Samenvatting wiskunde – rijen en reeksen – made by Abdellah

(Y) VOORWOORD

Dit is de samenvatting wiskunde ter voorbereiding van het laatste deel van analyse voor dit examen, rijen en reeksen.

(X) FOUT?

Dat kan, meld fouten a.u.b. direct aan Abdellah.

(Z) INHOUDSTAFEL

Over twee pagina's.

Samenvatting wiskunde – M4 – analyse: rijen en reeksen – examen M4

1) Rijen

DEFINITIE: Een reële rij is een afbeelding van $\mathbb{N}_0$ in $\mathbb{R}$.

We onderscheiden 2 soorten rijen: rekenkundige en meetkundige rijen.

1.1) De rekenkundige rij

1.1.1) Voorbeeld

VOORBEELD: Abdellah zet als gynaecoloog op dag 1 vijf baby's op aarde, de volgende dag helpt hij bij 7 bevallingen, de dag daarna zet hij 9 baby's op aarde, de dag daarna 11 … elke dag helpt hij bij 2 extra bevallingen.

VRAAG: Hoeveel bevallingen zijn er op dag 248?

OPLOSSING: We stellen het expliciet voorschrift op van de rij

$u(n) = u_1 + (n-1)v$ = FORMULE

--> $u(n) = 5 + (n-1).2$

→ DUS: $u(248) = 5 + (248-1).2 = 499$

Het expliciet voorschrift van een rij is het voorschrift uitgaande van de beginterm u_1.

Op dag 248 zijn er 499 bevallingen (waaraan Abdellah meewerkt).

1.1.2) Formules

Expliciet voorschrift = voorschrift van een rij uitgaande van de éérste term van de rij.

= $u_n = u_1 + (n-1)v$

v = het verschil

Recursief voorschrift = voorschrift uitgaande van de laatste term van de rij.

= $u_n = u_{n-1} + v$

Omdat het recursief voorschrift uitgaat van de vorige term van de rij, wordt dit voorschrift minder vaak gebruikt dan het expliciet voorschrift. Als je wilt weten hoeveel bevallingen er voor Abdellah zijn op dag 248, moet je immers eerst weten hoeveel bevallingen er zijn op dag 247 voor het recursief voorschrift.

1.1.3) Voorbeeldoefeningen: basisoefeningen met RR

OPGAVE 1 in de cursus

a) Van een RR is gegeven dat $u_1 = 10$ en $v = -6$. Hoeveel is u_7?

--> $u_n = u_1 + (n-1)v$

$= 10 + (7-1).(-6) = -26$

--> Dit was gewoon de formule invullen.

b) Van een RR is $u_3 = 4$ en $v = 0{,}5$. Hoeveel is u_7?

--> Hier maak je het best gebruik van het recursief voorschrift.

$u_4 = u_3 + 0{,}5 = 4{,}5$

$u_5 = 5$

…

$u_7 = 6$

--> Je telt bij het recursief voorschrift gewoon telkens het verschil op.

d) Van een RR is $u_{20} = 620$ en $u_{25} = 520$. Hoeveel is u_1?
--> Je hebt géén u_1 noch een verschil gegeven.
--> Je kan de v wel bepalen…

$$\frac{u_{25}\,(grootste\ n) - u_{20}(kleinste\ n)}{5\,(aantal\ plaatsen\ dat\ je\ bent\ opgeschoven\ in\ de\ rij)} = v$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{520-620}{5} = -20$$

--> Nu kan je u_1 bepalen door steeds 20 keer op te tellen.
--> Als je één n-waarde omhooggaat in je rij, ga je 20 getallen omlaag.
--> Als je dus één n-waarde omlaag gaat in je rij, ga je 20 getallen omhoog.

-->--> $u_{19} = u_{20} + 20 = 640$

$u_{18} = 660$

$u_{16} = 700$

…

$u_{11} = 800$

…

$u_6 = 900$

…

$u_1 = 1000$

--> We checken na: $u_{25} = u_1 + (n-1)v = 1000 + (25-1).(-20) = 520$
→ Dus: we zitten juist!

1.1.4) Eigenschappen van de rekenkundige rij

1.1.4.1) Eigenschap 1

EIGENSCHAP 1:

We maken de rij van Abdellah's bevallingen als gynaecoloog:

5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 …

We merken op dat: **5 + 17 = 22**
7 + 15 = 22
9 + 13 = 22

Eigenschap 1: De som van termen die even ver van de uiterste term verwijderd zijn is constant.

1.1.4.2) Eigenschap 2

EIGENSCHAP 2:

Uit eigenschap 1 volgt dat: de som van de eerste n termen van een rekenkundige rij gegeven wordt door volgende formule -->

$$S_n = \frac{n}{2}.(u_1 + u_n)$$

We hernemen Abdellah's bevallingen. Stel dat Abdellah wilt weten hoeveel bevallingen hij zal behandelen na dag 50? Dan moet hij de formule voor de som invullen.

$s_{50} = \frac{50}{2} . (5 + u_{50})$

Eerst moet hij u_{50} uitrekenen m.b.v. het expliciet voorschrift.

$u_n = u_1 + (n-1)v$
⇔ $u_{50} = 5 + (50-1).2 = 5 + 49.2 = 103$

DUS: $s_{50} = \frac{50}{2} . (5 + 103) = 2700$

Na 50 dagen zal Abdellah dus geholpen hebben met 2700 bevallingen.

1.2) De meetkundige rij

1.2.1) Voorbeeld en expliciet voorschrift

VOORBEELD: Sam is ziek. Hij besmet 2 klasgenoten, die 2 klasgenoten besmetten elk 2 andere personen, die 2 andere personen besmetten elk nog 2 andere personen. Hoeveel personen zijn er in totaal besmet geweest op dag 2018 als je aanneemt dat elke besmette persoon, inclusief Sam, na 1 dag geneest.

We redeneren een beetje:
*Sam is ziek ==> 1 zieke op dag 1.
*Sam is ziek (1) en besmet 2 klasgenoten ==> 1 . 2 = 2 zieken
*2 klasgenoten (2) besmetten elk 2 personen ==> 2 . 2 = $1 . 2^2$ = 4
*4 personen (4) besmetten nog 2 andere personen ==> 4 . 2 = $1 . 2^3$ = 8

We merken een regelmaat op. Sam is op dag 1 besmet, op dag 2 zijn 2 personen besmet, op dag 3 zijn 2^2 personen besmet, op dag 4 zijn 2^3 personen besmet … op dag n zijn 2^{n-1} personen besmet.

De algemene formule voor het expliciet voorschrift bij een rekenkundige rij is:

$$u_n = u_1 . q^{n-1}$$

--> Hier: $u_n = 1 . 2^{n-1}$
--> 2 = q = de reden = het getal waarmee je de hele tijd vermenigvuldigd.

1.2.2) Eigenschappen van een meetkundige rij

1.2.2.1) Som van alle termen

De som van de eerste termen in een meetkundige rij wordt weergegeven door volgende formule:

$$s_n = u_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (q \neq 1)$$

$$s_n = u_1 . n \quad (q = 1)$$

Als we willen weten <u>hoeveel</u> mensen er door Sam ziek zijn geweest na 332 dagen, moeten we de somformule invullen…

$s_{2018} = 1\,.\frac{2^{332}-1}{2-1}$
$= 8{,}75\,.\,10^{99}$ personen
→ Sam heeft dus best veel personen, voor één dag, ziek gemaakt.

1.2.3) Voorbeeldoefeningen: basisoefeningen op MR

OEFENING 1 IN DE CURSUS:

h) Van een MR is bekend dat $u_4 = -2{,}56$ en $u_6 = -1{,}6384$, hoeveel is u_1?

$u_4 = -2{,}56$
$u_6 = -1{,}6384$

--> We kunnen hier onze q uithalen, we weten immers dat…

$u_4\,.\,q = u_5$
$u_5.\,q = u_6$
➔ DUS: $u_4\,.\,q^2 = u_6$
⇔ $-2{,}56\,.\,q^2 = -1{,}6384$
⇔ $q^2 = \frac{-1{,}6384}{-2{,}56} = 0{,}64$
⇔ $q = \pm\sqrt{0{,}64} = \pm 0{,}8$

Nu we onze q kennen, kunnen we $u_1$bepalen. We gaan voor de eenvoud enkel door met de positieve oplossing, maar je hebt hier dus twéé mogelijkheden! Je weet dat…

$u_4.\,q = u_5$
==> DUS: $\frac{u_5}{q} = u_4$
$\frac{u_4}{q} = u_3$
$\frac{u_3}{q} = \frac{u_4}{q^2} = u_2$
➔ DUS: $\frac{u_4}{q^3} = \frac{-2{,}56}{0{,}8^3} = -5$

j) Van een MR is $u_5 = 32$ en $u_{11} = 2048$. Hoeveel is u_{16}?

Zelfde werkwijze als vorige oefening…

$u_5\,.\,q^6 = u_{11}$
⇔ $q^6 = \frac{u_{11}}{u_5}$ ⇔ $q = \sqrt[6]{\frac{u_{11}}{u_5}}$

⇔ $q = \sqrt[6]{\frac{2048}{32}} = 2$

Nu kan je u_{16} bepalen, dit gaat vanuit u_{11}, je weet immers dat…

$u_{11}\,.\,q^5 = u_{16}$
⇔ $2048\,.\,2^5 = u_{16}$
⇔ $u_{16} = 65536$
--> Dit is het antwoord!

1.3) Overzicht rekenregels MK/RK-rijen

REKENKUNDIGE RIJ:
$u_n = u_1 + (n-1)v$
$s_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$

MEETKUNDIGE RIJ:
$u_n = u_1\,.\,q^{n-1}$
$s_n = u_1.\frac{q^n-1}{q-1}$ OF als q = 1: $s_n = u_1\,.\,n$

2) Reeksen

2.1) Rekenkundige reeks

2.1.1) Voorbeeld

De examencommissie van de chemie-olympiade beslist om iedereen die boven de 95 heeft gescoord 2 euro op de eerste maand te geven en elke maand 5 euro extra te geven. Geef de rekenkundige rij weer die het bedrag weergeeft dat Abdellah heeft gekregen na n maanden:

$u_n = u_1 + (n-1)v$

⇔ $u_n = 2 + (n-1)5$

--> Na 100 maanden krijgt Abdellah: $u_{100} = 2 + (100-1).5 = 497\ euro$

We kunnen de sommen maken van het bedrag dat Abdellah krijgt.

$s_1 = 2\ euro$

$s_2 = (2+7)euro$

--> Na één maand krijg ik immers 5 euro extra en ontvang ik dus in totaal 7 euro.

$s_3 = (2+7+12)euro$

--> Nog eens 5 euro opslag…

➔ **De sommen van een rij, vormen op zich ook een rij.**

-->--> We definiëren de rij van de sommen via het sommatieteken:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 2 + k\,.\,v)$$

$$= 2 + 7\ (k=1) + \ 12(k=2) + 17(k=3) + \cdots$$

--> De sommatieteken gebruiken we om een optelling korter op te schrijven. k = 0 betekent gewoon dat mijn optelling begint vanaf k = 0 en nergens eindigt (… + ∞)

De gewone rij en de rij van de sommen vormen samen een reeks.

2.2) Meetkundige reeks

2.2.1) Voorbeeld

We zijn voor eeuwig opgesloten op school. Nadat we iedereen zijn water hebben verzameld komen we uit op 10 liter, we beslissen elk uur in totaal de helft te drinken. Geef de meetkundige rij voor die het aantal water in verloop van tijd weergeeft.

$$u_n = u_1\,.\,q^{n-1}$$
$$= 10\,.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

We kunnen opnieuw de sommen maken.

$s_1 = 10$

$s_2 = 10 + \left(10\,.\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1}\right) = 10 + 5 = 15$

$s_3 = 10 + 5 + 2{,}5$

$s_4 = 10 + 5 + 2{,}5 + 1{,}25$

$s_n = 10 + 5 + 2{,}5 + 1{,}25 + \cdots$

--> We noemen s_n de n-de partiële som van de reeks.

3) Convergentie- en divergentie-onderzoek van een rij & reeks

Je moet <u>kunnen</u> onderzoeken of een rij/reeks convergeert of divergeert. In de cursus staan verschillende mogelijkheden opgesomd maar Kevin zei dat je deze niet vanbuiten moet leren maar ze moet herkennen in een oefening. We maken dus enkele voorbeeldoefeningen.

Een reële rij of reeks convergeert als ze naar een getal toegaat.
Een reële rij of reeks divergeert als ze <u>niet</u> naar een getal toegaat.

3.1) Voorbeeldoefening 1

<u>OEFENING 3A IN DE CURSUS:</u>

- -

OPGAVE:
Stel een formule op voor de partiële som van volgende rekenkundige of meetkundige reeks en onderzoek aan de hand daarvan het convergentiegedrag van de reeks. Geef ook een grafische voorstelling.

3 + 7 + 11 + 15 + …

- -

OPLOSSING:
*Dit is overduidelijk een rekenkundige reeks aangezien je de hele tijd + een getal hebt 3 + 4 = 7 + 4 = 11 + 4 = 15.

Je kent de formule voor een som van een rekenkundige reeks…

$s_n = \frac{n}{2}.(u_1 + u_n)$

$\quad = \frac{n}{2}.(3 + u_n)$

Je moet de formule van u_n hier nu in substitueren. Je kent de formule van u_n…
$u_n = u_1 + (n-1)v$
--> Je kent u_1 $(= 3)$ en v $(= 4)$
⇔ $u_n = 3 + (n-1).4$
⇔ $u_n = 3 + 4n - 4$
⇔ $u_n = -1 + 4n$

Je kan dit substitueren in s_n…

$s_n = \frac{n}{2}.[3 + (-1 + 4n)]$

$\quad = \frac{n}{2}.[3 - 1 + 4n]$

$\quad = \frac{n}{2}.[\,2 + 4n]$

$\quad = \frac{n}{2}.2 + 4n.\frac{n}{2}$

$\quad = n + \frac{4n^2}{2}$

$\quad = n + 2n^2$

Om de congruentie van deze reeks te onderzoeken moet je $\lim_{n\to\infty} s_n$ nemen…

$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} n + 2n^2 = \lim_{n\to\infty} 2n^2 = \infty$ (limietregels veeltermfuncties)

➔ De reeks zal dus divergeren.

Gaat de rij u_n convergeren of divergeren? We zullen eens kijken…
We hebben op de vorige pagina uitgewerkt tot: $u_n = -1 + 4n$

--> $\lim_{n\to\infty} -1 + 4n = 4\,.\,\infty = \infty$

➔ De rij divergeert dus ook.

Het makkelijkste onderdeel van de vraag is: maak een grafische voorstelling. Je kent u(n) en s(n), je kan nu de grafieken tekenen door functiewaarden te zoeken.

$u_n = -1 + 4n$

--> $u_1 = -1 + 4 = 3$

--> $u_2 = -1 + 4\,.\,2 = -1 + 8 = 7$

--> $u_9 = -1 + 4\,.\,9 = -1 + 36 = 35$

$s_n = n + 2n^2$

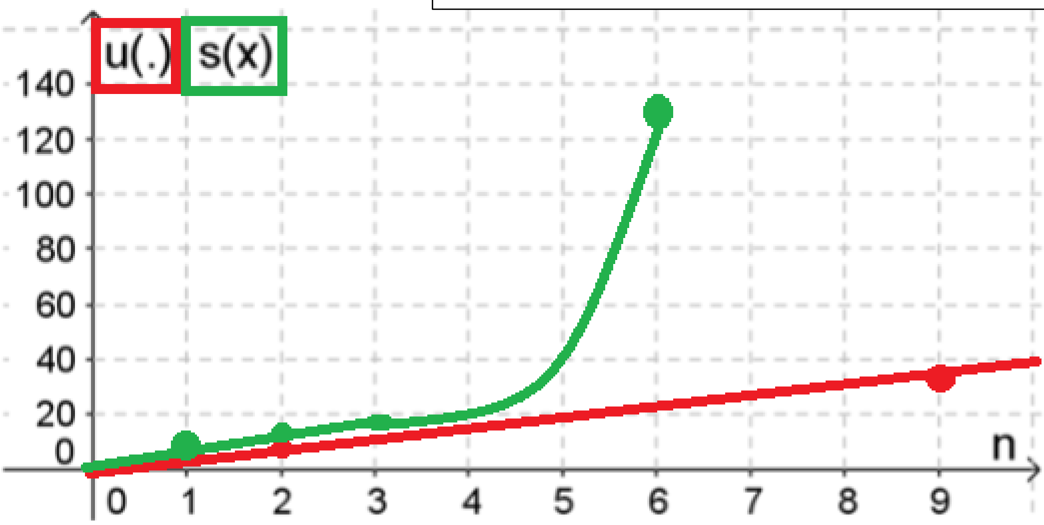
--> $s_1 = 1 + 2\,.\,1^2 = 3$

--> $s_2 = 2 + 2\,.\,2^2 = 10$

--> $s_3 = 1 + 2\,.\,2^3 = 17$

--> $s_6 = 1 + 2\,.\,2^6 = 129$

Onze grafische voorstellingen ondersteunen onze eerdere bevindingen over dat de zowel de rij als de reeks divergeert.



3.2) Voorbeeldoefening 2

<u>OEFENING 3F IN DE CURSUS:</u>

- -

OPGAVE:
Stel een formule op voor de partiële som van volgende rekenkundige of meetkundige reeks en onderzoek aan de hand daarvan het convergentiegedrag van de reeks. Geef ook een grafische voorstelling.

-27 + (-9) + (-3) + (-1) …

- -

Dit is overduidelijk een meetkundige rij aangezien je steeds deelt door 3 (is hetzelfde als steeds maal 1/3de doen). Je reden, q, is dus $\frac{1}{3}$.

Je kent de formule voor de som van een meetkundige rij…

$$s_n = u_1 \, . \frac{q^n - 1}{q-1}$$

$$= -27 \, . \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\frac{1}{3} - 1}$$

$$= -27 \, . \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{-27}{-\frac{2}{3}} \, . \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1\right)$$

(Omdat m'n klasgenoot met wie ik altijd oefeningen maak deze tussenstap moeilijk begreep: het *__scheelt letterlijk niks__* *waar je je breuk zet bij een vermenigvuldiging. Of je nu* $6 \, . \frac{2}{3}$ *doet of* $\frac{6}{3} \, . 2$*, je zal in beide gevallen gewoon 4 uitkomen.)*

VERGEET JE HAAKJES NIET WANT VOOR EEN BREUK STAAN ONZICHTBARE HAAKJES!

$$= -27 \, . \left(-\frac{3}{2}\right) . \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1\right)$$

$$= 13{,}5 \, . \, 3 \, . \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1\right)$$

$$= 40{,}5 \, . \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1\right)$$

[Nu worden de meeste fouten gemaakt --> mag je 40,5 – 1 doen? NEEN, volgorde van bewerkingen ==> maal heeft VOORRANG op de optelling (aftrekking)]

We willen nu de convergentie onderzoeken en pakken dus de limiet naar oneindig…

$$\lim_{n \to \infty} 40{,}5 \, . \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1\right)$$

We kunnen dit schrijven als…

$$\lim_{n \to \infty} 40{,}5 \, n^0 \, . \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1\right)$$

--> Iets tot de nulde macht is immers altijd gelijk aan 1.

Wat doet n als het oneindig nadert? Neem n = 1 om te beginnen.

$$40{,}5 \, . \, 1^0 \, . \left(\left(\frac{1}{3}\right)^1 - 1\right) = groot$$

Neem n = 10 (reken uit met je ZRM)

$$40{,}5 \; 10^0 \, . \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{10} - 1\right) = kleiner$$

Neem n = 332 (je rekenmachine kan maximum tot macht 333 uitrekenen)

$$40{,}5 \, . \, 100^0 \, . \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{332} - 1\right) = -40{,}5 \; (afgeronde\ waarde)$$

--> *Je zakrekenmachine is zo dom dat het deze waarde afrond.*

$\left(\frac{1}{3}\right)^n$ zal 0 naderen als het naar oneindig gaat, hou je enkel -1 over. Iets tot de nulde is altijd 1

Omdat je reeks een getal nadert, zeggen we dat de reeks convergeert!

--> $40{,}5 \,.\, (-1) = -40{,}5 \rightarrow onze\ limiet\ nadert - 40{,}5!$

Zal onze rij een getal naderen?

$u_n = u_1 . q^{n-1}$

$= -27 \,.\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

--> Nu moet je, zoals je al weet, de limiet naar oneindig nemen…

$\lim_{n\to\infty} -27 \,.\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

--> We kunnen dit schrijven als…

$\lim_{n\to\infty} -27n^0 .\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ (iets tot de nulde macht is immers altijd 1)

$= -27 \,.\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ (omdat iets in het oneindig tot de nulde macht nog steeds 1 is)

➔ Nu moeten we beredeneren: wat doet $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ als n oneindig nadert? Zoals we daarjuist al hebben gezien zal n zorgen dat ons getal oneindig klein wordt en 0 zal naderen.

$= -27 \,.\, 0 = 0$

Onze rij convergeert ook, het zal 0 naderen.

We maken onze meetkundige voorstellingen van u_n en s_n. We bekijken onze gevonden formules:

$u_n = -27 \,.\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

--> $u_1 = -27 \,.\left(\frac{1}{3}\right)^{0} = -27$

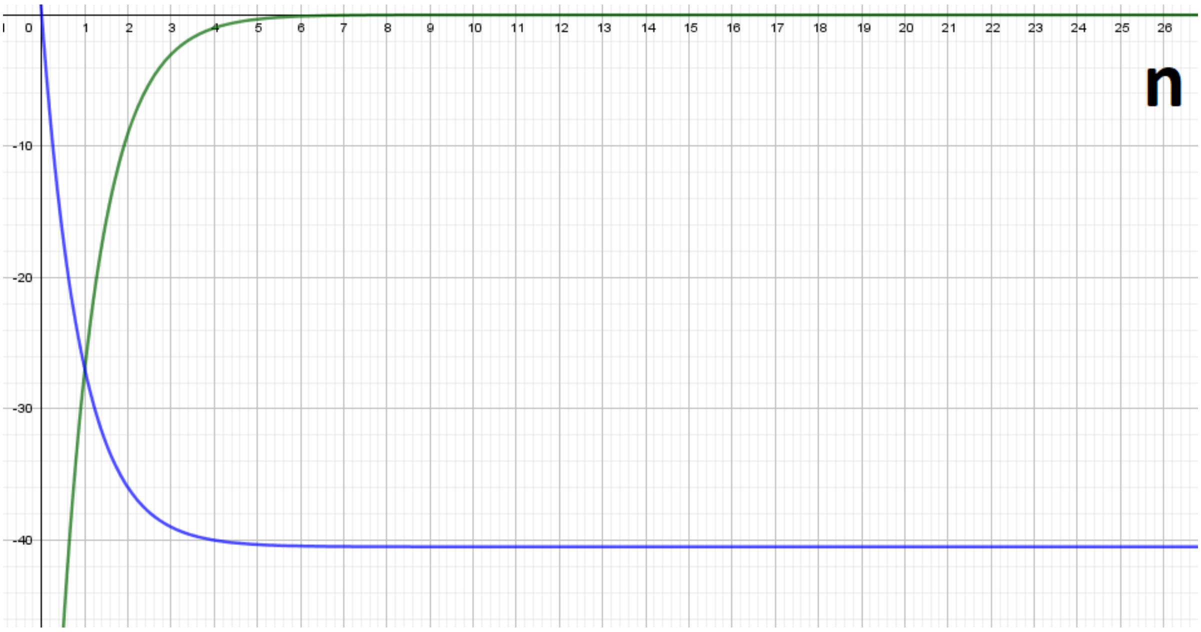
--> $u_3 = -27 \,.\left(\frac{1}{3}\right)^{3-1} = -3$

--> $u_7 = -27 \,.\left(\frac{1}{3}\right)^{7-1} = -0{,}03$

$s_n = 40{,}5 \,.\left(\frac{1}{3}\right)^{n} - 1$

--> Hier moet je ook enkele punten van zoeken.

Als je je punten plot in de grafiek, krijg je volgende grafiek.



Deze grafiek ondersteunt onze gevonden convergenties (0 en -40,5).

3.3) Voorbeeldoefening 3

Oefening 3c in de cursus

- -

OPGAVE:
Stel een formule op voor de partiële som van volgende rekenkundige of meetkundige reeks en onderzoek aan de hand daarvan het convergentiegedrag van de reeks.

(-10) + 20 + (-40) + 80 + …

- -

We zien duidelijk meetkundige rij: q = -2

$u_1 = -10$

We vullen de formule voor de som van een meetkundige rij in…

$$s_n = u_1 \,.\frac{q^n - 1}{q-1}$$

$$= -10\,.\frac{(-2)^n - 1}{-2-1}$$

$$= -10\,.\frac{(-2)^n - 1}{-3}$$

$$= -\frac{10}{-3}\,.((-2)^n - 1)$$

$$= 3{,}33\,.((-2)^n - 1)$$

$$= 3{,}33\, n^0\, ((-2)^n - 1)$$

Nu de limiet nemen zoals de gewoonte…

$$\lim_{n\to\infty} 3{,}33\, n^0\, [(-2)^n - 1]$$

--> We beredeneren:

--> neem n = 2: $3{,}33 . 2^0 . [(-2)^2 - 1] = 9{,}99$
--> neem n = 3: $3{,}33 . 3^0 . [(-2)^3 - 1] = -29{,}97$
--> neem n = 200: $3{,}33 . 200^0 . [(-2)^{200} - 1] = 5{,}35 . 10^{60}$
--> neem n = 299: $3{,}33 . 300^0 . [(-2)^{299} - 1] = -3{,}39 . 10^{90}$

Je merkt dat je voor n = even een positief getal krijgt.
Je merkt dat je voor n = oneven een negatief getal krijgt.
--> Het getal verspringt steeds van positief naar negatief als je n groter neemt.

Je nadert dus niks, noch oneindig noch min oneindig noch een getal. De limiet bestaat niet dus je reeks divergeert (herinnering: limiet = een getal naderen!).

3.4) Voorbeeldoefening 4

3.4.1) Voorbeeldoefening 4a

Bepaal van volgende reeksen s_8 en indien mogelijk de restfout
$\boldsymbol{\Sigma_{k=1}^{+\infty} (-0{,}9 . 1{,}1^{k-1})}$

Eerst moet je bepalen of dit een rekenkundige of een meetkundige reeks is. Zoals je ziet doe je maal een getal en heb je dus een rekenkundige reeks.

De rest van een CONVERGENTE reeks is gedefinieerd door volgende formule:
$r_n = s - s_n$ --> waarbij s = het getal waar de reeks naartoe convergeert.

Als de reeks dus divergeert, dan heb je GEEN, ABSOLUUT GEEN, rest!

Convergeert of divergeert onze reeks?
--> Je weet nog dat we de limiet naar oneindig moeten nemen om de convergentie of divergentie van een reeks te onderzoeken.
$\lim_{n\to\infty} (-0{,}9) \frac{1{,}1^{n}-1}{1{,}1-1} = -oneindig$
--> Wat doet n als het oneindig keer groot wordt? Je ziet dat q > 1 (q = de reden = de factor met wat je de hele tijd vermenigvuldigt), dus zal k ervoor zorgen dat 1,1 telkens een groter getal wordt!
--> Die – voor de -0,9 zorgt ervoor dat het getal uiteindelijk negatief wordt, de reeks divergeert dus naar $-\infty$, wat betekent dat je géén restfout hebt!

De restfout bestaat dus niet want de reeks is divergent.

3.4.2) Voorbeeldoefening 4b

$\Sigma_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3} . (k-1)\right)$
--> Dit is een rekenkundige reeks, wat je ziet doordat de k niet in een macht staat maar als een gewone vermenigvuldiging. Je kan deze reeks herschrijven als…

$\Sigma_{k=1}^{+\infty} \left(0 + \frac{1}{3} . (k-1)\right)$
--> De reeks heeft dus als beginterm 0.

Convergeert of divergeert de reeks? Hiervoor moeten we de limiet naar oneindig nemen.

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2}.(u_1+u_n)\right)=\left(\frac{n}{2}.(0+u_n)\right)$
--> $u_n=u_1+(n-1).v$
→→ DUS: $\frac{n}{2}.\left(0+0+(n-1).\frac{1}{3}\right)=\frac{n}{2}.\left((n-1).\frac{1}{3}\right)=oneindig$
--> Als je van n een steeds groter getal maakt, zie je dat de reeks oneindig nadert.
-->--> De reeks DIVERGEERT, dus er is géén restfout!

3.4.3) Voorbeeldoefening 4C

$\Sigma_{k=1}^{+\infty}\left(100\,.\,0{,}95^{k-1}\right)$
--> Convergeert of divergeert de reeks? We bepalen s_8.
-->--> We nemen de limiet naar oneindig om dit na te checken:
$\lim_{n\to\infty}100\,.\frac{0{,}95^n-1}{0{,}95-1}$
→ Neem een steeds groter getal voor n en je ziet dat de limiet 2000 nadert, dus = 2000.

Nu bepalen we s_8:
--> $s_8=u_1\,.\frac{q^n-1}{q-1}=100\,.\frac{0{,}95^8-1}{0{,}95-1}=673$
→ DUS: $r_n=2000-673=1327$

3.5) Voorbeeldoefening 5

3.5.1) Voorbeeldoefening 5a

Onderzoek het convergentiegedrag van de reeksen met algemene term:
$u_n=\frac{n+1}{n\,.2^n}$

Dit is géén meetkundige noch rekenkundige rij. Zulke rijen moet je nachecken met de stelling van d'Alembert:

$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=t$ --> t is elk reëel getal, inclusief oneindig.
→ Als t ∈ $[0,1[$, dan convergeert de reeks.
→ Als $t=1$, dan weet je niet of de reeks convergeert of divergeert, dan is extra uitleg nodig.
→ Als $t>1$, dan divergeert de reeks.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{n+1+1}{(n+1).2^{n+1}}}{\frac{n+1}{n\,.2^n}}\right|$$

→ n + 1 betekent na de n nog een 1 zetten.

$$=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{n+2}{(n+1).2^{n+1}}}{\frac{n+1}{n\,.2^n}}\right|$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n+2}{(n+1).2^{n+1}}\cdot\frac{n\,.2^n}{n+1}\right|$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{n+2}{(n+1).\cancel{2^{n+1}}} \cdot \frac{n.\cancel{2^n}}{n+1} \right|$$

$$\boxed{\frac{2^n}{2^{n+1}} = 2^{n-(n+1)} = 2^{n-n-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{(n+2).n}{(n+1).2\,.(n+1)} \right|$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{n^2+2n}{2n^2+\cdots} \right|$$

→ Limietregels rationale functies:

graad teller = graad noemer --> vereenvoudigen

→ DUS: $\frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$

Omdat $t = \frac{1}{2}$ convergeert de reeks!

3.5.2) Voorbeeldoefening 5b

$u_n = \frac{3^{2n}}{n!}$ --> convergeert of divergeert deze rij?

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{\frac{3^{2(n+1)}}{(n+1)!}}{\frac{3^{2n}}{n!}} \right| = \left| \frac{3^{2(n+1)}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^{2n}} \right|$$

KLAD: $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1).n!} = \frac{1}{(n+1)}$

$\frac{3^{2(n+1)}}{3^{2n}} = \frac{3^{2n+2}}{3^{2n}} = 3^2$

$\frac{3^2}{(n+1)} = \frac{9}{n+1}$

--> Graad teller = 0

--> Graad noemer = 1

➔ Graad teller < graad noemer --> limiet gaat naar 0, DUS: reeks convergeert.