Samenvatting wiskunde 3de graad – toets 2 ruimtemeetkunde (H4, H5) – made by Abdellah

----

(Z) VOORWOORD

Dit is de samenvatting voor de eerste toets van ruimtemeetkunde, de samenvatting van ruimtemeetkunde wordt dus onderverdeeld a.d.h.v. wat we moeten kennen voor de toetsen. Voor het examen moet je alle samenvattingen kennen.

(Y) FOUTENPROCEDURE

Foutje? Dat kan. A.d.h.v. hoe groot de fout is kan je hem melden.
Fout van de 0de graad = elke niet-relevante fout = niet melden
Fout van de 1ste graad = elke relevante niet-zo-erge-fout = melden
→ Fouten van de 1ste graad worden gecommuniceerd via Smartschool en aangepast.
Fout van de 2de graad = elke relevante, zeer erge, fout = melden.
→ Fouten van de 2de graad worden direct aangepast en gecommuniceerd.

Fouten zijn jammer genoeg niet te vermijden maar ik, Abdellah, doe mijn best om alles zo juist mogelijk samen te vatten.

(X) INHOUDSTAFEL

Zie volgende pagina

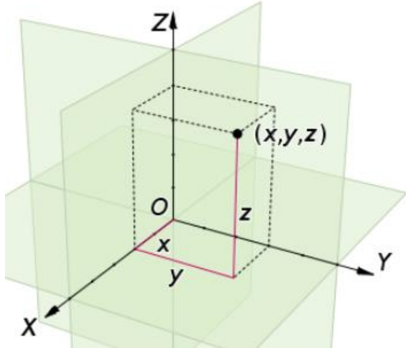
Inhoud

4) De geijkte ruimte

*In hoofdstuk 1 hebben we met vrije vectoren gewerkt, we zijn al snel overgestapt naar de gepunte ruimte in hoofdstuk 2. We gaan nu nog een stapje verder en gaan de gepunte ruimte nu ijken.
→ Dit betekent: we kiezen een oorsprong en twee/drie basisvectoren (het is ruimtemeetkunde dus we kiezen er drie) en gaan getallen aan de punten geven. Dat is makkelijker voor ons.

4.1) Coördinaat plaatsvector t.o.v. basis

*Elk coördinaat kunnen we schrijven als een lineaire combinatie van basisvectoren:
$\vec{P} = x\,.\overrightarrow{E_1} + y\,.\overrightarrow{E_2} + z\,.\overrightarrow{E_3}$
→ We noemen de drie assen vanaf nu de x-, y- en z-as in het driedimensionaal assenstelsel.
--> Je herinnert je uit module 1 (zie samenvatting structuren): als de dimensie gelijk is aan het aantal onafhankelijke vectoren vormen die vectoren altijd een basis.
--> $\overrightarrow{E_1}, \overrightarrow{E_2}, \overrightarrow{E_3}$ vormen dus een basis. We kunnen de coördinaten voorstellen door (x, y, z) maar ook door een matrix $[x \quad y \quad z]$ of een 3x1 matrix die dus 90° gedraaid is.
--> We spreken van het cartesisch assenstelsel, elke puntvector P kunnen we nu voorstellen door 3 getallen (x, y, z).



4.2) Isomorfisme gepunte ruimte op geijkte ruimte

*Er is een onderlinge bijectie tussen de gepunte- en geijkte ruimte, dat betekent dat de twee ruimtes isomorf zijn.
→ Dit heeft als gevolg dat we dingen van de gepunte ruimte mogen overnemen (zoals zwaartepunt van een driehoek, vierhoek …) en we gewoon mogen werken met de x-, y- en z-coördinaten.

4.3) Middel- en zwaartepunten

*Als gevolg van de isomorfisme nemen we de definities uit H3 over maar dan met coördinaten.

4.3.1) Midden van een lijnstuk

*Voor het midden M van [AB] geldt: $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

4.3.2) Zwaartepunt van drie punten

*Het zwaartepunt Z van drie punten wordt weergegeven door: $Z\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$

4.3.3) Zwaartepunt van vier punten

*Het zwaartepunt Z van vier punten wordt weergegeven door:
$Z\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}, \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right)$

4.4) Richtingsgetallen van een rechte

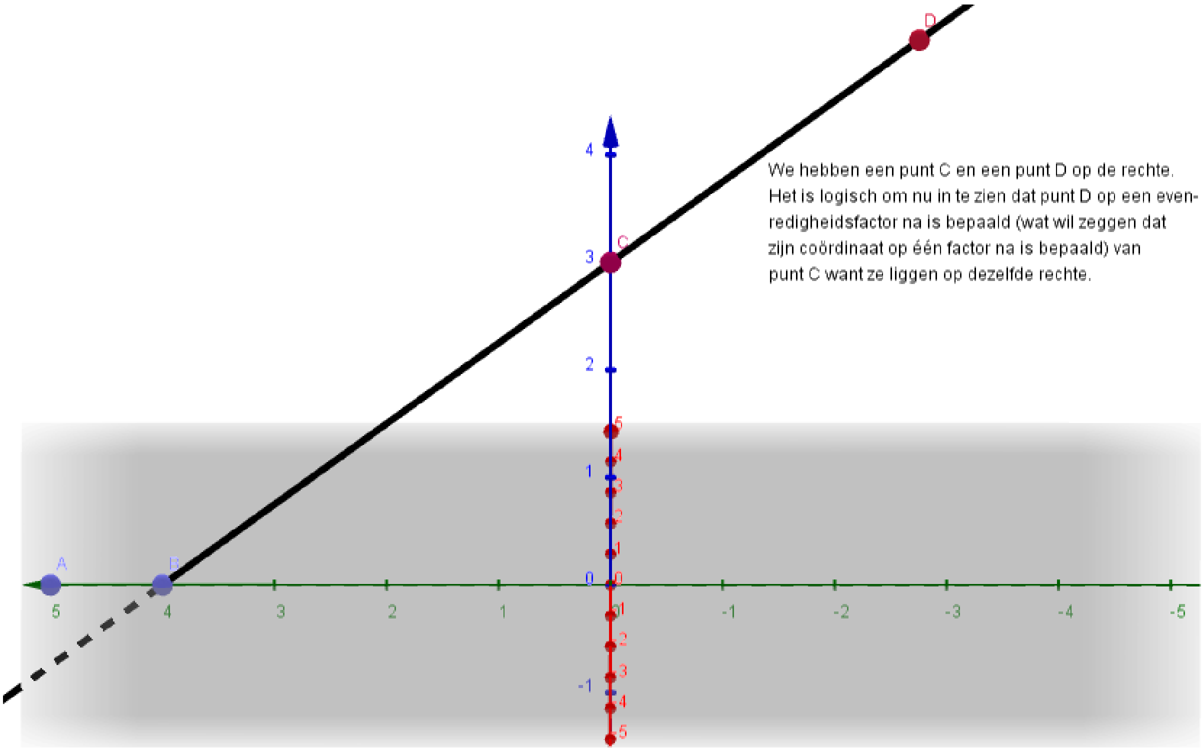
4.4.1) Definitie

*De coördinaten van een richtingsvector en een rechte m noemen we een stel richtingsgetallen van de rechte en de rechtenrichting m.
--> Richtingsgetallen geven dus kortom de richting van de rechte weer (duh).

*Als je puntvector $\overrightarrow{P_1}(x_1, y_1, z_1)$ en puntvector $\overrightarrow{P_2}(x_2, y_2, z_2)$ hebt dan vindt je de richtingsgetallen van rechte P_1P_2 door… $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. --> Dit mag dankzij de isomorfisme.

4.4.2) Verband tussen twee rivers op dezelfde rechte

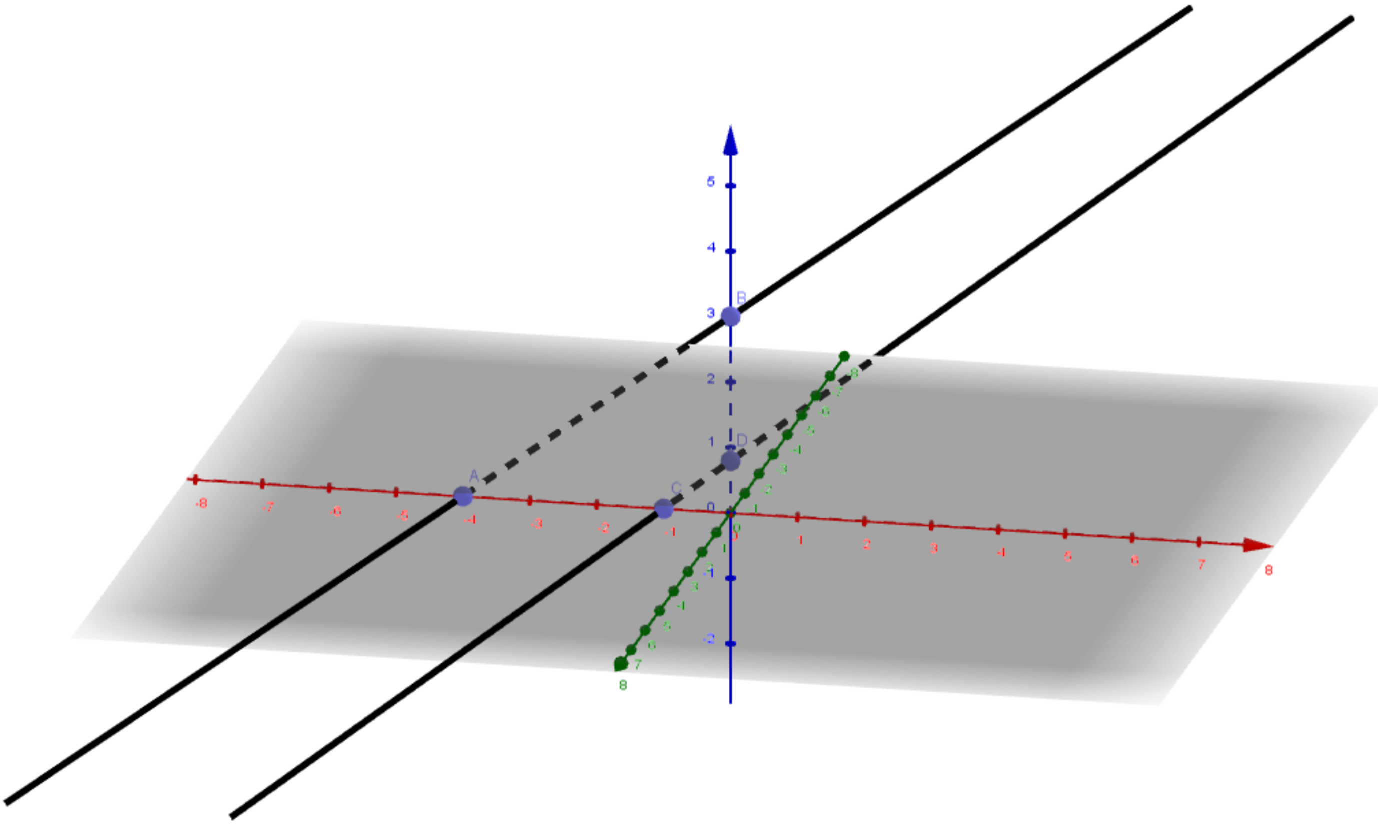
*Ik kort richtingsvector af met river.
*Twee rivers op dezelfde rechte zijn op een evenredigheidsfactor na bepaald, dit is logisch:



→ We kunnen ook redeneren met de formules van hoofdstuk 3, deze formules blijven gelden voor de geijkte ruimte.
--> Stel twee puntvectoren $\vec{S}$ en $\vec{T}$ zitten op dezelfde rechte door de oorsprong dan geldt:
$\vec{T} = k\,.\vec{S}$
--> We vervangen de puntvectoren door coördinaten dan krijgen we:
$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = k\,.\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Leftrightarrow a' = k\,.a \;\wedge b' = k\,.b \;\wedge c' = k\,.c$ --> et voila!

4.4.3) Evenwijdige stand van twee rechten

*Stelling: twee rechten zijn evenwijdig enkel en alleen indien hun richtingsgetallen evenredig zijn.
*Bewijs: moet je kennen
--> We maken eerst een visuele voorstelling met Geogebra (zie volgende pagina)



Herinner je van het hoofdstuk van vrije vectoren dat je rechten kan vervangen door elke rechte die ermee evenwijdig is (dit hadden we gedaan voor vectoren). We noemen beide rechten e en f

BEWIJS:
$e \,//\, f \Leftrightarrow e' \,//\, f'$ (e' en f' zijn de evenwijdige rechten die met elkaar samenvallen want we hebben beide rechten verplaatst naar de oorsprong)

$\Leftrightarrow OS = OT$ (we hebben beide rechten verplaatst naar de oorsprong)

$\Leftrightarrow \vec{T} \in OS$ (zie puntje 4.4.2, we hebben nu richtingsgetallen op één rechte)

$\Leftrightarrow \vec{T} = k\,.\,\vec{S}$ (formules van hoofdstuk 2 blijven geldig)

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = k\,.\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Leftrightarrow a' = k\,.\,a \;\wedge b' = k\,.\,b \;\wedge c' = k\,.\,c$ --> Je hebt de stelling bewezen!

4.5) Richtingsgetallen van een vlak

*Een vlak is bepaald door twee rechten, de richtingsgetallen van een vlak hebben we in hoofdstuk 3 gedefinieerd als: $\overrightarrow{P_2} - \overrightarrow{P_1}\ en\ \overrightarrow{P_3} - \overrightarrow{P_1}$.

--> Voor dit hoofdstuk blijft het gelden alleen vervangen we onze puntvectoren door coördinaten.

Dus… $\{(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$

4.6) Voorbeeldoefeningen

*Opnieuw laat ik de pijltjes boven mijn vectoren weg om tijd te besparen (economische luiheid).

4.6.1) Oefening 1 a en b: coördinaten en basissen

*Oefening 1a: Geef stellen coördinaten van P en Q t.o.v. deze basis, als:
$P = 3\,.\,E_1 - E_2 + 2\,.\,E_3$ en $Q = E_1 + 3\,.\,E_3$

--> Dit is de makkelijkste oefening, voor deze oefening moet je gewoon kijken naar het getal dat voor je basisvector staat, is de basisvector er niet dan moet je hem gelijkstellen aan 0.

--> Voor P krijgen we: P(3, -1, 2) en voor Q krijgen we: Q(1, 0, 3)

*Oefening 1b: Schrijf A(2, 7, -1) en B(0, 1, -7) als een lineaire combinatie van de basisvectoren.
--> Dit is ook nog makkelijk, je schrijft je coördinaten gewoon als x keer E(1), y keer E(2) …
--> Dus: $A = 2 . E_1 + 7 . E_2 - 1 . E_3$
$B = 0 . E_1 + 1 . E_2 - 7 . E_3$

4.6.2) Oefening 1c: basis bewijzen

*Uit het hoofdstuk van vectorruimten uit module 1 herinner je:
--> Vectoren vormen een basis enkel en alleen indien ze lineair onafhankelijk zijn en je elke andere vector als een lineaire combinatie van die vectoren kan schrijven.
--> Je weet ook: Als je n onafhankelijke vectoren hebt en je werkt in de n-de dimensie dan zijn ze sowieso een basis. Dan hoef je het tweede niet eens na te checken.
--> Nu je je alles hebt herinnert, los geht's, we lossen de oefening op.

*Bewijs dat $(E_2 + E_3, E_1 + E_3, E_1 + E_2)$ een basis vormt in $\mathbb{R}, s_0, +$ is
--> Lineair onafhankelijk?
--> $k.(E_2 + E_3) + m.(E_1 + E_3) + p.(E_1 + E_2) = O$
(Als je vindt dat er een lineaire combinatie bestaat met niet alle coëfficienten k, p of m 0 dan zijn de vectoren lineair afhankelijk, zoniet zijn ze onafhankelijk)
⇔ $k . E_2 + k . E_3 + m . E_1 + m . E_3 + p . E_1 + p . E_2 = O$ (distributiviteit)
⇔ $m . E_1 + p . E_1 + k . E_2 + p . E_2 + k . E_3 + m . E_3 = O$ (zelfde E'tjes bij elkaar zetten)
⇔ $(m + p)E_1 + (k + p)E_2 + (k + m)E_3 = O$ (afzonderen)
⇔ $\begin{cases} m + p = 0 \\ k + p = 0 \\ k + m = 0 \end{cases}$ (we kunnen overgaan naar een stelsel nu, + fungeert als scheiding)
⇔ $\begin{cases} m = -p \\ k = -p \\ -p - p = 0 \end{cases}$ (We gebruiken substitutie en zonderen p af)
⇔ $\begin{cases} m = 0 \\ k = 0 \\ -2p = 0 => p = 0 \end{cases}$ (we lossen op)
→ Omdat énkel k, m en p bestaan die 0 zijn, zijn ze lineair onafhankelijk. Als we iets anders dan 0 uitkwamen waren ze afhankelijk (want we kunnen ze dan als 'een aantal keren' een ander schrijven).
--> Kan je elke andere vector als een lineaire combinatie van die vector schrijven?
→ Omdat we 3 vectoren hebben en in dimensie twéé werken kan je niet klakkeloos zeggen dat dit zo is. We moeten bewijzen. Je doet dit door i.p.v. gelijk te stellen aan 0 nu gelijk te stellen aan drie getallen a, b en c.
--> $P = a.(E_2 + E_3) + b.(E_1 + E_3) + c.(E_1 + E_2)$
⇔ $P = (b + c)E_1 + (a + c)E_2 + (a + b)E_3$ (tussenstappen analoog met hierboven)
⇔ $k . E_1 + p . E_2 + m . E_3 = (b + c)E_1 + (a + c)E_2 + (a + b)E_3$ (We kunnen P schrijven als een lineaire combinatie van de drie basisvectoren, we kunnen nu overstappen naar een stelsel, de +'en fungeren als scheidingen)
⇔ $\begin{cases} k = b + c \\ p = a + c \\ m = a + b \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} b = k - c \\ a = p - c \\ m = p - c + k - c \end{cases}$ (substitutiemethode) ⇔ $\begin{cases} b = k - c \\ a = p - c \\ m - p - k = -2c \end{cases}$
⇔ $\begin{cases} b = k - c \\ a = p - c \\ \frac{m-p-k}{-2} = c \end{cases}$ (afzonderen) ⇔ $\begin{cases} b = \frac{-2k}{-2} - \frac{m-p-k}{-2} \\ a = \frac{-2p}{-2} - \frac{m-p-k}{-2} \\ \frac{m-p-k}{-2} = c \end{cases}$ (c invullen in de rest, gelijke noemers)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{-2k-(m-p-k)}{-2} \\ a = \frac{-2p-(m-p-k)}{-2} \\ \frac{m-p-k}{-2} = c \end{cases}$$ (op gelijke noemers zetten)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{-2k-m+p+k}{-2} \\ a = \frac{-2p-m+p+k}{-2} \\ \frac{m-p-k}{-2} = c \end{cases}$$ (haakjes uitwerken)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{-k-m+p}{-2} \\ a = \frac{-p-m+k}{-2} \\ \frac{m-p-k}{-2} = c \end{cases}$$ (uitgewerkt)

➔ We hebben 3 ware uitspraken, het is dus een basis!

4.6.3) Oefening 1d: coördinaten zoeken

*Zoek de coördinaten van D(x, y, z) t.o.v. dezelfde basis als oefening c.

→ Als we in de laatste stap van oefening c k vervangen door x, p door y en m door z dan verkrijgen we de drie coördinaten!

$$\begin{cases} b = \frac{-x-z+y}{-2} \\ a = \frac{-y-z+x}{-2} \\ \frac{x-y-z}{-2} = c \end{cases}$$ ➔ Na een beetje uitwerken vindt je de coördinaten, let op: a als eerst, dan b, dan c.

4.6.4) Oefening 2: toepassing op midden van lijnstuk

*Gegeven in de geijkte ruimte is A(2, -1, 3) en M(5,3,7). Geef stel coördinaten van een punt B zodat M het midden van [AB] is.

→ Je herinnert je de definitie van het midden M: $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

--> We hebben hier alleen de éérste coördinaten gegeven, maar ook de middens, we weten dus:

$M\left(\frac{2+x_2}{2} = 5, \frac{-1+y_2}{2} = 3, \frac{3+z_2}{2} = 7\right)$ (we vullen ons eerste coördinaat in en stellen gelijk aan M

➔ We moeten nu dus drie aparte vergelijkingen oplossen om onze coördinaten van B te vinden.

--> (I) $\frac{2+x_2}{2} = 5 \Leftrightarrow x_2 + 2 = 10 \Leftrightarrow x_2 = 8$

--> (II) $\frac{-1+y_2}{2} = 3 \Leftrightarrow -1 + y_2 = 6 \Leftrightarrow y_2 = 7$

--> (III) $\frac{3+z_2}{2} = 7 \Leftrightarrow 3 + z_2 = 14 \Leftrightarrow z_2 = 11$

➔ We hebben onze coördinaten gevonden! We hebben: B(8, 7, 11)

4.6.5) Oefening 6: coördinaten zoeken

*Oefening 6 luidt: Gegeven in de geijkte ruimte A(2, 5, 7), B(3, 1, -4) en C(1, 1, 7). Bepaal stellen coördinaten van P, Q, R met PA = 3PB, AQ + 2QB = O en AR + BR + 2CR = O.

→ Hier moet je je het verband tussen vrije- en puntvectoren herinneren. Je kan het al raden! IDENTIFICATIE --> Vrije vector AB kan je schrijven als puntvector B – A! Zie hoofdstuk 2.

*Dus, we beginnen met gelijkheid 1: PA = 3PB

--> We passen de identificatie toe: A – P = 3(B – P) ⇔ A – P = 3B – 3P

--> Nu moeten we P afzonderen: -P + 3P = -A + 3B ⇔ $P = \frac{-A+3B}{2}$

→ Nu vullen we onze gegeven coördinaten in gelijkheid I in.

--> $P = \frac{-(2,5,7)+3(3,1,-4)}{2} = \frac{(-2,-5,-7)+(9,3,-12)}{2}$

--> Je herinnert je nu uit structuren hoe je moet rekenen met coördinaten, je doet eerst de eerste getallen plus elkaar, daarna de tweede, daarna de derde …

--> $= \frac{(-2+9,-5+3,-7-12)}{2}$ --> Nu voeren we de optelling uit.

$= \frac{(7,-2,-19)}{2}$ --> Nu voeren we de deling uit.

$= (3{,}5; -1; -9{,}5)$ --> Dit zijn de coördinaten van P!

*Nu gaan we naar gelijkheid 2: AQ + 2QB = O

--> Identificatie: Q – A + 2B – 2Q = O

--> Q afzonderen: -Q = A – 2B ⇔ Q = A + 2B

--> Gegeven coördinaten invullen: Q = (2, 5, 7) + 2 . (3, 1, -4) = (2, 5, 7) + (6, 2, -8) = (8, 7, -1) = klaar!

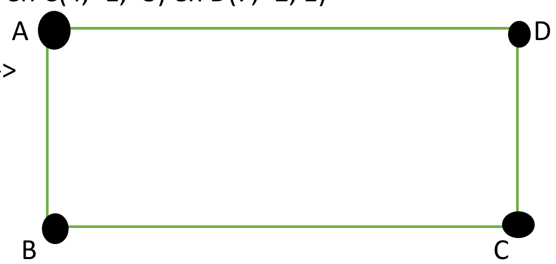
*Gelijkheid 3 kan je nu wel zelf.

4.6.6) Onze goeie oude vriend de parallellogram: oef. 4

*Gegeven in de geijkte ruimte: A(2, 1, 9) en B(-1, 2, 5) en C(4, -1, -3) en D(7, -2, 1)

→ Gevraag: bewijs dat ABCD een parallellogram is

*Oplossing: Een visuele voorstelling helpt vaak: -------->



--> Omdat ABCD een parallelogram is geldt: AB = DC (overstaande zijden zijn evenwijdig)

→ LET OP: AB is NIET gelijk aan CD, dan hebben ze een tegengestelde zin!

--> Dus we lossen op:

AB = DC ⇔ B – A = C – D (identificatie)

⇔ (-1, 2, 5) – (2, 1, 9) = (4, -1, -3) - (7, -2, 1) (coördinaten invullen)

⇔ (-1-2, 2-1, 5-9) = (4-7, -1+2, -3-1) (Aftrekking uitvoeren)

⇔ (-3, 1, -4) = (-3, 1, -4) (Aftrekking uitvoeren)

→ Je gelijkheid is waar, je hebt het dus bewezen!

4.6.7) Evenwijdigheid onderzoeken: oef. 9

*9a) Onderzoek in de geijkte ruimte of rechten AB en CD evenwijdig zijn.

--> A(0, 0, 2) en B(1, -1, 9) en C(-3, -2, -1) en D(-1, -4, 13)

→ Wat je als eerst moet doen is de richtingsgetallen zoeken van beide rechten:

richtingsgetal (rige) van AB = B – A = (1-0, -1-0, 9 – 2) = (1, -1, 7)

CD = D – C = (2, -2, 14)

→ Je herinnert je dat twee rechten evenwijdig zijn enkel en alleen als hun richtingsgetallen op een evenredigheidsfactor na bepaald zijn. We zien hier direct.

(2, -2, 14) = 2(1, -1, 7)

--> Beide rechten zijn dus evenwijdig!

4.6.8) Oefening 10: onderzoeken of punten op dezelfde rechte liggen (= collineair zijn)

*Je herinnert je dat twee punten op dezelfde rechte liggen als ze op een evenredigheidsfactor na zijn bepaald

→ Liggen A(-2, 2, 6), B(4, -8, 10) en C(10, -18, 26) op dezelfde rechte?

--> We berekenen de rige's (richtingsgetallen) van AB en AC

→ Rige AB = B – A = (4 + 2, -8 - 2, 10 - 6) = (6, -10, 4)

→ Rige AC = C – A = (10 + 2, -18 – 2, 26 – 10) = (12, -20, 16)

→ Twee rechten zijn evenwijdig (let op: evenwijdig kan ook betekenen samenvallen) als hun rige's op één factor na bepaald zijn

→ Dus stellen we: (6, -10, 4) = k . (12, -20, 16) ⇔ (6, -10, 4) = (12k, -20k, 16k)

➔ We kunnen nu gaan naar een stelsel: $\begin{cases} 12k = 6 \\ -20k = -10 \\ 16k = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0{,}5 \\ k = 0{,}5 \\ k = 0{,}25 \end{cases}$

→ We zien direct dat de stelsel vals is, de punten zijn dus niet collineair.

→ Als de stelsel niet vals zou zijn geweest, dan waren de punten collineair.

4.6.9) Toepassing op zwaartepunten: oefening 7

*Gegeven in de geijkte ruimte: A(5, 2, 6) en B(3, 3, -2) en Z(4, 1, 3)

→ Gevraagd: bepaal C van driehoek ABC met zwaartepunt Z.

→ Merk de analogie met puntje 4.6.4!

*Je herinnert je de definitie van de zwaartepunt van een driehoek:

$Z\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$

→ We vullen de coördinaten in die we hebben: $\left(\frac{5+3+x_3}{3} = 4, \frac{2+3+y_3}{3} = 1, \frac{6+(-2)+z_3}{3} = 3\right)$

→ We lossen nu 3 aparte vergelijkingen op om de coördinaat van C te zoeken, ik doe ééntje voor. Daarna kan jij de rest

--> (I) $\frac{5+3+x_3}{3} = 4$ ⇔ $5 + 3 + x_3 = 12$ ⇔ $x_3 = 12 – 5 – 3 = 4$

--> Uiteindelijk krijg je het coördinaat C(4, y, z) (zoek y en z zelf!)

4.6.10) Parameters van coördinaten bepalen opdat 3 punten collineair zijn: oefening 11

*Oefening 11 luidt: gegeven is A(2, p, 3), B(1, p + q, 3) en C(3, 1, q)

→ Gevraagd: bepaal p en q zodat A, B en C collineair zijn.

→ Je weet uit 4.6.8 dat punten collineair zijn als hun richtingsgetallen op een evenredigheidsfactor na bepaald zijn.

--> Dus: eerst berekenen we de richtingsgetallen van rechte AB en rechte AC

--> AB = B – A = (-1, q, 0) en AC = C – A = (1, 1 – p, q – 3)

→ We moeten nachecken of dit dus geldt: (1, -q, 0) = k . (1, 1-p, q -3)?

⇔ (1, q, 0) = [k, k(1-p), k(q-3)]

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k(1-p) = -q \\ k(q-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ -1 + p = -q \\ -q + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ p = 4 \\ q = 3 \end{cases}$

➔ We checken onze gevonden waardes na: (-1, 3, 0) = -1 . (1, -3, 0) ➔ WARE UITSPRAAK YES!

*Je kan dit ook doen met de vectoriële vergelijkingen van hoofdstuk 3, dit is zo in de verbeter-sleutel opgelost, hier is de screenshot (de werkwijze die ik op de vorige pagina heb uitgelegd is wel eerlijk gezegd makkelijker):

11. Gegeven in een geijkte ruimte: $A(2, p, 3)$ $B(1, p+q, 3)$ $C(3,1,q)$
Bepaal $P, Q \in \mathbb{R}$ zodat A, B, C collineair zijn.

De vgl van rechte AB: $\vec{P} = (1-k)\vec{A} + k\vec{B}$ $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-k).2 + k.1 \\ (1-k).p + k.(p+q) \\ (1-k).3 + k.3 \end{bmatrix}$

Als C op rechte AB ligt, moet er een parameter k bestaan waarvoor: $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-k).2 + k.1 \\ (1-k).p + k.(p+q) \\ (1-k).3 + k.3 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = (1-k).2 + k.1 \\ 1 = (1-k).p + k.(p+q) \\ q = (1-k).3 + k.3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ -p + q = -1 \\ q = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ p = 4 \\ q = 3 \end{cases}$$

De 3 punten zijn collineair als $p = 4$ en $q = 3$ is.

4.6.11) Richtingsgetallen van een vlak bepalen: oef. 12

*Geef een paar stel richtingsgetallen van het vlak ABC met :
A(2, 3, 5) /// B(1, -2, 4) /// C(-3, 2, 7)

→ Je herinnert je de definitie van richtingsgetallen van een vlak:

$(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$

→ We doen dus B – A en daarna C – A (eigenlijk zoeken we de richtingsgetallen van twee rechten want zoals je al weet slimpie is een vlak bepaald door 2 rechten:

--> Je krijgt uiteindelijk: {(1, 5, 1), (5, -1, 2)}

4.6.12) Toepassing op zwaartepunt van een viervlak: oefening 8

*Dit is de moeilijkste oefening van heel het hoofdstuk, de opgave luidt:

8. In een geijkte ruimte worden vijf punten A, B, C, D, E gegeven. Bepaal $k, m, n \in \mathbb{R}$ zodat E het zwaartepunt is van het viervlak $ABCD$.

$A(k, 6, m-2)$ $B(m+n, k, n)$ $C(m, 2n, m+k)$ $D(3m-2, 2m, -m)$ $E(m, k, k+2m)$

➔ Je herinnert je de definitie van het zwaartepunt van een viervlak:

$Z\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}, \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right)$

--> We stellen onze coördinaten gelijk aan E aangezien dit het zwaartepunt moet zijn.

➔ $E = \frac{1}{4}(A + B + C + D)$ (definitie zwaartepunt hoofdstuk 3)

➔ $4E = A + B + C + D$ (breuken wegwerken = makkelijker rekenen)

→ Je giet de coördinaten in een 3x3 stelsel (x-coördinaten bij elkaar, y bij elkaar, z jwz)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m = k + m + n + m + 3m - 2 \\ 4k = 6 + k + 2n + 2m \\ 4k + 8m = m - 2 + n + m + k - m \end{cases}$$

1ste vergelijking is x'en bij elkaar, 2de vergelijking is y-coördinaten bij elkaar en 3de vergelijking is z-coördinaten bij elkaar.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ m = -1 \\ n = 1 \end{cases}$$

Je lost de bekomen stelsel op met substitutie, combinatie of Gauss en verkrijgt dit.
→ Ga zelf na maar dit staat zo in de verbeter-sleutel dus het is juist. Ik hoop dat iedereen die dit leest een stelsel kan oplossen.

Substitutie is hier omslachtig maar zal werken, je kan hier het beste Gauss gebruiken. Dit was leerstof module 1 en je weet waarschijnlijk niet meer hoe het gaat. In het volgend puntje leg ik het uit met een screenshot van mijn samenvatting wiskunde van module 1.

4.6.12.1) Herhaling : Gauss (samenvatting wisk module 1)

*Uit samenvatting wiskunde module 1 halen we volgende knipsel :

(BV) STELSELS VAN LINEAIRE VERGELIJKINGEN (OPLOSSEN MET GAUSS-METHODE)

*Vorig jaar leerden we stelsels oplossen met substitutie en combinatie, dit jaar komt er iets bij.

*Werkwijze: (1) maak van de stelsel een verhoogde matrix (AT)

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 3 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases} \rightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right.$$

(2) Voer elementaire rijoperaties uit op de matrix totdat je de uitkomst af kan lezen of verder kan werken met substitutie.

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right. \text{----(K2} - \text{2K1)---->} \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right.$$

→ Hier heb je een nulrij die een onware uitspraak geeft (0x + 0y + 0z = -3!!!), als je hiermee te maken hebt heeft de stelsel géén oplossingen!

→ Als er stond (0x + 0y + 0z = 0), dan was het een ware uitspraak, je mag dan de nulrij weglaten, verder rekenen met de rest en de onbekenden vrij kiezen. Het stelsel heeft dan oneindig veel oplossingen

→ Als je géén nulrij hebt blijf je verder elementaire rijoperaties uitvoeren totdat je het antwoord hebt of verder kan werken met substitutie.

5) Cartesische vergelijkingen van rechten en vlakken

*We hebben onze puntvectoren door coördinaten vervangen in hoofdstuk 4, nu werken we verder met deze coördinaten in hoofdstuk 5.

5.1) Parametervergelijkingen van rechten

*Hoe men aan deze vergelijking komt is misschien interessant om na te lezen in de cursus (p. 34), maar moet je niet kennen, je moet enkel weten:

Een stelsel parametersvergelijkingen van rechte door punt (x_1, y_1, z_1) en richtingsgetallen (rige's) a, b en c stellen we voor door het stelsel van vergelijkingen…

$$\begin{cases} x = x_1 + k \,.\, a \\ y = y_1 + k \,.\, b \\ z = z_1 + k \,.\, c \end{cases}$$

Hierin is k een random gekozen getal in de reële getallenverzameling.

5.2) Cartesische vergelijkingen van rechten

*De afleiding van deze vergelijking moet je niet kennen, je moet weten dat de eerste vergelijking ook te schrijven valt als…

$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$ ➔ We hebben nog steeds hetzelfde punt en rige's a, b en c.

5.3) Parametervergelijkingen van vlakken

*Een vlak is bepaald door 2 stel richtingsgetallen omdat het is bepaald door 2 rechten. Uit de vectoriële vergelijking van de vlak kunnen we afleiden:

$P = P_1 + k \,.\, R + m \,.\, S$

--> We werken nu echter met coördinaten, dus vullen we in:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + k \,.\, \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + m \,.\, \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}$$

--> We kunnen dit in een stelsel gieten:

$$\begin{cases} x = x_1 + k \,.\, a + m \,.\, a' \\ y = y_1 + k \,.\, b + m \,.\, b' \\ z = z_1 + k \,.\, c + m \,.\, c' \end{cases}$$

--> Dit noemen we de stelsel parametervergelijkingen van het vlak.

--> Dit veranderen kunnen we schrijven als: $\begin{cases} x - x_1 = k \,.\, a + m \,.\, a' \\ y - y_1 = k \,.\, b + m \,.\, b' \\ z - z_1 = k \,.\, c + m \,.\, c' \end{cases}$

5.4) Cartesische vergelijkingen van vlakken

*De laatste blauwe stelsel kunnen we schrijven als een determinant. Ja, onze goeie oude vriend determinant komt terug in 't spel als je dacht dat je ervan af was.

*Na een afleiding van de blauw-gemarkeerde parametervergelijking (x_1 toevoegen, kolommen optellen, kolommen van plaats verwisselen en transponeren) vindt men de cartesische vergelijking

*De cartesische vergelijkingen van het vlak zijn gedefinieerd als:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ a & b & c & 0 \\ a' & b' & c' & 0 \end{vmatrix} \boxed{= 0}$$

Hierin zijn x, y en z de onbekenden van je vergelijking. De rij daaronder zijn de getallen van de punt die je hebt gegeven en de andere twee rijen daaronder representeren de richtingsgetallen die je hebt gegeven of zelf moet uitrekenen van het vlak.

--> Je moet deze determinant uitrekenen met rekenregels die we hebben gezien in module 1 tot de vorm: Ax + By + Cz + D = 0. Als je dacht dat je van determinanten af was, ze zijn terug. ☹

INTERMEZZO) Determinanten uitrekenen, hoe ging dat ook alweer?

Uit samenvatting wiskunde module 1 halen we volgende passage:

(BII) DETERMINANTEN

*Met een determinant kunnen we nakijken of een matrix een inverse heeft.

→ D = 0 --> matrix heeft geen inverse (hij is singulier)

→ D ≠ 0 --> matrix heeft een inverse (hij is regulier)

*Determinant van een 2 x 2 matrix:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \,.\, 1 - 4 \,.\, 3 = 2 - 12 = -10$$

→ Oplossingsmethode: hoofddiagonaal – nevendiagonaal

*Determinant van een 3 x 3 matrix:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \,.\, (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 2 \,.\, (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 3 \,.\, (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\,(2 \,.\, 4 - 3 \,.\, 3) - 2\,(4 - 6) + 3\,(3 - 4)$$

$$= -1 + 4 - 3 = 0$$

--> Korte werkwijze: pak rij of kolom, bereken alle minoren van rij, tel op.

--> Bijzondere determinant: eigenschap: determinant met twee dezelfde rijen = 0

--> Voor een 2x2 matrix doe je de hoofddiagonaal (is in het voorbeeld daar 2 en 1, die twee getallen maken samen de hoofddiagonaal) min de nevendiagonaal (de andere diagonaal).

--> Voor een 3x3 matrix ontwikkelen we naar een rij of kolom, in het voorbeeldje van mijn samenvatting heb ik ontwikkeld tot de 1ste rij. Je kijkt: waar staat mijn getal? Voor 2 staat ze op de eerste rij en 2de kolom, je schrapt de rij met het getal 2 erin en diezelfde kolom. Je vermenigvuldigt met de minor $(-1)^{\text{rij + kolom}}$ en berekent de overblijvende matrix.

--> Voor een 3x3 kan je ook Sarrus toepassen, dit leg ik hier niet uit.

--> 4x4 matrix idem werkwijze 3x3 matrix maar meer rekenwerk.

(BIII) EIGENSCHAPPEN VAN DETERMINANTEN

EIGENSCHAP 1: transponeren verandert niks aan de determinant

EIGENSCHAP 2: Als je een rij of kolom van plaats verwisselt verandert de teken v/d determinant.

→ $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10 <=> \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10$

EIGENSCHAP 3: Een determinant met twee gelijke/evenredige rijen of kolommen = 0 (zie BII)

EIGENSCHAP 4: som van producten van een rij (of kolom) met de minoren van de elementen van een andere rij is gelijk aan 0

EIGENSCHAP 5: Je mag een gemeenschappelijke factor van een rij buiten de determinant brengen

→ $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

EIGENSCHAP 6: Determinanten met twee dezelfde rijen (of kolommen) en één verschillende mag je de rijen (of kolommen) behouden) en de verschillende bij elkaar optellen.

EIGENSCHAP 7: Je mag elementaire rijoperaties uitvoeren op een determinant (zie matrices)

→ Dit zijn eigenschappen van de rekenregels bij determinanten om het rekenwerk te vergemakkelijken. De belangrijkste eigenschap is eigenschap 7, je mag rijoperaties uitvoeren om nullen te maken, dit is iets wat we zéér vaak gaan toepassen.

5.5) Ondelinge ligging van twee vlakken

*Je kan de cartesische vergelijkingen van vlakken nu uitrekenen, nadat je de determinant hebt uitgerekend verkrijg je een vergelijking van de vorm: Ax + By + Cz + D = 0

--> Als we de onderlinge ligging van twee vlakken analytisch willen bepalen verkrijgen we een stelsel: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

--> Voor de onderlinge ligging heb je drie mogelijkheden:

Samenvallend, strikt evenwijdig of snijdend

--> Als we normale stelsels oplosten in onze schoolcarrière zochten we altijd snijpunten van rechten, het is dan ook logisch dat als deze stelsel oplosbaar beide vlakken snijdend zijn.

*Keviniaanse (Kevins) trucjes om snel de onderlinge ligging te bepalen:

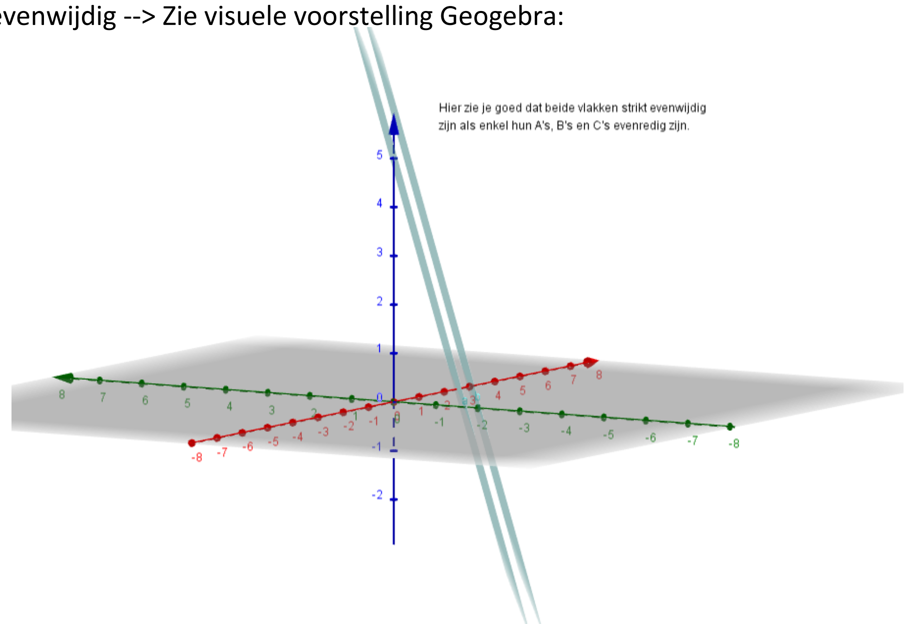
--> **1: KIJK OF JE COËFFICIENTEN A, B, C, D evenredig bij beide cartesische vergelijkingen**

--> Neem de vlakken: $\begin{cases} 2x - 3y + z - 5 = 0 \\ 4x - 6y + 2z - 12 = 0 \end{cases}$

--> Je ziet hier dat enkel de coëfficienten A, B en C evenredig zijn.

--> Als énkel de coëfficienten A, B en C evenredig zijn, dan zijn beide vlakken strikt evenwijdig --> Zie visuele voorstelling Geogebra:

Ik heb in het invoervak beide cartesische vergelijkingen ingevoerd en kreeg dit, zo zie je letterlijk dat vlakken strikt evenwijdig zijn als hun A's, B's, C's maar niet de D's evenredig zijn, het stelsel heeft géén oplossingen (géén snijpunten) want ze zijn lineair afhankelijk.



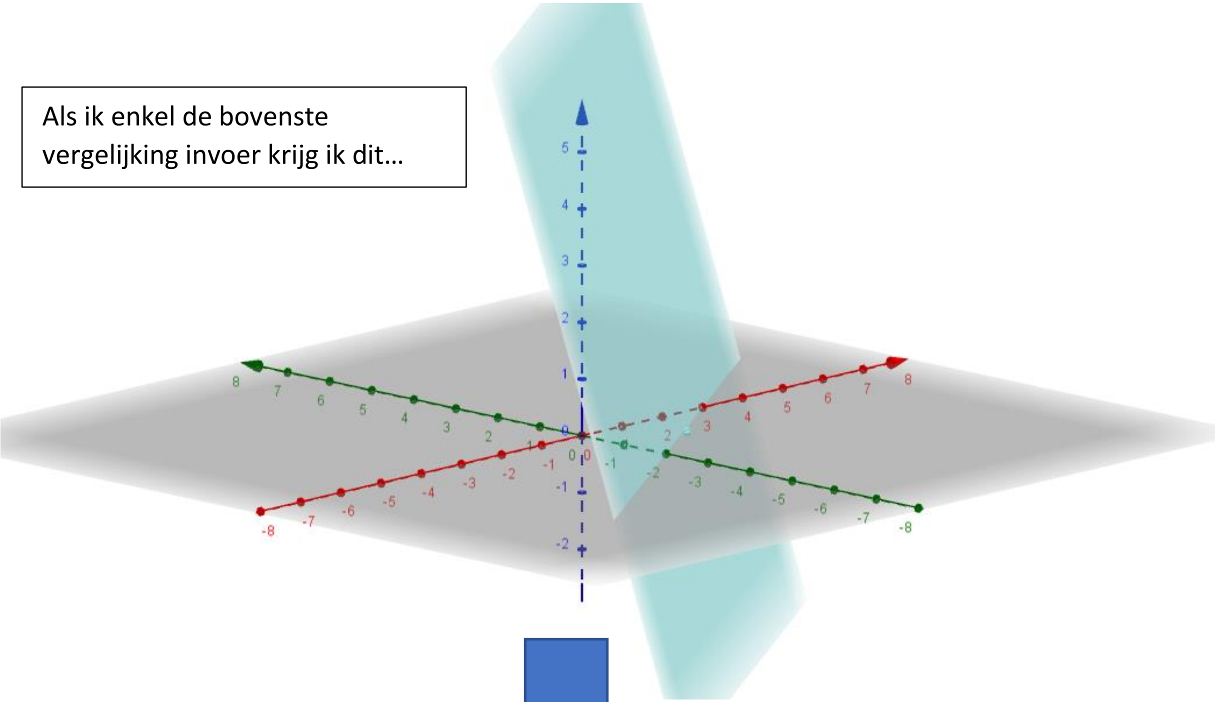
--> **2: WAT ALS JE HELE STELSEL EVENREDIG IS? DUS ZOWEL DE A, B, C ALS DE D-WAARDES?**

--> Neem de vlakken: $\begin{cases} 2x - 3y + z - 6 = 0 \\ 4x - 6y + 2z - 12 = 0 \end{cases}$

--> Je ziet dat de hele stelsel evenredig is met elkaar, als dit het geval is heeft het stelsel oneindig veel oplossingen. Beide vlakken vallen samen met elkaar.

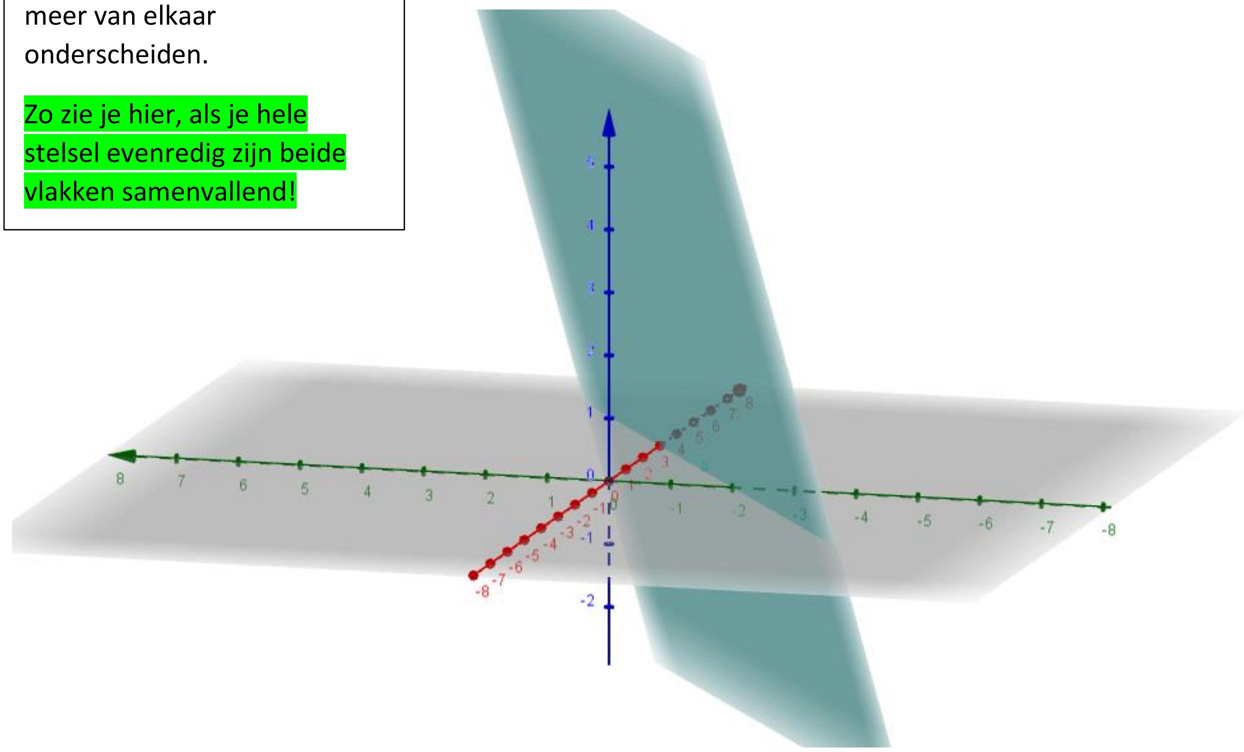
--> Zie visuele voorstelling Geogebra:

Als ik enkel de bovenste vergelijking invoer krijg ik dit…



Als ik de tweede vergelijking ook invoer wordt de kleur donkerder, 2 vlakken vallen dus samen, we kunnen ze niet meer van elkaar onderscheiden.

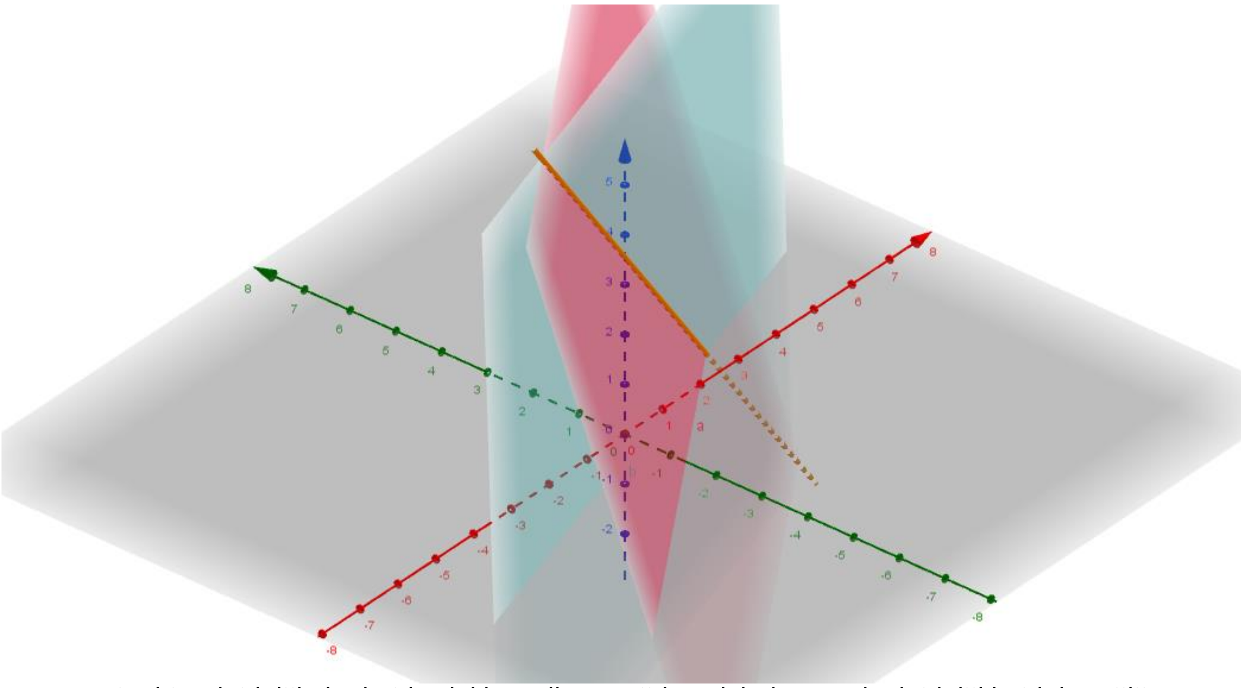
Zo zie je hier, als je hele stelsel evenredig zijn beide vlakken samenvallend!



--> Dus, wanneer zijn twee vlakken snijdend? Als er géén evenredigheid is tussen de A's, B's en C's want anders heeft het stelsel geen oplossing of als er géén evenredigheid is tussen de A's, B's, C's en D's want dan heeft het stelsel oneindig veel oplossingen.

--> Neem de vlakken: $\begin{cases} 4x - 6y + 2z - 8 = 0 \\ -10x + 34y - z + 10 = 0 \end{cases}$

--> Er is hier duidelijk géén evenredigheid, beide vlakken zijn snijdend. Om je dit visueel te laten voorstellen hebben we natuurlijk Geogebra:



--> Je ziet hier duidelijk dat beide vlakken elkaar snijden. Ik heb voor de duidelijkheid de snijlijn tussen beide vlakken aangeduid (oranje). Als twee vlakken elkaar snijden is de oplossing van hun stelsel een rechte want we zoeken alle snijpunten natuurlijk.

--> Het is goed als je dit inziet om extra inzicht te hebben maar je moet de stelsel (gelukkig) niet kunnen oplossen. Je moet enkel de onderlinge ligging weten te bepalen.

5.6) Stel richtingsgetallen van een rechte, gegeven als snijlijn van twee vlakken

*Als je de snijlijn van twee vlakken hebt gegeven kan je daar de richtingsgetallen van die rechte uit berekenen

--> Een vlak wordt bepaald door de vergelijking: Ax + By + Cz + D = 0

--> De snijlijn van twee vlakken wordt dus bepaald door: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

--> Dit is een 2x3-stelsel, die heeft een speciale oplossingsmethode die we in module

1 hebben gezien. Uit samenvatting wiskunde module 1 halen we volgende werkwijze.

Uitgeschreven stappenplan 2x3 stelsels oplossen – oefening 2b in het boek

---

$\begin{cases} -7x + 2z = 0 \\ -4x + 9y - z = 0 \end{cases}$ ➔ Dit is een 2x3 stelsel, zulke stelsels moet je kunnen oplossen, niet bespreken!

STAP 1 (enkel indien nodig): vervolledig de stelsel:

$\begin{cases} -7x + 0y + 2z = 0 \\ -4x + 9y - z = 0 \end{cases}$

We hadden hier géén y-waarde omdat die 0 is maar die erbij schrijven kan ervoor zorgen dat je geen fouten maakt.

STAP 2: Bepaal D1, D2 en D3

→ Hoe tf bepaal je D1, D2, D3?

→→ Dus kijk: we hebben hier een 2x3 stelsel, met x-waarden, y-waarden en z-waarden.

→→→ Voor D1 laat je de kolom met de x-waarden weg
Voor D2 laat je de kolom met de y-waarden weg
Voor D3 laat je de kolom met de z-waarden weg

$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 9 & -1 \end{vmatrix}$ = 0 – 18 = -18

$D_2 = \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}$ = 7 + 8 = 15

$D_3 = \begin{vmatrix} -7 & 0 \\ -4 & 9 \end{vmatrix}$ = -63 – 0 = -63

STAP 3: schrijf de oplossingenverzameling op volgens de algemene regel mét een parameter!

→ Opl = {(D1, D2, D3)} = {(-18k, 15k, -63k)}

STAP 4: PROFICIAT! Wees trots op jezelf dat je dit hebt gedaan.

--> Wij passen hier echter één ding aan, ipv je uitkomst als {(-18k, 15k, -63k)} te schrijven pakken we een random k-waarde, het makkelijkste zou k = 1 zijn, dan krijgen we als uitkomst (-18, 15, -63)
--> Dus: 2x3 stelsel oplossen met deze methode, dan krijg je de richtingsgetallen van de snijlijn van beide vlakken.

--> **VOORBEELD 1:** Bepaal in een geijkte ruimte de vergelijking van het vlak gevormd door de snijdende of evenwijdige rechten a en b als:

b. $a: \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ $\quad b: \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = 3 \end{cases}$

→ Hier kan je de rige's niet uit aflezen (we hebben geen cartesische vergelijking gegeven) maar je kan deze bepalen met de werkwijze die hierboven uitgelegd is geweest.

--> Rige's a: $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + 0z = 3 \end{cases}$ ➔ We bepalen D1 (x-waarden weglaten), D2 (y), D3 (z)

➔ $D(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.0 - (-1.1) = 0 - (-1) = 1 = 1k = 1\ (k = 1)$

➔ $D(2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1.0 - 1.2 = 0 - 2 = -2 = -2(-k) = 2k = 2\ (k = 1)$

➔ $D(3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1.(-1) - 2.1 = -1 - 2 = -3 = -3k = -3\ (k = 1)$

→ We plakken onze k's er nu voor, let op: bij D(2) plakken we -k ervoor.

→ De rige's van rechte a zijn dus (1, 2, -3)

→ Voor recte b geldt een analoge werkwijze, je vindt: (1, -1, -1) (ga zelf na).

→ De rige's van a (1, 2, -3) en b (1, -1, -1) zijn niet evenredig (zie hfdstuk 4), de rechten zijn dus evenwijdig.

→ Om de vergelijking van een vlak op te stellen hebben we volgende formule:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ a & b & c & 0 \\ a' & b' & c' & 0 \end{vmatrix} \boxed{= 0}$$

→ We hebben onze rige's (a's, b's en c's), we moeten nu alleen nog één punt.

→ Je moet nu een random punt zoeken op een rechte. Maakt niet uit welk punt, we pakken rechte a: $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + 0z = 3 \end{cases}$

==> Voor welke x, y en z waarde geld dat x + y + z = 2?

--> Je ziet direct: x = 2, y = 1, z = -1 want: 2 + 1 -1 = 2!

→ Dus: we hebben het punt op de rechte: (2, 1, -1)

→ We vullen onze rige's en bekomen punt nu in de determinant in:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \boxed{= 0}$$

→ Je werkt de determinant volgens de methode die ik heb uitgelegd in deel 5.x.3 (zie later), dan bekom je de cartesische vergelijking van het vlak: **5x + 2y + 3z – 9 = 0**.

--> Et voila! Dit is de vergelijking van je vlak!

--> **VOORBEELD 2:** Bepaal in een geijkte ruimte een stelsel cartesische vergelijkingen van de rechte door A(4, 0, -2) evenwijdig met de rechte $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x - y + 0z = 9 \end{cases}$

--> De stelsel cartesische vergelijking van een rechte wordt bepaald door volgende formule: $\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$

→ Je hebt één punt en richtingsgetallen nodig, onze rige's halen we uit onze stelsel met de speciale werkwijze die op de vorige pagina is uitgelegd:

$D(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ $(kolom\ x' en\ weglaten) = 1 = 1k = 1\ (k = 1)$

$D(2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$ $(kolom\ y' en\ weglaten) = 3 = 3(-k) = -3\ (k = 1)$

$D(3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ $(kolom\ z' en\ weglaten) = -4 = -4k = -4\ (k = 1)$

--> Nu we rige’s en één punt hebben kunnen we onze vergelijking invullen:

$$\frac{x-4}{1}=\frac{y-0}{-3}=\frac{z+2}{-4}$$

--> **VOORBEELD 3**: ga ik niet helemaal uitwerken (ik heb ook een leven, mensen), maar verklaar ik de werkwijze. Je moet de vergelijking van het vlak bepalen door:

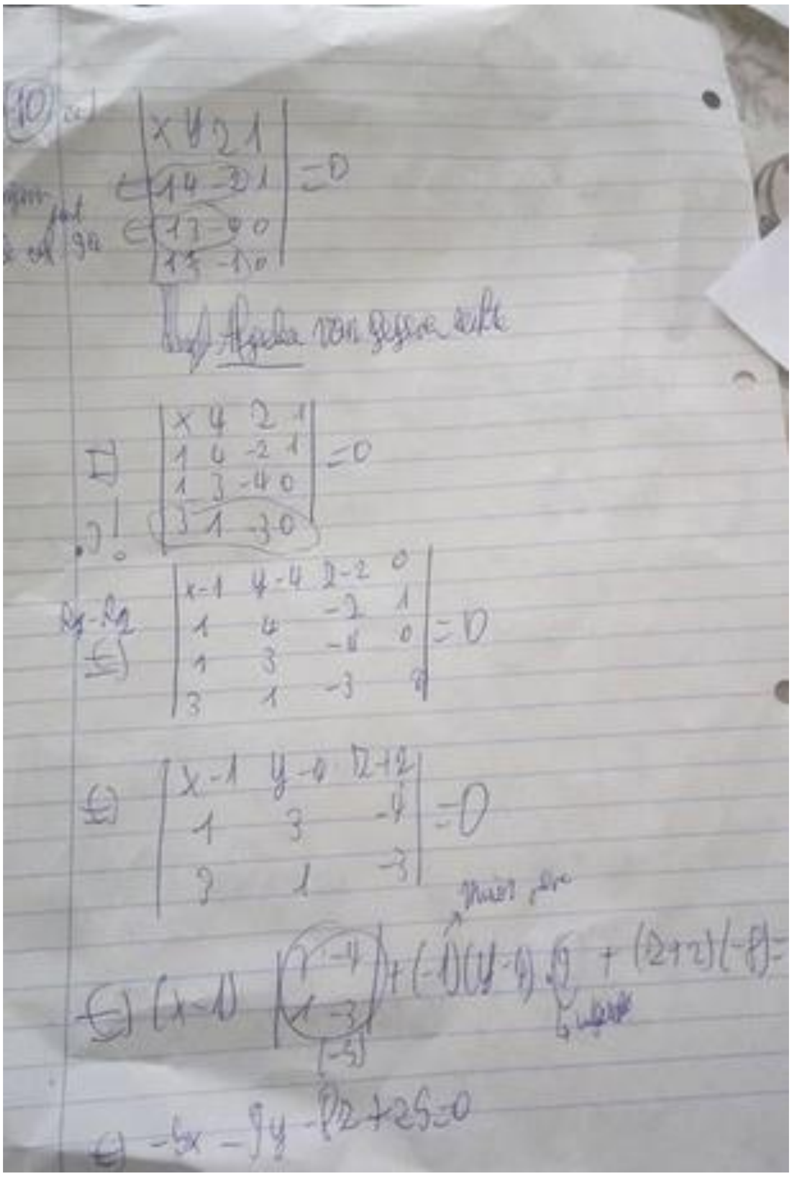
$$P_1(1,4,-2) \text{ en evenwijdig met } e\colon \begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x-y=9 \end{cases} \text{ en met } f\colon\ x-3=3y+1=2-z$$

--> Om de vergelijking van het vlak op te stellen moet je één punt en twee richtingsvectoren hebben. Eén punt heb je al gegeven dus dat is oké.

--> Je hebt 2 rechten e en f gegeven. Je moet hiervan dus de richtingsvectoren vinden: voor e doe je dat met de speciale werkwijze waarover dit puntje gaat.
voor f zet je je cartesische vergelijking éérst om naar de standaardvorm en daarna lees je de richtingsgetallen af.

--> Nu vul je je punt en bekomen richtingsgetallen in de determinant en werk je uit.

--> Uitwerking van de determinant op papier (voor wie het nodig zou zijn):



5.7) Evenwijdige stand van een rechte en een vlak

*Als je een rechte met stel richtingsgetallen (a, b, c) en een vlak met vgl: Ax + By + Cz + D = 0 hebt, dan is de rechte evenwijdig met het vlak als geld:

Aa + Bb + Cc = 0

***Voorbeeld 1**: zijn het vlak x + 4y – 11z – 5 en de rechte $\frac{x+7}{4} = 3 - y = \frac{z-4}{-1}$ evenwijdig of snijdend?

--> Aha, eerst moet je naar de standaard cartesische vergelijking van een rechte toewerken, 3-y is namelijk niet standaard ==> 3-y = $\frac{y-3}{-1}$ ➔ Nu kunnen we pas de formule nachecken

--> Aa + Bb + Cc = 0 ⬄ 1 . 4 + 4 . (-1) + (-11) . 0 = 0 ⬄ 0 = 0

--> De rechten zijn evenwijdig, ze hebben dus geen snijpunt.

***Voorbeeld 2**: Zijn het vlak x + y + 2z + 3 = 0 en de rechte $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-3}{4}$ evenwijdig of snijdend?

--> Alles staat in de standaardvorm: Aa + Bb + Cc = 0 ⬄ 1 . 2 + 1 . 6 + 2 . 4 = 0 ⬄ 16 ≠ 0

--> De rechte en het vlak zijn dus snijdend, maar wat is hun snijpunt?

==> Je moet een stelsel maken van de rechte en het vlak om hun snijpunt te zoeken.

→ Je moet ook beseffen dat je $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-3}{4}$ kan opsplitsen in 2 vergelijkingen, namelijk $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{6}$ en $\frac{x-2}{2} = \frac{z-3}{4}$.

==> Stelsel wordt dus: $\begin{cases} \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{6} \ (I) \\ \frac{x-2}{2} = \frac{z-3}{4} \ (II) \\ \mathrm{x + y + 2z + 3 = 0 \ (III)} \end{cases}$

→ Je moet de stelsel (jammer genoeg) oplossen: ik werk eerst vergelijking (I) uit.

$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{6} \Leftrightarrow \frac{6(x-2)}{2} = y - 1 \Leftrightarrow 3(x-2) + 1 = y \Leftrightarrow y = 3x - 5$

→ We hebben voorlopig: $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ \frac{x-2}{2} = \frac{z-3}{4} \ (II) \\ \mathrm{x + y + 2z + 3 = 0 \ (III)} \end{cases}$

→ Ik zonder nu in vergelijking (II) naar z af:

$\frac{z-3}{4} = \frac{x-2}{2} \Leftrightarrow z - 3 = \frac{4(x-2)}{2} \Leftrightarrow z = 2x - 4 + 3 \Leftrightarrow z = 2x - 1$

→ Nu kunnen we in vergelijking 3 de x-waarden invullen, we zetten (I) en (II) in (III)

: $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ z = 2x - 1 \\ \mathrm{x + 3x - 5 + 4x - 2 + 3 = 0 \ (III)} \end{cases}$

--> We werken (III) uit: 8x = 4 ⬄ x = ½ (ga zelf na)

→ Nu kunnen we onze andere antwoorden vinden:

$\begin{cases} y = 3 \,.\frac{1}{2} - 5 = -3{,}5 \\ z = 2.\frac{1}{2} - 1 = 0 \\ \mathrm{x} = \frac{1}{2} \end{cases}$

→ Het snijpunt is dus: $\left(\frac{1}{2};\ -3{,}5; 0\right)$

5.8) Voorbeeldoefeningen

5.8.1) Oefening 1: rige's en stel coördinaten bepalen

*Opgave: In een geijkte ruimte geeft men een stelsel vergelijkingen van rechten e.

a) Bepaal van elke rechte een stel richtingsgetallen

b) Bepaal de stellen coördinaten van enkele punten van elke rechte

$e: \frac{x-2}{3} = y+2 = \frac{z-3}{4}$

--> Je moet altijd kijken naar de formule van de cartesische vergelijkingen:

$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$

--> Dan stel je jezelf de vraag: staat mijn rechte zijn vergelijking in deze vorm?

--> Ja? In dit geval is dat zo, want y + 2 kan je schrijven als (y + 2)/1

--> Nee? Zet het in de standaardvorm zoals in deze formule.

--> De rige's lees je af: 3, 1, 4 (je kijkt naar je breukstrepen, zo simpel is het).

--> Een stel coördinaten kan je op twee manieren bepalen (credits to Ismo die het me uit had gelegd, you da real MVP)

--> **Methode 1: Je stelt elk deel van de vergelijking gelijk aan k, de formule wordt dan:** $\frac{x-2}{3} = k \quad en \quad y+2 = k \quad en \quad \frac{z-3}{4} = k$

--> Je zondert de x, y en z af en je vindt verschillende k-waarden aka stel coördinaten voor x, y en z. Je moet een stel coördinaten vinden, dus 2 of 3 (we pakken 2)

--> Bv. neem k = 0 ➔ $\frac{x-2}{3} = 0 \quad en \quad y+2 = 0 \quad en \quad \frac{z-3}{4} = 0$

--> Zonder x, y en z af en je krijgt: $x = 2 \quad en \quad y = -2 \quad en \quad z = 3$ voor k = 0

--> **Methode 2: Je stelt de parametrische vergelijking op van x, y en z (zie 5.1) en vult daarna random k-waarden in de functie**

$$\begin{cases} x = x_1 + k \, . \, a \\ y = y_1 + k \, . \, b \\ z = z_1 + k \, . \, c \end{cases}$$

Je bent slim genoeg om in te zien dat je alles behalve k kan invullen, we hebben de cartesische vergelijking namelijk gekregen. Daaruit kan je je x_1, y_1, z_1 en a, b en c uit halen.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + k \, . \, 3 \\ y = -2 + k \, . \, 1 \\ z = 3 + k \, . \, 4 \end{cases}$$

Want de vergelijking die we hadden gekregen is:

$\frac{x-2}{3} = y + 2 \left(= y - (-2)\right) = \frac{z-3}{4}$ ➔

--> Nu vul je opnieuw, ja opnieuw, random k-waarden in en zoek je de x, y en z waarden.

--> Stel k = 0 dan: $\begin{cases} x = 2 + 0 \, . \, 3 \\ y = -2 + 0 \, . \, 1 \\ z = 3 + 0 \, . \, 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$

--> Dit is juist, dit komt mooi overeen met ons antwoord in methode 1.

--> Zo zoek je verschillende k-waarden door random waarden in te vullen!

5.8.2) Oef. 2: rechten

*Je hebt 4 gevallen: 1) 2 punten gegeven

2) 1 punt en stel rige's (richtingsgetallen) gegeven (makkelijkste)

3) 1 punt en oorsprong gegeven

4) 1 punt en evenwijdigheid met andere rechte gegeven

5) 1 punt en evenwijdigheid met x-, y- of z-as gegeven
--> We maken 1 oefening per geval, de andere oefeningen gaan analoog.

***GEVAL 1: Twee punten gegeven --> cartesische vergelijking = ?**

--> We stellen de cartesische vergelijking op door punt A(1, 7, -2) en B(2, 2, 2)

--> Je herinnert je de formule: $\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$

--> Je kiest een random punt om in de teller als x_1, y_1 en z_1 te zetten, dit mag eenderwelk punt zijn die we hebben. Ik kies punt B.

--> We hebben nu: $\frac{x-2}{a} = \frac{y-2}{b} = \frac{z-2}{c}$

--> a, b en c zijn richtingsgetallen, de richtingsvector van AB vond je door B – A (hfdstuk 3)

--> In dit hoofdstuk blijven de formules van hoofdstuk 3 gelden, nu we B – A doen met coördinaten doen we eigenlijk: x_2 (=B) – x_1 (=A), $y_2 - y_1$ en $z_2 - z_1$

--> We verkrijgen dan: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z-2}{4}$

--> Om eventueel na te checken kan je i.p.v. x, y en z de punten A of B invullen en kijken of het punt erop ligt. Dit is zo (ik heb het nagecheckt). Je antwoord is juist!

***GEVAL 2: 1 punt en stel rige's gegeven --> cartesische vergelijking = ?**

--> We stellen de cartesische vergelijking op door A(2, 4, -1) met rige's (1, -1, -2)

--> In de formule $\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$ zijn a, b en c de rige's en x_1, y_1 en z_1 coördinaten v/d punt

--> Dus: je moet gewoon invullen: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ (let op: -(-1) wordt +1)

--> Dit is het!

--> We stellen de cartesische vergelijking op door A(1, 2, -3) met rige's (-2, 3, 0)

--> We doen hetzelfde als hierboven: : $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{3} = \cancel{\frac{z+3}{0}}$

--> Oei! We zitten hier met een deling door nul maar we kunnen niet delen door nul want… ***<u>Wie deelt door nul is een snul</u>***. Wat moeten we nu doen?

--> Als eerst schrap je de vergelijking met de deling door nul direct, deze is vals.

--> Je kijkt nu terug naar de parametrische vergelijkingen die je kent maar énkel voor de vergelijking met deling door 0, *<u>in de rest zijn we niet geïnteresseerd</u>*.

$\begin{cases} x = x_1 + k\,.\,a \\ y = y_1 + k\,.\,b \\ z = z_1 + k\,.\,c \end{cases}$ ➔ We hebben deling door 0 dus is c = 0, de nieuwe vgl wordt dan…

➔ $z = z_1$

--> Merk op dat je de cartesische vergelijkingen ook kan schrijven als een stelsel met accolade. Als $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{0}$ dan kan je dat schrijven als…

$\begin{cases} \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{3} \\ \frac{x-1}{-2} = \frac{z+3}{0} \end{cases}$ --> Snap je dit? Goed! Snap je dit niet? Kijk naar volgend voorbeeld:

--> Ik kan zeggen: 5 = 4 + 1 = 2 + 3, dan kan ik dit ook in een stelsel zetten als…

$\begin{cases} 5 = 4 + 1 \\ 5 = 2 + 3 \end{cases}$ ➔ Voor ruimtemeetkunde is dit hetzelfde maar dan moeilijker.

--> Je laatste vergelijking valt weg in de stelsel aangezien dit tot een valse uitspraak leidt:

$\begin{cases} \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{3} \\ \end{cases}$ ➔ Natuurlijk laten we dit niet zo leeg. Dat is namelijk lelijk.

--> We vervangen onze laatste uitspraak door de gevonden vergelijking $z = z_1$

$\begin{cases} \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{3} \\ z = -3 \end{cases}$ (want z_1 = 3 (+ kan je schrijven als –(-!) in onze cartesische vergelijking!)

--> Dit is juist! Je hebt het antwoord gevonden.

***GEVAL 3: 1 punt en oorsprong gegeven**

--> We stellen de cartesische vergelijking op door A(2, 1, -3) en de oorsprong O.

--> Dit is een speciaal geval van geval 1, je kan dit zoals geval 1 behandelen.

--> De formule: $\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$

--> Je kiest één punt om in te vullen in de teller, in dit geval zou je liefst de oorsprong moeten kiezen (omdat we beter kunnen rekenen met 0).

--> $\frac{x-0}{a} = \frac{y-0}{b} = \frac{z-0}{c} \rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ (0 mag je weglaten)

--> Daarna moet je de richtingsvector van rechte OA zoeken door A – O te doen en nu we coördinaten hebben doen we $x_A - 0$, $y_A - 0$ …

--> De coördinaten van de oorsprong in de gepunte ruimte zijn gewoon (0, 0, 0), dus je kan de formule gebruiken maar je kan coördinaat A gewoon overnemen aangezien dit op hetzelfde neerkomt (iets min 0 blijft iets).

--> $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-3}$ ➔ Dit is de juiste cartesische vergelijking!

***GEVAL 4: 1 punt en evenwijdigheid met een andere rechte gegeven**

--> We stellen de cartesische vergelijking op door A(3, 2, -1) evenwijdig met e: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = z + 3$

--> Je herinnert je: twee rechten zijn evenwijdig als hun stel richtingsgetallen evenwijdig zijn. Je mag de a, b en c (in de noemers, voor z is c = 1) van de gegeven vergelijking dus gewoon overnemen, je hebt dus al: $\frac{x-x_1}{2} = \frac{y-y_1}{2} = \frac{z-z_1}{1}$

--> Je hebt één getal gegeven, je hebt x_1, y_1 en z_1 dus gegeven:

$\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$ → Dit is de juiste cartesische vergelijking!

***GEVAL 5: 1 punt en evenwijdigheid met x-, y- of z-as**

--> We stellen de cartesische vergelijking op door A(-4, 5, 6) evenwijdig met x (de x-as).

--> Je weet dat de x-as als richtingsgetallen (1, 0, 0) is want x = 1 (aahja, de x-as).

--> Dus… We hebben hetzelfde geval als de oefening vanboven op pagina 14.

--> We hebben een punt A(-4, 5, 6) en stel richtingsgetallen (1, 0, 0)

--> We stellen de cartesische vergelijking op: $\frac{x+4}{1} = \frac{y-5}{0} = \frac{z-6}{0}$

--> We hebben twee delingen door 0, we passen de procedure op pagina 14 toe.

--> Parametrische vergelijkingen: $\begin{cases} x = x_1 + k \,.\, a \\ y = y_1 + k \,.\, b \\ z = z_1 + k \,.\, c \end{cases}$ met b = c = 0

--> De nieuwe vergelijkingen worden: $y = y_1$ en $z = z_1$.

--> y_1 en z_1 zijn gegeven, we verkrijgen: $y = 5$ en $z = 6$

--> We gieten dit allemaal in een stelsel:

$\begin{cases} \frac{x+4}{1} = k \\ y = 5 \\ z = 6 \end{cases}$ (let op: als je een cartesische vergelijking alleen schrijft stel je ze gelijk aan k)

--> Aangezien x gelijk is aan $\mathbb{R}$ omdat de y- en z-waarde zijn bepaald **mogen** we de eerste gelijkheid weglaten, we verkrijgen:

$$\begin{cases} y = 5 \\ z = 6 \end{cases}$$

***OVERZICHT: Cartesische vergelijkingen opstellen**

1) 2 punten gegeven
   → Richtingsgetallen zoeken, random punt kiezen om in te vullen
2) 1 punt en stel rige's (richtingsgetallen) gegeven (makkelijkste)
   → Gewoon invullen in de cartesische vergelijking
   ➔ Als deling door 0 voorkomt stelsel maken en parametrische vergelijking(en) gebruiken.
3) 1 punt en oorsprong gegeven
   → Oorsprong kiezen als random punt om in te vullen, richtingsgetallen heb je praktisch gezien al gegeven = dat ene punt.
4) 1 punt en evenwijdigheid met andere rechte gegeven
   → Rechten zijn // als stel richtingsgetallen evenredig zijn, je mag de richtingsgetallen dus gewoon overnemen als a, b en c en de coördinaten van het gegeven punt gebruiken.
5) 1 punt en evenwijdigheid met x-, y- of z-as gegeven
   → Je weet dat richtingsgetallen x = (1,0,0) rige's y = (0,1,0) rige's z = (0,0,1)
      → Je kan dit geval behandelen als geval 2, echter krijg je 2 delingen door 0, je gebruikt de standaardprocedure voor een deling door 0.

5.8.3) Cartesische vergelijkingen van vlakken

***Voorbeeldoefening 1**: Bepaal de cartesische vergelijking van het vlak door punt (1, 0, 3) en stel richtingsgetallen (rige's) (0, 2, 1) en (3, 1, -1)

--> Je herinnert je de definitie van cartesische vergelijking van het vlak:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ a & b & c & 0 \\ a' & b' & c' & 0 \end{vmatrix}$$

--> Je vult je gegevens in:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

--> Je voert een elementaire rijoperatie uit om een nul te maken, het is het beste als je **altijd** als eerste stap $\mathbf{R_2 - R_1}$ doet om die meest rechtse één al 0 te maken:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-3 & 1-1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

--> Je krijgt dus:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

--> Je ontwikkelt nu naar 4de rij, aangezien je drie nullen hebt staan moet je de minoren enzo van die nullen niet meer uitrekenen (want nul maal iets is altijd nul), je moet énkel de minoren van de 1 in de 4de kolom uitrekenen, we verkrijgen:

$$1 \cdot (-1)^6 \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

-1 staat in de 4de kolom en 2de rij --> 4 + 2 = 6

--> $(-1)^6$ is 1 (even macht) en 1 maal iets blijft één, je mag dit dus weglaten. We houden nu een 3x3-determinant over:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

--> Je ontwikkelt nu tot de rij met de onbekenden, dus de éérste rij.

$$\rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\cancel{(-1)^2} \cdot (x-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} + \boxed{(-1)^3 \cdot y \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} + \boxed{\cancel{(-1)^4} \cdot (z-3) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}$$

--> We schrappen alles dat we mogen weglaten voor de ordelijkheid

--> Je berekent elke 2x2-determinant door de hoofddiagonaal min de nevendiagonaal te doen

$We\ verkrijgen: (x-1)[2.(-1)-1.1]+(-1).y.[0.(-1)-3.1]+z-3.[0.(-1)-2.3]$

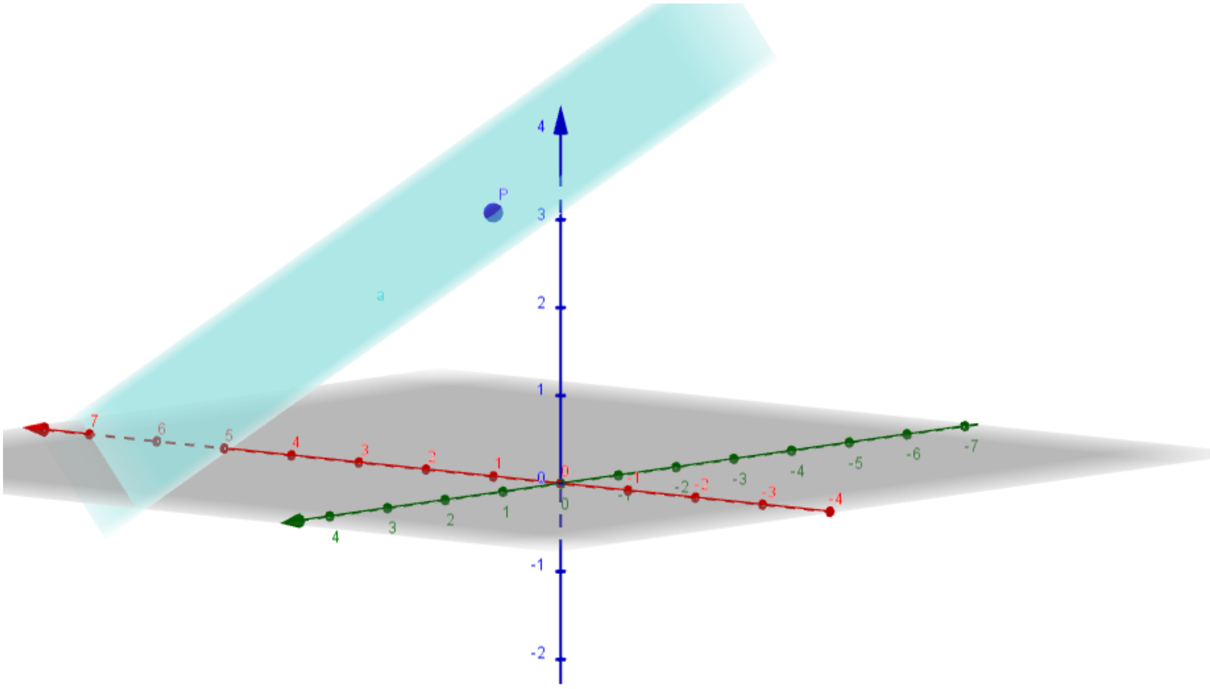
$\rightarrow Uitrekenen: (x-1)[-3]+(-y)\,[-3]+(z-3)[-6]$

$= -3x+3-3y-6z+18$

$= -3x-3y-6z+21$

--> Ik heb de '= 0' weggelaten, dit zou je in elke stap moeten zetten. Vergeet je dit of laat je het weg voor overzichtelijkheid, vergeet het dan niet toe te voegen

--> $-3x-3y-6z+21=0$



--> Neem P = (1,0,3) is dit je vlak (echt waar), je hebt dit uitgerekend. Wees trots op jezelf!

***Voorbeeldoefening 2**: Als je drie punten en géén richtingsvectoren hebt gegeven dan moet je natuurlijk eerst je richtingsgetallen uitrekenen, dit doe je door…

$P_1(1{,}1{,}0), P_2(1{,}0{,}1) en\ P_3(0{,}1{,}1)$ doe je $P_2 - P_1$ en $P_3 - P_1$, dus krijg je de richtingsgetallen:

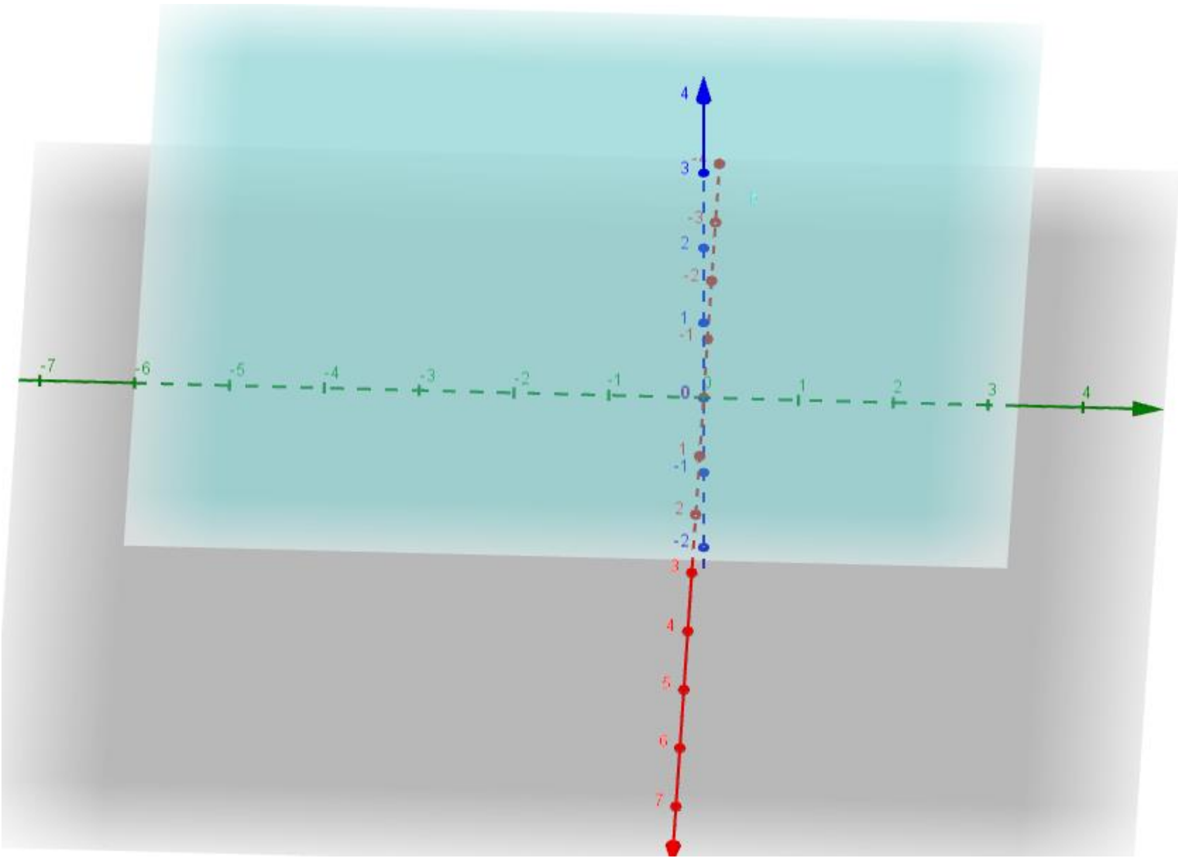
$\{(1-1{,}0-1{,}1-0),(0-1{,}1-1{,}1-0)\} = \{(0,-1,1),(-1,0,1)\}$

--> Nu je je richtingsgetallen hebt herhaal je de werkwijze in de 1ste voorbeeldoefening.

*Voorbeeldoefening 3: bepaal de vergelijking van het vlak door P(1, -3, -2) en evenwijdig met het vlak z = 3.

--> Herinner jij je de constante functie y = c die evenwijdig was met de x-as. Wel…

--> Het vlak z = 3 is evenwijdig met het xy-vlak (zie foto hieronder).



De x-as heeft als richtingsgetallen (1,0,0) en de y-as (0,1,0), je kan met deze richtingsgetallen verder rekenen zoals in voorbeeldoefening 1. --> Dit is de werkwijze als je weinig inzicht hebt.

Inzichtelijke werkwijze:
Echter, als het vlak z = 3 evenwijdig is met de xy-vlak, is elke x- en y-waarde bepaald en mogen we het dus weglaten. We verkrijgen de vergelijking z = -2 (je neemt de z-waarde van je gegeven coördinaat gewoon over) ⇔ z + 2 = 0 (in standaardvorm schrijven).
--> Deze inzichtelijke werkwijze mag je enkel gebruiken als je een evenwijdigheid hebt met een vlak.

***Voorbeeldoefening 3**: Bepaal de cartesische vergelijking van het vlak door punt A(2,5,2) en evenwijdig met de rechten e: x-1 = y = z + 3 en met f: $\frac{x+2}{3} = 1 - 2y = -\frac{z}{2}$

--> Je weet dat een vlak bepaald is door 2 rechten. Je hebt nu 2 rechten gegeven dus mag je deze richtingsgetallen overnemen voor je vlak, nietwaar? Ja en neen. Je kijkt eerst terug naar de algemene cartesische vergelijking van rechten: $\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$

--> Je moet er éérst voor zorgen dat je vergelijkingen in de standaardvorm staan, voor e is dat zo, bij f staat $1 - 2y$ niet in de standaardvorm!

--> We zetten het in de standaardvorm: 2y – 1 (we doen maal -1) en dan delen door 2.

-->$-\frac{2y-1}{2}$ ==> Ons richtingsgetal is nu dus -1/2. De rest kan je aflezen

--> Je vult je richtingsgetallen en alles wat gegeven is nu in de determinant in:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{2} & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \; \ldots\ldots\ldots \quad 3x - 10y + 7z + 30 = 0$$

--> Vanonder heb je gewoon de richtingsgetallen van de gegeven rechten ingevuld.
--> Je werkt uit volgens de werkwijze van voorbeeldoefening 1 en bekomt het resultaat.

***Voorbeeldoefening 4**: Bepaal de cartesische vergelijking van het vlak door punt A(2, -1, 1), evenwijdig met de rechte e: x = y = -z en evenwijdig met x (de x-as)
--> Zelfde werkwijze als oefening 3, je richtingsgetallen zijn (1, 1, -1) (zie rechte) en (1, 0, 0) (x-as!).

5.8.4) Oefening 12 in de cursus

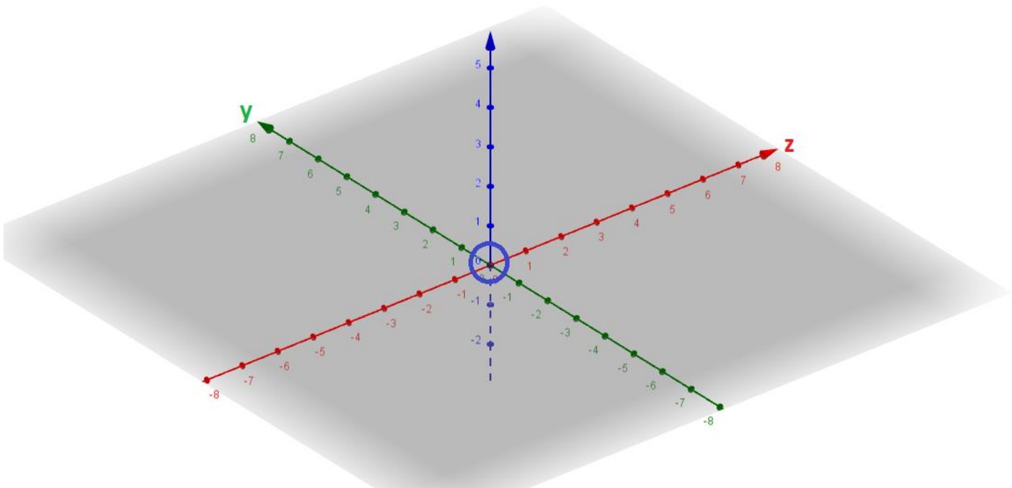
12. In een geijkte ruimte geeft men het vlak α: $2x + 3y - z + 6 = 0$

a. Geef de stellen coördinaten van de snijpunten met x, y, z.

b. Geef stelsels vergelijkingen van de snijlijnen van α met yz, xz, xy.

→ Voor oefening a: je zoekt de coördinaten van de snijpunten met de x-as, y-as en z-as.
--> De werkwijze is als volgt, we doen eerst x:
(1) DOE Y EN Z WEG UIT DE VERGELIJKING (we hebben énkel interesse in snijpunt met x)
➔ 2x + 6 = 0
(2) ZONDER X AF
➔ 2x = -6 ⇔ x = -6/2 ⇔ x = -3
--> Het snijpunt is dus (-3, 0, 0)
--> Je ziet dat we stap 1 mogen doen omdat y en z 0 zijn op de x-as.
--> Nu doe ik y voor:
(1) 3y + 6 = 0
(2) 3y = -6 ⇔ y = -2
--> Het snijpunt is: (0, -2, 0)
--> Voor z kan je het snijpunt nu wel zelf bepalen.

→ Voor oefening b: je zoekt de stelsel vergelijkingen van de snijlijnen met yz, xz, xy
--> De werkwijze is als volgt, ik doe enkel yz voor, de rest kan je zelf daarna.
--> STAP 1: INZICHT: Je beseft dat op het yz-vlak, het vlak gemaakt door y en z, x = 0.



--> STAP 2: Je vult x = 0 al in in de stelsel!

$\begin{cases} x = 0 \\ \dots \end{cases}$ ➔ Op (…) moet je de gegeven vergelijking schrijven maar x weglaten (want x = 0)

⇔ $\begin{cases} x = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases}$ ➔ ét voila! Dit is het, je bent klaar!

--> Voor het xz-vlak besef je dat y = 0 en voor het xy-vlak besef je dat z = 0

→ Zo kan je dus al deze oefeningen oplossen!

5.8.5) Oefening 16: bepaal in de geijkte ruimte de vergelijking van het vlak Pa met

b. $P(2,1,-1)$ $\quad a: \frac{x+2}{4} = \frac{-y-3}{2} = z + 1$

--> Je weet dat de vergelijking van het vlak bepaald wordt door de formule:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ a & b & c & 0 \\ a' & b' & c' & 0 \end{vmatrix} \boxed{= 0}$$

→ We hebben één rige gekregen: (4, -2, 1) --> niet vergeten y-vorm in standaardvorm zetten!

→ We hebben één punt

→ We hebben nog één rige nodig.

--> We hebben de cartesische vergelijking van rechte a gekregen, we zoeken dus één random punt op de rechte, pak z = 0 en we krijgen:

$a: \frac{x+2}{4} = \frac{-y-3}{2} = 1$

--> Je kan die zien als een stelsel: $\begin{cases} \frac{x+2}{4} = 1 \\ \frac{-y-3}{2} = 1 \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} x + 2 = 4 \\ -y - 3 = 2 \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \end{cases}$

--> We hebben dus punt A op de rechte (2, -5, 0)

--> We kunnen onze gegeven punt P van A aftrekken om de rige te vinden:

extra rige = P – A = (2, 1, 0) – (2, -5, 1) = (0, 6, -1)

--> Nu hebben we twee rige's en één punt, we kunnen onze determinant nu invullen, hem oplossen en zo vind je de vergelijking van het vlak.

--> Je vult als rige's in: (0, 6, -1) en (4, -2, 1)

--> Je vult als punt in het gegeven punt: (2, 1, -1)

--> En dan nu determinant uitwerken volgens werkwijze in puntje 5.x.3

5.8.6) Een vlak gevormd door twee evenwijdige rechten

*We hebben in deze samenvatting een vlak gevormd door twee snijdende rechten al uitgebreid behandelt, dit is ook het makkelijkste en kan je je makkelijk visueel voorstellen. Echter maken twee evenwijdige rechten ook een vlak. Hier moet je ook de vergelijking van het vlak door bepalen.

--> We pakken oefening 17c erbij van de cursus: **Bepaal in een geijkte ruimte de vergelijking van het vlak gevormd door de snijdende of evenwijdige rechten a en b.**

--> a: $\frac{x-1}{2} = \frac{1-2y}{2} = z$ en b: $\frac{x+1}{2} = 3 - y = z - 2$

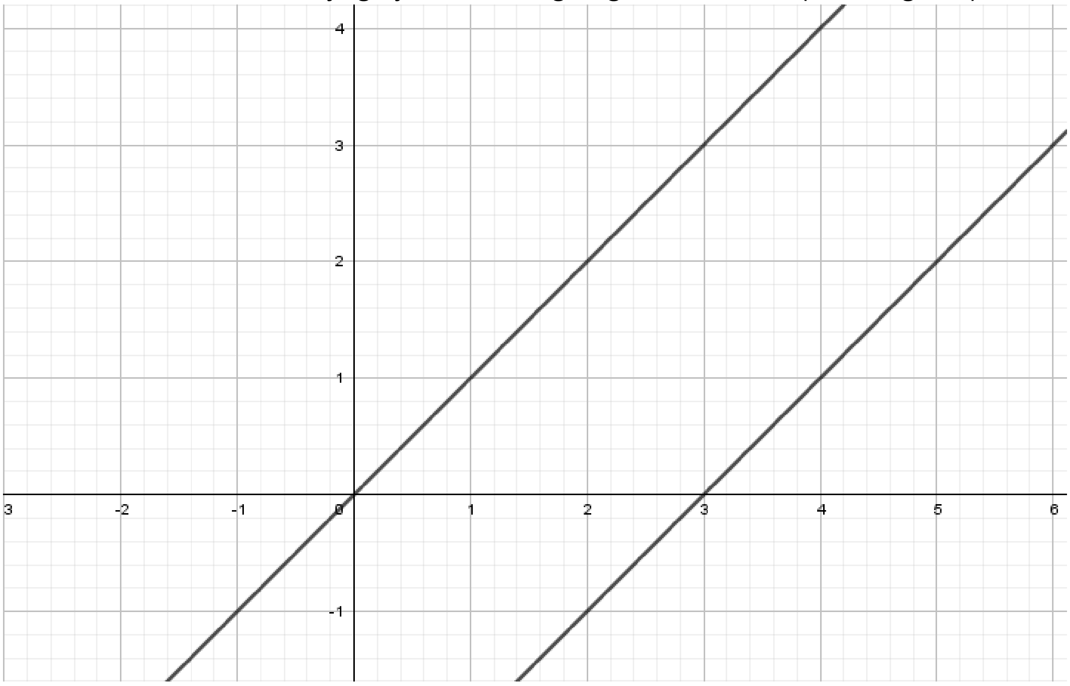
--> We zetten a en b ff in de standaardvorm: $a: \frac{x-2}{2} = \frac{y-\frac{1}{2}}{-1} = z$

$b: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = z - 2$

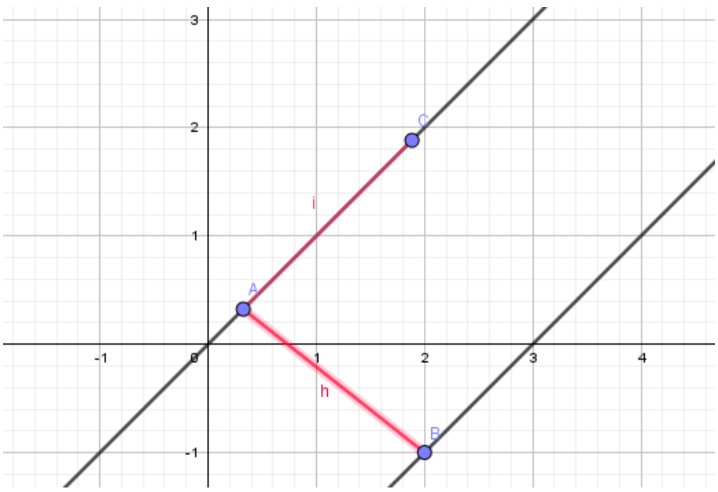
--> We lezen de rige's af van beide vergelijkingen: (2, -1, 1) en (2, -1, 1)

--> De rechten zijn dus evenwijdig, ze zijn op een evenredigheidsfactor 1 na bepaald.

➔ Dus: als twee rechten evenwijdig zijn ziet het er grof geschetst zo uit (thx Geogebra)



--> Een vlak is bepaald dankzij 2 rechtenrichtingen, we moeten dus twee richtingsgetallen verkrijgen. Je bepaald eerst een rechtenrichting op één rechte en daarna één tussen beide rechten.



--> Op de visuele voorstelling van de vorige pagina zie je dat we dus twéé punten op één rechte moeten hebben en één punt op een andere rechte.

Je mag zelf kiezen van welke rechte je twéé punten neemt en van welke één punt.

--> In de verbetersleutel hebben ze één punt van a gepakt en twéé van b, dit mag andersom.

We nemen een punt van a en twee punten van b (mag ook andersom)

Een punt van rechte a: $\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$

Twee punten van rechte b: $(-1,3,2)$ en $(1,2,3)$

--> Om punten te zoeken (wat we al hebben ingeoefend in de samenvatting) vul je een random x-, y- of z-waarde in en kijk je algebraïsch na wat de bijbehorende waarden zijn.

--> Kijk naar de eerste punt van rechte b: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = z - 2$

--> Mnr. Vandelaer of Wanten heeft dit punt strategisch gekozen, want als je z = 2 invult krijg je 0.

--> Dan moet je nachecken wanneer $\frac{y-3}{2} = 0$ waar is, dat is als y = 3.

--> Analoog voor de x-waarde bekom je dan dat x -1 moet zijn.

--> En nu goed opletten, neem dit van me aan:

Je weet dat je de vergelijking van een vlak in een determinant schrijft:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ a & b & c & 0 \\ a' & b' & c' & 0 \end{vmatrix} \boxed{= 0}$$

--> Je vult in de plaats van x_1, y_1 en z_1 de coördinaten van het punt op de rechte waar je maar één punt op hebt gekozen, in dit geval op de verbetersleutel rechte a.

--> Dus op de plaats van de tweede rij schrijf je het punt: 1, ½, 0

--> Op de andere rechte heb je twéé punten gekozen, deze twéé punten mag (moet) je op de plaats van de richtingsgetallen zetten. Die twee punten geven namelijk de rechtenrichting aan.

--> Dus ipv a b c en a' b' c' schrijf je -1, 3, 2 en 1, 2, 3

--> Dan verkrijg je deze determinant: credits to verbetersleutel:

$$\text{vgl } \alpha: \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3x + 4y - 2z - 5 = 0$$

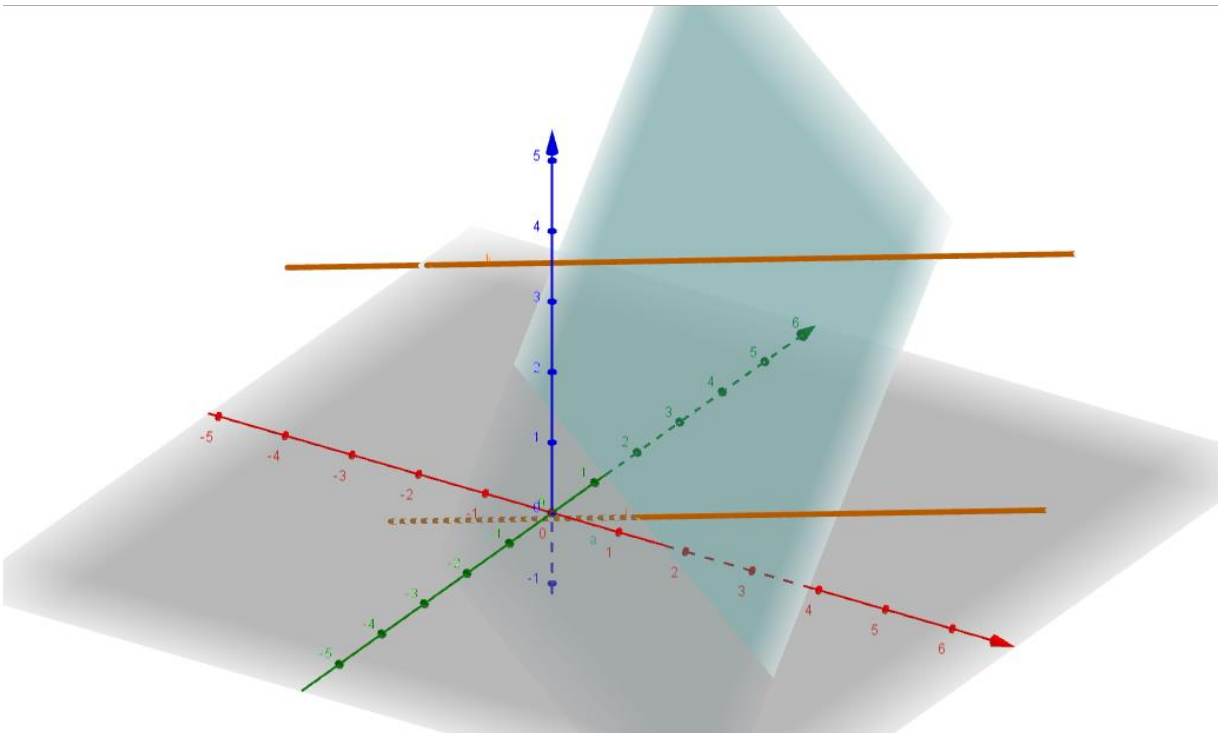
--> Je werkt de determinant uit volgens de werkwijze die ik heb uitgelegd in deel 5.x.3 (voor wie het nog niet door had --> deze werkwijze gebruik je best altijd, letterlijk altijd), daarna bekom je de vergelijking van het vlak van de verbetersleutel.

--> Ik doe de uitwerking van de determinant niet altijd voor omdat ik verwacht dat iedereen ze wel kan na een paar voorbeelden.

➔ Je hebt nu dus de vergelijking: 3x + 4y – 2z – 5 = 0, is dit wel juist? We voeren onze gegeven rechten in geogebra in en checken na.

--> Ter herinnering, de rechten waren: a: $\frac{x-1}{2} = \frac{1-2y}{2} = z$ en b: $\frac{x+1}{2} = 3 - y = z - 2$

→ Ik heb alle vergelijkingen ingegeven in geogebra en krijg volgend output:



➔ Je ziet goed op deze voorstelling dat het vlak door beide (evenwijdige) rechten gaat, deze werkwijze is dus 100% zeker een juiste werkwijze.

--> Je gebruikt deze werkwijze altijd als je een vlak door twee evenwijdige rechten moet maken!

*Veel succes op de toets/het examen! May the ruimtemeetkundegoden be with you.