Wiskunde – examen M4 – analyse – made by Abdellah – het atheneum Hasselt

Wiskunde (7u) – examen M4 – kegelsneden – made by Abdellah – het Atheneum hasselt

----

(Z) VOORWOORD

Dit is de samenvatting ter voorbereiding van het examen wiskunde voor M4

Samenvattingenreeks wiskunde – analyse – irrationale functies

Inhoud

1) Machten met rationale exponenten

1.1) Rekenregels

1.1.1) Wat zijn machten ?

*We gebruiken machten om een vermenigvuldiging af te korten:

$a . a . a . \dots . a = a^n$ (n factoren)

$a^1 = a$

$a^0 = 1$

$a^{-1} = \frac{1}{a}$

$a^{-n} = \frac{1}{a . a . a \dots . a}$ (n factoren)

1.1.2) Rekenregels met machten

(1) $a^p . a^q = a^{p+q}$

(2) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

(3) $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$

(4) $(a . b)^p = a^p . b^p$

(5) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$

(6) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \left(\frac{b}{a}\right)^p$

1.1.3) n-demachtswortels in $\mathbb{R}$

*De meest bekende n-demachtswortel is de vierkantswortel die we schrijven als $\sqrt{x}$, dit is in feite de tweedemachtswortel die we kunnen schrijven als $\sqrt[2]{x}$.

--> Daarnaast hebben we de derdemachtswortel $\sqrt[3]{x}$, de vierdemachtswortel $\sqrt[4]{x}$ enz... over het algemeen dus de n-demachtswortel $\sqrt[n]{x}$.

*Als n even is:

--> Heeft elk strikt positief reëel getal in $\mathbb{R}$ twee tegengestelde vierkantswortels.

--> Bijvoorbeeld $\sqrt{4} = \pm 2$

--> Heeft het getal 0 één n-demachtswortel in $\mathbb{R}$, namelijk het getal 0 zelf.

--> Heeft elk strikt negatief reëel getal géén n-demachtswortels.

*Als n oneven is:

--> Heeft elk reëel getal in $\mathbb{R}$ juist één n-demachtswortel, ook negatieve getallen dus. We noteren die getallen als $\sqrt[n]{x}$.

--> Bijvoorbeeld: $\sqrt[3]{8} = 2$ (-2 is géén oplossing aangezien $-2^3 = -8$!)

$\sqrt[3]{-8} = -2$

1.1.4) Rekenregels met wortels

(7) $\sqrt[n]{a^n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

(8) $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

(9) $\sqrt[n]{a . b} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b}$

(10) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$
(11) $\sqrt[k.n]{a^{k.m}} = \sqrt[n]{a^m}$
(12) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

1.1.5) Machten met rationale exponenten

$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$
--> De macht van de wortel gaat in de noemer en de macht bij je term in de teller.

1.2) Wortelvormen vereenvoudigen

1.2.1) Wortel zo klein mogelijk maken.

*Je schrijft een wortel best zo dat het getal onder de wortel zo klein mogelijk is.
$\sqrt{12} = \sqrt{4.3} = \sqrt{4}.\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

*Je maakt de noemer ook best wortelvrij.
$\frac{1}{\sqrt[3]{7}} = \frac{1}{\sqrt[3]{7}} \cdot \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7}} \cdot \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7}} = \frac{(\sqrt[3]{7})^2}{(\sqrt[3]{7})^3} = \frac{\sqrt[3]{49}}{7}$

1.3) Voorbeeldoefeningen

1.3.1) Oefening 1: wortels uitrekenen of vereenvoudigen

*Oefening 1 cursus: bereken zonder ZRM of vereenvoudig.

a) $\sqrt[3]{1000^5}$
$= \sqrt[3]{(10^3)^5}$ (1000 = 10^3)
$= \sqrt[3]{10^{15}}$ (machten met elkaar vermenigvuldigen)
$= 10^{\frac{15}{3}} = 10^5 = 100\ 000$

b) $\sqrt[5]{(0{,}00032)^2}$
$= \sqrt[5]{\left(\frac{32}{10000}\right)^2}$ (0,00032 in decimale vorm schrijven)
$= \left(\sqrt[5]{\frac{32}{100000}}\right)^2$ (je mag een macht buiten de wortel brengen)
$= \left(\frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{100000}}\right)^2$ (je mag een wortelvorm splitsen in teller en noemer)
$= \left(\frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{10^5}}\right)^2$ (100 000 = 10^5)
$= \left(\frac{2}{10}\right)^2$ (wortelvorm uitrekenen)
$= \frac{4}{100} = 0{,}04$ (rekenen in de reële getallenverzameling

d) $\sqrt[4]{(-2)^{-8}}$

$= \sqrt[4]{\frac{1}{(-2)^8}}$ (negatieve macht wordt positief in de breuk)

$= \frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{(-2)^8}}$ (je mag een wortel opsplitsen)

$= \frac{1}{(-2)^{\frac{8}{4}}}$ (je mag een wortel schrijven als een macht met rationaal exponent)

$= \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ (uitrekenen)

j) $\left(\sqrt[n]{a^n b^{2n}}\right)^{-2}$

$= \sqrt[n]{a^{-2n} b^{-4n}}$ (je mag de macht binnen de wortels brengen)

$= a^{-\frac{2n}{n}} b^{-\frac{4n}{n}}$ (je mag een wortel schrijven als een macht met rationaal exponent)

$= a^{-2} b^{-4}$ (uitrekenen)

$= \frac{1}{a^2 b^4}$

1.3.2) Opgave 2: Wortels vereenvoudigen

*Opgave 2: Vereenvoudig.

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[4.3]{2} = \sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}}$

b) $\sqrt{\sqrt[5]{10}} = \sqrt[2.5]{10} = \sqrt[10]{10} = 10^{\frac{1}{10}}$

c) $\sqrt[5]{2^{15}} = 2^{\frac{15}{5}} = 2^3 = 8$

d) $\sqrt[10]{32} = \sqrt[10]{6^2} = 6^{\frac{2}{10}} = 6^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{6}$

e) $\sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{6^2} = 6^{\frac{2}{4}} = 6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$

f) $\sqrt[4]{5} \,.\, \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{35}$

g) $\sqrt[5]{4^{20}} = 4^{\frac{20}{5}} = 4^4 = 4^2 . 4^2 = 16 \,.\, 4 \,.\, 4 = 64 \,.\, 4 = 256$

j) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$

1.3.3) Opgave 3: nog meer wortels vereenvoudigen

*Opgave 3: Vereenvoudig.

a) $\sqrt[4]{20000} = \sqrt[4]{2 \,.\, 10000} = \sqrt[4]{2} \,.\, \sqrt[4]{10000} = \sqrt[4]{2} \,.\, \sqrt[4]{10^4} = \sqrt[4]{2} \,.\, 10 = 10\sqrt[4]{2}.$

f) $\sqrt[n]{a^{3n+2}} = a^{\frac{3n+2}{n}} = \sqrt[n]{a^{3n+2}}$ (onvereenvoudigbaar!)

g) $\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[6]{a} - 1\right) . \sqrt[3]{-a^2}$

$= \left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{6}} - 1\right) . -a^{\frac{2}{3}}$ (wortels schrijven als machten)

$= a^{\frac{2}{3}} . \left(-a^{\frac{2}{3}}\right) + a^{\frac{1}{6}} \,.\, (-a^{\frac{2}{3}}) - (-a^{\frac{2}{3}})$ (distributief uitwerken)

$= a^{\frac{2}{3}} . \left(-a^{\frac{2}{3}}\right) + a^{\frac{1}{6}} \,.\, \left(-a^{\frac{2}{3}}\right) + a^{\frac{2}{3}}$ (haakjesregel)

$= -a^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{6}+\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}$ (rekenregels machten)

$= -a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{5}{6}} + a^{\frac{2}{3}}$ (uitwerken)

$= \sqrt[3]{-a^4} - \sqrt[6]{a^5} + \sqrt[3]{a^2}$ (machten als wortels schrijven)

$= \sqrt[3]{(-a)^3(-a)} - \sqrt[6]{a^5} + \sqrt[3]{a^2} = -a\sqrt[3]{a} - \sqrt[6]{a^5} + \sqrt[3]{a^2}$ (uitwerken)

n) $\frac{a-b}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$

$= \frac{a-b\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}$

$= \frac{a-b\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})}$ (wortels in noemer als machten)

$= \frac{a-b\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}{a^{\frac{2}{4}}-b^{\frac{2}{4}}}$ [(a+b)(a-b) = a² - b²]

$= \frac{a-b\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ (machten terug als wortels)

$= \frac{a-b\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$ (we gaan merkwaardig product in N toepassen)

$= \frac{a-b\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$ [(a+b)(a-b) = a² - b²]

$= \left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ (vereenvoudigen)

$= \left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a^2}+\sqrt[4]{b^2}\right)$ (rekenregel: $\sqrt[k.n]{a^{k.m}} = \sqrt[n]{a^m}$)

$= \sqrt[4]{a}\,.\sqrt[4]{a^2}+\sqrt[4]{a}\,.\sqrt[4]{b^2}-\sqrt[4]{b}\,.\sqrt[4]{a^2}-\sqrt[4]{b}\,.\sqrt[4]{b^2}$ (distributiviteit)

$= \sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{ab^2}-\sqrt[4]{ba^2}-\sqrt[4]{b^3}$

1.3.4) Opgave 6: maak de noemers wortelvrij

a) $\frac{21}{\sqrt{98}} = \frac{21}{\sqrt{98}} \cdot \frac{\sqrt{98}}{\sqrt{98}} = \frac{21\sqrt{98}}{(\sqrt{98})^2} = \frac{21\sqrt{98}}{98}$

b) $\frac{5}{\sqrt[4]{1000}} = \frac{5}{\sqrt[4]{1000}} \cdot \frac{\sqrt[4]{1000}}{\sqrt[4]{1000}} \cdot \frac{\sqrt[4]{1000}}{\sqrt[4]{1000}} \cdot \frac{\sqrt[4]{1000}}{\sqrt[4]{1000}} = \frac{5(\sqrt[4]{1000})^3}{(\sqrt[4]{1000})^4} = \frac{5\left(\sqrt[4]{10^3}\right)^3}{1000} = \frac{5\left(\sqrt[4]{10^9}\right)}{10^3} = \frac{5\left(\sqrt[4]{10^8.10}\right)}{1000}$

$= \frac{1.10^{\frac{8}{4}}.10^{\frac{1}{4}}}{200} = \frac{10^2\sqrt[4]{10}}{2.10^2} = \frac{\sqrt[4]{10}}{2}$

i) $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} \cdot \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

a + b . a - b = a² - b²

(a - b)² = a² - 2ab + b²

$= \frac{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2}{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}$

$= \frac{(3\sqrt{2})^2-2.3\sqrt{2}.2\sqrt{3}+(2\sqrt{3})^2}{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}$

$= \frac{9.2-12\sqrt{6}+4.3}{9.2-4.3} = \frac{18-12\sqrt{6}+12}{18-12} = \frac{30-12\sqrt{6}}{6} = 5-2\sqrt{6}$

l) $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{10}-3}-\frac{1}{\sqrt{10}+3}} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{10}-3}\cdot\frac{\sqrt{10}+3}{\sqrt{10}+3}-\frac{1}{\sqrt{10}+3}\cdot\frac{\sqrt{10}-3}{\sqrt{10}-3}}$

$= \sqrt{\frac{\sqrt{10}+3}{\sqrt{10}-3(\sqrt{10}+3)}-\frac{\sqrt{10}-3}{\sqrt{10}-3(\sqrt{10}+3)}}$

(a+b)(a-b) = a² - b² $= \sqrt{\frac{\sqrt{10}+3}{\left(\sqrt{10}\right)^2-3^2}-\frac{\sqrt{10}-3}{\left(\sqrt{10}\right)^2-3^2}}$

$= \sqrt{\frac{\sqrt{10}+3}{10-9}-\frac{\sqrt{10}-3}{10-9}}$

$= \sqrt{\frac{\sqrt{10}+3}{1}-\frac{\sqrt{10}-3}{1}} = \sqrt{\sqrt{10}+3-(\sqrt{10}-3)}$

$= \sqrt{\sqrt{10}+3-\sqrt{10}+3} = \sqrt{6}$

1.3.5) Opgave 7: nog meer vereenvoudigen

*Opgave 7: vereenvoudig

c) $\left[\sqrt[4]{a^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right]^{-\frac{8}{3}} = \left[a^{-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}\right]^{-\frac{8}{3}} = \left[a^{-\frac{3}{8}}b^{\frac{1}{8}}\right]^{-\frac{8}{3}} = a^{-\frac{3}{8}\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)}b^{\frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)}$

$= a^1\, b^{-\frac{1}{3}} = \frac{a}{b^{\frac{1}{3}}} = \frac{a}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a}{\sqrt[3]{b}}\cdot\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}}\cdot\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{b}\right)^3}$

$= \frac{a\sqrt[3]{b^2}}{b}$

e) $\frac{\sqrt[5]{a^3b}\,.\,\sqrt{ab^3}}{a\,\sqrt[10]{ab^7}} = \frac{(a^3b)^{\frac{1}{5}}(ab^3)^{\frac{1}{2}}}{a\,.(ab^7)^{\frac{1}{10}}} = \frac{a^{3\cdot\frac{1}{5}}b^{\frac{1}{5}}\;a^{\frac{1}{2}}\,b^{3\cdot\frac{1}{2}}}{a\,.a^{\frac{1}{10}}\,.b^{7\cdot\frac{1}{10}}} = \frac{a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{1}{5}}\;a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}}{a\,.a^{\frac{1}{10}}\,.b^{\frac{7}{10}}} = \frac{a^{\frac{3}{5}+\frac{1}{2}}\,b^{\frac{1}{5}+\frac{3}{2}}}{a^{\frac{11}{10}}\,b^{\frac{7}{10}}} = \frac{a^{\frac{6}{10}+\frac{5}{10}}\,.b^{\frac{2}{10}+\frac{15}{10}}}{a^{\frac{11}{10}}b^{\frac{7}{10}}}$

$= \frac{a^{\frac{11}{10}}b^{\frac{17}{10}}}{a^{\frac{11}{10}}b^{\frac{7}{10}}} = a^{\frac{11}{10}-\frac{11}{10}}b^{\frac{17}{10}-\frac{7}{10}} = a^0b^{\frac{10}{10}} = 1\,.\,b^1 = b$

1.4) Verdiepingsoefeningen

1.4.1) Oefening 9 cursus

*n = 1 --> $\sqrt{2} = 1{,}41$

*n = 2 --> $\sqrt{2+\sqrt{2}} = 1{,}84$

*n = 3 --> $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 1{,}96$

*n = 4 --> $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} = 1{,}99$

*n = 5 --> $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} = 1{,}998$

b) Recursief voorschrift --> $u_n = \sqrt{2 + u_n - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = 2$

1.4.2) Wiskunde-olympiadevragen

1.4.2.1) Opgave 10 cursus

10. (V) De zevende machtswortel uit $7^{(7^7)}$ is

(a) 7^7 (b) $7^{(7^7-1)}$ (c) $7^{(6^7)}$ (d) $7^{(7^6)}$ (e) $(\sqrt{7})^7$

Je kan 7^{7^7} schrijven als… $7^{7 . 7 . 7 . 7 . 7 . 7 . 7}$

--> De zevendemachtswortel schrijf je dan als: $\sqrt[7]{7^{7 . 7 . 7 . 7 . 7 . 7 . 7}}$

--> Je kan een wortel als een macht schrijven, dit wordt: $7^{\frac{7 . 7 . 7 . 7 . 7 . \cancel{7} . 7}{\cancel{7}}}$

--> Je kan één 7 schrappen vanboven en vanonder: $7^{7 . 7 . 7 . 7 . 7 . 7}$

--> 6 keer 7 kan je schrijven als 7^6 --> 7^{7^6} --> D = OK!

1.4.2.2) Opgave 11 cursus

11. (V) Als $x \geq 0$, dan is $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ gelijk aan

(a) $x\sqrt{x}$ (b) $x\sqrt[4]{x}$ (c) $\sqrt[8]{x}$ (d) $\sqrt[8]{x^3}$ (e) $\sqrt[8]{x^7}$

$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ kan je schrijven als…

$\sqrt{x\sqrt{x \, . \, x^{\frac{1}{2}}}}$ kan je schrijven als…

$\sqrt{x \, . \, x^{\frac{1}{2}} . \, x^{\frac{1}{4}}}$ kan je schrijven als…

$$x^{\frac{1}{2}} . x^{\frac{1}{4}} . x^{\frac{1}{8}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = x^{\frac{4}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}} = x^{\frac{7}{8}} = \sqrt[8]{x^7} \rightarrow E = OK!$$

1.4.2.3) Opgave 13 cursus

De opgave luidt:

13. (V) Welk van de vijf volgende getallen is het kleinst?

(a) $\sqrt[30]{30}$ (b) $\sqrt[6]{2}$ (c) $\sqrt[10]{3}$ (d) $\sqrt[12]{4}$ (e) $\sqrt[15]{5}$

Om te kijken welk getal het grootste is, doe je alles tot de macht van de grootste n-demachtswortel (in dit geval: 30) en kijk je welk getal het grootst is. Zie Ismaels uitwerking volgende pagina.

$$\left(\sqrt[30]{30}\right)^{30} = 30^{\frac{30}{30}} = 30^1 = 30$$
$$\left(\sqrt[6]{2}\right)^{30} = 2^{\frac{30}{6}} = 2^5 = 32$$
$$\left(\sqrt[10]{3}\right)^{30} = 3^{\frac{30}{10}} = 3^3 = 27$$
$$\left(\sqrt[12]{4}\right)^{30} = 4^{\frac{30}{12}} = 4^{\frac{5}{2}} = \sqrt{4}^5 = 2^5 = 32$$
$$\left(\sqrt[15]{5}\right)^{30} = 5^{\frac{30}{15}} = 5^2 = 25 \rightarrow (e)$$

1.4.2.4) Opgave 12 cursus

12. (V) $\sqrt[6]{a}.\sqrt[3]{a}$ met $a > 0$ is gelijk aan

(a) $\sqrt{a}$ (b) $\sqrt[9]{a}$ (c) $\sqrt[12]{a}$ (d) $\sqrt[9]{a^2}$ (e) $\sqrt[18]{a^2}$

$\sqrt[6]{a}\,.\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{6}}.a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{6}}.a^{\frac{2}{6}} = a^{\frac{1}{6}+\frac{2}{6}} = a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \rightarrow A = OK!$

1.4.2.5) Opgave 14 cursus

14. (V) $\sqrt{25^{4a^2}}$ is gelijk aan

(a) 25^{2a} (b) $25^{2|a|}$ (c) 25^{2a^2} (d) $5^{2|a|}$ (e) 5^{2a^2}

Omdat $4a^2$ in de exponent staat, neem je eigenlijk de wortel daarvan. C = OK!

2) Irrationale vergelijkingen

2.1) Definitie

*Een irrationale vergelijking is een vergelijking waarin de onbekende voorkomt onder een wortelteken.
--> Bv.: $\sqrt{x+1} = 6$

2.2) Oplossingsmethode

2.2.1) Algemene algebraïsche oplossingsmethode

Als je een irrationale vergelijking oplost, kwadrateer je natuurlijk om alle wortelvormen weg te krijgen. Echter bestaat bij kwadrateren het gevaar dat je oplossingen erbij verzint die er niet zijn. Daarom moet je de zogenaamde *kwadraterings- en bestaansvoorwaarde* opstellen voor de irrationale vergelijking als ze er is.

De bestaansvoorwaarde van de vergelijking moet slechts 1x gemaakt worden. De kwadrateringsvoorwaarde moet telkens weer opnieuw gemaakt worden als je kwadrateert.

2.2.2) Praktische algebraïsche oplossingsmethode

Omdat de oplossingsmethode van de kwadraterings- en bestaansvoorwaarde omslachtig is, hebben we een praktischere oplossingsmethode om deze vergelijkingen op te lossen.

Wanneer je kwadrateert, moet je jouw dubbele pijl/equivalentie (⇔) vervangen door een enkele pijl/implicatie (=>). Je kwadrateert totdat je géén wortels meer hebt en lost de niet-irrationale vergelijking op. Uiteindelijk check je voor alle oplossingen na of ze in het begin aanleiding geven tot een ware uitspraak.

2.2.3) Grafische oplossingsmethode

*Methode 1: Je herleid de functie naar de vorm f(x) = 0 en leest de nulwaarden af.
*Methode 2: je beschouwt LL en RL als aparte functies en leest de x-waarden van de snijpunten af.

2.3) Voorbeeldoefeningen

2.3.1) Oefening 1 cursus: makkelijk

*Meneer Wanten zei dat je kan bewijzen dat alle oplossingen die je vindt in deze eenvoudige irrationale vergelijkingen altijd juist zijn. Dus bij irrationale vergelijkingen van de vorm $f(x) = een\ getal$ hoef je in principe niet na te checken of de oplossingen aanleiding geven tot een ware uitspraak.

a) $\boldsymbol{\sqrt{x-1} = 4}$
=> $x - 1 = 16$ (we kwadrateren: implicatie!)
⇔ $x = 17$
--> Is 17 zinvol? $\sqrt{17-1} = \sqrt{16} = 4$

Opl = {17}

f) $\boldsymbol{\sqrt{x^2+3x}=2}$
=> $x^2+3x=4$
⇔ $x^2+3x-4=0$
D = b² - 4ac
= 3² - 4 . 1 . (-4)
= 9 + 16 = 25

$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=1$

$x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=-4$

--> Nachecken of 1 en -4 zinvol zijn…
1: $\sqrt{x^2+3x}=2$ ⇔ $\sqrt{1^2+3.1}=2$ ⇔ $\sqrt{4}=2$ ⇔ $2=2!$
-4: $\sqrt{x^2+3x}=2$ ⇔ $\sqrt{(-4)^2+3.(-4)}=2$ ⇔ $\sqrt{4}=2$ ⇔ $2=2!$

Opl = {1, -4}

2.3.2) Opgave 2 cursus

i) $\boldsymbol{\sqrt{8x+49}=8+x}$
=> $8x+49=(8+x)^2$
⇔ $8x+49=8^2+2.8.x+x^2$ (dubbel product!)
⇔ $8x+49=64+16x+x^2$
⇔ $-x^2+8x-16x+49-64=0$
⇔ $-x^2-8x-15=0$
⇔ $x^2+8x+15=0$ (maal -1)
D = b² - 4ac = 4

$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=-3$

$x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=-5$

Zijn -3 en -5 zinvol?

-3: $\sqrt{8.(-3)+49}\ ?=?\ 8+(-3)$
⇔ $\sqrt{-24+49}\ ?=?\ 5$
⇔ $5\ !=!\ 5$

-5: $\sqrt{8.(-5)+49}\ ?=?\ 8+(-5)$
⇔ $\sqrt{-40+49}\ ?=?\ 3$
⇔ $3\ !=!\ 3$

Beide getallen zijn zinvol.

Opl = $\{3, 5\}$

2.2.3) Opgave 3 cursus

h) $\boldsymbol{2\left(\sqrt{x^2+7x-2}-3\right)=x}$
Je kwadrateert hier best niet op het begin aangezien je wortels zal overhouden dankzij het dubbel product als je kwadrateert.

⇔ $2\sqrt{x^2+7x-2}-2.3=x$
⇔ $2\sqrt{x^2+7x-2}-6=x$
⇔ $2\sqrt{x^2+7x-2}=x+6$
--> Nu kan je kwadrateren omdat al je wortels nu zullen verdwijnen.
=> $4(x^2+7x-2)=(x+6)^2$
⇔ $4x^2+28x-8=x^2+2\,.\,6\,.\,x+6^2$
⇔ $4x^2+28x-8=x^2+12x+36$
⇔ $3x^2+16x-44=0$
D = b^2 - 4ac = 16^2 - 4 . 3 . (-44) = 784

$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=2$

$x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=-7{,}33$

Leiden 2 en -7,33 tot een ware uitdrukking?
$2\left(\sqrt{x^2+7x-2}-3\right)=x$
--> 2 invullen: $2\left(\sqrt{2^2+7.2-2}-3\right)=2$
--> Narekenen met ZRM: $2=2$!

--> -7,33 invullen: $-7{,}33\left(\sqrt{(-7{,}33)^2+7.(-7{,}33)-2}-3\right)=-7{,}33$
--> ZRM geeft: -7,33 = -4,70
--> Dit is een valse uitspraak, -7,33 hoort dus niet tot je oplossingsverzameling!

TIP: Je kan met de CALC-functie van je rekenmachine ook makkelijk nachecken of een oplossing al dan niet zinledig (= geen zin heeft) is.

Opl = {2}

2.2.4) Opgave 4 cursus

Deze opgave is verdieping omdat je zowel links als rechts wortels hebt. Soms kan je de wortels direct wegwerken, soms zorgt het dubbel product ervoor dat je nog een wortelvorm hebt staan.

h) $2\sqrt{10-3x}-2\sqrt{15-5x}=-\sqrt{-2x}$
⇔ $2\sqrt{10-3x}-2\sqrt{15-5x}=-1.\sqrt{-2x}$ (1 is onzichtbaar en schrijven we meestal niet)
=> $\left(2\sqrt{10-3x}-2\sqrt{15-5x}\right)^2=\left(-1.\sqrt{-2x}\right)^2$

⇔ $\left(2\sqrt{10-3x}\right)^2-2\,.2\sqrt{10-3x}\,.2\sqrt{15-5x}+\left(2\sqrt{15-5x}\right)^2=(-1)^2.\left(\sqrt{-2x}\right)^2$
(hier heb ik het dubbel product uitgevoerd)
⇔ $4\,.\,(10-3x)-8\,.\sqrt{10-3x}\,.\sqrt{15-5x}+4(15-5x)=1\,.\,(-2x)$ (beetje vereenvoudigen)
⇔ $[40-12x]-8\,.\sqrt{(10-3x)(15-5x)}+[60-20x]=\;-2x$ (rekenregels wortels)
⇔ $[40-12x]+[60-20x]-8\,.\sqrt{150-50x-45x+15x^2}=-2x$
⇔ $100-32x-8\,.\sqrt{15x^2-95x+150}=2x$
⇔ $8\,.\sqrt{15x^2-95x+150}=30x-100$
=> $64\,.\,(15x^2-95x+150)=(30x-100)^2$
⇔ $960x^2-6080x+9600=900x^2-6000x+10000$
⇔ $60x^2-80x-400=0$
D = b^2 - 4ac = 102 400

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-80)+\sqrt{102\,400}}{2.60} = \frac{80+\sqrt{102\,400}}{120} = 3{,}33$$
$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-80)-\sqrt{102\,400}}{2.60} = \frac{80-\sqrt{102\,400}}{120} = -2$$

Leiden de getallen -2 en 3,33 tot zinvolle uitdrukkingen?

$2\sqrt{10-3x} - 2\sqrt{15-5x} = -\sqrt{-2x}$

--> Vul -2 en 3,33 in met je ZRM aangezien je hier véél rekenwerk hebt.

--> -2: LL = -2

RL = -2

→ LL = RL --> -2 is een oplossing

--> 3,33: LL = MATH ERROR

RL = MATH ERROR

--> LL/RL kunnen niet berekend worden --> -3,33 is géén oplossing

Opl = {-2}

2.2.5) Opgave 5 cursus: hulponbekende

h) $\mathbf{36 - 3\sqrt{x^4+5} = (x^4+5)\sqrt{x^4+5}}$

$36 - 3\sqrt{x^4+5} = (x^4+5)\sqrt{x^4+5}$

--> Dit is een grote klus, als je kwadrateert kom je met een supergrote macht en moet je 20x horner toepassen om de oplossing te bekomen, daarom voeren we een hulponbekende in. Dit is een onbekende die ons helpt de oplossing te vinden.

HULPONBEKENDE: $y = x^4 + 5$

--> We hebben y gelijkgesteld aan die waarde, omdat je die waarde 3x hebt.

Na het invoeren van de hulponbekende verkrijg je de zogenaamde *resolvente vergelijking*, we lossen de resolvente vergelijking dus nu op.

⇔ $36 - 3\sqrt{y} = y\sqrt{y}$

⇔ $-3\sqrt{y} - y\sqrt{y} = 36$

⇔ $3\sqrt{y} + y\sqrt{y} = -36$

⇔ $(3+y)\sqrt{y} = -36$

⇔ $(3+y)^2\sqrt{y^2} = (-36)^2$

⇔ $(9 + 6y + y^2)y = 1296$

⇔ $9y + 6y^2 + y^3 = 1296$

⇔ $y^3 + 6y^2 + 9y - 1296 = 0$

--> Deelbaar door (y-9), want f(9) = 0, vul 9 in in de functie !

We passen Horner toe:

	1	**6**	**9**	**-1296**
9		**9**	**135**	**1296**
	1	**15**	**144**	**0**

$(y^2 + 15y + 144)(y-9) = 0$

$y^2 + 15y + 144 = 0$ ∨ $y - 9 = 0$

$D = b^2 - 4ac$ => y = 9

$= (-15)^2 - 4\,.\,1\,.\,144$

$= -351 < 0$

We hebben dus y = 9

--> Kijken of dit een ware uitspraak geeft:

$36 - 3\sqrt{y} = y\sqrt{y}$

$\Leftrightarrow 36 - 3\,.\sqrt{9} = 9.\sqrt{9}$

$\Leftrightarrow 27 = 27$

Maar we zeiden: $y = x^4 + 5$

--> Dus: $x^4 + 5 = 9 \Leftrightarrow x^4 = 4$

--> Hulponbekende: y = x^2

$\Leftrightarrow y^2 = 4$

$\Leftrightarrow y = 2$ ∨ $y = -2$

--> Maar: y = x^2

$\Leftrightarrow x^2 = 2$ ∨ $x^2 = -2$

--> Verwerpen want x is reëel!

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Je moet nog nachecken met je ZRM of $\pm\sqrt{2}$ leidt tot een zinvolle uitdrukking. Na nachecken zie je dat dat zo is!

$Opl = \{\pm\sqrt{2}\}$

2.2.6) Opgave 6 cursus: rationale irrationale vergelijkingen

*Hier heb je een breuk én een wortel, wauw!

A) $\frac{\boldsymbol{x-1}}{\boldsymbol{\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}}} = \frac{\boldsymbol{\sqrt{x+7}-\sqrt{x+2}}}{\boldsymbol{2x+1}}$

--> Je kan de breuken makkelijk wegwerken met kruisproducten.

$\Leftrightarrow x - 1(2x+1) = \left(\boldsymbol{\sqrt{x+7}} - \boldsymbol{\sqrt{x+2}}\right)\left(\boldsymbol{\sqrt{x+7}} + \boldsymbol{\sqrt{x+2}}\right)$

a - b a + b = a² - b²

$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 2x - 1 = \left(\boldsymbol{\sqrt{x+7}}\right)^{\boldsymbol{2}} - \left(\boldsymbol{\sqrt{x+2}}\right)^{\boldsymbol{2}}$

$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = (x+7) - (x+2)$

$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = x + 7 - x - 2$

$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 5$

$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 6 = 0$

$\rightarrow D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4.2.(-6) = 49 \rightarrow \sqrt{D} = 7$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1)+7}{2.2} = 2$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1)-7}{2.2} = -1{,}5$

Na nachecken met je ZRM zie je dat beide oplossingen zinvol zijn. Je hebt hier niet eens een kwadrateringsvoorwaarde moeten opstellen.

D) $\sqrt{\frac{x-3}{x-4}} + \sqrt{\frac{x-4}{x-3}} = \frac{13}{6}$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-4}} + \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-3}} = \frac{13}{6}$ (rekenen met wortels)

$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x-3})^2}{(\sqrt{x-4})(\sqrt{x-3})} + \frac{(\sqrt{x-4})^2}{(\sqrt{x-4})(\sqrt{x-3})} = \frac{13}{6}$ (op gelijke noemers zetten)

$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x-3})^2 + (\sqrt{x-4})^2}{(\sqrt{x-4})(\sqrt{x-3})} = \frac{13}{6}$ (de optelling uitvoeren)

$\Leftrightarrow \frac{x-3+(x-4)}{(\sqrt{x-4})(\sqrt{x-3})} = \frac{13}{6}$ (kwadraat wegwerken)

$\Leftrightarrow \frac{2x-7}{\sqrt{x-4(x-3)}} = \frac{13}{6}$ (optelling uitvoeren en rekenregels wortels)

$\Leftrightarrow \frac{2x-7}{\sqrt{x^2-3x-4x+12}} = \frac{13}{6}$ (distributiviteit)

$\Leftrightarrow \frac{2x-7}{\sqrt{x^2-7x+12}} = \frac{13}{6}$ (aftrekking uitvoeren)

$\Leftrightarrow 6(2x-7) = 13\sqrt{x^2-7x+12}$ (kruisproducten)

$\Leftrightarrow 12x - 42 = 13\sqrt{x^2-7x+12}$ (distributiviteit)

=> $(12x-42)^2 = 169(x^2-7x+12)$ (kwadrateren)

$\Leftrightarrow 144x^2 - 1008x + 1764 = 169x^2 - 1183x + 2028$

$\Leftrightarrow -25x^2 + 175x - 264 = 0$

--> $D = b^2 - 4ac = 175^2 - 4\,.(-25).(-264) = 4225 \rightarrow \sqrt{D} = 65$

--> $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-175+65}{2\,.(-25)} = 2{,}2$

--> $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-175-65}{2\,.(-25)} = 4{,}8$

Na nachecken zie je dat beide oplossingen zinvol zijn.

$Opl = \{2{,}2\,;4{,}8\}$

2.2.7) Oefening 7: derdemachtswortels

Dit is verdieping maar vergelijkingen en ongelijkheden met derdemachtswortels zijn makkelijker dan met vierkantswortels en andere evenmachtswortels. Omdat elk reëel getal slechts één derdemachtswortel heeft kan je géén oplossingen bijmaken, daarnaast kan een derdemachtswortel wél een minteken onder de wortel bevatten. **Bij derdemachtswortels kan je dus onmogelijk oplossingen bijmaken**.

A $\sqrt[3]{x^2-7x+7} = x$

$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 7 = x^3$ (equivalentie geldt nog steeds bij machtsverheffing!)

$\Leftrightarrow -x^3 + x^2 - 7x + 7 = 0$

--> 1 is een deler: -1+1-7+7 = 0!

--> Deze veelterm is dus deelbaar door (x-1)

	-1	1	-7	7
1		-1	0	-7
	-1	0	-7	0

Onze nieuwe term: $(x-1)(-x^2-7)=0$

$\Leftrightarrow x-1=0 \quad \vee \quad -x^2-7=0$

$\Leftrightarrow x=1 \qquad \rightarrow x^2 = -7$

--> Verwerpen want $x \in \mathbb{R}$

We hebben dus één oplossing, we hoeven niet eens na te checken of hij zinvol is aangezien er bij een derdemachtswortel géén voorwaardes moeten worden opgesteld.

B $\sqrt[3]{x-13} < x-7$

$\Leftrightarrow x-13 < (x-7)^3$

$\Leftrightarrow x-13 < (x-7)^2(x-7)$

$\Leftrightarrow x-13 < [x^2-14x+49](x-7)$

$\Leftrightarrow x-13 < x^3-7x^2-14x^2+98x+49x-343$

$\Leftrightarrow x-13 < x^3-21x^2+147x-343$

$\Leftrightarrow 0 < x^3-21x^2+146x-330$

--> We checken na wanneer de veelterm deelbaar is --> f(5) = 0, dus deelbaar door (x-5)

	1	-21	146	-330
5		5	-80	330
	1	-16	66	0

$(x-5)(x^2-16x+66)=0$

⇔ $x - 5 = 0$ ∨ $x^2 - 16x + 66 = 0$

⇔ x = 5 D = b² - 4ac

= (-16)² - 4 . 1 . 66

= -8 < 0

De enige oplossing is dus x = 5, nu maken we het tekenverloop en kijken we wanneer x > 0.

x		5	
y	-	0	+

x is positief in het interval]5, ∞[, dit is het antwoord!

2.2.8) Opgaven wiskunde-olympiade

2.2.8.1) Opgave 8

8. (V) De oplossingenverzameling in $\mathbb{R}$ van de ongelijkheid $\sqrt{\frac{x^3+8}{x}} > x - 2$ is

(a) $\mathbb{R}$ (b) $\mathbb{R}_0^+$ (c) $\mathbb{R}^+$ (d) $]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$ (e) $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

$\sqrt{\frac{x^3+8}{x}} > x - 2$ is de gegeven ongelijkheid.

=> $\frac{x^3+8}{x} > (x-2)^2$ (kwadrateren)

⇔ $\frac{x^3+8}{x} > x^2 - 4x + 4$ (kwadrateren)

⇔ $x^3 + 8 > x(x^2 - 4x + 4)$

--> **LET OP: Als je deelt of vermenigvuldigd met een negatief getal keert het ongelijkheidsteken om. We kennen het teken van x niet, dus geldt er een bestaansvoorwaarde: $x \in \mathbb{R}_0^+$!**

⇔ $x^3 + 8 > x^3 - 4x^2 + 4x$

⇔ $8 > -4x^2 + 4x$

⇔ $4x^2 - 4x + 8 > 0$

$f(x) = 4x^2 - 4x + 8$
--> $D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4.4.8 = 16 - 128 < 0$

Er zijn géén nulwaarden, we maken het tekenverloop van onze ongelijkheid.

x	
y	+

Voor eenderwelke x-waarde die je invult is het beeld positief, dit is conform onze bestaansvoorwaarde. x kan dus in de hele reële getallenverzameling zitten.

A = OK!

2.2.8.2) Opgave 9

9. (V) Hoeveel van de volgende vijf vergelijkingen hebben minstens één oplossing in $\mathbb{N}_0$?

$$\sqrt{x} = \sqrt{x}$$
$$\sqrt{x}.\sqrt{x} = \sqrt{x} + \sqrt{x}$$
$$\sqrt{x}.\sqrt{x}.\sqrt{x} = \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x}$$
$$\sqrt{x}.\sqrt{x}.\sqrt{x}.\sqrt{x} = \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x}$$
$$\sqrt{x}.\sqrt{x}.\sqrt{x}.\sqrt{x}.\sqrt{x} = \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x}$$

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Vergelijking 1 heeft oneindig véél oplossingen.

Vergelijking 2:
$\sqrt{x} \,.\, \sqrt{x} = \sqrt{x} + \sqrt{x}$
--> Je ziet direct: als x = 4 vormt dit een ware vergelijking.
⇔ 2 . 2 = 2 + 2

Vergelijking 3:
$\sqrt{x} \,.\, \sqrt{x} \,.\, \sqrt{x} \,. = \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x}$
⇔ $\left(\sqrt{x}\right)^3 = 3\sqrt{x}$
⇔ $x\sqrt{x} = 3\sqrt{x}$

=> $x^2x = 9x$

⇔ $x^3 - 9x = 0$
⇔ $x(x^2 - 9) = 0$
⇔ $x = 0 \quad \vee \quad x = +3$
--> Nog één oplossing!

Vergelijking 4:
$\sqrt{x}\,.\sqrt{x}\,.\sqrt{x}\,.\sqrt{x} \;= \sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x}$
⇔ $\left(\sqrt{x}\right)^4 = 4\sqrt{x}$
⇔ $x^2 = 4\sqrt{x}$
=> $x^4 = 16x$
⇔ $x^4 - 16x = 0$
⇔ $x(x^3-16) = 0$
⇔ $x = 0 \quad \vee \quad x = \sqrt[3]{16}$
--> De derdemachtswortel van 16 is géén natuurlijk getal. Deze vergelijking heeft dus géén oplossingen in onze referentieverzameling.

Vergelijking 5:
$\sqrt{x}\,.\sqrt{x}\,.\sqrt{x}\,.\sqrt{x}\,.\sqrt{x} = \sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x}$
⇔ $\left(\sqrt{x}\right)^5 = 5\sqrt{x}$
⇔ $x^2\sqrt{x} = 5\sqrt{x}$
⇔ $x^2 = 5\ (delen\ door\ wortel\ x)$
⇔ $x = \pm\sqrt{5} \rightarrow géén\ natuurlijk\ getal!$

BESLUIT: C = OK --> drie vergelijkingen hebben natuurlijke oplossingen.

2.2.8.3) Opgave 10

10. (V) De vergelijking $\sqrt{x-p} = x$ heeft twee verschillende reële wortels als en slechts als p behoort tot

(a) $]-\infty,0]$ (b) $\left]-\infty,\frac{1}{4}\right[$ (c) $\left]-\infty,\frac{1}{4}\right[$ (d) $\left[0,\frac{1}{4}\right[$ (e) $\left]\frac{1}{4},+\infty\right[$

$\sqrt{x-p} = x$
=> $x - p = x^2$ **(LET OP: Er geldt hier een kwadrateringsvoorwaarde die je <u>niet</u> over het hoofd mag zien, de uitdrukking x-p > 0 anders heb je een negatieve wortel!)**
--> kwadrateringsvoorwaarde: x – p > 0
(LET OP: Er geldt ook een bestaansvoorwaarde! x ∈ $\mathbb{R}_0^+$)
⇔ $-x^2 + x - p = 0$

- ➔ $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\,.(-1).(-p) = 1 - 4p$
- ➔ Twéé reële oplossingen : D > 0

  $1 - 4p > 0 ⇔ 1 > 4p ⇔ \frac{1}{4} > p ⇔ p < \frac{1}{4}$

  --> Je zou nu zeggen dat de oplossing dit interval is: $]-\infty,\frac{1}{4}[$. Dit is fout.

  --> Let op: onze kwadrateringsvoorwaarde zei dat x – p nooit kleiner mag zijn dan 0, als je een p-waarde kleiner dan 0 invult krijg je een negatieve wortel wat niet kan rekening houdende met onze bestaansvoorwaarde voor x.

  --> Dus moet p groter of gelijk zijn aan 0 om zinvolle, reële oplossingen te hebben, maar moet p kleiner zijn dan ¼ .

  --> De oplossing is dus: $[0,\frac{1}{4}[\rightarrow D = OK!$

3) Irrationale functies

3.1) Limieten

3.1.1) Rekenregels cursus

*De hoofdeigenschap van limieten vertelt ons dat... $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, een functie is m.a.w. continu als haar limietwaarde in die functie bestaat.

*Een belangrijke rekenregel met limieten is... $\lim_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \to a} f(x)}$

--> Je mag m.a.w. de wortel onder de hele limiet zetten i.p.v. enkel onder de functie.

3.1.2) Rekenregels limieten specifiek

*Bij irrationale functies moet je volgende rekenregels in acht nemen bij het uitrekenen van limieten.

--> Normaal = limietwaarde invullen

→ Bv.: $\lim_{x \to 2} \sqrt{x^2 + 2} = \sqrt{6}$

--> *Vooraf: bij – en + oneindig weet je van vorig jaar nog dat we enkel kijken naar de hoogste macht.*

--> limiet naar $\pm \infty$ bij een functie zonder een breuk?

= zoveel mogelijk vereenvoudigen en daarna ∞ invullen met de rekenregels die we kennen.

--> **LET OP:** $\infty - \infty$ ***bestaat NIET***!

--> $-\infty = teken\ omdraaien\ bij\ x, x^3, x^5$ ...

$= teken\ behouden\ bij\ x^2, x^4, x^6$ ...

--> Bv.: $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 5} + 2x = x + 2x$ ($\sqrt{x^2} = x$)

$= x - 2x$ (bij – oneindig = teken omdraaien bij oneven machten)

$= -x$

$= -\infty$

--> Bv.: $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 5} + 2x = x + 2x$

$= 3x$

$= +\infty$

--> $\infty = teken\ behouden\ bij\ alle\ machten$

--> Bv.: $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x\sqrt{x}+5}{(\sqrt{x}-1)^3} = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}}$ De hoogste macht in teller en noemer is 1,5

--> Wortel telt voor een halve macht!

$= 2$ (graad teller = graad noemer --> vereenvoudigen)

--> $\sqrt{(-\infty)^2} = teken\ van\ oneindig\ omkeren$

--> Bv.: $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+5}+2x}{3x+1}$

$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x-2x}{-3x} = \frac{-x}{-3x} = \frac{1}{3}$

(let op: bij oneven machten geldt de regel van het teken bij de x omkeren nog steeds)

3.2) Afgeleiden

3.2.1) Afgeleide van een irrationale functie

*Om de afgeleide te bepalen van een irrationale functie hebben we één rekenregel.

$$D\left(\sqrt{f(x)}\right) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \, .Df(x)$$

--> Hieruit volgt… $D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

--> Volgens de kettingregel is de afgeleide van x = 1. 1 mogen we natuurlijk weglaten in een vermenigvuldiging.

*Niets weerhoudt je ervan om de wortel te schrijven als een macht met rationale exponent en de power rule of eenderwelke andere regel te gebruiken.

--> $D\left(\sqrt[m]{x^n}\right) = x^{\frac{n}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}$

--> Deze rekenregel pas je vooral toe bij hogeremachtswortels.

3.2.2) Herhaling rekenregels 5dejaar: afleiden

Uit samenvatting wiskunde module 3 halen we volgende passage…

1) Afgeleid getal/afgeleide functie bepalen: $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

2) Rekenregels veeltermfuncties afleiden:
   1) DC = 0 (constante functie)
   2) Dx = 1 (identieke functie)
   3) $D(x^n) = nx^{n-1}$ (power rule)
   4) D(f+g) = D(f) + D(g)
   5) D(f.g) = D(f) . g + f . D(g)
   6) $D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{Df.g - f.Dg}{g^2}$ (quotiëntregel)
   7) $D(x+y)^n \; met \; y \; is \; een \; getal = n(x+y)^{n-1}.D(x+y)$ (kettingregel)

3) L'Hopital: bij een vorm van 0/0 of oneindig/oneindig mag je teller en noemer apart afleiden.

3.2.3) Regel van L'hôpital

Als je van een irrationale functie de limiet moet bepalen en je bekomt 0/0 of oneindig/oneindig moet je L'hôpital gebruiken. Je hebt niet meer de keuze om Horner te gebruiken omdat je met rationale exponenten zit!

<u>Voorbeeld 1:</u>

$$\lim_{x \to 32} \frac{\sqrt[5]{x}-2}{x-32} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow (H) \rightarrow \lim_{x \to 32} \frac{x^{\frac{1}{5}}-2}{x-32} = \frac{\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}-0}{1-0} = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5\,.x^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{5\,.\sqrt[5]{x^4}} = \frac{1}{80} (\lim ingevuld \; in \; ZRM)$$

<u>Voorbeeld 2:</u>

$$\lim_{x\to -4} \frac{x+3+\sqrt{3x+13}}{x+4} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow (H) \rightarrow \lim_{x\to -4} \frac{1+0+\frac{1}{2\sqrt{3x+13}}.3}{1}$$ (Teller en noemer apart afgeleid)

➔ Vergeet niet: kettingregel te gebruiken!

noemer OOK af te leiden (vergeet ik soms)

$$= \lim_{x\to -4} \left(1+\frac{3}{2\sqrt{3x+13}}\right) = 2{,}5$$

3.2.4) Voorbeeldoefeningen afleiden irrationale functies

<u>VOORBEELD 1:</u>

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}$$

$$= \frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}$$ (gezien we een hogeremachtswortel hebben schrijven we als rationale exponent)

$$= \cancel{\frac{1}{\frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}}}$$ (dit is een fout die ik maakte, je mag niet over het hoofd zien: quotiëntregel!)

$$= \frac{0\,.x^{\frac{5}{4}} - 1\,.\frac{5}{4}.x^{\frac{1}{4}}}{\left(x^{\frac{5}{4}}\right)^2} = \frac{-\frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{10}{4}}}$$ (uitwerken: quotiëntregel)

$$= \frac{-5}{4\,x^{\frac{9}{4}}}$$ ($x^{1/4}$:$x^{10/4}$ = $x^{9/4}$ in de noemer)

$$= \frac{-5}{4\sqrt[4]{x^9}}$$ (rationale exponent terug schrijven als een macht)

Je kan dit voorbeeld ook maken met de power rule (macht naar voor, macht eentje minder), dan moet je bij stap 3 je x naar boven brengen --> $x^{-\frac{5}{4}}$ en verder uitwerken. Ga zelf na.

<u>VOORBEELD 2:</u>

$$f(x) = \sqrt{4+5x+6x^2}$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4+5x+6x^2}}\,.(5+6x) = \frac{5+6x}{2\sqrt{4+5x+6x^2}}$$ (de kettingregel niet vergeten!)

<u>VOORBEELD 3:</u>

$$f(x) = \frac{3x-7}{\sqrt{5x^2+1}}$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{3\,.(\sqrt{5x^2+1}) - (3x-7).\left(\frac{1}{2\sqrt{5x^2+1}}.10x\right)}{\left(\sqrt{5x^2+1}\right)^2}$$

(Quotiëntregel toegepast, niet vergeten de kettingregel ook toe te passen).

$$= \frac{3\sqrt{5x^2+1} - (3x-7).\frac{5x}{\sqrt{5x^2+1}}}{5x^2+1}$$ (uitwerken)

<u>VOORBEELD 3:</u>

$$f(x) = x\sqrt{x}$$

$\rightarrow f'(x) = 1 \,.\, \sqrt{x} + x . \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (productregel)

$$= \frac{\sqrt{x}\,.2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2(\sqrt{x})^2 + x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x}{2\sqrt{x}}$$

Je kon $\sqrt{x}$ ook vervangen door $x^{\frac{1}{2}}$, de machten bij elkaar optellen en de power rule gebruiken.

3.3) Asymptoten

3.3.1) Herhaling asymptoten module 3

3.3.1.1) Verticale asymptoot

Uit samenvatting wiskunde module 3 limieten halen we:

*Een rechte met vergelijking x = a (verticale rechte) is een verticale asymptoot als geldt:

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \pm\infty$ OF $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \pm\infty$ ➔ Je moet maar één van beide mogelijkheden nachecken.

→ Voor een **rationale functie** zal **a (altijd) een pool** (nulwaarde van de noemer) zijn.

→ Voorbeeld: $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$ ➔ x² - 4 = 0 ⇔ x = 2 v x = -2

→ Want voor x = -2 geldt: $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = -\infty$ en voor x = 2 geldt: $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$

➔ Waarom $-\infty$ en niet $+\infty$, omdat als je waarden neemt die -2 naderen maar kleiner zijn dan -2 je een negatief getal uitkomt. Idem voor 2.

→ De verticale asymptoot is dus: **x = 2**

*Opmerkingen: (1) Krommen kunnen oneindig veel VA's hebben.

(2) Als je de pool invult in je functie en je komt 0/0 uit, dan kan dat leiden naar eenderwelke andere limiet (zie 1.5: rekenen met limieten) en is er géén VA.

We besluiten:

--> Een verticale asymptoot bestaat enkel en alleen als er een noemer bestaat.

--> De verticale asymptoot is alle oplossingen van de noemer (polen).

--> Als één pool aanleiding geeft voor een deling van de vorm 0/0, dan is deze pool géén verticale asymptoot.

--> Voor irrationale functies gelden dezelfde rekenregels als rationale functies.

3.3.1.2) Horizontale asymptoten

<u>Uit samenvatting wiskunde module 3 limieten halen we:</u>

*Een horizontale asymptoot is een rechte met de vergelijking y = q die de functie zal naderen.

→ **Een horizontale asymptoot bestaat enkel als de graad van de teller = graad van noemer**.

→ Definitie met limieten: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = q$

→ Voorbeeld: $f(x) = \frac{4x-1}{x+4}$ → Graad teller = graad noemer → HA bestaat

→ $\frac{4x}{x}$(we zijn enkel geïnteresseerd in de hoogste macht!)

= 4 --> de rechte is dus: y = 4

--> Bestaat er ook een verticale asymptoot? Ja!

→ Pool = -4, als we -4 in de teller invullen krijgen we niet 0/0.

→ Dus: VA --> x = -4!

LET OP: DE HA BESTAAT OOK ALS GRAAD TELLER IS <u>1 GRAAD KLEINER</u> DAN NOEMER, DE VERGELIJKING IS DAN Y = 0!!!

<u>We besluiten en voegen toe:</u>

--> Voor irrationale functies gelden dezelfde rekenregels:

graad teller = graad noemer --> vereenvoudigen

graad teller < graad noemer --> asymptoot: y = 0

--> Bij rationale functies keken we enkel + of – oneindig na, bij irrationale functies zal je zowel de limiet voor f(x) gaande naar + oneindig als die naar – oneindig moeten nachecken. Dit wordt duidelijk in de voorbeeldoefeningen.

--> Irrationale functies hebben dus vaak 2 horizontale asymptoten.

3.3.1.3) Schuine asymptoten

<u>Uit samenvatting wiskunde module 3 limieten halen we:</u>

*Een schuine asymptoot is een rechte met de vergelijking y = mx + q die de functie zal naderen.

→ **Een schuine asymptoot bestaat enkel als de graad van de teller 1 > graad van de noemer**

→ Definitie met limieten: $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$ (dit wordt duidelijk met de voorbeelden)

→ m vindt je door: $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x[(g(x)]}$

→ q vindt je door: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - m(x)$

→ Voorbeeld: $f(x) = \frac{3x^2-4x}{x-1}$ --> welke asymptoten zijn er allemaal?

--> VA: 1 = pool en zorgt niet voor een deling van de vorm 0/0 → VA: x = 1.

--> HA: Bestaat niet, graad teller ≠ graad noemer.

--> SA: Bestaat wel, graad teller > graad noemer.

--> m = $\frac{3x^2-4x}{x(x-1)} = \frac{3x^2-4x}{x^2-x} = 3$ → We kunnen al invullen: y = 3x + q

(We zijn enkel geïnteresseerd in de hoogste graad, dit deze rekenregels hebben we gezien bij puntje 1.5: rekenen met limieten)

--> q = $\frac{3x^2-4x}{x-1} - 3x = \frac{3x^2-4x}{x-1} - \frac{3x(x-1)}{1(x-1)} = \frac{3x^2-4x}{x-1} - \frac{3x^2-3x}{x-1} = \frac{\cancel{3x^2}-4x-\cancel{3x^2}+3x}{x-1}$

= $\frac{-x}{x-1}$ → We zijn opnieuw énkel geïnteresseerd in de hoogste graad!

→ $\frac{-x}{x} = -1 = q$

→ q = -1 → We vullen in: y = 3x – 1 ← dit is je schuine asymptoot!

<u>We besluiten en voegen toe:</u>

--> De rekenregels voor irrationale functies zijn hetzelfde als voor rationale functies.

--> Bij irrationale functies zal je + en – oneindig ook vaak apart moeten nachecken bij schuine asymptoot, je zal dus vaak 2 schuine asymptoten hebben.

3.3.4) Voorbeeldoefeningen

VOORBEELD 1:

Bepaal de asymptoten van… $f(x) = \frac{2x+\sqrt{x^2+1}}{x-2}$

--> VA: $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

--> Nachecken met ZRM geeft géén 0/0 dus dit is de VA!

--> HA: bestaat want graad teller (1) = graad noemer (1)

--> Let op: $\sqrt{x^2} = x!$

--> Nu check je de limieten voor + en – oneindig apart na, ik maak gebruik van een beetje luiere notatie aangezien ik de limiet niet de hele tijd wil schrijven.

--> $(+\infty) \rightarrow \frac{2x+x}{x} = \frac{3x}{x} = 3$ ---> Dus de eerste HA: $y = 3$

--> $(-\infty) \rightarrow \frac{-2x+x}{-x} = \frac{-x}{-x} = 1$ ---> Dus de tweede HA: $y = 1$

--> Rekenregels limieten: - oneindig en oneven macht = tekens omdraaien!

--> SA: bestaat niet want graad teller = graad noemer (niet: graad teller > graad noemer)

VOORBEELD 2:

Bepaal de asymptoten van… $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-x+3}$

We maken een noemer door gebruik te maken van het merkwaardig product:

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x+3})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+3})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+3}}$$

$$= \frac{x^2+1-(x^2-x+3)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+3}}$$

$$= \frac{x^2+1-x^2+x-3}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+3}}$$

$$= \frac{1+x-3}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+3}}$$

Nu kunnen we een beter besluit maken over de asymptoten.

--> VA: Bestaat niet, we hebben weliswaar een noemer gemaakt maar de oorspronkelijke functie bevatte geen noemer. Een VA kan niet bestaan als de oorspronkelijke functie geen noemer bevat. Doe het jezelf dus niet aan om die nulwaarden na te gaan, VA bestaat gewoonweg niet.

--> HA: Graad teller = graad noemer --> HA bestaat! ➔ Als HA bestaat, bestaat SA niet!

--> let op: $\sqrt{x^2} = x$

--> $(+\infty) \rightarrow \frac{x}{x+x} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \rightarrow HA: y = 0{,}5$

--> $(-\infty) \rightarrow \frac{-x}{x+x} = \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2} = -0{,}5 \rightarrow HA: y = -0{,}5$

(Ik heb rekenregels van limieten toegepast voor x gaande naar oneindig en x gaande naar min oneindig. Ik schrijf geen limiet omdat ik lui ben.)

VOORBEELD 3:

Bepaal de asymptoten van volgende functie… $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$

--> VA: polen van de functie (= nulwaarden van de noemer)

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \quad \vee \quad x = -1$

--> Je zou dus denken: we hebben twéé VA's, maar: dat is niet zo!

--> Vul x = 1 in de gewone functie in: $f(1) = \frac{\sqrt{1+3}-2}{1^2-1} = \frac{\sqrt{4}-2}{1-1} = \frac{2-2}{1-1} = \frac{0}{0}$

--> Als je je verticale asymptoot invult in de functie en je komt een deling van de vorm 0/0 uit, bestaat hij niet *(omdat L'hôpital de limiet tot elke andere vorm kan terugbrengen)*.

➔ De verticale asymptoot is dus: x = -1

--> HA:

Graad teller = 0,5

--> Waarom? $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

Graad noemer = 2

--> Waarom? We lezen duidelijk x^2

➔ Als graad teller < graad noemer, dan is de horizontale asymptoot y = 0 *(dit is een gevolg van de rekenregels van limieten maar kan je gewoon zo onthouden)*.

VOORBEELD 4:

Bepaal de asymptoten van de volgende functie… $f(x) = \frac{2x^2+\sqrt{x+1}}{x-7}$

--> VA: $x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 7$

--> Na nachecken zien we dat 7 géén deling van de vorm 0/0 geeft, dit is dus VA.

--> HA: Bestaat niet, graad teller > graad noemer.

--> SA: Bestaat, graad teller > graad noemer. Rechte: $y = mx + q$

$m = \frac{f(x)}{x[g(x)]}$

$= \frac{2x^2+\sqrt{x+1}}{x(x-7)}$

$= \frac{2x^2+\sqrt{x+1}}{x^2-7x}$

$= \frac{2x^2}{x^2} = (+\infty)\ 2$

$= (-\infty) 2$

(in de definitie van m staat een limiet naar oneindig, daarom mag je vereenvoudigen. Graad teller = graad noemer. Ik schrijf de limiet niet uit luiheid.)

--> Je moet + en – oneindig apart nachecken!

$q = f(x) - m(x)$

$= \frac{2x^2+\sqrt{x+1}}{x-7} - 2x = \frac{2x^2+\sqrt{x+1}}{x-7} - \frac{2x(x-7)}{x-7} = \frac{2x^2+\sqrt{x+1}}{x-7} - \frac{2x^2-14x}{x-7} = \frac{2x^2+\sqrt{x+1}-(2x^2-14x)}{x-7}$

$= \frac{\sqrt{x+1}+14x}{x-7} = \frac{14x}{x} = (\pm\infty)\ 14$

--> $y = mx + q = 2x + 14$

--> Je moet opnieuw + en – oneindig apart nachecken, maar hier zie je direct dat je dezelfde oplossing krijgt.

3.4) Verloop van irrationale functies

3.4.1) Stappenplan

Het verloop van een irrationale functie check je a.d.h.v. volgend stappenplan na:

(1) DOMEIN

--> Een irrationale functie kan enkel bestaan als het deel onder de wortel groter is dan 0.

--> Dus het domein bepaal je door deze formule: $deel\ onder\ wortel > 0$

--> Stel er is nog een ander deel, neem functie: $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + 2$

--> $x^2 + x + 1 > 0$

➔ $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4.1.1 = 1 - 4 = -3 < 0$

--> Als D < 0 heb je géén oplossingen. Nu maak je het tekenverloop en test je met één testgetal.

X	
Y	+

--> Het gedeelte onder je wortelteken is dus overal in het domein positief. De functie bestaat dus.

(2) CONTINUÏTEIT

--> Een functie is continu in heel haar domein. Domein = continuïteit.

(3) SNIJPUNTEN ASSEN

--> Snijpunt x-as ==> y = 0 → Je bekomen oplossing is je snijpunt: $(oplossing, 0)$

--> Snijpunt y-as ==> x = 0 → Je bekomen oplossing is je snijpunt: $(0, oplossing)$

(4) TEKENVERLOOP

Met het tekenverloop onderzoek je het teken van het argument x in heel haar domein.

--> Je zet je nulwaarden in een tabel en je vult met testgetallen (= een getal tussen elke nulwaarde) het tekenverloop aan.

(5) ASYMPTOTISCH GEDRAG

--> Je checkt de aanwezigheid van VA's, HA's en SA's na. Zie vorig puntje in de samenvatting.

(6) STIJGEN, DALEN, EXTREMA, BUIGPUNTEN, VORM VAN DE KROMME, HORIZONTALE EN VERTICALE RAAKLIJNEN

--> Je bepaalt op voorhand de eerste- en tweede afgeleide van de functie en hun respectievelijke nulwaarden om overzichtelijk te zijn en tijd te besparen.

--> Het stijgen, dalen en extrema check je na met de eerste afgeleide:

--> Is de eerste afgeleide… + = functie stijgt
- = functie daalt
0 = extremawaarde (= maximum/minimum) bereikt.
--> *Als je functie eerst steeg en daarna daalde, heb je logischerwijze een maximum bereikt. Eerst dalen daarna stijgen, dan heb je een minimum bereikt.*

--> Buigpunten en vorm van de kromme check je na met de tweede afgeleide:
--> Is de tweede afgeleide… + = functie is convex (U-vormig)
- = functie is concaaf (∩-vormig)
0 = buigpunt bereikt.
--> Een buigpunt is een overgang van convex naar concaaf of vice versa.

--> Horizontale raaklijnen check je na met de eerste afgeleide:
--> Is de eerste afgeleide 0, dan is de rico van de raaklijn als het ware 0 (eerste afgeleide = rico raaklijn!). Dan heb je een horizontale rechte die raakt aan je grafiek, dat is een horizontale raaklijn.
--> Horizontale raaklijn korten we af met HR.

--> Verticale raaklijnen check je na met de eerste en tweede afgeleide:
--> Bestaan de eerste- en tweede afgeleide niet maar de functie wel *(herinnering: een functie is niet differentieerbaar als er 'bruuske' veranderingen zijn in de grafiek --> zie module 3 wiskunde)*, dan is de rico van de raaklijn eigenlijk oneindig. Een rechte met als rico oneindig gaat stijl naar boven oftewel verticaal.
--> Verticale raaklijn korten we af met VR.

Dit allemaal zetten we overzichtelijk in een samenvattende grafiek, bijvoorbeeld (tekenverloop ellips):

Samenvattende tabel:

				HR			
x	///	$-a$		0		a	///
f_1'	///	|	+	0	−	|	///
f_1''	///	|	−	−	−	|	///
f_1	///	0	↗	Max: b	↘	0	///
f_1	///	VR	∩	∩	∩	VR	///

(7) GRAFIEK

A.d.h.v. je gevonden vorm van de kromme, asymptoten … maak je een schets van de grafiek zonder gebruik te maken met Geogebra.

Opmerking: Kevin zei dat hij bij deze oefeningen de tweede afgeleide cadeau zou geven omdat deze moeilijker te bepalen valt. Dit zou hij doen omdat als je afgeleide fout is de helft van je oefening fout is en hij dan je fout moet zoeken op je toets (waar hij geen zin in heeft).

3.4.2) Voorbeeldoefening

VOORBEELD:

Bepaal het verloop van volgende functie: $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 18} - 6$

(1) DOMEIN

--> Domein: $x^2 - 3x - 18 > 0$

➔ $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4.1.(-18) = 81$

→ $\sqrt{D} = 9$

------> $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3)-9}{2.1} = -3$

------> $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3)+9}{2.1} = 6$

--> We zetten beide nulwaarden in een tekenverloop en checken na met testgetallen.

x		-3		6	
y	+	0	-	0	+

--> De functie bestaat niet als de uitdrukking onder de wortelteken negatief is, dit is in het interval]3, 6[.

Dom f = $\mathbb{R} \setminus]-3{,}6[$

(2) CONTINUÏTEIT

Continuïteit = domein = $\mathbb{R} \setminus]-3{,}6[$

--> Een functie is immers continu in elk punt van haar domein.

(3) SNIJPUNTEN ASSEN

x-as

x-as --> $y = 0$ --> $0 = \sqrt{x^2 - 3x - 18} - 6$

⇔ $6 = \sqrt{x^2 - 3x - 18}$

==> $36 = x^2 - 3x - 18$

⇔ $x^2 - 3x - 54 = 0$

--> $D = b^2 - 4ac = 225$

→ $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3)+\sqrt{225}}{2\,.1} = 9$

→ $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3)-\sqrt{225}}{2\,.1} = -6$

➔ Nachecken met ZRM of beide oplossingen zinvol zijn (want we hebben gekwadrateerd!). Beide oplossingen zijn zinvol.

--> We hebben twéé snijpunten met de x-as: (9,0) en (-6,0)

--> *Opmerking: dit zijn de nulwaarden van de functie!*

y-as

y-as --> $x = 0$ --> $y = \sqrt{x^2 - 3x - 18} - 6$

$\Leftrightarrow y = -6$

--> Je hebt dus één snijpunt met de y-as ?: $(0, -6)$

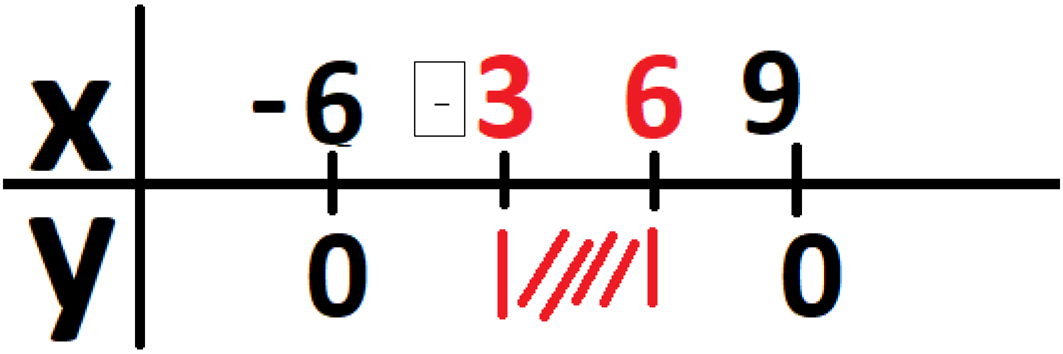
--> Dit snijpunt is vals : 0 is géén element van het domein van f. Je hebt dus eigenlijk géén snijpunt.

(4) TEKENVERLOOP

--> Om het tekenverloop te bepalen hebben we nulwaarden nodig, gelukkig hebben we deze al bepaald in stap 3 van ons stappenplan.

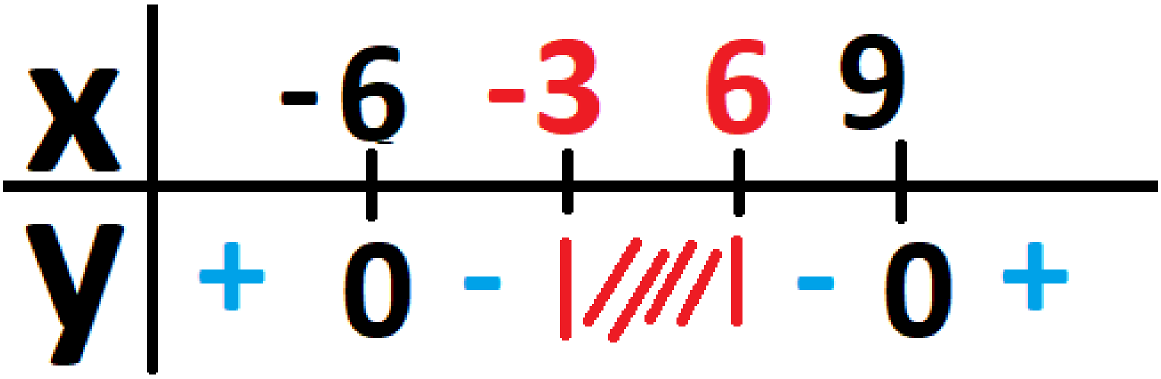
--> x = 9 en x = -6 zijn onze nulwaarden, we gieten ze in een tekenverloop.

--> Let op: je moet ook aanduiden waar je functie niet bestaat, dit zie je a.d.h.v. het domein (zie stap 1), de functie bestaat niet in]3, 6[



We vullen aan met testgetallen, één getal voor 6, één getal na 6 en één getal na 9. *(V) De slimme, luie mensen weten dat het goed genoeg is om één getal voor 6 na te checken omdat de stelling van Bolzano zegt dat de functie van teken verandert als het een nulwaarde passeert en we hier géén nulwaarde dubbel hebben gevonden (bv. bij D = 0).*

Aanvullen met testgetallen geeft:



(5) ASYMPTOTISCH GEDRAG

$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 18} - 6$

Verticale asymptoot

VA bestaat niet aangezien er géén noemer is.

Horizontale of schuine asymptoot

We kunnen $f(x)$ ook schrijven als… $\frac{\sqrt{x^2-3x-18}-6}{1}$

--> Graad teller = 1 ⇔ graad noemer = 0 → Schuine asymptoot bestaat!

$$m = \frac{f(x)}{x[g(x)]} = \frac{\sqrt{x^2-3x-18}-6}{x} = (+\infty)\frac{\sqrt{x^2}}{x} = 1$$

$$= (-\infty)\frac{\sqrt{x^2}}{x} = \frac{x}{-x} = -1$$

--> Let op: check altijd + oneindig en – oneindig apart na.

--> TIP: behoud zoveel mogelijk wortelvormen.

$$q = f(x) - m_1(x) = \frac{\sqrt{x^2-3x-18}-6}{1}(*) - x$$

(*) $\frac{\sqrt{x^2-3x-18}-6\ (\sqrt{x^2-3x-18}+6)}{\sqrt{x^2-3x-18}+6}$ (merkwaardig product)

$$= \frac{x^2-3x-18-36}{\sqrt{x^2-3x-18}+6}$$

$$= \frac{x^2-3x-54}{\sqrt{x^2-3x-18}+6}$$

$$= \frac{x^2-3x-54}{\sqrt{x^2-3x-18}+6} - x$$

$$= \frac{x^2-3x-54}{\sqrt{x^2-3x-18}+6} - \frac{x(\sqrt{x^2-3x-18}+6)}{\sqrt{x^2-3x-18}+6}$$

$$= \frac{x^2-3x-54-(x\sqrt{x^2-3x-18}+6x)}{\sqrt{x^2-3x-18}+6}$$

$$= \frac{.x^2-3x-54-x\sqrt{x^2-3x-18}-6x)}{\sqrt{x^2-3x-18}+6}$$

--> Let op: x² - x$\sqrt{x^2}$= $x^2 - x.x = x^2 - x^2 = 0$

<u>(6) STIJGEN, DALEN, EXTREMA, BUIGPUNTEN, VORM VAN DE KROMME, HORIZONTALE EN VERTICALE RAAKLIJNEN</u>

Voorbereidend werk: functie 2x afleiden

$$f(x) = \sqrt{x^2-3x-18} - 6$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-3x-18}}\ .(2x-3) - 0$$

$$= \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x-18}}$$

$$f''(x) = \frac{2\ .2\sqrt{x^2-3x-18}-(2x-3).2\left(\frac{1}{4\sqrt{x^2-3x-18}}\ .(2x-3)\right)}{4(x^2-3x-18)}$$

$$= \frac{4\sqrt{x^2-3x-18}-(4x-6).\left(\frac{2x-3}{4\sqrt{x^2-3x-18}}\right)}{4x^2-12x-76}$$

$$= (\ldots)$$

$$= -\frac{81}{4\sqrt{(x^2-3x-18)^3}}$$

Voorbereidend werk: nulwaarden van de afgeleiden

Eerste: $0 = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x-18}}$

⇔ $0 = 2x - 3$

⇔ $x = \frac{2}{3}$

--> 2/3 is géén element van het domein van f: $\mathbb{R} \setminus]-3,6[$, het is dus ook géén nulwaarde van de eerste afgeleide aangezien het niet in het domein zit. 2/3 is niet zinvol.

Tweede: $0 = -\frac{81}{4\sqrt{(x^2-3x-18)^3}}$

$\Leftrightarrow -81 = 0$

--> Tweede afgeleide heeft géén nulwaarden. Dit is namelijk een valse uitspraak.

Tabel: we zetten de nulwaarden van onze eerste- en tweede afgeleide in een tabel

x	
f'(x)	
f''(x)	
f(x)	

We zetten de waardes waarvoor x niet bestaat in het tabel

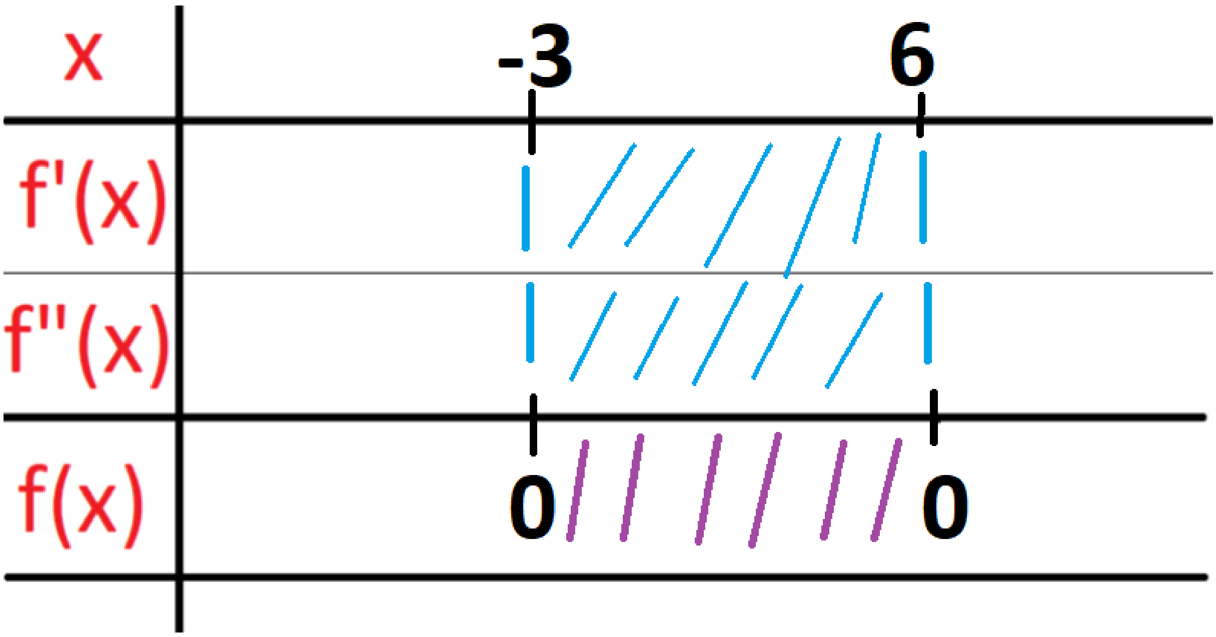
x		-3		6	
f'(x)					
f''(x)					
f(x)		0	//////	0	

Bestaan f'(x) en f''(x) voor -3 en 6?

$f'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x-18}}$

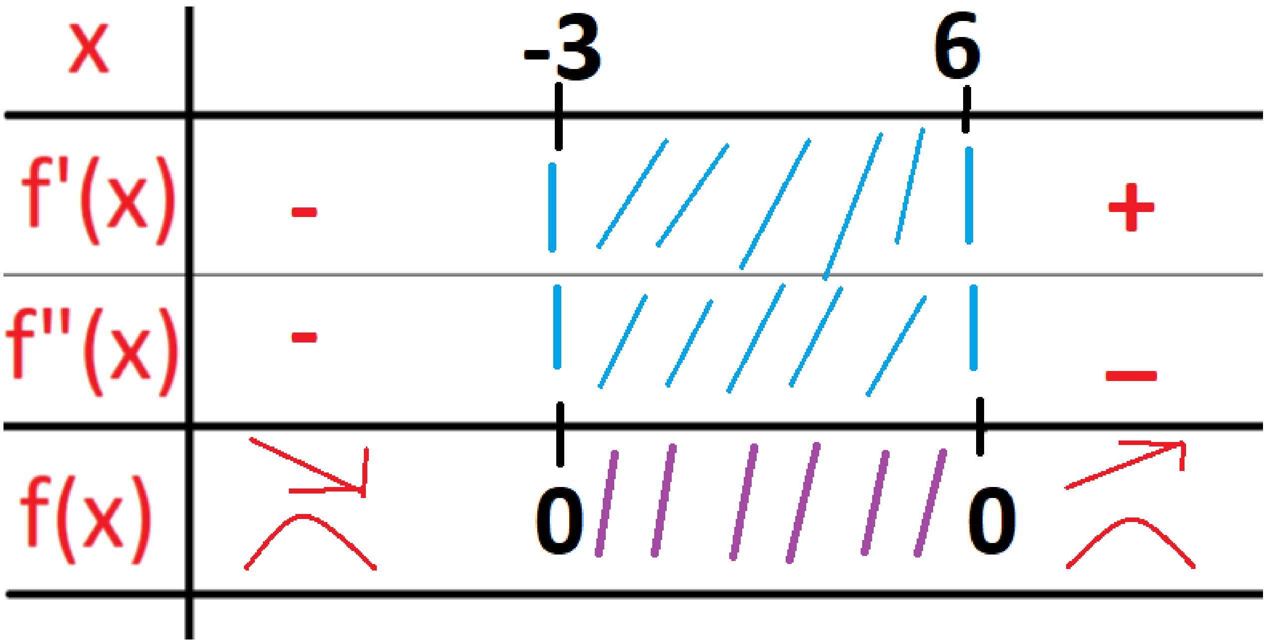
$f''(x) = -\frac{81}{4\sqrt{(x^2-3x-18)^3}}$

Neen, als je -3 en 6 invult krijg je een deling door 0. f'(x) en f''(x) bestaan dus niet voor -3 en 6.



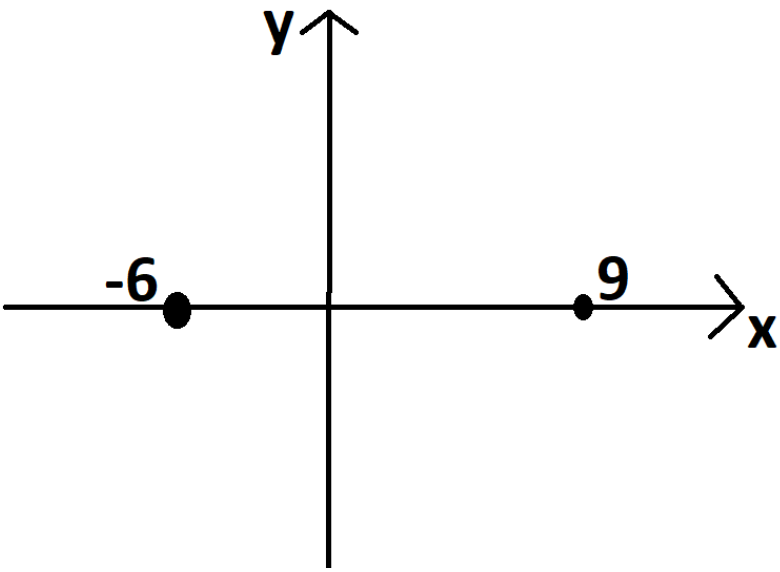
Daartussen bestaan ze natuurlijk ook niet gezien de gewone functie daar niet bestaat.

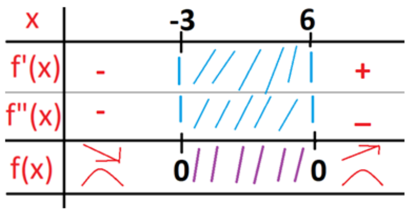
We maken het tekenverloop voor f'(x) en f''(x) en kijken naar de betekenissen ervan
Met testgetallen natuurlijk.



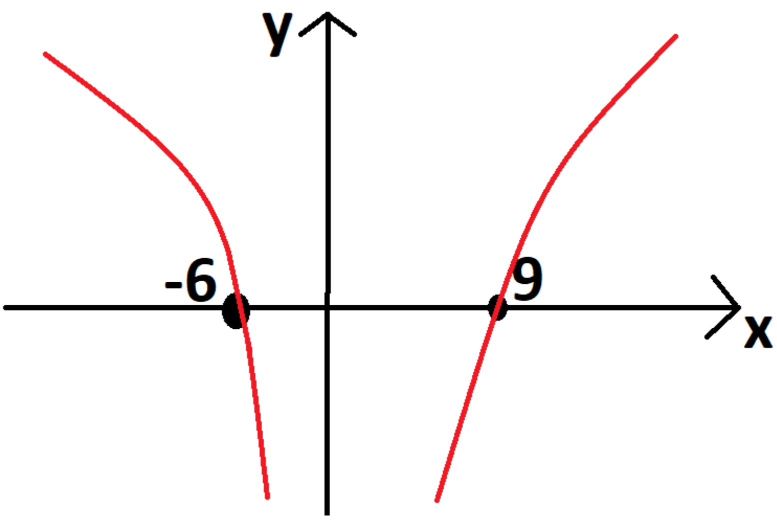
(7) GRAFIEK
We maken een grafiek a.d.h.v. onze samenvattende tabel en bijzondere punten

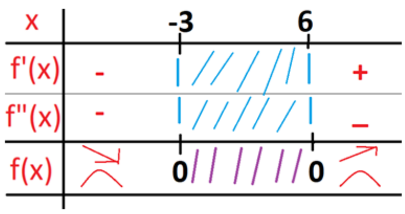
We duiden eerst de bijzondere punten aan in het assenstelsel
We hadden gevonden:
--> nulwaarden: (9,0) en (-6,0)





We schetsen nu de vorm van de grafiek.



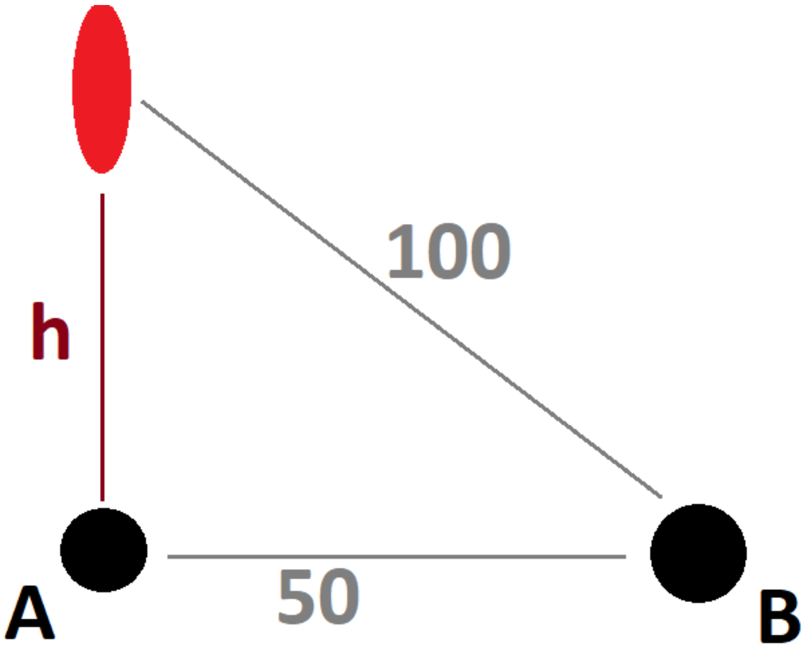


3.5) Vraagstukken

3.5.1) Voorbeeldvraagstuk 1

(B) Een ballon stijgt verticaal op met een snelheid van 3 meter per seconde op een plaats A die 50 meter verwijderd is van een huis B. Na hoeveel seconden is de ballon meer dan 100 meter verwijderd van dat huis?

Oplossing:
<u>Situatieschets</u>



Stelling van Pythagoras: $h^2 = 100^2 - 50^2$

$$\Leftrightarrow h = \sqrt{100^2 - 50^2} = 86{,}60\ m$$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{86{,}60m}{3\frac{m}{s}} = 29s$$

Na 29s is de ballon 100m van huis B verwijderd.

3.5.2) Voorbeeldvraagstuk 2

10. (B) Iemand leest een boek dat op een ronde tafel ligt op 1 meter afstand van het middelpunt. Boven dat middelpunt hangt een lamp op x meter boven de tafel. De belichting van het boek wordt gegeven door de volgende functie (k is een constante die afhankelijk is van de lichtsterkte van de lamp):

$$y = \frac{kx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

Bepaal x zo dat dit getal een maximum bereikt.

Oplossing:
Maximum = éérste afgeleide

--> $y = \frac{kx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

$= \frac{kx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

--> $Dy = \frac{k\,.(x^2+1)^{\frac{3}{2}} - kx\,.\frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(2x)}{\left((x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right)^2}$

$$= \frac{k\,.(x^2+1)^{\frac{3}{2}} - kx\,.3(x^2+1)^{\frac{1}{2}}.x}{(x^2+1)^{\frac{6}{2}}}$$

$$= (x^2+1)^{\frac{1}{2}} \frac{k\,.(x^2+1) - 3kx^2}{(x^2+1)^{\frac{6}{2}}}$$

$$= \frac{k\,.(x^2+1) - 3kx^2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= \frac{kx^2+k-3kx^2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= \frac{-2kx^2+k}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$$

$$= \frac{k(-2x^2+1)}{\sqrt{(x^2+1)^5}} \rightarrow nu\text{: } nulwaarden\ eerste\ afgeleide\ (= extremawaarde!)$$

$$0 = \frac{k(-2x^2+1)}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$$

$\Leftrightarrow 0 = k(-2x^2+1)$

$\Leftrightarrow k = 0 \vee -2x^2+1 = 0$

--> k = 0 mag je weglaten, dit is een valse uitspraak, een getal (k) kan namelijk nooit gelijk zijn aan 0 (k = getal, géén onbekende!)

$\Leftrightarrow -2x^2 = -1$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \vee \quad x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

--> Deze oplossing geeft aanleiding tot een negatieve lengte, lengte kan nooit negatief zijn!

$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

--> Dit is het antwoord!

3.5.3) Voorbeeldvraagstuk 3

(B) Een fabrikant moet cilindervormige blikken maken met een inhoud van 1 liter. Stel formules op die de hoeveelheid blik geven in functie van de straal van het grondvlak en in functie van de hoogte.

Oplossing:

--> Je kent de formule voor de inhoud van de cilinder:

$I = \pi r^2 h$

(onthoudtip: een cilinder bestaat uit twee cirkels = πr^2 en dan nog de hoogte ervan h)

--> Je kent de formule voor de oppervlakte (= hoeveelheid blik) van de cilinder:

$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ (1)

(onthoudtip: de oppervlakte van een cirkel is $2\pi r$, maar omdat het een cilinder en geen cirkel is komt er een r'tje bij voor de + en een h'tje na de +)

--> Je moet nu twee formules maken waarin énkel de straal of énkel de hoogte in voorkomt.

Je hebt gegeven dat de blikken inhoud 1l hebben.

$I = \pi r^2 h \Leftrightarrow 1 = \pi r^2 h$ (hieruit kunnen we r of h uit afzonderen)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\pi r^2} = h \ (2)$$
$$\Leftrightarrow r^2 = \frac{1}{\pi h} \Leftrightarrow r = \frac{1}{\sqrt{\pi h}} \ (3)$$

We kunnen vergelijking (2) nu substitueren in vergelijking (1)

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$
$$= 2\pi r^2 + 2\pi r \,.\, \frac{1}{\pi r^2}$$
$$= 2\pi r^2 + 2 \,.\, \frac{1}{r}$$
$$= 2\pi r^2 + \frac{2}{r}$$
$$= \frac{2\pi r^3 + 2}{r}$$
$$= \frac{2(\pi r^3 + 1)}{r}$$

--> Dit is je vergelijking met enkel de straal

We kunnen vergelijking (3) nu substitueren in vergelijking (1)

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$
$$= 2\pi \,.\left(\frac{1}{\pi h}\right) + 2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{\pi h}}\right) h$$
$$= \frac{2}{h} + \frac{2\pi h}{\sqrt{\pi h}}$$
$$= \frac{2\sqrt{\pi h}}{h\sqrt{\pi h}} + \frac{2\pi h^2}{h\sqrt{\pi h}}$$
$$= \frac{2\sqrt{\pi h} + 2\pi h^2}{h\sqrt{\pi h}}$$
$$= \frac{2\sqrt{\pi h} + 2\pi h^2}{h\sqrt{\pi h}} \cdot \frac{h\sqrt{\pi h}}{h\sqrt{\pi h}}$$
$$= \frac{(2\sqrt{\pi h} + 2\pi h^2) h\sqrt{\pi h}}{h^3 \pi^2}$$
$$= (\ldots)$$
$$= \frac{2(\sqrt{\pi h^3} + 1)}{h}$$

--> Nu heb je de tweede formule gevonden!

3.5.4) Voorbeeldvraagstuk 4

(B) Een satelliet die op x km van het centrum van de aarde om de aarde draait, kan ontsnappen aan de aantrekkingskracht van de aarde bij een snelheid v (in km/s) gegeven door:

$$v = \frac{893}{\sqrt{x}}$$

Hoe hoog boven de oppervlakte van de aarde draait een satelliet als zijn ontsnappingssnelheid 11 km/s is? Neem als straal van de aarde 6378 km.

Oplossing:

$$v = \frac{893}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{893}{v}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{893^2}{v^2} \Leftrightarrow x = \frac{893^2}{11^2} = 6590 \ km$$

Hiervan moet je nog de afstand van het aardoppervlak tot de aardkern vanaf trekken omdat ze vragen 'hoe hoog boven de oppervlakte van de aarde…'.

$6590\ km - 6378\ km = 212\ km$

--> Antwoord is dus: 212 km

4) Inverse relatie

4.1) Verband tussen machtsverheffing en worteltrekken

4.1.1) Inverse relaties

De machtsverheffing en de worteltrekking zijn elkaars inverse relaties.

Voor de inverse relatie f^{-1} van functie f geldt:
1) $dom\ f^{-1} = ber\ f$ en $ber\ f^{-1} = dom\ f$
2) De grafiek van f^{-1} t.o.v. f is het beeld van de grafiek van f door een spiegeling met als as de eerste bissectrice.
--> De eerste bissectrice is de rechte met vergelijking $y = x$.

De inverse relatie bepaal je algebraïsch door y en x van plaats te verwisselen en daarna terug af te zonderen naar y.

(2D) INVERSE RELATIE VAN EEN FUNCTIE

*Neem de functie: $g: y = x + 1$, we willen g^{-1} algebraïsch en grafisch bepalen

→ STAPPENPLAN: (1) Schrijf het normale functievoorschrift → y = x + 1

(2) Verwissel (de) x('en) en y('en) met elkaar → x = y + 1

(3) Los algebraïsch op, probeer y af te zonderen.

→ x = y + 1 ⇔ x – 1 = y ⇔ y = x – 1

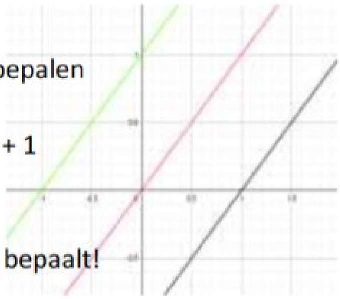
(X) PROFICIAT! Je hebt de inverse relatie algebraïsch bepaalt!

(4) Maak een grafiek van y = x + 1

(5) Teken vervolgens de eerste bissectrice (functie y = x, gaat door oorsprong, 45°)

(6) Spiegel de grafiek t.o.v. de eerste bissectrice.

(Y) PROFICIAT! Je hebt de inverse relatie grafisch getekend! (zie grafiek)



4.2) Voorbeeldoefeningen

4.2.1) Oefening c - aangepast

$y = \sqrt[3]{x^3 + 2}$

--> f^{-1} --> $x = \sqrt[3]{y^3 + 2}$

$\Leftrightarrow x^3 = y^3 + 2$

$\Leftrightarrow y^3 = x^3 - 2$

$\Leftrightarrow y = \sqrt{x^3 - 2}$

--> Een onevenmachtswortel heeft slechts één oplossing in de reële getallenverzameling.

--> Dit is een functie gezien één x-waarde slechts één y-waarde heeft.

4.2.2) Oefening e

$y = \sqrt[5]{x} + 4$

--> f⁻¹ --> $x = \sqrt[5]{y} + 4$

⇔ $\sqrt[5]{y} = x - 4$

⇔ $y = (x-4)^5$

--> Dit is wel een functie gezien je voor één x-waarde slechts één y-waarde hebt (je hebt m.a.w. geen +-!

4.2.3) Oefening j

$y = -\sqrt[6]{x^2 + 4}$

--> f⁻¹ --> $x = -\sqrt[6]{y^2 + 4}$

⇔ $x^6 = y^2 + 4$

⇔ $y^2 = x^6 - 4$ ⇔ $y = \pm\sqrt{x^6 - 4}$

--> Een evenmachtswortel heeft altijd 2 oplossingen in $\mathbb{R}$.

--> Je hebt geen functie omdat je opnieuw +-, één x-waarde heeft verschillende y-waardes.

4.2.4) Oefening n

$y = x^2 - 4x - 1$

--> f⁻¹ --> $x = y^2 - 4y - 1$

⇔ $0 = y^2 - 4y - (1 - x)$

⇔ $0 = y^2 - 4y - 1 + x$

⇔ $0 = y^2 - 4y + (-1 + x)$

--> $D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4.1.(-1 + x)$

$= 16 - 4.(-1 + x)$

$= 16 + 4 - 4x$

$= 20 - 4x$

--> $y = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{20 - 4x}}{2.1} = \frac{4 \pm \sqrt{4(5-x)}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5-x}}{2} = 2 \pm \sqrt{5 - x}$

→ DUS: $y = 2 \pm \sqrt{5 - x}$

--> Dit is geen functie aangezien je +- hebt, je hebt dus voor één x-waarde verschillende y-waardes.