y-component.
--> In de x-richting gebeurt er een ERB
--> In de y-richting gebeurt er een vrije val.

2.4.2) Inzicht

VRAAG 6: Je laat gelijktijdig een eerste bal vrij vallen en gooit een tweede bal van dezelfde hoogte horizontaal weg. Welke bal komt het eerst op de grond aan als de luchtweerstand te verwaarlozen valt?
De luchtweerstand valt te verwaarlozen, we zitten dus in het luchtledige.

Omdat bij een horizontale worp beide bewegingen, respectievelijk de ERB en de vrije val, onafhankelijk van elkaar gebeuren komen bal 1 en bal 2 gelijktijdig op de grond aan.

VRAAG 7: Een pijl wordt horizontaal afgeschoten in het punt P en treft een verticale wand in het punt A. Als men de beginsnelheid van de pijl in het punt P verdubbelt, in welk punt zal de pijl dan diezelfde wand treffen?

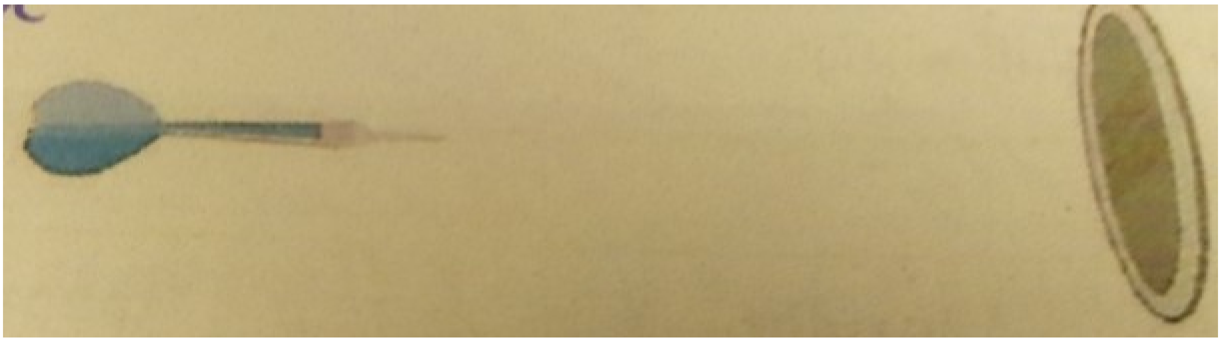


We bewijzen dit vanuit een fysisch standpunt.
--> Je weet dat een horizontale worp = ERB + vrije val. De vrije val zorgt ervoor dat het pijltje de verticale want uiteindelijk in een punt raakt. De ERB en vrije val gebeuren onafhankelijk van elkaar.
==> Je kent de formule voor de plaats van een vrije val: $y = \frac{g}{2} \,.\, \Delta t^2$
--> Je kent de formule voor de snelheid (ERB): $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$
→ Je weet dat de beginsnelheid (v) 2x verdubbelt. Dus we kunnen stellen dat:
$2v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$
➔ We kunnen hier Δt uit halen… ⇔ $\Delta t = \frac{\Delta x}{2v}$
--> We zien dat als de (begin)snelheid verdubbelt, de tijd wordt gehalveerd.
We kunnen dus $\Delta t = \frac{1}{2}$ invullen in onze vrije val.

==> We vullen in in onze formule voor de vrije val:
$$y = \frac{g}{2} \,.\, \Delta t^2 = \frac{9{,}81}{2} \,.\, \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9{,}81}{2} \,.\, \frac{1}{4} = \frac{9{,}81}{8}$$

--> Indien je telt kom je uit dat het pijltje op plaats C zal vallen.

VRAAG 11: Hoezo? Een pijl en een bierviltje bevinden zich op dezelfde hoogte. Op het ogenblik dat de pijl horizontaal wordt afgeschoten, valt het bierviltje. Verklaar waarom de pijl altijd het viltje zal raken op voorwaarde dat de beginsnelheid van de pijl groot genoeg is.

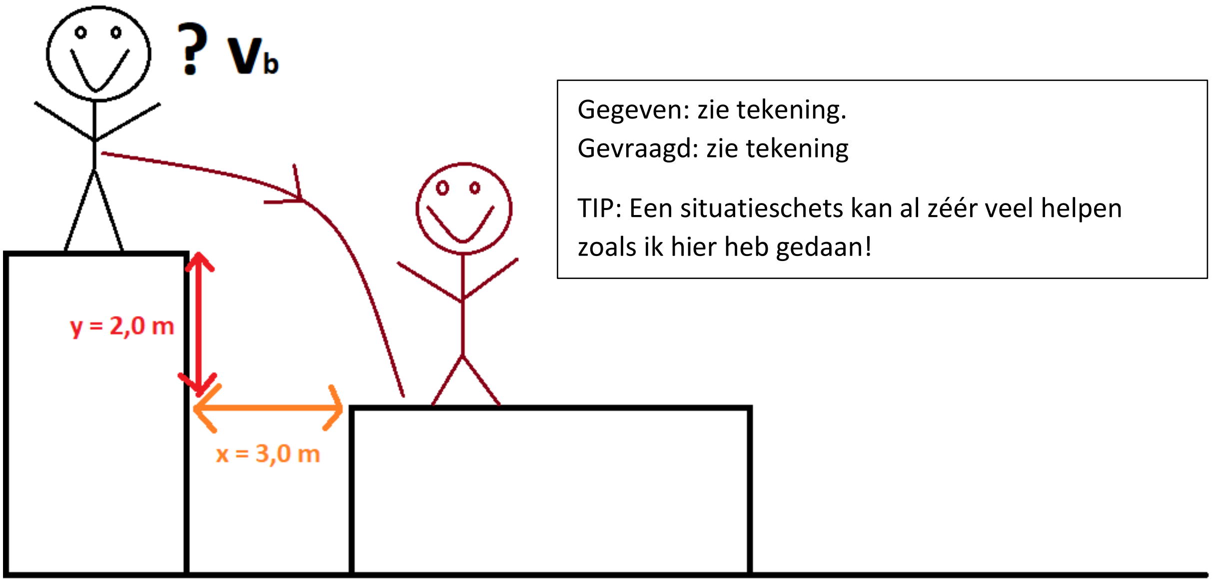


Dit valt te verklaren vanuit de onafhankelijkheid der bewegingen. De vrije val (in de y-richting) en de ERB (in de x-richting) gebeuren in de horizontale worp onafhankelijk van elkaar.

Omdat de vrije val in de horizontale worp van het pijltje onafhankelijk gebeurt van de ERB in het pijltje, zal het pijltje het bierviltje altijd raken op voorwaarde dat de beginsnelheid bij de ERB groot genoeg is. Als de bewegingen nu, hypothetisch gezien, afhankelijk waren van elkaar was dit niet zo. Maar de bewegingen zijn onafhankelijk van elkaar.

2.4.2) Toepassen

VRAAG 12: Een stuntman springt horizontaal van een gebouw naar het dak van een garage dat 2,0 m lager ligt. Hoe groot moet zijn snelheid minstens zijn als de garage op 3,0 m van het gebouw staat?
Zoals je weet lossen we fysische vraagstukken op met gegeven, gevraagd, oplossing.



Gegeven: zie tekening.
Gevraagd: zie tekening

TIP: Een situatieschets kan al zéér veel helpen zoals ik hier heb gedaan!

OPLOSSING:
Je kan deze oefening op 2 manieren oplossen, ene manier steunt op de onafhankelijkheid der bewegingen en bij de andere manier maak je gebruik van de baanvergelijking. Ik los ze hier op beide

manieren op.

OPLOSSINGSMETHODE 1: Onafhankelijkheid der bewegingen

Je weet dat de beweging in het y-component een vrije val beschrijft en in het x-component een ERB beschrijft.

--> DUS: (1) $y = \frac{g}{2} . \Delta t^2$

--> We kunnen hier de tijd, Δt, uithalen aangezien we de beginsnelheid willen weten en snelheid moet je natuurlijk berekenen met tijd.

$\Leftrightarrow \Delta t^2 = \frac{2y}{g}$

$\Leftrightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$

$\Leftrightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2 .2{,}0\ m}{9{,}81\ m/s^2}}$

$\Leftrightarrow \Delta t = 0{,}64\ s$

Nu moet je de beginsnelheid weten, de beginsnelheid is altijd in de x-richting en je weet ook dat de beweging in de x-richting een ERB beschrijft…

--> DUS: (2) $x = v . \Delta t$

$\Leftrightarrow v = \frac{x}{\Delta t}$

$\Leftrightarrow v = \frac{3m}{0{,}64\ s} = 4{,}70 \frac{m}{s}$

--> Dit is het antwoord op de vraag!

OPLOSSINGSMETHODE 2: Baanvergelijking

Je kent de baanvergelijking voor een horizontale worp: $y(x) = \frac{g}{2v_b^2} . x^2$

==> Je kent alle onbekenden behalve de beginsnelheid. Je mag dus gaan afzonderen…

$y = \frac{g}{2v^2} . x^2$

$\Leftrightarrow 2v^2 = \frac{g}{y} . x^2$

$\Leftrightarrow v^2 = \frac{g}{2y} . x^2$

$\Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{g}{2y} . x^2}$ --> nu kan je invullen!

$\Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{g}{2y} . x^2} = \sqrt{\frac{9{,}81\ m/s^2}{2 .2{,}0\ m} . 3^2 m^2} = 4{,}70 \frac{m}{s}$

--> Dit is het antwoord op de vraag!

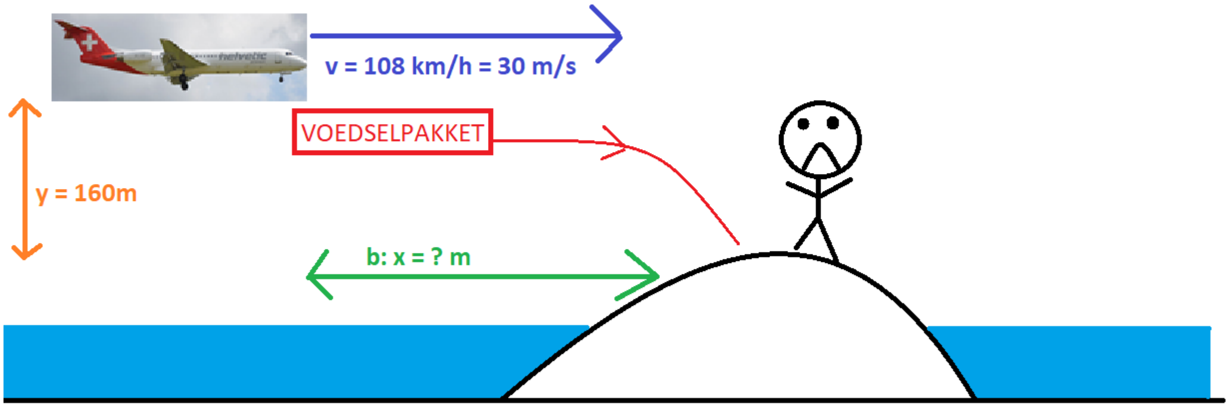
VRAAG 13: Een vliegtuig moet voedsel droppen voor slachtoffers van een overstroming die 160m onder het vliegtuig op een geïsoleerd eiland zitten. De snelheid van het vliegtuig is 108 km/h.

a) Hoelang blijft het pakket in de lucht?

b) Vanaf welke afstand voor het eiland moet de piloot het pakket droppen?

c) Als het vliegtuig zijn koers met dezelfde snelheid voortzet, welke afstand heeft het dan afgelegd als het pakket de grond bereikt?

We maken een situatieschets om de gegevens voor te stellen…



We lossen op: opnieuw kan je dit oplossen steunend op de onafhankelijkheid der bewegingen of je kan de baanvergelijking gebruiken. We lossen dit op beide manieren op.

OPLOSSINGSMETHODE 1: Onafhankelijkheid der bewegingen

Voor oefening a heb je eigenlijk niets meer dan de formule voor de vrije val nodig…

a) $y = \frac{g}{2} \,.\, \Delta t^2$ --> we kennen alle onbekenden en kunnen afzonderen tot Δt…

$\Leftrightarrow \Delta t^2 = \frac{2y}{g}$

$\Leftrightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$

$\Leftrightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2\,.160\,m}{9{,}81\frac{m}{s^2}}} = 5{,}71\ s$

--> Het voedselpakketje is dus 5,71 s onderweg naar het onbewoond eiland.

b) $x = v\,.\Delta t$

$= 30\frac{m}{s}\,.5{,}71\ s$

$= 171{,}3\ m$

--> De piloot moet dus op een afstand van 171,3 m het pakketje droppen zodat het op het onbewoond eiland valt.

c) $x = 171{,}3\ m$

--> Zelfde berekening als oefening b: het vliegtuig is al 171,3m verder als het pakketje is gedropt.

OPLOSSINGSMETHODE 2: De baanvergelijking

Oefening a kan je niet oplossen met de baanvergelijking omdat ze daar naar de tijd hebben gevraagd, in de baanvergelijking vindt je géén tijd!

Je kent de formule voor de baanvergelijking: $y = \frac{g}{2\,.v_b^2}\,.x^2$

b en c) $y = \frac{g}{2\,.v_b^2}\,.x^2$

➔ We kennen alle onbekenden, behalve x, we kunnen dus afzonderen naar x…

$\Leftrightarrow y\,.2v_b^2 = g\,.x^2$

$\Leftrightarrow \frac{y\,.2\,v_b^2}{g} = x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{y\,.\,2v_b^2}{g}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{y\,.2v_b^2}{g}} = \sqrt{\frac{160\,m\,.2\,.\left(\frac{30\,m}{s}\right)^2}{9{,}81\frac{m}{s^2}}} = 171{,}3\ m$

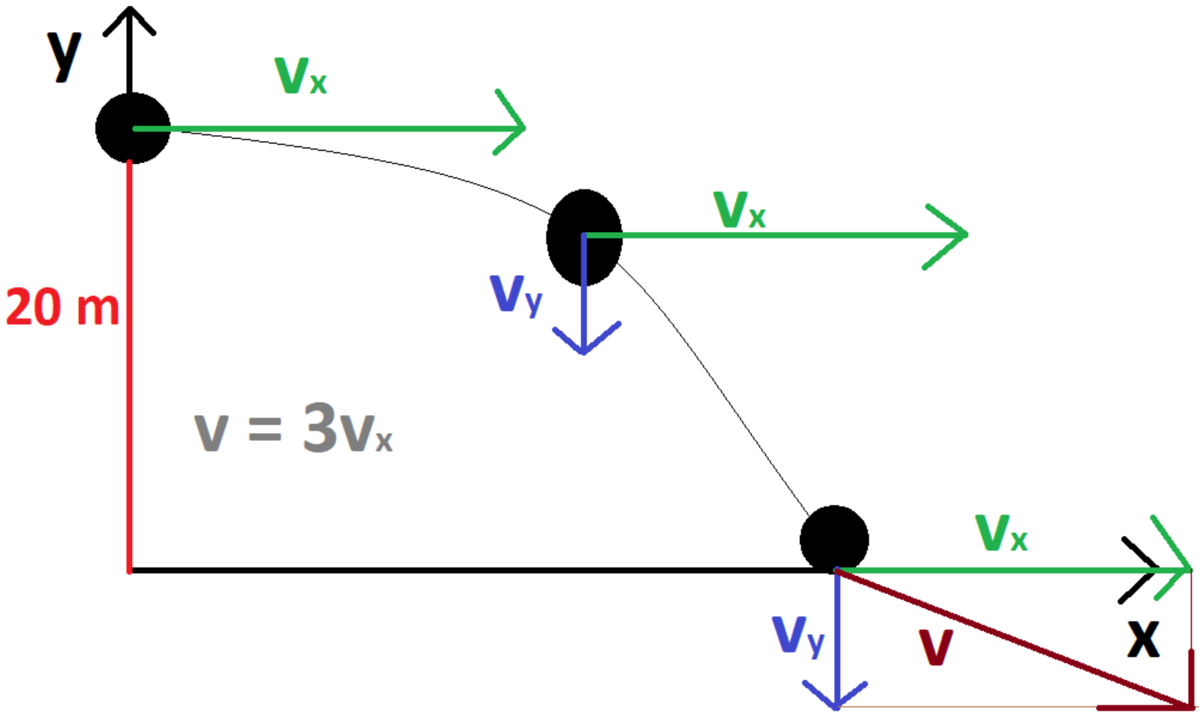
VRAAG 17: Een auto rijdt doorheen een brugleuning en komt 4,0 m lager in het water terecht. De horizontale afstand tussen de brug en de plaats waar hij in het water komt, is 16,0 m. Hoe groot was de snelheid van de wagen op het ogenblik dat hij de brug verliet?

Je hoeft niet altijd een situatieschets te maken, hier zijn de gegevens al wat duidelijker.

GEGEVEN	y = 4,0 m (de auto komt 4 m lager in het water terecht) x = 16,0 m (de horizontale afstand = 16,0 m)
GEVRAAGD	beginsnelheid
OPLOSSING	Het makkelijkste is om hier gewoon de baanvergelijking te gebruiken. Echter kan je dit ook oplossen met de onafhankelijkheid der bewegingen. We proberen beiden eens… **OPLOSSINGSMETHODE 1: Onafhankelijkheid der bewegingen** (1) We beginnen met de vrije val om daar onze tijd uit te halen… $y = \frac{g}{2} \cdot \Delta t^2$ $\Leftrightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4{,}0\ m}{9{,}81\ m/s^2}} = 0{,}90\ s$ (2) We vullen dit in in onze ERB (x-component) om de beginsnelheid te weten… $x = v \cdot \Delta t$ $\Leftrightarrow v = \frac{x}{\Delta t}$ $\Leftrightarrow v = \frac{16{,}0m}{0{,}90\ s} = 17{,}77 \frac{m}{s} = 64 \frac{km}{h}$ --> Et voila! We hebben het antwoord! **OPLOSSINGSMETHODE 1: Baanvergelijking** Je kent de formule voor de baanvergelijking: $y = \frac{g}{2 \cdot v_b^2} \cdot x^2$ --> We kennen alle onbekenden behalve v_b, we zonderen dus af! $\Leftrightarrow 2 \cdot v_b^2 = \frac{g}{y} \cdot x^2$ $\Leftrightarrow v_b^2 = \frac{g}{2y} \cdot x^2$ $\Leftrightarrow v_b = \sqrt{\frac{g}{2y} \cdot x^2}$ $= \sqrt{\frac{9{,}81\ m/s^2}{2 \cdot 4{,}0\ m} \cdot 16{,}0^2 \left(\frac{m}{s}\right)^2} = 17{,}71 \frac{m}{s}$ --> Et voila! We hebben (bijna) hetzelfde antwoord. Niet volledig hetzelfde wegens het afronden.

VRAAG 18: Een bal wordt horizontaal geworpen vanaf 20,0 m hoogte. Hij botst op een lager gelegen grond met een snelheid die driemaal groter is dan de beginsnelheid. Hoe groot was die beginsnelheid?

We maken een situatieschets om alles te verduidelijken…



Gevraagd is de grootte van de beginsnelheid v_{bx} (op de tekening v_x). Je weet dat de snelheid volgens de x-richting constant blijft bij een horizontale worp.

We kunnen dit oplossen door gebruik te maken van de onafhankelijkheid der bewegingen. Zoals je weet kunnen we uit de y-component de tijd halen en daarna de snelheid v_y daaruit bepalen. Met de stelling van Pythagoras kunnen we de snelheid v_{bx} bepalen.

$$y = \frac{g}{2} \, . \Delta t^2$$

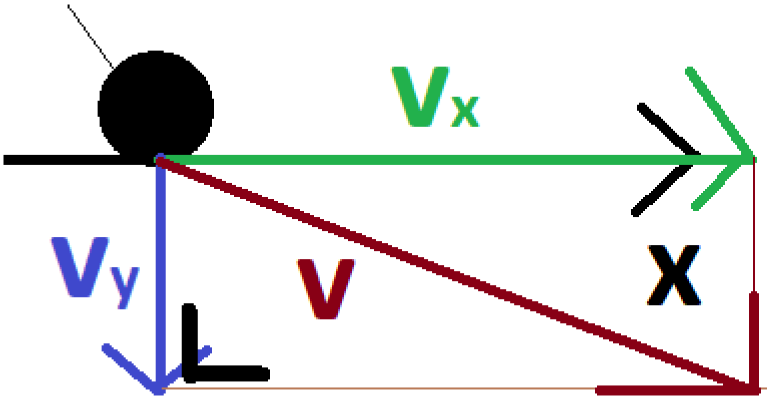
$$\Leftrightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \, .20 \, m}{9{,}81 \, m/s^2}} = 2{,}01 \, s$$

--> Nu kunnen we hieruit de snelheid in de y-component bepalen…

$$\text{==>} \; v_y = g \, . \Delta t$$

$$= 9{,}81 \frac{m}{s^2} \, .2{,}01 \, s = 19{,}7 \frac{m}{s}$$

Nu we v_y hebben kunnen we Pythagoras toepassen, we zien een rechthoekige driehoek en in rechthoekige driehoeken mogen we immers de stelling van Pythagoras toepassen.



Dus we krijgen: $v^2 = v_y^2 + v_{bx}^2$

Nu denk je zeker van: huh? Hoe los ik dit nu in Gods naam op? We hebben toch twéé onbekenden. Neen: kijk op de tekening --> we hebben gegeven dat v = 3 v_{bx}!

DUS: $(3v_{bx})^2 = v_y^2 + v_{bx}^2$
==> We hebben nu slechts één onbekende (nl.: v_{bx}, v_y hebben we uitgerekend). We zonderen af.

⇔ $9v_{bx}^2 = v_y^2 + v_{bx}^2$
⇔ $8\, v_{bx}^2 = v_y^2$
⇔ $v_{bx}^2 = \frac{v_y^2}{8}$

⇔ $v_{bx} = \sqrt{\frac{v_y^2}{8}} = \sqrt{\frac{19{,}7^2 \ \frac{m^2}{s^2}}{8}} = 7\,\frac{m}{s}$

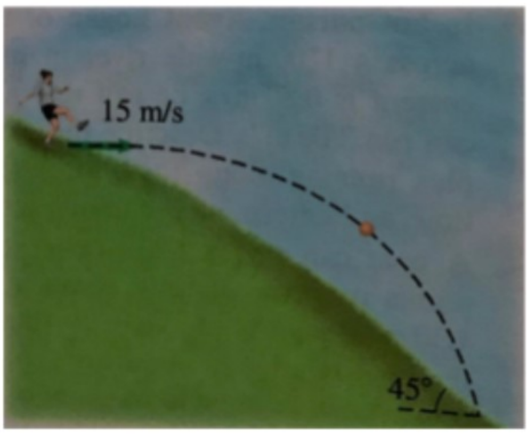
We hebben de beginsnelheid gevonden! De beginsnelheid is 7 m/s.

<u>VRAAG 19: De horizontale worp – een doordenkertje (extra oefening op Smartschool)</u>
De vraag luidt als volgt…

Hoofdstuk 3: 2 dimensionale beweging

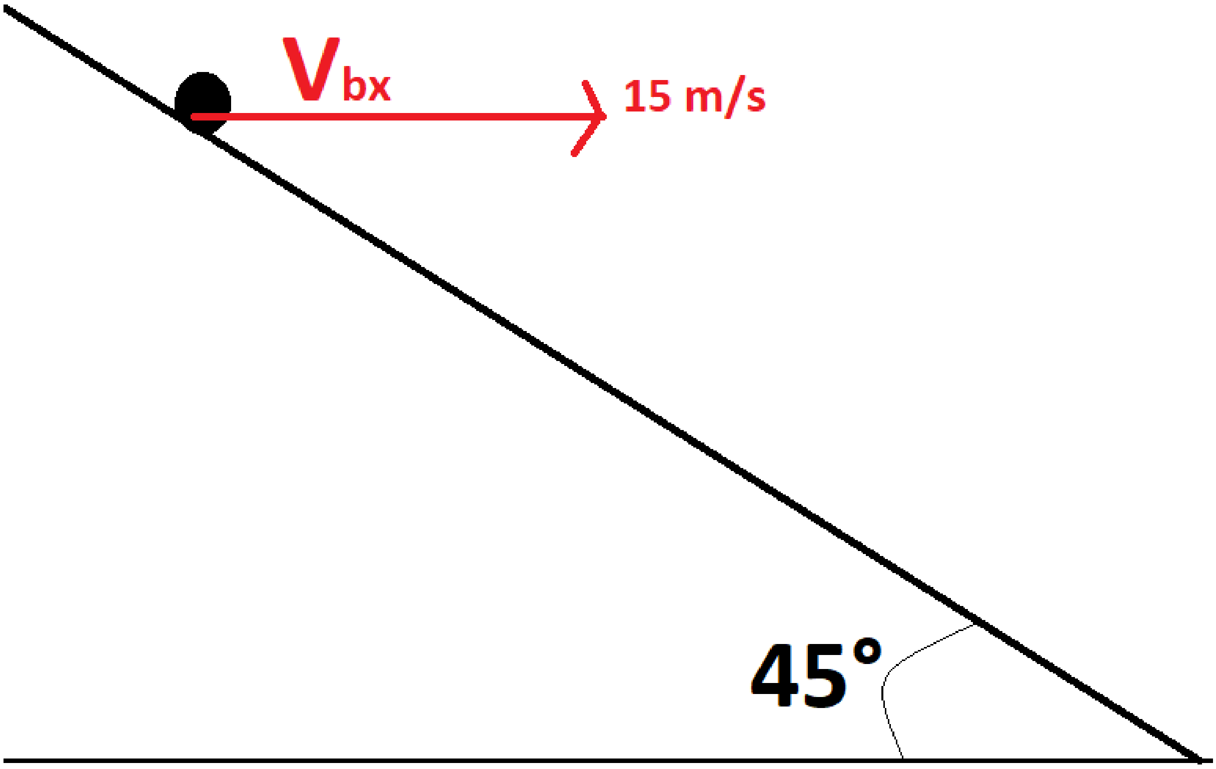
Een moeilijke

Een steen wordt horizontaal met een snelheid van 15 m/s van een heuvel geschopt. De heuvel heeft een helling van 45°. Hoelang duurt het voor de steen de grond raakt? (antwoord: 3,1 s)



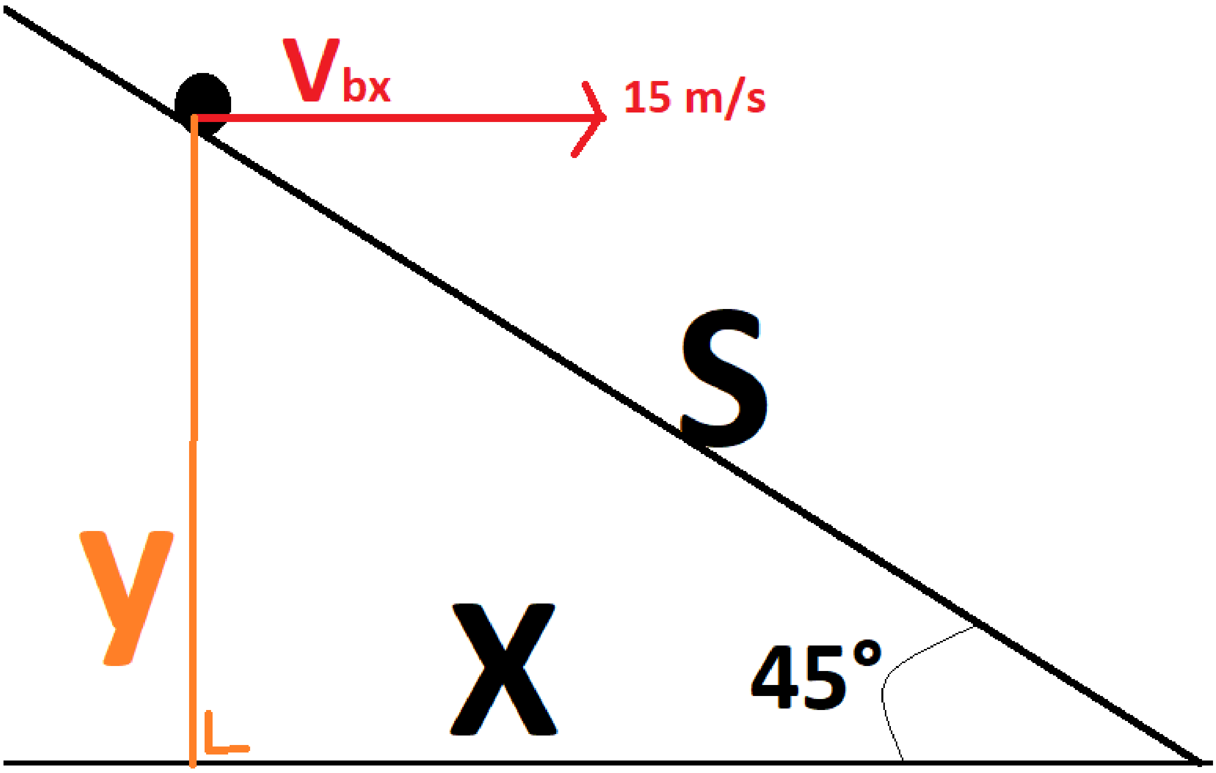
Goh, we hebben hier weinig gegeven en ik moet ook eerlijk zeggen dat het me toch wel 20 minuutjes kostte om de goede redenering hier te bekomen.

We maken een vereenvoudigde schets van de helling…



Je wilt weten hoe lang het duurt voordat de bal op de grond valt. Daarvoor hebben we onze vrije val altijd voor gebruikt: $y = \frac{g}{2} \cdot \Delta t^2$

--> Je kent y echter niet. We duiden y aan op de tekening…



Merk op dat we nu een rechthoekige driehoek hebben. In een rechthoekige driehoek mag je SOS CASTOA gebruiken.

Zou je hier SOS gebruiken? $\sin 45° = \frac{y}{S}$

--> Neen want je kent S niet en je kan S ook niet bepalen. y zoek je.

CAS zou je hier best ook niet gebruiken.

➔ Dus: we gebruiken TOA! $\tan(45°) = \frac{y}{X}$ (1)

→ Echter zitten we hier nog steeds met twéé onbekenden: y en X! Abdellah, is this a joke?

--> Geduld…

Je kent de baanvergelijking $y = \frac{g}{2v_{bx}^2} \cdot x^2$

--> We kennen alle onbekenden behalve y en x, we gaan toch invullen…

⇔ $y = \frac{9{,}81}{2 \cdot 15^2} x^2$

⇔ $y = 0{,}0218x^2$ (2)

Wacht eens even? We nemen vergelijking (1) terug: $\tan(45°) = \frac{y}{X}$

--> Wow, Abdellah, hoe slim ben je: je kan vergelijking (2) hierin substitueren!

--> Dankjewel, ik zei toch: geduld…

DUS: $\tan(45°) = \frac{0{,}0218x^2}{x}$ (we hebben y vervangen door $0{,}0218x^2$ --> zie vergelijking (2)).

⇔ $\tan(45°) = 0{,}0218x$

⇔ $x = \frac{\tan(45°)}{0{,}0218}$

⇔ $x = 45{,}9\ m$

We hebben nu de x-afstand maar willen de y hebben, dus moeten we de vergelijking nog eens oplossen.

$\tan(45°) = \frac{y}{x}$

⇔ $\tan(45°) = \frac{y}{45{,}9}$

⇔ $y = \tan(45°) \cdot 45{,}9$

⇔ $y = 45{,}9\ m$

Nu we de y hebben, kunnen we hieruit onze tijd halen, we kennen de formule van de vrije val immers…

$y = \frac{g}{2} \cdot \Delta t^2$

⇔ $\Delta t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 45{,}9\ m}{9{,}81 \frac{m}{s^2}}} = 3{,}1\ s$

--> Inderdaad! We komen het juiste antwoord uit! :)

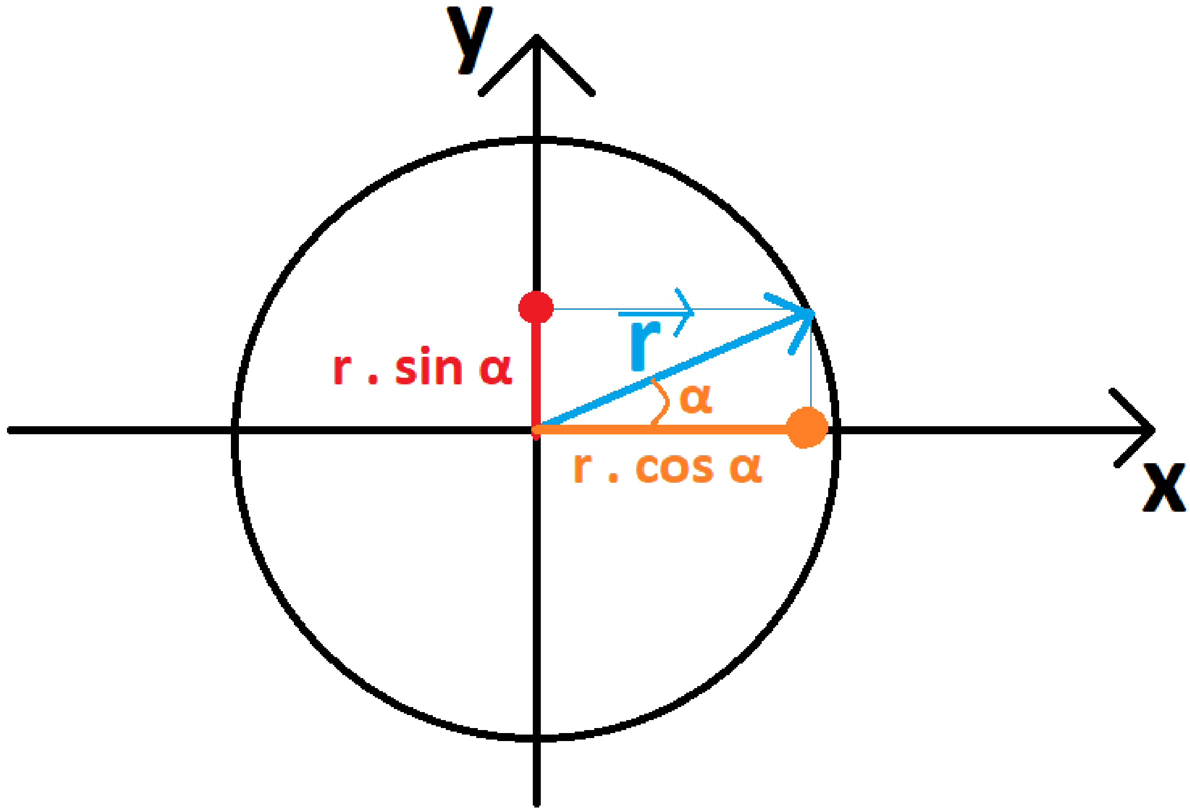
Nu je een pro bent in de horizontale worp gaan we door naar het volgend leerstofonderdeel: de eenparig cirkelvormige beweging (= ECB)

3) De eenparig cirkelvormige beweging [= de ECB]

Zoals je weet spreken we van een ECB (= eenparig cirkelvormige beweging) wanneer…
(1) De puntmassa een cirkel omschrijft.
(2) Elke omwenteling (rond de cirkel) even lang duurt.

3.1) Plaatsvector

De plaatsvector is bij een ECB specialer en verdient daarom extra aandacht.
Opmerking: de hoek α is afhankelijk van de tijd. Dit zien we zodadelijk bij hoeksnelheid.



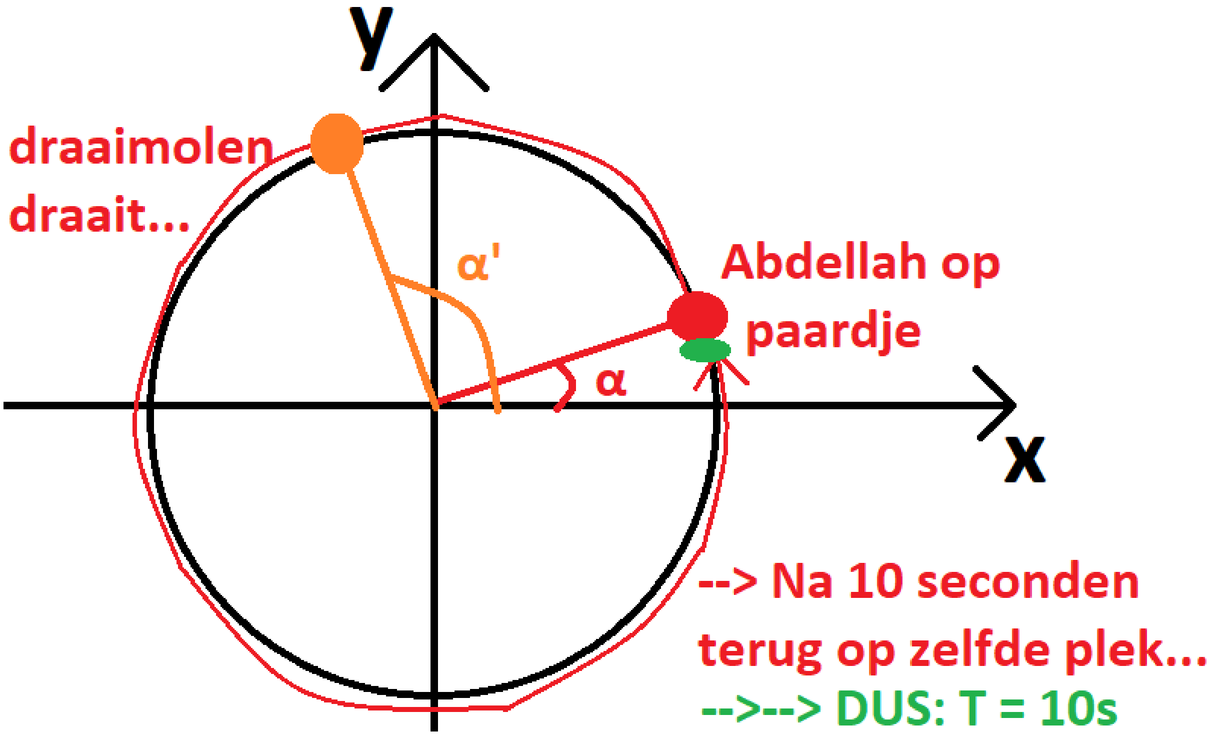
De verplaatsingsvector $\vec{r}$ kan je bij een ECB ontbinden in een cirkel waarbij je de sinus en cosinus kan aflezen. Merk op dat deze cirkel zeer sterk gelijkt op de goniometrische cirkel én zelfs de goniometrische cirkel is als r = 1. Je weet nog uit de goniometrie dat je de sinus afleest op de y-as en de cosinus afleest op de x-as.

3.2) Periode en frequentie

3.2.1) Periode

Definitie: de periode is de tijd die je nodig hebt voor één omwenteling rond de cirkel.
--> De periode drukken we uit met hoofdletter T, de SI-eenheid van periode is seconde want allezja: we drukken tijd uit.

Wat wilt de periode concreet bedoelen?
--> Stel dat ik op een draaimolen ga op de kermis. Ik stap in en zit op een paardje want ik hou van paarden.
   --> De draaimolen vertrekt. Na 10 seconden merk ik dat ik al terug op dezelfde plaats sta.
      --> De periode van de ECB die de draaimolen uitvoert is dan 10 seconden. T = 10s.



Hierboven zien jullie een visuele voorstelling ter verduidelijking.

Merk op dat als de draaimolen draait mijn (georiënteerde) hoek t.o.v. de x-as de hele tijd verandert. Dit komt dankzij de hoeksnelheid bij een ECB (komen we later op terug).

3.2.2) Frequentie

De frequentie (f) is gedefinieerd als het aantal omwentelingen (rond de cirkel) per seconde.
--> $f \rightarrow \frac{1}{s} = s^{-1} = Hz$
   → De frequentie wordt uitgedrukt in 1/s, s^{-1} of ook wel bekend als Hz (= Hertz).

Er bestaat een verband tussen de frequentie en de periode: $f = \frac{1}{T}$ $(\Leftrightarrow T = \frac{1}{f})$

We hernemen het voorbeeldje van ik op de draaimolen:
--> We hebben experimenteel vastgesteld dat de periode van de draaimolen 10 seconden is. Hiermee kunnen we de frequentie berekenen.
   → $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{10s} = 0{,}1\ s^{-1} = 0{,}1\ Hz$

3.3) Snelheid

De ECB kent twee soorten snelheden: de baan- en hoeksnelheid

3.3.1) Baansnelheid

De baansnelheid is letterlijk gewoon hoe snel je ECB gaat. De baansnelheid heeft niks te maken met de verandering van hoek.

→ De baansnelheid is bij een ECB ook constant. Tijdens de gehele ECB is v = cte. Als je in een draaimolen in de kermis zit versnelt ze niet eenmaal ze op een aangename snelheid is gekomen.

--> $Baansnelheid = \frac{afgelegde\ weg\ in\ één\ periode}{één\ periode}$

--> We weten dat de afgelegde weg in één periode gelijk is aan de omtrek van de cirkel.

→ We weten ook: $P_{cirkel} = 2\pi\, r$ (P = omtrek)

--> DUS: $v_{baan} = \frac{2\pi r}{T}$

--> We kunnen de baansnelheid echter nog anders schrijven. We weten immers dat $f = \frac{1}{T}$

➔ $v_{baan} = 2\pi\, r\, .\, f$

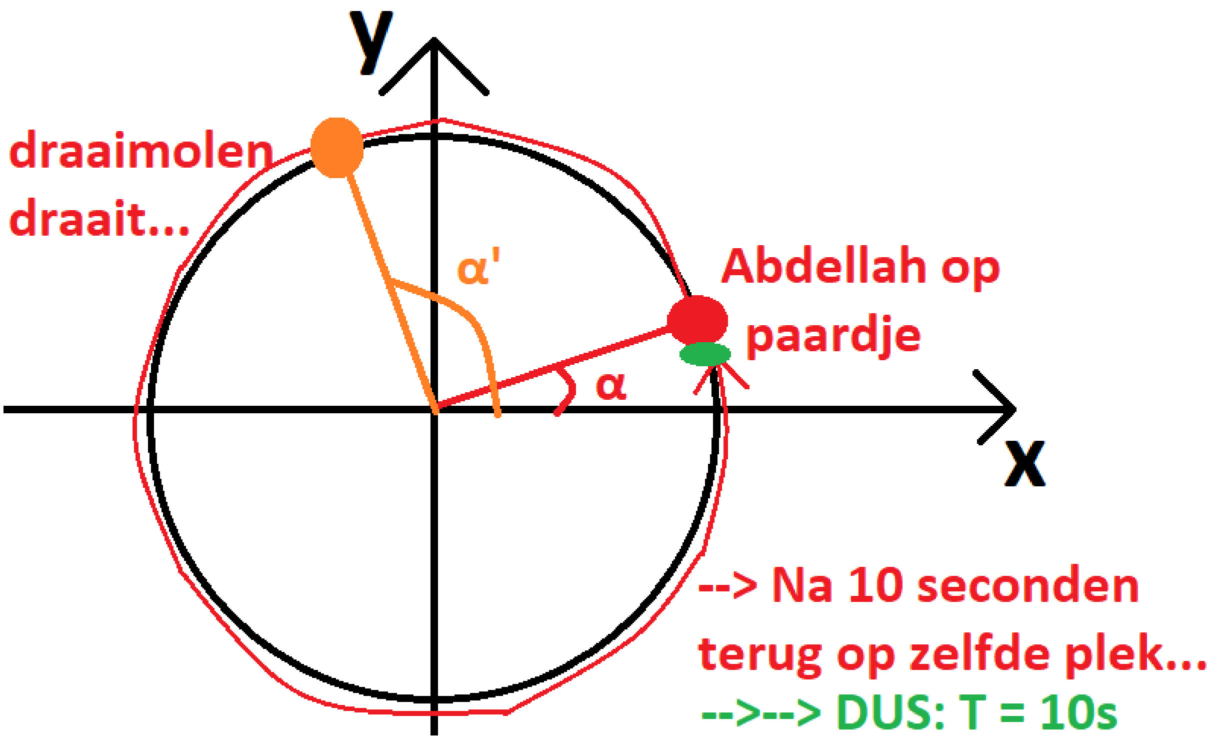
Onthoud: de baansnelheid in een éénparig cirkelvormige beweging wordt gedefinieerd door volgende formules:

$$v_{baan} = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi\, r\, .\, f = cte$$

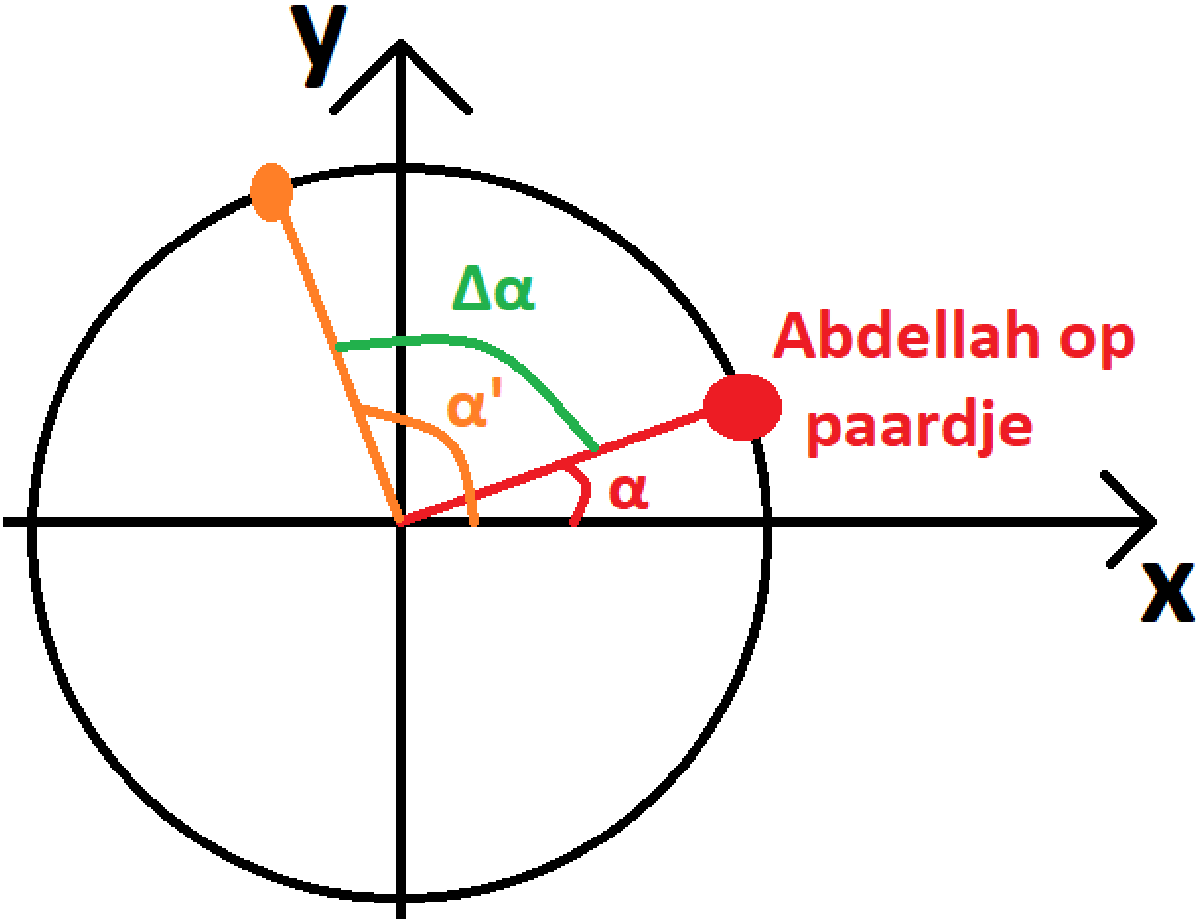
De SI-eenheid van snelheid is en blijft m/s.

3.3.2) Hoeksnelheid

We hebben de hoeksnelheid al enkele keren intuïtief aangehaald in deze samenvatting. We hernemen het voorbeeldje waar ik op de kermis op een paardje op het draaimolen zat.



Zoals blijft mijn hoek op de draaimolen niet hetzelfde maar verandert ze steeds. We kunnen deze verandering in hoek, in dit geval, voorstellen door Δα.



De hoeksnelheid drukken we uit met de Griekse kleine letter voor omega: ω.

LET OP: Omdat we met <u>getalwaarden</u> willen werken drukken we hoekgrootten bij de ECB uit in radialen. Radialen drukken we uit in rad, de eenheid rad wordt meestal weggelaten.

--> Herinnering: $180° = \pi\, rad$

$\Leftrightarrow 360° = 2\pi\, rad$

Gemiddelde snelheid is altijd verandering van iets in een welbepaald tijdsinterval. In dit geval verandert de hoekgrootte. We kunnen dus stellen: $\omega_g = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$.

--> De gemiddelde hoeksnelheid is constant. $\Delta\alpha$ kan maar tot 2π rad gaan, wat overeenkomt met 360°, omdat de cirkel zichzelf herhaalt na 360°.

DUS: $\omega_g = \frac{2\pi}{\Delta t}$

--> Na 2π radialen heeft de cirkel één periode (= tijd die nodig is om de cirkel éénmaal rond te gaan) voldaan. Dus we herschrijven de formule: $\omega_g = \frac{2\pi}{T}$.

→ Dit is de formule voor de hoeksnelheid!

ONTHOUD! De hoeksnelheid wordt gedefinieerd door volgende formules:

$$\omega_g = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \,.\, f = cte.$$

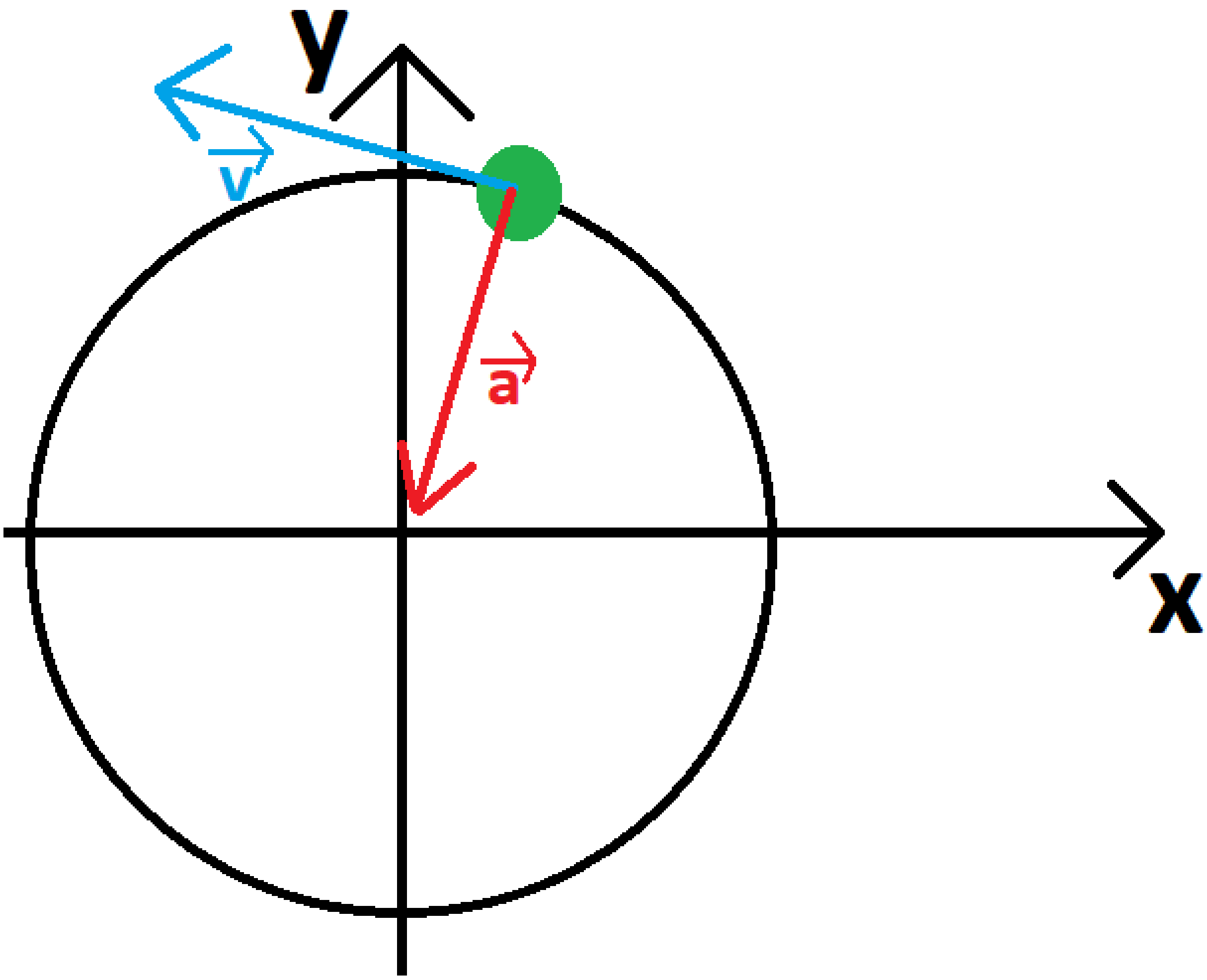
Er bestaat een verband tussen de baan- en hoeksnelheid.

$$v_{baan} = \frac{2\pi \,.r}{T} = \omega \,.\, r$$

3.4) Centripetale ersnelling

De grootte van de baansnelheid verandert niet bij een ECB. Echter verandert de richting wél bij een ECB, dit verloopt volgens de formule $\omega_g = \frac{2\pi}{T}$. Voor die verandering in hoeksnelheid is er een versnelling nodig.

Men kan bewijzen dat de versnellingsvector $\vec{a}$ steeds naar het middelpunt van de cirkel is gericht bij een tweedimensionale beweging.



De centripetale versnelling is constant bij een ECB.

De centripetale versnelling wordt gedefinieerd door volgende formules:

$$a = \frac{v^2}{r} = r \,.\, \omega^2$$

Je ziet direct dat de centripetale versnelling omgekeerd evenredig is met de straal. Hoe kleiner de straal, hoe groter de versnelling is. Daarom gaat de binnenkant van een draaimolen sneller dan de buitenkant van de draaimolen.
--> Als je dus snel duizelig wordt ga je het best aan de buitenkant van de draaimolen zitten.

Je merkt direct dat a recht evenredig is met de snelheid in het kwadraat. Hoe groter de snelheid, hoe groter de centripetale versnelling (wat ook logisch is).

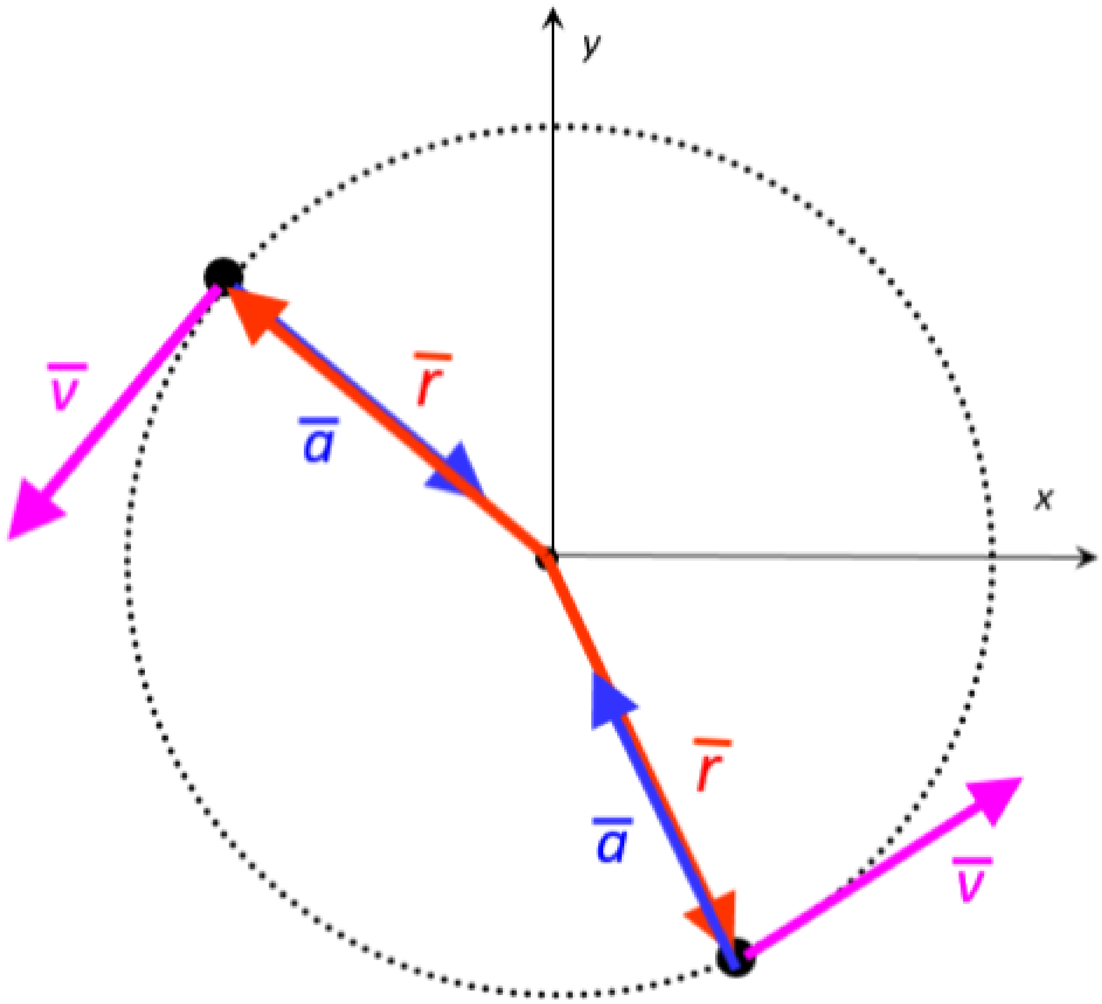
De SI-eenheid van a is en blijft m/s^2.

Verdieping: waarom is a naar het middelpunt van de cirkel gericht?
--> Omdat indien dit niet zo was de grootte v van de cirkel zou kunnen veranderen.
--> De centripetale kracht werkt in op een voorwerp die een ECB beschrijft en de centripetale kracht zorgt ervoor dat de ECB blijft (bv.: in een draaimolen). Dankzij die centripetale kracht is er een versnelling.

3.5) Overzicht SI-eenheden ECB

Grootheid	Symbool	eenheid	eenheid
baansnelheid	v	m/s	meter per seconde
hoeksnelheid	ω	rad/s	radiale per seconde
frequentie	f	s^{-1} of Hz	één per seconde of hertz
periode	T	s	seconde
centripetale versnelling	a_c	m/s^2	meter per seconde kwadraat

3.6) Overzicht: vectoren bij een ECB



3.7) Voorbeeldoefeningen ECB

3.7.1) Kennis

<u>VRAAG 3: Zijn volgende uitspraken waar? Verbeter indien nodig.</u>

a) Bij een ECB is de snelheid constant en is de versnelling dus gelijk aan 0.

--> Deze uitspraak is **ONWAAR**, zoals we hebben gezien is bij de ECB de snelheid inderdaad constant maar verandert de georiënteerde hoek t.o.v. de x-as constant. Voor die verandering in hoekgrootte heb je een versnelling nodig, namelijk de centripetale versnelling. De versnelling is dus absoluut niet gelijk aan 0.

b) Bij een ECB is de hoeksnelheid onafhankelijk van de straal van de cirkelbeweging.

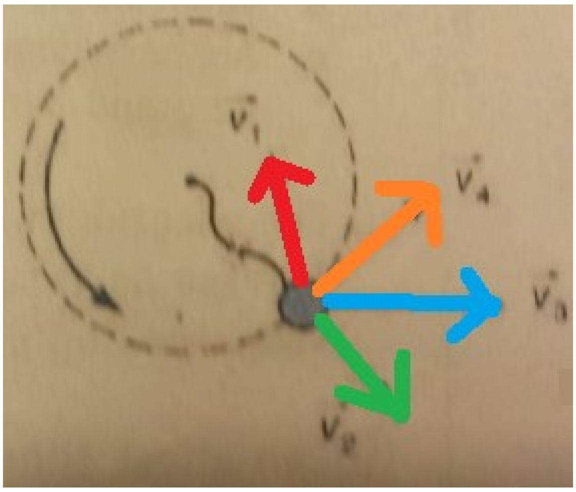
--> Deze uitspraak is **WAAR**, de hoeksnelheid is bij een ECB gedefinieerd als: $\omega_g = \frac{2\pi}{t}$, hierin komt de straal, r, niet voor.

c) Bij een ECB is er geen tangentiële versnelling.

--> Deze uitspraak is **WAAR**, bij een ECB is er enkel een centripetale versnelling die niet ontbonden kan worden. De baansnelheid is ook constant dus er mag geen tangentiële versnelling bestaan bij een ECB.

VRAAG 5: Een kindermolen draait rond met een constante snelheid. Verklaar waarom de baansnelheid verandert als je de afstand tot het centrum van de draaischijf wijzigt.
De baansnelheid bij een ECB is en blijft constant. Als je echter dichterbij het middelpunt bij een kindermolen gaat zitten, dan verhoogt de centripetale versnelling omdat de straal verlaagt. De centripetale versnelling is immers omgekeerd evenredig met de straal ($a = \frac{v^2}{r}$). Door die verhoging in centripetale versnelling zal de snelheid verhogen. De snelheid blijft echter voor die straal constant!

3.7.2) Inzicht



VRAAG 8: Een voorwerp aan een touw wordt rondgeslingerd op een cirkelvormige baan. De figuur toont de positie van dat voorwerp op het oganblik dat het touw breekt. Welke vector geeft het beste de richting aan waarin het voorwerp wegvliegt?
Omdat de foto slecht is getrokken, heb ik de vectoren kleurtjes gegeven.

Je weet dat een snelheidsvector over het algemeen bij een tweedimensionale beweging en al zeker bij een ECB raakt aan de baan. Als het touw breekt zal het voorwerp dus verder bewegen vanaf waar de laatste snelheidsvector de baan heeft geraakt. Het voorwerp zal dus wegvliegen volgens de oranje snelheidsvector.

VRAAG 9: Bij een CD-speler wordt de cd door middel van een laserstraal afgelezen. De baansnelheid op de plaats waar de cd wordt gelezen door de laserstraal is constant en bedraagt 1,13 m/s.

Bij het aflezen van spoort 1 op 2,50 cm van het middelpunt van de cd is het toerental van de cd gelijk aan 500 omwentelingen per minuut. Hoe groot is het toerental dan bij het aflezen van spoor 10 op 5,0 cm van de cd?

Deze oefening ziet er moeilijk uit maar is makkelijker dan je denkt. Je hoeft zelfs in principe niks te berekenen.

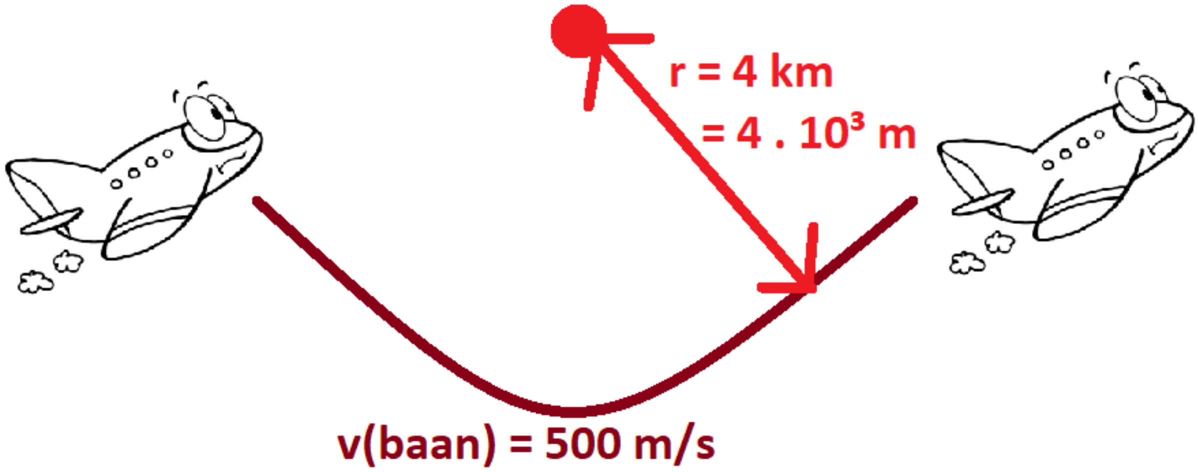
Je kent de formule voor de centripetale versnelling $a = \frac{v^2}{r}$, je centripetale versnelling verzwakt als de straal toeneemt. Hier gaan we van spoor 1 (2,50 cm) naar spoor 10 (5,00 cm). Je straal wordt dus 2x groter waardoor je versnelling 2x kleiner wordt.

Als je versnelling 2x kleiner wordt, zal het aantal omwentelingen per minuut (je snelheid) ook dalen. Je versnelling wordt 2x kleiner dus je snelheid wordt ook 2x kleiner (maar blijft constant). Het toerental bij het aflezen van spoort 10 is dan 250 omwentelingen/minuut. Dit is het juiste antwoord.

3.7.3) Toepassen

VRAAG 14: Een vliegtuig maakt een duikvlucht en trekt weer op door een cirkelboog met een straal van 4,0 km te beschrijven. Bereken de versnelling van het vliegtuig als de baansnelheid 500 m/s bedraagt. Vergelijk die waarde met die van de valversnelling g.

We maken een situatieschets…



We kennen de formule voor centripetale versnelling: $a = \frac{v^2}{r}$

--> We moeten de formule gewoon letterlijk invullen: $a = \frac{500^2 \frac{m^2}{s^2}}{4 \,.10^3\, m} = 62,5\ m/s^2$

Er wordt gevraagd deze versnelling te vergelijken met de valversnelling. We delen onze gevonden versnelling dan gewoon door de valversnelling

$\frac{a}{g} = \frac{62,5}{9,81} = \ \pm 6g$

--> De centripetale versnelling van het vliegtuig is 6x groter dan de valversnelling.

VRAAG 15: Een atleet slingert een hamer in een horizontaal vlak rond. De ketting is 1,2m lang en de hamer draait in 2,0s vijfmaal rond. Bereken:

a) de periode

--> periode = $\frac{tijd}{aantal\ omwentelingen} = \frac{2s}{5\ omwentelingen} = 0,4\ s/omwenteling$

--> Herinnering: de periode T is de tijd die je nodig hebt om een omwenteling te maken rond de hele cirkel.

b) de frequentie.

--> $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,4s} = 2,5\ s^{-1} = 2,5\ Hz$

c) de grootte van de hoeksnelheid

--> $\omega_g = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,4\ s} = \frac{5\pi}{s}$

--> De hoeksnelheid is hoe fel je hoek verandert in verloop van tijd

d) de grootte van de baansnelheid

--> $v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \,.1,2m}{0,4\ s} = 6\pi \frac{m}{s}$

--> De baansnelheid is hoe snel je doorheen de cirkel beweegt.

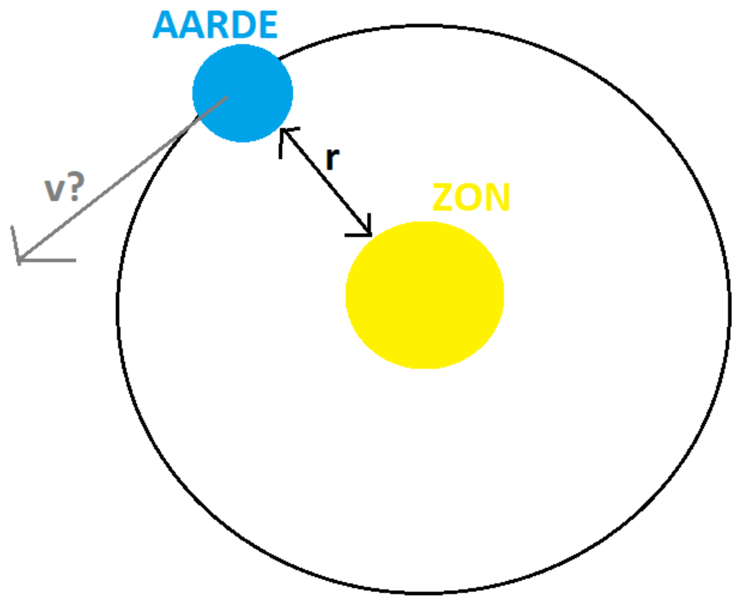
e) De grootte van de versnelling

--> $a = \frac{v^2}{r} = \frac{(6\pi)^2}{1{,}2\ m} = 5\pi \quad m/s^2$

--> De centripetale versnelling is altijd naar de middelpunt van de cirkel gericht en is verantwoordelijk voor de verandering in hoek bij een ECB.

VRAAG 19: Bereken de snelheid van de aarde op haar baan rond de zon. Veronderstel dat de baan een cirkelvormige baan is (*) met een straal van 150 . 10^6 km.

We maken een situatieschets…



We hebben gegeven dat..

$r = 150\,.\,10^9 m$

Gevraagd is de baansnelheid, v, van de aarde.

Je kent de formule voor de baansnelheid bij een ECB…

$v_{baan} = \frac{2\pi\,.r}{T}$

Wat is de periode? Hier komt je kennis over de aardrijkskunde goed van pas. Tijdens aardrijkskunde hebben we geleerd dat de periode van de aarde (tijd die voorbij gaat als de aarde één keer rond de zon heeft gedraaid, gelijk is aan 365,25). Omdat wij fysici graag vereenvoudigen werken we verder met 365 dagen.

Je moet 365 dagen echter eerst omzetten naar seconden.

--> Je weet dat 1 dag = 24h.

--> Je weet dan 1h = 60 min

--> Je weet dat 1 min = 60 s.

Dus: $365\ dagen = (365\,.\,24\,.\,60\,.\,60)\ seconden$

$= 31\ 536\ 000\ s$

De periode T is dus $31\ 536\ 000\ s$.

Nu moeten we gewoon onze formule invullen…

$v_{baan} = \frac{2\pi\,.r}{T} = \frac{2\pi\,.150\,.10^9 m}{31\ 536\ 000\ s} = 29\ 885\,\frac{m}{s}$

(*) We hebben tijdens wiskunde (kegelsneden: ellips) gezien dat de aarde een bijna cirkelvormige baan rond de zon beschrijft, echter niet volledig cirkelvormig. De vergelijking van de ellips die de aarde rond de zon beschrijft luidt met afgeronde waarden: $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{0{,}99445} = 1$. Omdat a ≠ b --> ellips.

VRAAG 20: Wat is de baansnelheid van een punt op de rand van een lp die met een constant toerental van 33 omwentelingen/s ronddraait en een diameter van 30 cm heeft?

--> Diameter = 30 cm ⇔ straal = 15 cm = 15 . 10^{-3} m.

--> Je hebt een toerental van 33 omwentelingen/s. Dit is je frequentie omdat je deelt door seconde.
Er kon goed genoeg staan: een frequentie van 33 Hz.
--> Je kan hieruit je periode halen: $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{33\ s^{-1}} = 0{,}03\ s$

Nu kan je je baansnelheid berekenen:

$v = \frac{2\pi\ .r}{T} = \frac{2\pi\ .15\ .10^{-3}\ m}{0{,}03\ s} = 3{,}11\frac{m}{s}$

Proficiat! Je bent nu een pro in 2-dimensionale bewegingen!