Samenvatting wiskunde 3de graad – toets 3 ruimtemeetkunde (H6, H7) – made by Abdellah

----

(Z) VOORWOORD

Dit is de samenvatting voor de eerste toets van ruimtemeetkunde, de samenvatting van ruimtemeetkunde wordt dus onderverdeeld a.d.h.v. wat we moeten kennen voor de toetsen. Voor het examen moet je alle samenvattingen kennen.

(Y) FOUTENPROCEDURE

Foutje? Dat kan. A.d.h.v. hoe groot de fout is kan je hem melden.
Fout van de 0de graad = elke niet-relevante fout = niet melden
Fout van de 1ste graad = elke relevante niet-zo-erge-fout = melden
→ Fouten van de 1ste graad worden gecommuniceerd via Smartschool en aangepast.
Fout van de 2de graad = elke relevante, zeer erge, fout = melden.
→ Fouten van de 2de graad worden direct aangepast en gecommuniceerd.

Fouten zijn jammer genoeg niet te vermijden maar ik, Abdellah, doe mijn best om alles zo juist mogelijk samen te vatten.

(X) INHOUDSTAFEL

Zie volgende pagina

Inhoud

6) Het inproduct

*Het inproduct hebben we vorig jaar al gezien, dit jaar herhalen we dit begrip.

6.1) Definitie

*Het inproduct zegt dat als je twéé vectoren vermenigvuldigt je een scalaire uitkomst krijgt.
--> Twéé vectoren vermenigvuldigt met elkaar is gewoon terug een getal:

$\vec{A}\,.\vec{B} = |\vec{A}|\,.|\vec{B}|\,.\cos(\vec{A},\vec{B})$

→ Voor de vermenigvuldiging van puntvectoren geldt ook: $\vec{A}\,.\vec{O} = 0 = \vec{O}\,.\vec{A}$

→ Het inproduct noemen we ook soms wel het ‘scalair product’, aangezien onze uitkomst scalair is.

6.2) Eigenschappen inproduct

*Het inproduct heeft enkele zeer vanzelfsprekende eigenschappen die je ook bij reële getallen toepast, we bespreken hier de belangrijkste eigenschappen:

(1) De invermenigvuldiging is commutatief, associatief en (links- en rechtsdistributief)

(2) Het dubbelproduct [$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$] en andere merkwaardige producten gelden nog > steeds.

(3) Als twéé vectoren loodrecht op elkaar staan is hun inproduct 0

$\vec{A} \perp \vec{B} \Leftrightarrow \vec{A}\,.\vec{B} = 0$

--> Dit is omdat op ge goniometrische cirkel cos(90°) = 0 (cos lees je af op de x-as)

(4) Als twéé vectoren evenwijdig zijn dan is het inproduct…

$\vec{A}\,.\vec{B} = |\vec{A}|\,.|\vec{B}|$ ALS de vectoren dezelfde zin hebben

$\vec{A}\,.\vec{B} = -|\vec{A}|\,.|\vec{B}|$ ALS de vectoren tegengestelde zin hebben

*De belangrijkste eigenschappen zijn natuurlijk zeer duidelijk gemarkeerd.

6.3) Euclidische vectorruimte inproduct

*De reële vectorruimte voorzien van een invermenigvuldiging is een euclidische vectorruimte
→ Omdat: de invermenigvuldiging is commutatief, het dubbel product geldt en het scalair kwadraat is positief.

6.4) Basisvectoren van een georthonormeerde basis

*Een georthonormeerde basis is een basis waarop de assen loodrecht (**ortho**gonaal) op elkaar staan en de schaalverdeling overal hetzelfde (genormeerd) is.
--> Als we in een geothonormeerde basis werken dan geldt:

$\overrightarrow{E_1}^2 = \overrightarrow{E_2}^2 = \overrightarrow{E_3}^2 = 1 \quad en \quad \overrightarrow{E_1}\,.\overrightarrow{E_2} = \overrightarrow{E_2}\,.\overrightarrow{E_3} = \overrightarrow{E_1}.\overrightarrow{E_3} = 0\ (want\ loodrecht)$

--> Aangezien schaalverdeling 1 is: 1 . 1 = 1!

6.5) Analytische uitdrukking inproduct t.o.v. een georthonormeerde basis

6.5.1) Definitie

*T.o.v. een georthonormeerde basis met puntvectoren $\vec{A}(x_1, y_1, z_1)$ en $\vec{B}(x_2, y_2, z_2)$.

--> $\vec{A} \, . \vec{B} = \; x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

--> Dit noemen we de **analytische uitdrukking van het inproduct**.

6.5.2) Bewijs

*Volgens Kevin (Kjuvin) moet je het bewijs 'snappen' en niet 'kennen', dat betekent dat je moet weten WAT er wordt gedaan in het bewijs maar je moet het niet kunnen reproduceren op een toets/examen.

$$\vec{A}.\vec{B} = \boxed{(x_1\vec{E_1} + y_1\vec{E_2} + z_1\vec{E_3}).(x_2\vec{E_1} + y_2\vec{E_2} + z_2\vec{E_3})}$$

A en B als lineaire combinatie van basisvectoren schrijven

$$= x_1\vec{E_1}.x_2\vec{E_1} + x_1\vec{E_1}.y_2\vec{E_2} + x_1\vec{E_1}.z_2\vec{E_3} + y_1\vec{E_2}.x_2\vec{E_1} + y_1\vec{E_2}.y_2\vec{E_2} + y_1\vec{E_2}.z_2\vec{E_3} + z_1\vec{E_3}.x_2\vec{E_1} + z_1\vec{E_3}.y_2\vec{E_2} + z_1\vec{E_3}.z_2\vec{E_3}$$

Distributief uitwerken twéé drie-termen geven in totaal 9 termen.

$$= (x_1x_2).(\vec{E_1}.\vec{E_1}) + (x_1y_2).(\vec{E_1}.\vec{E_2}) + (x_1z_2).(\vec{E_1}.\vec{E_3}) + (y_1x_2).(\vec{E_2}.\vec{E_1}) + (y_1y_2).(\vec{E_2}.\vec{E_2}) + (y_1z_2).(\vec{E_2}.\vec{E_3}) + (z_1x_2).(\vec{E_3}.\vec{E_1}) + (z_1y_2).(\vec{E_3}.\vec{E_2}) + (z_1z_2).(\vec{E_3}.\vec{E_3})$$

Afzonderen, coördinaten en basisvectoren afzonderen

$$= (x_1x_2).1 + (x_1y_2).0 + (x_1z_2).0 + (y_1x_2).0 + (y_1y_2).1 + (y_1z_2).0 + (z_1x_2).0 + (z_1y_2).0 + (z_1z_2).1$$

Basisvectoren uitwerken, let op: je werkt in een georthonormeerde basis!

$$= \boxed{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$$

Uitwerken

6.6) Voorbeeldoefeningen

*De oefeningen van dit hoofdstuk testen of je vlot met het inproduct en de analytische uitdrukking ervan kan werken, je houdt dus beide formules in je achterhoofd:

$\vec{A} \, . \vec{B} = |\vec{A}| \, . |\vec{B}| \, . \cos(\vec{A}, \vec{B})$ **en** $\vec{A} \, . \vec{B} = \; x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

6.6.1) Oefening 1: vereenvoudigen

*Vereenvoudig volgende uitdrukking: $\overrightarrow{BD} \, . \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CB} . \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DC} . \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{CD}$

--> We zien direct drie dezelfde termen die we kunnen afzonderen.

--> $\overrightarrow{AE}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}\right) + \; \overrightarrow{AB} \, . \overrightarrow{CD}$ (buiten haakjes gezet)

= $\overrightarrow{AE}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}\right) + \overrightarrow{AB} \, . \overrightarrow{CD}$ (we zien hier direct Chasles-Möbius om toe te passen)

= $\overrightarrow{AE}\left(\overrightarrow{BB}\right) + \overrightarrow{AB} \, . \overrightarrow{CD}$ (we hebben Chasles-Möbius toegepast)

= $\overrightarrow{AE}\left(\vec{O}\right) + \overrightarrow{AB} \, . \overrightarrow{CD}$ (BB = nulvector = O)

= $\overrightarrow{AB} \, . \overrightarrow{CD}$ (dit is zover mogelijk vereenvoudigd!)

*Om te vereenvoudigen kijk je dus altijd na of je iets kan afzonderen, je past daarna Chasles-Möbius zo veel mogelijk toe en je rekent uit.

6.6.2) Oefening 2: toepassing op zwaartepunten

T.o.v. een georthonormeerde basis$(\overrightarrow{E_1}, \overrightarrow{E_2}, \overrightarrow{E_3})$ geven we een plaatsvector $\vec{P}$ zodat: $\vec{P}.\overrightarrow{E_1} = 2$, $\vec{P}.\overrightarrow{E_2} = 3$ en $\vec{P}.\overrightarrow{E_3} = 4$. Noem Z het zwaartepunt van $\Delta E_1E_2E_3$ en bereken $\vec{Z}.\vec{P}$.

→ Je herinnert jezelf de definitie van een zwaartepunt van 3 puntvectoren:

$\vec{Z} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$

➔ In ons geval $\vec{Z} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} + \overrightarrow{E_3})$

⇔ Maar we moeten niet Z berekenen, maar Z . P

→ $\vec{Z}.\vec{P} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} + \overrightarrow{E_3}).\vec{P}$ ⇔ Nu kunnen we distributief uitwerken!

→ $\vec{Z}.\vec{P} = \frac{1}{3}(\vec{P}.\overrightarrow{E_1} + \vec{P}.\overrightarrow{E_2} + \vec{P}.\overrightarrow{E_3})$

➔ Kijk terug naar de opgave, alles wat binnen de haakjes staat hebben we gegeven.

--> We vullen in: $\vec{Z}.\vec{P} = \frac{1}{3}(2 + 3 + 4) = \frac{1}{3}.9 = 3$ --> De oefening is klaar!

6.6.3) Oefening 3: toepassing orthonormale basis

T.o.v. een georthonormeerde basis $(\overrightarrow{E_1}, \overrightarrow{E_2}, \overrightarrow{E_3})$ geven we een plaatsvector $\vec{P}(x, y, z)$. Bereken $\vec{P}.\overrightarrow{E_1}$, $\vec{P}.\overrightarrow{E_2}$ en $\vec{P}.\overrightarrow{E_3}$.

*In hoofdstuk 4 hebben we geleerd dat we elke puntvector als een lineaire combinatie van basis-vectoren kunnen schrijven.

--> Dus: $\vec{P} = x.\overrightarrow{E_1} + y.\overrightarrow{E_2} + z.\overrightarrow{E_3}$

⇔ $\vec{P}.\ \overrightarrow{E_1} = (x.\overrightarrow{E_1} + y.\overrightarrow{E_2} + z.\overrightarrow{E_3}).\overrightarrow{E_1}$

--> We werken nu distributief uit.

⇔ $\vec{P}.\ \overrightarrow{E_1} = (x.\overrightarrow{E_1}\overrightarrow{E_1} + y.\overrightarrow{E_2}\overrightarrow{E_1} + z.\overrightarrow{E_3}\overrightarrow{E_1})$

--> We werken in een georthonormeerde basis (zie puntje 6.4), dus…

⇔ $\vec{P}.\ \overrightarrow{E_1} = (x.1 + y.0 + z.0)$ → Omdat cos(90) = 0 en 1 . 1 = 1 (zie puntje 6.4)

$= x$ (oefening is opgelost!)

6.6.4) Oefening 4: een beetje goniometrie erbij…

Welke conclusie kan je trekken over $\vec{A}, \vec{B} \in S_0$ als $\vec{A}.\vec{B} = 2\vec{A}.3\vec{B}$?

→ Het is belangrijk om te beseffen hier dat je het inproduct over beide leden moet toepassen, zowel het rechterlid als het linkerlid.

➔ $\vec{A}.\vec{B} = 2\vec{A}.3\vec{B}$ (opgave overgeschreven)

⇔ $\cancel{|\vec{A}|}.\cancel{|\vec{B}|}.\cos(\vec{A}, \vec{B}) = 2\cancel{|\vec{A}|}.3\cancel{|\vec{B}|}.\cos(\vec{A}, \vec{B})$ (inproduct twee keer toegepast, rekenen in R)

⇔ $\cos(\vec{A}, \vec{B}) = 6\cos(\vec{A}, \vec{B})$ (vereenvoudigen, proper overschrijven)

⇔ $-5\cos(\vec{A}, \vec{B}) = 0$ (linkerlid naar de andere kant brengen)

(⇔ $5\cos(\vec{A}, \vec{B}) = 0$ (verwante hoeken: tegengestelde cosinussen zijn gelijk aan elkaar))

⇔ $\cos(\vec{A}, \vec{B}) = 0$ (rekenen in R)

⇔ $\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \pm 90°$ (als cos = 0 dan is alfa 90° --> zie je aan ZRM of goniometrische cirkel)

--> Let op: je ZRM zal alleen +90° geven, echter is -90° ook een oplossing dus die er niet vergeten bij te schrijven!!!

6.6.5) Oefening 6: een evenwijdigheid

Voor welke $\vec{A},\vec{B} \in S_0$ geldt dat $\left(\vec{A}.\vec{B}\right)^2 = \vec{A}^2.\vec{B}^2$?

→ We checken het inproduct opnieuw in LL en RL apart na van de gelijkheid.

➔ $LL: \left(\vec{A}.\vec{B}\right)^2 = \left(|\vec{A}|.|\vec{B}|.\cos(\vec{A},\vec{B})\right)^2$

$= |\vec{A}|^2.|\vec{B}|^2.\cos^2(\vec{A},\vec{B})$

$= neen, goed\ geprobeerd, maar\ verder\ kunnen\ we\ niet\ uitrekenen$

➔ $RL: \vec{A}^2.\vec{B}^2 = |\vec{A}|^2.|\vec{B}|^2$

➔ LL = RL ⇔ $\cancel{|\vec{A}|^2}.\cancel{|\vec{B}|^2}.\cos^2(\vec{A},\vec{B}) = \cancel{|\vec{A}|^2}.\cancel{|\vec{B}|^2}$ (we delen beide leden door elkaar)

⇔ $\cos^2(\vec{A},\vec{B}) = 1$ (1 is het neutraal element van de deling in R)

⇔ $\cos(\vec{A},\vec{B}) = \pm 1$ (tweedegraadsvergelijking oplossen)

→ Op de goniometrische cirkel lezen we af: als cos = 1 is de hoek = 0° of 180°

➔ We besluiten dat A evenwijdig is met B: A // B, want herinner je eigenschap 4 van puntje 6.2. Twee vectoren zijn evenwijdig als de cosinus van hun inproduct gelijk is aan 1.

***Waarschuwing: niet elke rekenregel waarmee je vertrouwd bent bij reële getallen mag je doortrekken tot de invermenigvuldiging, zo is $\left(\vec{A}.\vec{B}\right)^2$ NIET gelijk aan $|\vec{A}|^2.|\vec{B}|^2$ zoals je zag in deze oefening.**

6.6.6) Oefening 8: we gaan een Eulertje doen

Bewijs de betrekking van Euler: $\forall A,B,C,D \in S: \ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = (\vec{B}-\vec{A}).(\vec{D}-\vec{C}) + (\vec{C}-\vec{A}).(\vec{B}-\vec{D}) + (\vec{D}-\vec{A}).(\vec{C}-\vec{B})$

--> Stap 1: identificatie vrije- en puntvectoren

$= \vec{B}.\vec{D} - \vec{B}.\vec{C} - \vec{A}.\vec{D} + \vec{A}.\vec{C} + \vec{C}.\vec{B} - \vec{C}.\vec{D} - \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{D}$
$+ \vec{D}.\vec{C} - \vec{D}.\vec{B} - \vec{A}.\vec{C} + \vec{A}.\vec{B}$

--> Stap 2: identificatie uitvoeren, gebruik maken van de commutativiteit van de vermenigvuldiging van vectoren

$= \cancel{\vec{B}.\vec{D}} - \cancel{\vec{B}.\vec{C}} - \vec{A}.\vec{D} + \vec{A}.\vec{C} + \cancel{\vec{B}.\vec{C}} - \vec{C}.\vec{D} - \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{D}$
$+ \vec{C}.\vec{D} - \cancel{\vec{B}.\vec{D}} - \vec{A}.\vec{C} + \vec{A}.\vec{B}$ --> Je zal zien dat je alles kan schrappen

--> Stap 3: uitrekenen
$= 0$

→ Ik kopieer hier de verbetersleutel omdat het bijna etenstijd is (ik ben aan het vasten).

6.6.7) Oefening 10: analytische uitdrukking inproduct

Bereken t.o.v. een georthonormeerde basis $(\overrightarrow{E_1}, \overrightarrow{E_2}, \overrightarrow{E_3})$ het inproduct $\vec{A}.\vec{B}$ als

a. $\vec{A}(2,3,-1), \vec{B}(-1,4,3)$

Voor degenen die niet zo goed in wiskunde zijn: (x1, y1, z1) zijn de coördinaten van je eerste puntvector, 2 dan van je 2de puntvector

→ Herinner je de analytische uitdrukking van het inproduct: $\vec{A}.\vec{B} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

--> We vullen in: $\vec{A}.\vec{B} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 2.(-1) + 3.4 + (-1).3$

$= -2 + 12 - 3 = 7$

--> Dit is veels te makkelijk. We gaan nu door naar hoofdstuk 7 dat veel moeilijker is!

7) Hoeken en afstanden

*Waarschuwing: dit hoofdstuk is véél moeilijker dan hoofdstuk 6 en je zal hier een aanzienlijke hoeveelheid tijd in moeten steken om het te snappen.

7.0) Voorkennis: niet vergeten

7.0.1) Cartesische vergelijkingen van rechten en vlakken

*De algemene vergelijking van een vlak is nog steeds: **Ax + By + Cz + D = 0**

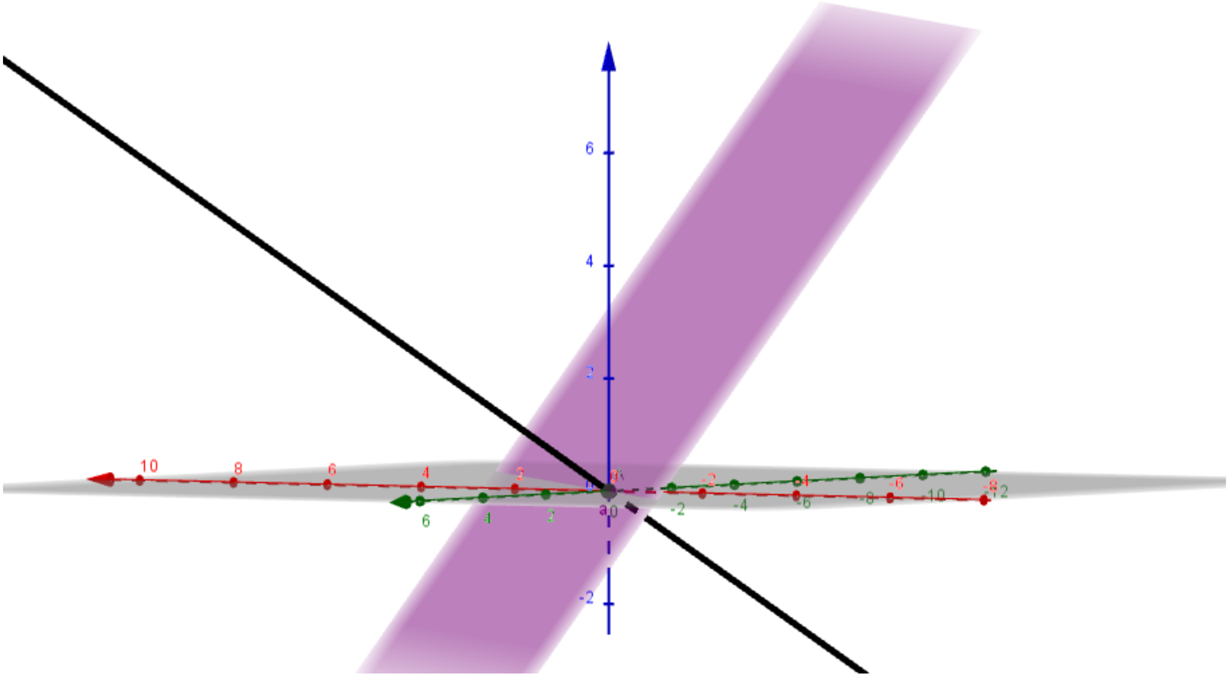
*De algemene vergelijking van een rechte is: $\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$

--> Hierbij zijn a, b en c de richtingsgetallen van de rechte.

7.0.2) Nieuw begrip: de normaalvector

*We zullen hier vaak moeten werken met de normaalvector, dus verklaar ik hier eerst wat dat is.

--> De normaalvector is een vector dat loodrecht op je vlak staat (het is dus onderdeel van de loodlijn op dat vlak). We nemen een vlak met vergelijking x + y + z = 0.



--> De zwarte loodlijn die ik hierbij heb getekend is de normaalvector.

--> De normaalvector heeft dezelfde richtingsgetallen als de coëfficienten van je vlak. Dus, als je vlak Ax + By + Cz + D = 0 hebt, zijn de richtingsgetallen van je normaalvector gelijk aan (A, B, C).

--> Hier zijn de richtingsgetallen dus gelijk aan (1, 1, 1)

--> Op de grafiek zie je ook duidelijk dat de normaalvector dezelfde richting heeft.

*Dit is alles wat je moet kennen over de normaalvector!

7.1) Evenwijdige- en loodrechte stand onderzoeken

7.1.1) Evenwijdige stand onderzoeken

*Je moet de evenwijdige en loodrechte stand tussen twee rechten onderling, rechten en vlakken en twee vlakken onderling kunnen bepalen. Dit doe je met de formules

1) $e \mathbin{//} f \rightarrow a = k\,.\,a' \wedge b = k\,.\,b' \wedge c = k\,.\,c'$

--> Ken je al: twee rechten zijn evenwijdig als hun richtingsgetallen (rige's) evenredig zijn.

2) $e \mathbin{//} \alpha \rightarrow Aa + Bb + Cc = 0$

--> Ken je al: een rechte en een vlak zijn evenwijdig als deze gelijkheid klopt.

3) $\alpha \mathbin{//} \beta \rightarrow A = k\,.\,A' \wedge B = k\,.\,B' \wedge C = k\,.\,C'$

--> Deze is nieuw maar is logisch (nadat je uitleg bij 5 hebt gelezen: als twee vlakken evenwijdig zijn, dan zijn de richtingsgetallen van hun normaalvectoren onderling evenredig)

7.1.2) Loodrechte stand onderzoeken

4) $e \perp f \rightarrow aa' + bb' + cc' = 0$

--> Ken je ook al: als twee rechten (of vectoren) loodrecht op elkaar staan is hun inproduct = 0.

--> Want: analytische uitdrukking inproduct: $\vec{A}\,.\,\vec{B} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

--> Het inproduct is 0 als hoek = 90° (cos 90° = 0), dan staan ze loodrecht op elkaar.

5) $e \perp \alpha \rightarrow a = k\,.\,A \wedge b = k\,.\,B \wedge c = k\,.\,C$

--> Als een rechte e loodrecht staat op een vlak (α in dit geval), dan zijn geldt bovenstaande evenredigheid.

--> Dit is logisch: als een rechte loodrecht staat op een vlak, is het een normvector. Dus als de rechte loodrecht staat op het vlak moet het evenredige richtingsgetallen hebben met de normvector (normaalvector) van dat vlak. We weten dat de normaalvector richtingsgetallen A, B, C heeft (neem dit van me aan) die overeenkomen met de coëfficiënten van dat vlak. ➔ $Nog\ een\ eigenschap$: $normaalvector\ op\ vlak\ staat\ loodrecht\ op\ dat\ vlak$

$normaalvector\ heeft\ richtingsgetallen\ (A, B, C)$

→ Komt van algemene vergelijking vlak: Ax + By + Cz + D = 0

6) $\alpha \perp \beta \rightarrow AA' + BB' + CC' = 0$

--> Als twee vlakken loodrecht staan op elkaar, dan is het inproduct van hun normaalvectoren gelijk aan nul (nu wél logisch).

7.1.3) Overzicht formules: evenwijdige en loodrechte stand tussen rechten en vlakken

EVENWIJDIG	1) $e \mathbin{//} f \rightarrow a = k\,.\,a' \wedge b = k\,.\,b' \wedge c = k\,.\,c'$
	2) $e \mathbin{//} \alpha \rightarrow Aa + Bb + Cc = 0$
	3) $\alpha \mathbin{//} \beta \rightarrow A = k\,.\,A' \wedge B = k\,.\,B' \wedge C = k\,.\,C'$
LOODRECHT	4) $e \perp f \rightarrow aa' + bb' + cc' = 0$
	5) $e \perp \alpha \rightarrow a = k\,.\,A \wedge b = k\,.\,B \wedge c = k\,.\,C$
	6) $\alpha \perp \beta \rightarrow AA' + BB' + CC' = 0$

7.1.4) Gevolgen van de formules van puntje 7.1.3

7.1.4.1) Een rechte door punt P_1 en loodrecht op vlak α

*Als je de cartesische vergelijking van een rechte moet bepalen heb je de volgende formule:
$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$

--> We hebben echter nu een normaalvector. Want, de rechte staat loodrecht op een vlak.
Dus… We weten nu dat de richtingsgetallen van de rechte (A, B, C) zijn van de vergelijking van ons vlak **Ax + By + Cz + D = 0**.

--> We veranderen de formule van onze rechte: $\frac{x-x_1}{A} = \frac{y-y_1}{B} = \frac{z-z_1}{C}$

--> Dit is de formule van een rechte bepaald door één punt loodrecht op één vlak

7.1.4.2) Een vlak bepaald door een gegeven punt en loodrecht op een gegeven rechte

*Als punt P(x_1, y_1, z_1) zijn gegeven en een rechte e met stel richtingsgetallen (a, b, c) dan ga je als volgt te werk…

--> We lezen: loodrecht → Nu hoort een belletje te rinkelen: **normaalvector**

--> We hebben een rechte loodrecht op een vlak = formule 5.

5) $e \perp \alpha \rightarrow a = k\,.A \;\wedge b = k\,.B \;\wedge c = k\,.C$

--> We mogen dit schrijven als: $e \perp \alpha \rightarrow A = k\,.a \;\wedge B = k\,.b \;\wedge C = k\,.c$

--> De algemene vergelijking van een van een vlak is: **Ax + By + Cz + D = 0**

--> We hebben A, B en C (zie gemarkeerde deel).

--> We vullen in… **k . a . x + k . b . y + k . c . z + D = 0**

➔ **Je beseft: we kennen k en a en hebben één punt, dus we kennen x, y en z. We zoeken nu D. Dus moet je afzonderennnnnnnn gast!**

--> **D = - kax – kby – kcz**

--> Nu je je punt D hebt gevonden kan je die in je vlak zetten

--> α: $\boldsymbol{kax + kby + kcz - kax_1 - kby_1 - kcz_1}$

$= \boldsymbol{ka(x - x_1) + kb(y - y_1) + kc(z - z_1)}$ **--> Neem nu k = 1**

$= \boldsymbol{a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1)}$

→ Dit is de algemene vergelijking van een vlak als één punt en één loodlijn is gegeven

7.1.4.3) Overzicht: formules gevolgen van formules van puntje 7.1.3

Rechte met normaalvector en gegeven punt	7) $\frac{x-x_1}{A} = \frac{y-y_1}{B} = \frac{z-z_1}{C}$
Vlak met normaalvector en gegeven punt	8) $\boldsymbol{a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1)}$

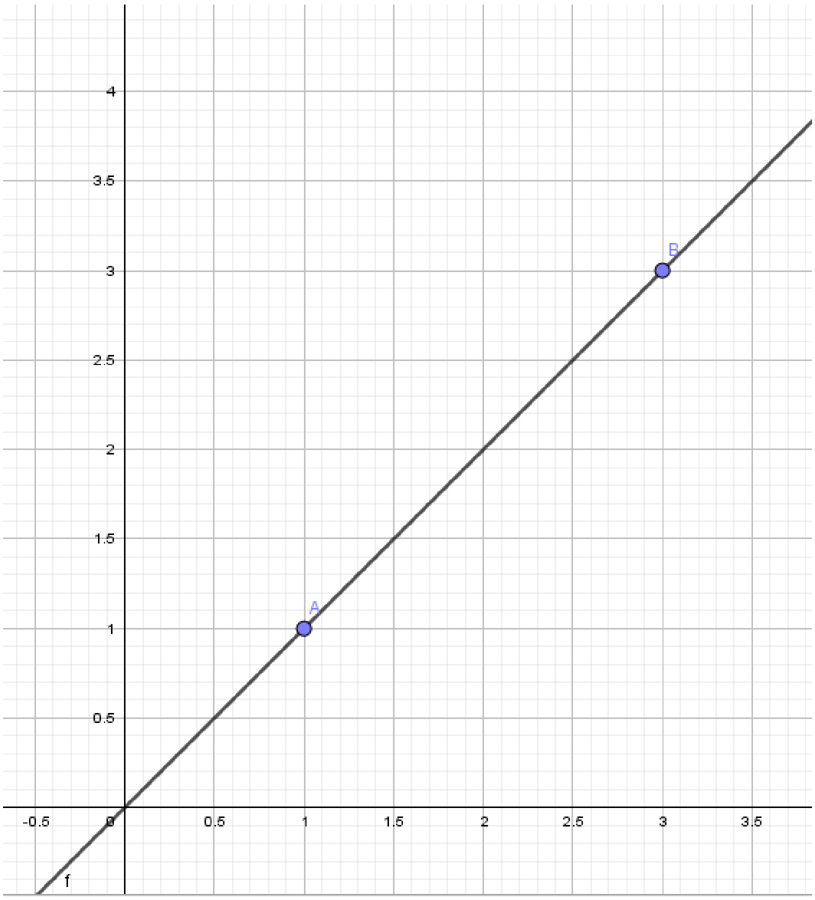
--> Het worden meer en meer formules om vanbuiten te leren als dat je tactiek is, daarom schrijf ik de redeneringen uitgebreid op zodat je de inzicht verkrijgt. Zoals Kevin heeft gezegd, niet van-buiten blokken, je zal gegarandeerd fouten maken.

--> Ook niet spieken, er is no way een lat lang genoeg om al deze formules op te schrijven.

7.2) Afstanden

*Dit hebben we ook gezien in de vlakke meetkunde, we breiden het uit naar de ruimtemeetkunde

7.2.1) Afstand tussen twee punten: vlakke meetkunde



Als je de afstand tussen de punten A en B moet berekenen, pas je zonder het te beseffen de stelling van pythagoras toe.

We hebben hiervoor de formule geleerd:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Je berekent zonder dat je het beseft de 'schuine zijde' in de stelling van Pythagoras.

We breiden dit begrip uit naar de ruimtemeetkunde.

7.2.2) Uitbreiding naar de ruimtemeetkunde

*In de vlakke meetkunde werken we slechts in twéé dimensies: x en y-coördinaat

*In de ruimtemeetkunde werken we met drie dimensies: x, y en z-coördinaat

--> We breiden onze formule uit, we voegen onze z-coördinaat toe

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

--> Dit is de formule om afstand te berekenen in de ruimtemeetkunde!

7.2.3) Afstand tussen een punt en een vlak

T.o.v. een georthonormeerde basis vindt men het maatgetal d van de afstand van het punt $A(x_1, y_1, z_1)$ tot het vlak α: $Ax + By + Cz + D = 0$ met de formule

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

*Als je een punt en een vlak hebt gekregen, kan je dus de afstand (= d) hiertussen berekenen

7.2.4) Afstand tussen een punt en een rechte (moeilijk!)

*Als je de afstand tussen een punt en een rechte moet berekenen, ga je volgend stappenplan na:

1) Ligt het punt op de rechte? Dan is de afstand 0.

--> Je vult het punt in op je cartesische vergelijking van de rechte en checkt na of het klopt.

--> Ja? Je hebt geluk! Je rekenwerk stopt hier!

2) Ligt het punt niet op de rechte? Hel start hier.

--> Voorbeeldoefening: afstand van A tot e als…

A(1, 2, 0) en e: $\begin{cases} x - y - z - 2 = 0 \\ x - 3y + z - 10 = 0 \end{cases}$

3) Bepaal de richtingsgetallen van je rechte

--> a: k . $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = k\,.\,(-1.1 - (-1.(-3))) = k\,.\,(-1-3) = -4$

b: -k . $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -k\,.\,(1-(-1)) = -k\,.\,2 = -2$

c: $k\,.\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -2$

➔ We vinden dus (-4, -2, -2), dit kan je vereenvoudigen naar (2, 1, 1) zoals in de verbetersleutel (dit mag, omdat het makkelijker is om mee te rekenen, maar moet niet)

4) Bepaal de vergelijking van de loodvlak op je rechte

--> Loodlijn = loodrecht op je vlak = normaalvector

--> Onze rechte e fungeert nu als normaalvector aangezien hij nu loodrecht op een vlak staat. ➔ We kennen nu A, B en C (grote A, B en C)

--> Vergelijking vlak:

$Ax + By + Cz + D = 0$

⇔ $2x + y + z + D = 0$ (rechte E = normaalvector, dus richtingsgetallen = A, B, C)

⇔ $2\,.\,1 + 2 + 0 + D = 0$ (we hebben één punt gegeven)

⇔ $D = -4$ (we zoeken D want we kennen ze niet, we zoeken altijd *Dicks*)

➔ Nu kan je de vergelijking van de vlak terug invullen:

$2x + y + z - 4 = 0$

5) Bepaal het snijpunt van je rechte e en het vlak alfa.

--> Dit doe je door een stelsel op te stellen en op te lossen, je giet je rechte en vlak in een stelsel

--> $\begin{cases} x - y - z - 2 = 0 \\ x - 3y + z - 10 = 0 \\ 2x + y + z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 2 \\ x - 3y + z = -10 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$

--> We lossen op met Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[R3-2R1]{R2-R1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[2R3+3R2]{2R1-R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 12 & 24 \end{array}\right]$$

Bij Gauss maak je een matrix van je stelsel, je voert eerst linksboven elementaire rijoperaties uit om nullen te maken, daarna ga je 'een trapje lager' om nullen te maken daarrond (zie foto). Daarna kan je terug naar een stelsel (volgende pagina).

Je vraagt jezelf waarschijnlijk af of dit met substitutie ook gaat, ja maar dit is véél te lang, je hebt niet zoveel tijd en zal gegarandeerd fouten maken!

*Nu kan je teruggaan naar een stelsel

--> --> $\begin{cases} x - 4z = 2 \\ -2y + 2z = 8 \\ 12z = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases}$ (ga zelf na!)

6) Bereken de afstand van je berekend snijpunt tot je gegeven punt

--> $\sqrt{(2-1)^2 + (-2-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{21}$ (formule ingevuld)

--> Nu heb je het antwoord!

QUICK RECAP:

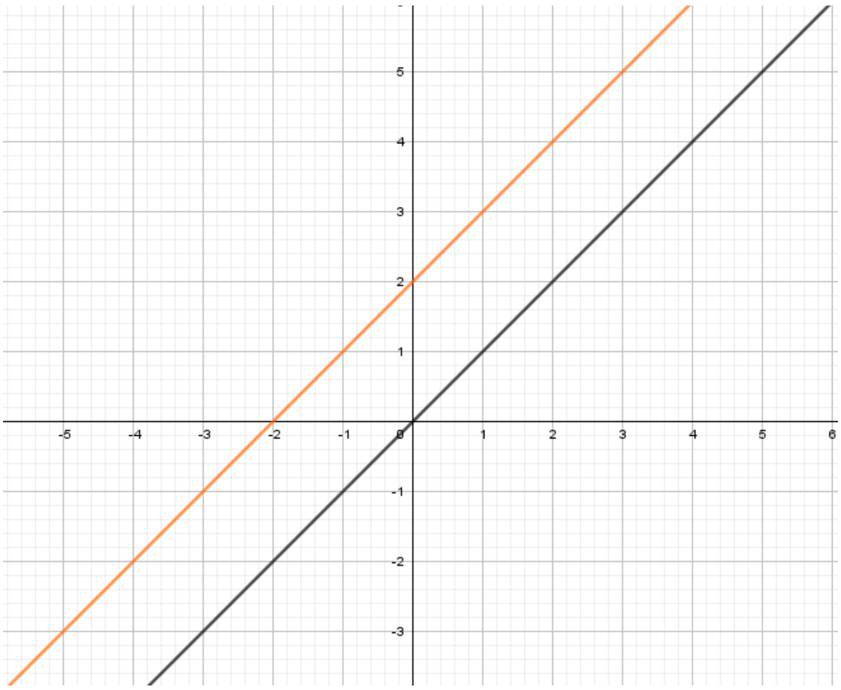
1) Ligt punt op rechte? Nee = stap 2. Ja = afstand 0.
2) Bepaal richtingsgetallen rechte
3) Bepaal vergelijking loodvlak op rechte (! Normaalvector !)
4) Bepaal snijpunt vlak met rechte met Gauss
5) Bepaal afstand tussen snijpunt en gegeven punt

--> Oefening opgelost!

7.2.5) Nu hebben we dus formule 9, 10 en 11 geleerd

Afstand tussen twee punten	9) $\lvert AB \rvert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
Afstand tussen punt en een vlak	10) $d = \dfrac{\lvert Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
Afstand tussen een punt en een rechte	11) Stappenplan 1) Ligt punt op rechte? Nee = stap 2. Ja = afstand 0. 2) Bepaal richtingsgetallen rechte 3) Bepaal vergelijking loodvlak op rechte (! Normaalvector !) 4) Bepaal snijpunt vlak met rechte met Gauss 5) Bepaal afstand tussen snijpunt en gegeven punt --> Oefening opgelost!

7.2.6) Afstand tussen twee evenwijdige rechten



--> Eerst check je na of beide rechten evenwijdig zijn: je checkt na of hun richtingsgetallen met elkaar evenredig zijn. Is dat zo, dan reken je verder (zie hieronder). Is dat niet zo, de oefening stopt dan hier.

--> Je kiest één punt op één rechte, dan bereken je de afstand van dat punt tot je andere rechte. Je berekent dus eigenlijk de afstand van een punt tot een rechte daarna.

--> Werkwijze afstand punt tot rechte: puntje 7.2.4

--> **Het enige wat erbij komt is dat je op één rechte één punt als eerst moet bepalen!**

7.2.7) Afstand tussen een rechte en een vlak evenwijdig met die vlak

--> Je checkt éérst na of de rechte en vlak daadwerkelijk evenwijdig zijn met de formule:

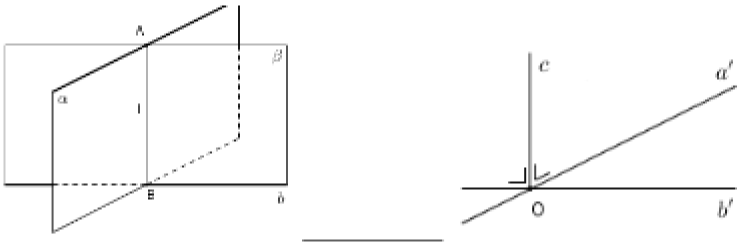
Aa + **Bb + Cc = 0** --> Wordt dit een ware uitspraak, dan zijn ze evenwijdig.

--> Je bepaalt een random punt op de rechte (je kiest een random x-waarde en kijkt welke y- en z-waarde eruit komt).

--> Nadat je de punt hebt bepaald, bepaal je eigenlijk de afstand van een punt tot een vlak met de formule die we hebben geleerd: $d = \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

7.2.8) Afstand tussen twee kruisende rechten

*Dit is zéér moeilijk, Kevin heeft gezegd dat hij een toepassing hierop nooit zou vragen maar je moet wel weten hoe je dit doet.



[redacted]

In het kort: ROOD: Je verplaatst beide rechten naar de oorsprong, ze worden a' en b'. Je bepaalt het vlak door beide rechten. De rechte c = loodlijn = normaalvector: heeft zelfde stel richtingsgetallen als loodlijn l.

Praktisch

- Uit de stelsels vergelijkingen van a en b halen we de richtingsgetallen van de rechten $a'//a$ en $b'//b$, beiden door de oorsprong. Als a en b kruisende rechten zijn, zijn a' en b' snijdend.
- We bepalen de vergelijking van het vlak $a'b'$ (vlak met één punt - de oorsprong - en een paar stellen richtingsgetallen gegeven). We halen hieruit het stel richtingsgetallen van de rechte c, loodrecht op vlak a'b'. De gemeenschappelijke loodlijn l van a en b heeft hetzelfde stel richtingsgetallen als c.
- We bepalen de vergelijking van het vlak α door a en l. We kennen immers een paar stellen richtingsgetallen (één van a en één van l) en één punt (kies er één op a) van α.
- We bepalen de vergelijking van het vlak β door b en l. We kennen immers een paar stellen richtingsgetallen (één van b en één van l) en één punt (kies er één op b) van β.
- De loodlijn l is de snijlijn van de vlakken α en β. Het stelsel vergelijkingen van l is dus het stelsel waarin de vergelijkingen van α en β voorkomen.

ORANJE: Je kent l nu, je bepaalt vlakken alfa en beta --> l = stelsel alfa/beta

- Het snijpunt van a en l vinden we door de stelsels vergelijkingen van a en l samen te nemen in één stelsel en dit stelsel op te lossen. We zullen dit snijpunt A noemen.
- Het snijpunt van b en l vinden we door de stelsels vergelijkingen van b en l samen te nemen in één stelsel en dit stelsel op te lossen. We zullen dit snijpunt B noemen.
- De gevraagde afstand is $|AB|$ en vinden we met een formule uit een vorig nummer.

GROEN: Snijpunt a/l en b/l vinden door stelsel: nu afstand AB zoeken met formule uit puntje 7.2.2.

7.3) Hoeken

*In dit deel leren we hoe we hoeken berekenen die rechten en vlakken onderling maken. Een punt kan nooit een hoek vormen met een rechte en vlak aangezien een punt gewoon een punt is.

7.3.1) Hoeken van een rechte en een vlak

*We onderscheiden hier drie gevallen: ze zijn evenwijdig, snijdend of kruisend

→ STAP 1: Check na of ze evenwijdig (of samenvallend) zijn.

--> Een rechte en een vlak zijn evenwijdig als Aa + Bb + Cc = 0

--> Is dit zo, dan is de hoek tussen beide rechten gelijk aan 0° (logisch). Je oefening stopt hier.

→ STAP 2: Pas het inproduct 2x toe (zie voorbeeldopgave hieronder)

--> VOORBEELDOEFENING: Bereken t.o.v. een georthonormeerde basis de hoeken die [OA maakt met het xy-vlak en met de assen als A(4,3,12)

--> Hoek [OA wordt gemaakt met het xy-vlak dus (de assen), de richtingsgetal van de norm-vector op het xy-vlak (het z-vlak) is (0,0,1). We gaan nu eerst de hoek tussen OA en de z-as berekenen zodat we het inproduct kunnen toepassen.

--> $\vec{A}\,.\,\vec{E_3} = 4\,.\,0 + 3\,.\,0 + 12\,.\,1\ (analytische\ uitdrukking\ inproduct) = 12$

--> $\vec{A}\,.\,\vec{z} = |\vec{A}|\,.\,|\vec{z}|\,.\cos(\vec{A},\vec{z})$ (ik kort E3 af met z, omdat we hiermee de z-as bedoelen)

--> De afstand van A tot de oorsprong is onbekend, maar die van z is 1.

--> We berekenen de afstand van A tot de oorsprong:

$|OA| = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2 + (12-0)^2} = 13$

--> Nu kunnen we het inproduct terug invullen: $\vec{A}\,.\,\vec{z} = 13\,.\,1\,.\cos(\vec{A},\vec{z})$

--> We hebben ons inproduct dus op twee manieren ingevuld die we gelijk kunnen stellen aan elkaar (zie gemarkeerde delen)

➔ $12 = 13\,.\cos(A,z)$

--> Nu kunnen we afzonderen naar cosinus

➔ $\cos(A,z) = \frac{12}{13}$

→ Nu moeten we hieruit een hoek halen, je drukt [SHIFT] [COS] en dan krijg je hoek: $(A,z) = 22{,}62°$

--> Maar we zochten eigenlijk de hoek tussen het xy-vlak en de hoek OA. Dus, we moeten 90°-22,62° doen en bekomen 67,38°.

*De algemene werkwijze is dus:

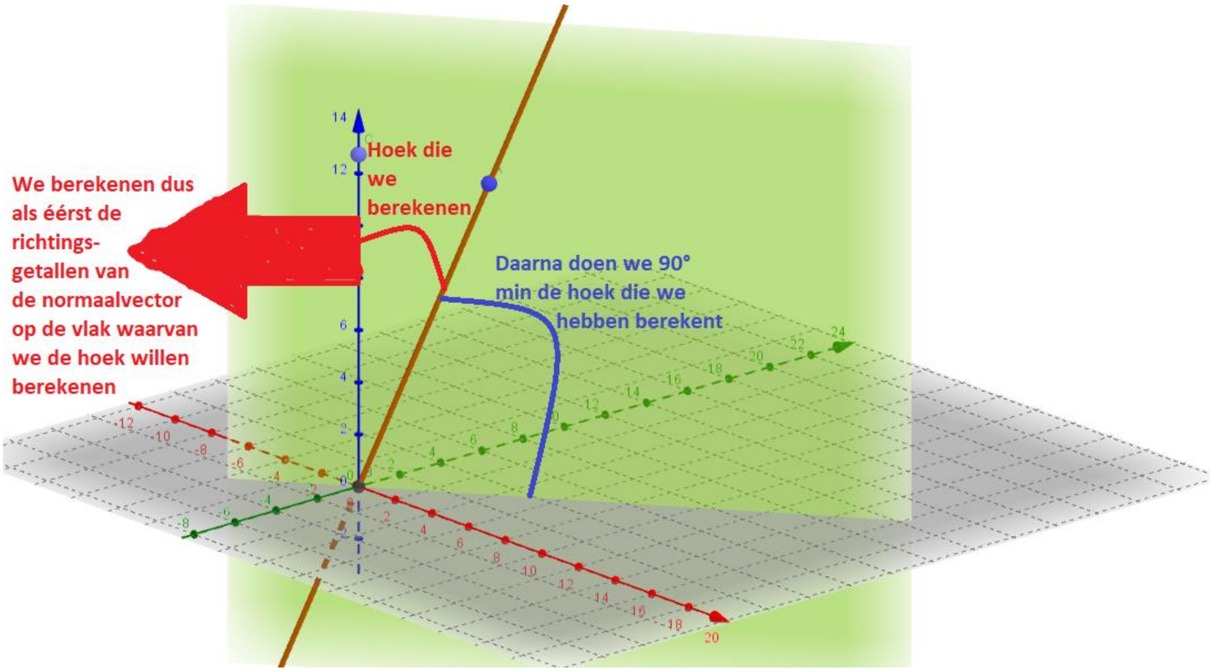
→ Bepaal de richtingsgetallen van de loodlijn (normaalvector) op het vlak dat je hebt gekregen. (de richtingsgetallen van de normaalvector komen overeen met de coëfficiënten van je vlak)

→ Bepaal de hoeken tussen de normaalvector en je gegeven rechte.

→ Je doet dit door het inproduct twéé keren toe te passen, zowel analytisch als de normale definitie die we hebben geleerd.

→ De hoek die je hebt gezocht is het complement van de gevraagde hoek, dus je moet 90° aftrekken (niet lachen) van je gevraagde hoek.

→ Hieronder heb ik het nog eens visueel voorgesteld met m'n Geogebra en paintskillz.



*Voorbeeld 2: Geef de hoek tussen het xy-vlak en de rechte e: x

--> We checken eerst na of de rechte en het vlak evenwijdig zijn of samenvallen.

--> Aa + Bb + Cc ?=? 0 ➔ De vergelijking van de xy-vlak is: $z = 0$

--> Zo is die van de xz-vlak: y = 0 en van de yz-vlak: x = 0

--> Dus: 0 . 1 + 0 . 0 + 1 . 0 ?=? 0 ⇔ 0 = 0

--> De rechte en vlak zijn evenwijdig: hoek = 0°

7.3.2) Hoek van twee rechten

*De twee rechten mogen evenwijdig (samenvallend), snijdend of kruisend zijn.

--> Zijn ze evenwijdig, dan zijn hun richtingsgetallen onderling evenredig en dan is de hoek tussen beide rechten dus 0°.

--> Zijn ze snijdend/kruisend, dan pas je ongeveer dezelfde werkwijze toe als 7.3.1

--> Bereken het inproduct zowel analytisch als gewoon en haal hier de cosinus alfa uit (de hoek)

➔ Voorbeeldoefening: zie volgende pagina

Oefening: bereken de hoek tussen volgende rechten…

[OA en de x-as als A(4,3,12)

--> De x-as heeft als richtingsgetallen (1,0,0)

--> Het inproduct wordt…

(1) $\vec{A} \,.\, \vec{x} = 4.1 + 3.0 + 12.0 = 4$

(2) $\vec{A} \,.\, \vec{x} = \ |\vec{A}| \,.\, |\vec{x}| \,.\, \cos(\vec{A}, \vec{x})$

$= \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2 + (12-0)^2} \,.\, 1 \,.\, \cos(A, x) = 13 \cos(A, x)$

--> We moeten eerst de afstand tussen O en A berekenen met behulp van de formule die we kennen om de afstand tussen twee punten te bepalen. De afstand tussen x en O is 1, aangezien we in een **orthonormale basis** werken, zoals je weet is de schaalverdeling in een orthonormale basis overal gelijk. Dus, daarom is de afstand tussen x en O 1, dezelfde redenering voor de vorige oefening.

➔ (1) = (2) ⇔ $4 = 13\cos(A,x)$ ⇔ $\cos(A,x) = \frac{4}{13}$ ⇔ $(A,x) = 72{,}08°$
--> De laatste doe je natuurlijk door [SHIFT][COS] te doen.

7.3.3) Hoek tussen twee vlakken

*Als je de hoek tussen twee vlakken moet berekenen dan bereken je eigenlijk de hoek tussen de normaalvectoren van beide vlakken.

--> Maar, je checkt als eerst na of beide vlakken evenwijdig zijn/samenvallen

--> Twee vlakken zijn evenwijdig als hun normaalvectoren evenwijdig zijn.

➔ Hun normaalvectoren zijn evenwijdig als de richtingsgetallen op een evenredigheidsfactor zijn bepaald:

--> We kunnen dus stellen: $A = k \,.\, A'$, $B = k \,.\, B'$ en $C = k \,.\, C'$

➔ Ja, want de richtingsgetallen van een normaalvector loodrecht op vlak Ax + By + Cz + D = 0 zijn… (A, B, C).

--> Als de richtingsgetallen evenredig zijn, dan stopt je oefening daar. De hoek tussen beide vlakken is 0°. Als je richtingsgetallen <u>niet</u> evenredig zijn, zal je verder moeten rekenen.

Als je de hoek tussen twee vlakken moet berekenen, bereken je eigenlijk de hoek tussen de normaalvectoren van die vlakken.

*Voorbeeldoefening: Geef t.o.v. een orthonormale basis de hoek van $a: 2x + 2y - z + 7 = 0$ en $b: x + 4y + z - 5 = 0$

--> We lezen als eerst de richtingsgetallen van de normaalvectoren af:

Normaalvector A van a: (2,2,-1)

Normaalvector B van b: (1, 4, 1)

--> We berekenen het inproduct analytisch:

$\vec{A}.\vec{B} = 9$

--> We willen nu het inproduct op normale wijze berekenen, maar eerst hebben we natuurlijk opnieuw de afstanden van A tot O en die van B tot O nodig

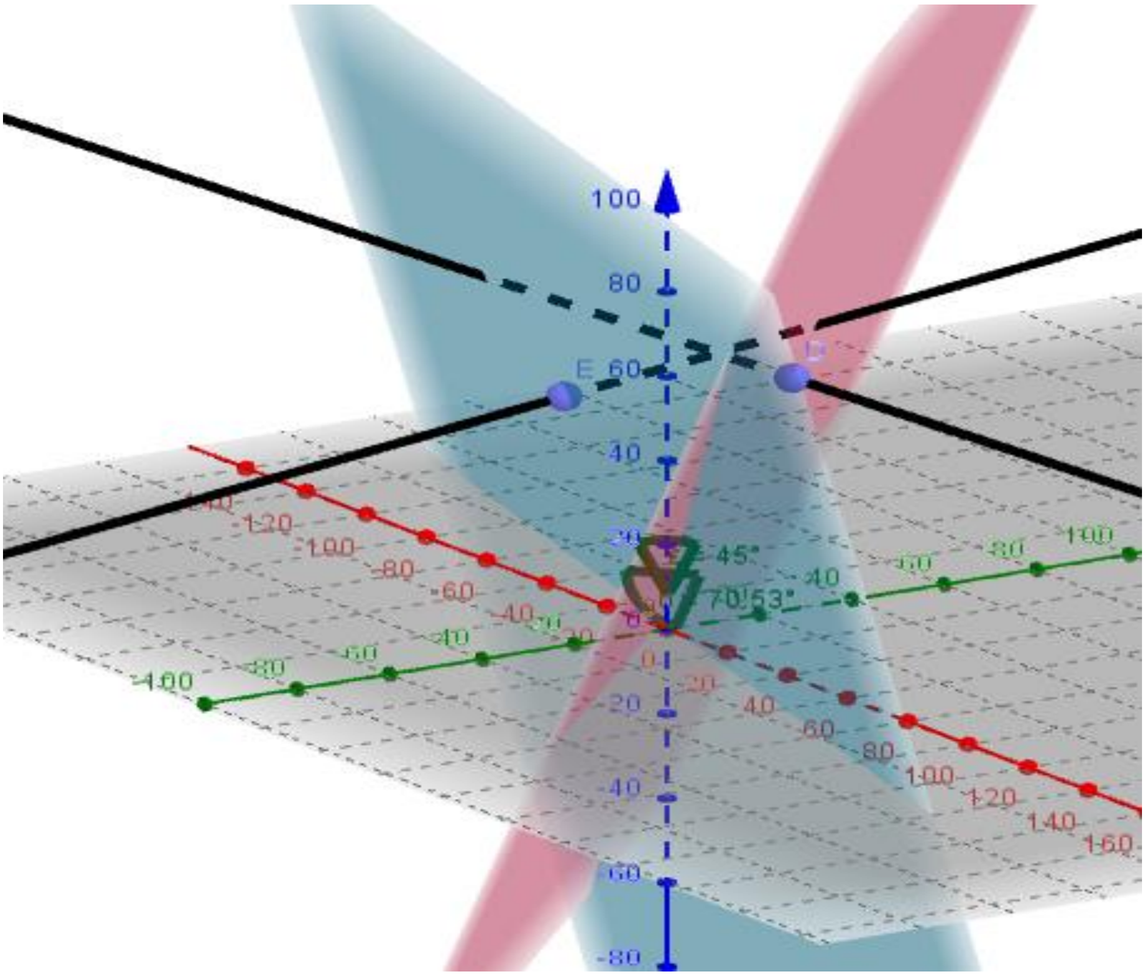
--> A tot O: $\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$

--> B tot O: $3\sqrt{2}$ (ga zelf na!)

➔ Gewoon inproduct: $\vec{A} \,.\, \vec{B} = |\vec{A}| \,.\, |\vec{B}| \,.\cos(A,B)$

⇔ $9 = 3.3\sqrt{2}\,.\cos(A,B)$

⇔ $\frac{9}{9\sqrt{2}} = \cos(A,B)$ ⇔ $(A,B) = 45°$ = jouw JUIST antwoord!



--> Hier zie je op Geogebra goed dat we de normaalvectoren van onze vlakken pakken die een hoek van 45° maken, waardoor onze vlakken ook een hoek van 45° maken.

7.4) Voorbeeldoefeningen

7.4.1) Toepassing op afstand tussen twee punten

*Bewijs t.o.v. een georthonormeerde basis dat driehoek OAB gelijkzijdig is met A(6,0,-6) en B(0,6,-6).

--> Gelijkzijdige driehoeken hebben 3 evenlange zijden, dus je moet 3 afstanden berekenen…

--> Maar we hebben maar 2 punten gekregen?

--> OAB slimpie, de oorsprong doet stiekemd ook mee: O(0,0,0)

--> We berekenen afstanden:

$$OA = \sqrt{(6-0)^2 + (0-0)^2 + (-6-0)^2}$$

$$AB = \sqrt{(0-6)^2 + (6-0)^2 + \left(-6-(-6)\right)^2}$$

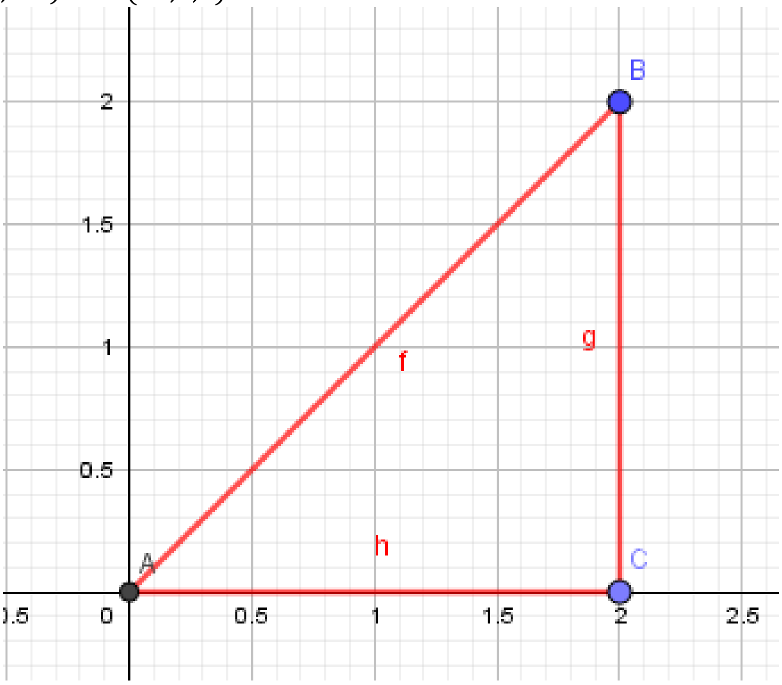
$$OB = \sqrt{(0-0)^2 + (6-0)^2 + (-6-0)^2}$$

--> Als je alle drie zijden uitrekent kom je $6\sqrt{2}$ uit bij ze allemaal, dus is de driehoek gelijkzijdig.

7.4.2) Het inproduct toepassen

*Bewijs t.o.v. een georthonormeerde basis dat ΔABC rechthoekig is met $A(-3,-4,0), B(-1,-7,-1)\ en\ C(19,3,9)$

--> Schets een driehoek
--> Je moet dus kijken of het rechthoekig is.
--> Volgens onze tekening is het recht-hoekig in C, maarrr, in praktijk hoeft dit niet zo te zijn, onze tekening is maar een schets!



--> We checken na: is AC loodrecht op BC?
--> aa' + bb' + cc' ?=? 0
--> We moeten eerst richtingsgetallen uitrekenen, dit kan je nu wel al:
rige AB = B – A = (2, -3, -1)
BC = C – B = (20,10,10
AC = C – A = (22,7,9)
--> 20 . 22 + 10 . 7 + 10 . 9 is duidelijk NIET 0 --> niet loodrecht
--> Het is niet rechthoekig in C, maakt niks uit, we checken nu een andere punt na
--> Is het rechthoekig in B?
==> Je checkt opnieuw het inproduct na voor AB en BC deze keer.
➔ 2 . 20 + (-3) . 10 + (-1) . 10 = 40 – 30 – 10 = 0 --> LOODRECHT

*Je probeert dus één hoek uit (bv AC en BC om rechthoekigheid in C na te checken), lukt dat niet ga je naar een andere hoek totdat je het hebt gevonden!

7.4.3) Loodrechte stand en parameters

*We hebben punten A(4,1,2), B(5,p,0), C(2,1,1) en D(3,3,-1)
--> Voor welke p geldt dat AB staat loodrecht op CD?
--> EERST RICHTINGSGETALLEN: AB = B – A = (1, p-1, -2)
CD = D – C = (1, 2, -2)
--> NU formule inproduct: aa' + bb' + cc' = 0
--> 1.1 + (p-1)2 + (-2)(-2) = 0 ⇔ 1 + 2p-2 + 4 = 0 ⇔ 2p = -3 ⇔ p = -1,5
--> Moeilijk was dit niet, toch?

7.4.4) Onderlinge stand tussen een rechte en vlak

*Als je moet onderzoeken of een rechte en vlak evenwijdig of loodrecht is:

bijvoorbeeld:

rechte $e: \frac{x}{2} = 1 - y = z + 1$ en $\alpha: 4x - 2y + 2z + 5 = 0$

--> Dan check je eerst een evenredigheid na met de formule:

Aa + Bb + Cc = 0

--> Let op! Eerst in standaardvorm: $1 - y = \frac{y-1}{-1}$

--> Dus we hebben rige's e: (2, -1, 1)

rige's normaalvector alfa: (4, -2, 2)

--> 4.2 – 2.(-1) + 2.1 = 12 --> NIET gelijk aan 0 --> Niet //

--> Is er dan een loodrechte stand?

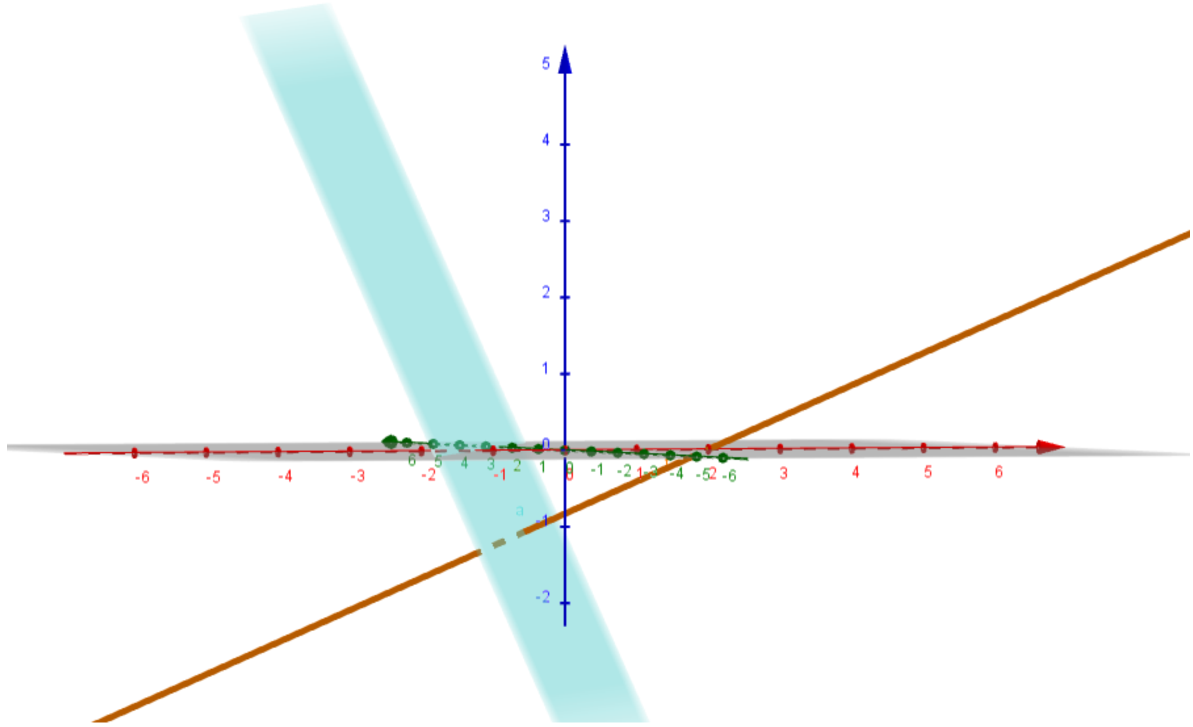
--> Dit keek je na met de formule: a = k . A en b = k . B en c = k . C

--> Er moet een evenredigheid zijn tussen de richtingsgetallen van de rechte en die van de normaalvector. Dit aangezien de normaalvector loodrecht op het vlak staat.

--> Dus: (2, -1, 1) = k . (4, -2, 2)? ➔ We zien direct: ja --> k = 2!

--> Er is dus een loodrechte stand!

*We zien dat ons antwoord juist is via Geogebra:



7.4.5) Letterlijke toepassing op afstand van een punt tot een vlak

*Gegeven t.o.v. een orthonormale basis zijn A(1, -2, -5), B(2, -3, 7) en C(-5, 0, 8). Bepaal de afstanden O, A, B, C tot $\alpha: x - 2y + 3z - 1 = 0$

--> Je kent de formule: $d = \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

--> Je vult de formule bij deze oefening letterlijk in.

➔ We maken de eerste, afstand van O tot α

--> Zoals je weet heeft de oorsprong O als punt (0,0,0)

--> $d = \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|1.0+(-2).0+3.0+(-1)|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}}$

➔ Je weet dat je in de plaatsen van A, B, C en D de coëfficiënten Ax + By + Cz + D van je vlak schrijft en in de plaats van x_1, y_1, z_1 schrijf je je gegeven punt.

--> Typ dit in je rekenmachine (neen, niet hoofdrekenen Ahmed) en je bekomt:

$d = \frac{1}{\sqrt{14}}$

--> Voor de andere punten doe je net hetzelfde, doe de rest zelf!

7.4.6) Een rechte door een punt en loodrecht op een vlak

*Geef t.o.v. een orthonormale basis een stelsel cartesische vergelijkingen van a door A en loodrecht op α met A(0,4,6) en α: $4x + 2y = 13$

→ Het sleutelwoord hier is 'loodrecht', dit moet een belletje doen rinkelen: normaalvector!

➔ **Je herinnert je dat de normaalvector richtingsgetallen (A, B, C) had, deze richtingsgetallen kwamen overeen met de coëfficiënten voor je vlak.**

--> Waar is C? Als C er niet bij staat is ze dus gelijk aan 0, we kunnen dit herschrijven als:

$4x + 2y + 0z - 13 = 0$

--> We lezen richtingsgetallen van onze normaalvector af: (4, 2, 0)

→ We hebben nu richtingsgetallen en één punt, je herinnert je de algemene cartesische vergelijking van de rechte: $\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$

--> Bij een rechte evenwijdig met de normaalvector kunnen we dit herschrijven als:

$\frac{x-x_1}{A} = \frac{y-y_1}{B} = \frac{z-z_1}{C}$ --> We hebben onze punt en richtingsgetallen, nu invullen!

➔ $\frac{x-0}{4} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-6}{0}$

→ Oeioei, we hebben een deling door nul, maar zoals je weet mag je niet delen door nul want… ***<u>Wie deelt door nul is een dikke vette snul!</u>*** We hebben bij hoofdstuk 5 gezien wat je bij een deling door 0 moet doen, ik herhaal het hier snel.

→ STAP 1: Maak een stelsel

$\begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{y-4}{2} \\ \cancel{\frac{x}{4} = \frac{z-6}{0}} \end{cases}$ ➔ De tweede vergelijking schrappen we aangezien deze vals is

→ STAP 2: Bekijk de parametrische vergelijking van je deling door 0

$\begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{y-4}{2} \\ z = z_1 \cancel{+k.c} \end{cases}$ ➔ Maar c is 0 dus: $z = z_1$, je vult je punt gewoon in:

→ STAP 3: Dit wordt dus…

$\begin{cases} z = 6 \\ \frac{x}{4} = \frac{y-4}{2} \end{cases}$ ➔ dit is juist!

7.4.7) Vergelijking van een vlak als een loodrechte rechte en een punt zijn gegeven

*Geef t.o.v. een orthonormale basis een cartesische vergelijking van het vlak door A loodrecht op a met…

--> b) $A(2,3,-1)$ en a: $\begin{cases} x-y=4 \\ 2x+y=z \end{cases}$

--> Eerst brengen we rechte a in de standaardvorm:

a: $\begin{cases} x-y+0z=4 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$

--> Daarna berekenen we de richtingsgetallen met de speciale methode voor een 2x3-stelsel:

$a = k\,.\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = k\,.((-1)^2-0)) = k\,.1 = 1$

$b = -k\,.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -k\,.(-1) = 1$

$c = k\,.\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = k\,.\big(1-(-2)\big) = k\,.3 = 3$

--> Onze rige's zijn dus: (1, 1, 3)

➔ We weten dat de rechte loodrecht op het vlak staat, dus… **NORMAALVECTOR**

→ Je weet dat de richtingsgetallen van de normaalvector gelijk zijn aan de coëfficiënt-en van het vlak. Nu je de richtingsgetallen van je normaalvector weet, weet je dus ook de coëfficiënten A, B en C van je vlak Ax + By + Cz + D = 0

--> Je vult in: $x+y+3z+D=0$

→ Je wilt je D echter nog weten, je hebt één punt gegeven, de coördinaten van dat punt kan je schrijven in de plaats van x, y en z. Zo bekom je één vergelijking met nog maar één onbekende en kan je D dus afzonderen.

--> $2+3+3.(-1)+D=0 \Leftrightarrow 2+D=0 \Leftrightarrow D=-2$

➔ Dus je vergelijking is nu: $x+y+3z-2=0$!!!

7.4.8) Vergelijking van een vlak als twee punten en loodrechte stand met andere vlak zijn gegeven

*Geef t.o.v. een orthonormale basis een cartesische vergelijking van het vlak dat gaat door A en B en loodrecht op α staat met…

$A(1,1,1), B(0,0,5)$ en $\alpha: 2y+7=x+3z$

→ Je ziet hier diréct dat ons vlak α niet in de standaardvorm staat, zet hem dus als eerst in de standaardvorm van $Ax+By+Cz+D=0$

--> $2y+7=x+3z \Leftrightarrow -x+2y-3z+7=0$

--> Je weet dat twee vlakken loodrecht op elkaar staan als hun normvectoren loodrecht op elkaar staan. Je mag (moet) nu dus de rige's van de normaalvector van α nemen.

--> Rige's normaalvector α = (-1,2,-3)

→ We hebben nu twéé punten en één stel richtingsgetallen, om de vergelijking van een vlak te bepalen heb je nog één stel richtingsgetallen nodig

--> We hebben twee punten, we doen A – B (je mag B – A ook doen)

--> A – B = (1,1,1) – (0,0,5) = (1,1,-4)

→ We hebben nu twéé richtingsgetallen en twéé punten, je mag je determinant invullen. We kunnen nu onze determinant invullen: het maakt niet uit welk punt je gebruikt

--> Deze determinant ga ik uitwerken aangezien voor sommigen herhaling toch wel nodig is…

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{R1-R2} \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-5 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \rightarrow x(-5) + y(7) + (z-5)(-3)$$

--> We werken uit: $5x + 7y - 3z + 15 = 0$

--> Dit is het vlak dat je hebt gevonden! Goed gedaan!

7.4.9) Vergelijking van een vlak als loodrechte stand tussen twee vlakken en één punt zijn gegeven

*Geef t.o.v. een orthonormale basis een cartesische vergelijking van het vlak dat gaat door A en loodrecht op α met…

A(1,1,2), $\alpha: 2x + 3y + z = 4$ en $\beta: x - y - z = 9$

--> De keyword is nog steeds: loodrecht. Loodrechte stand = normaalvector = coëfficiënten van je vlak mag je overnemen als richtingsvectoren (want: twee vlakken staan loodrecht op elkaar als hun normaalvectoren loodrecht op elkaar staan!)

--> We hebben één punt: (1,1,2)

--> We hebben twéé richtingsgetallen: (2, 3, 1) en (1, -1, -1) --> Zie vergelijkingen van vlakken

--> We kunnen dit invullen in onze determinant en de vergelijking v/d vlak bepalen:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \;.\;.\;.\;.\;.\; \Leftrightarrow \quad 2x - 3y + 5z - 9 = 0$$

→ Je werkt dit uit zoals hierboven (of zie samenvatting hoofdstuk 5) en bekomt je vergelijking!

7.4.10) Denkvraagje over afstand van een punt tot een vlak

*$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ → formule om de afstand van een punt tot een vlak te bepalen.

*Geef t.o.v. een orthonormale basis de vergelijking van een vlak dat op een afstand 5 van de oorsprong ligt en dat evenwijdig is met $\alpha: 3x + 6y + 2z + 44 = 0$

--> We hebben d gekregen: d = 5

--> We hebben een evenwijdigheid gekregen, evenwijdige vlakken hun normaalvectoren hebben evenredige richtingsgetallen: $A = k\,.A'$ en $B = k\,.B'$ en $C = k\,.C'$

--> We hebben dus voor de evenwijdige vlak: $3x + 6y + 2z + D = 0$

--> We kennen D niet. Maar gaan terug naar de formule:

$$d = \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \Leftrightarrow 5 = \frac{|3.0+6.0+2.0+D|}{\sqrt{3^2+6^2+2^2}}$$

--> Afzonderen naar D: $5\,.\sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} = D$

--> Uitwerken met ZRM geeft: $D = 35 = ! \pm 35$

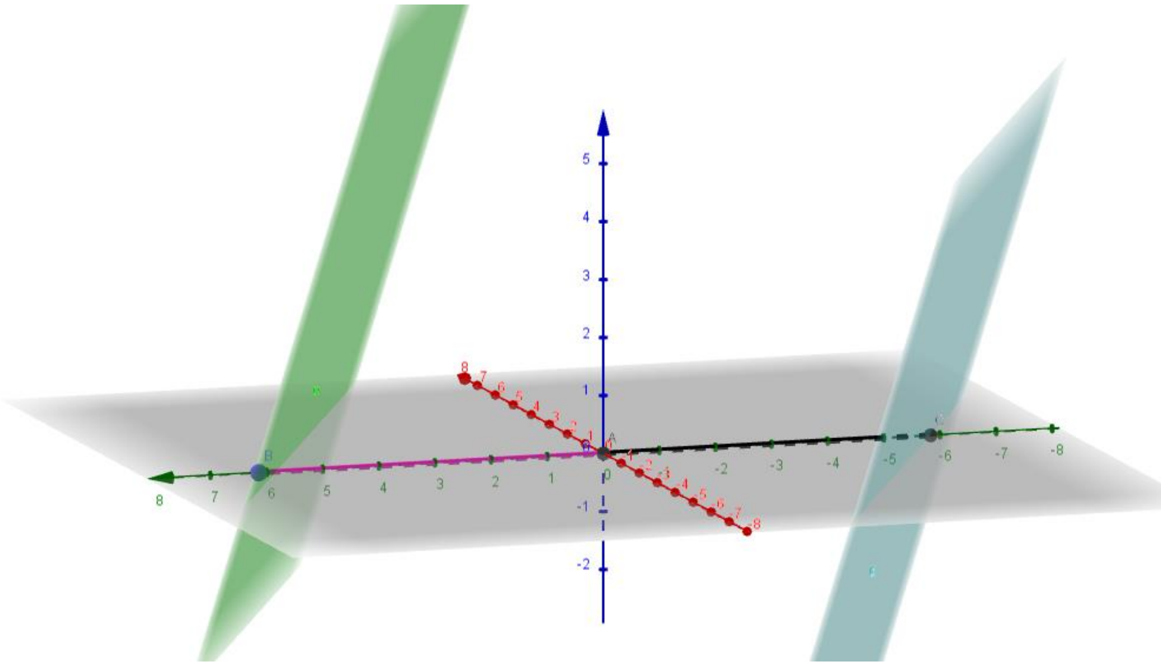
--> Let op: we hebben een absolute waarde, dus kan D zowel + als – 35 zijn.

--> De oplossingen zijn dus:

$3x + 6y + 2z + 35 = 0$

$3x + 6y + 2z - 35 = 0$

--> Ingeven in Geogebra geeft:



--> Wat nu in feite uitgerekend is, is de fstand tussen de oorsprong en de evenwijdige vlakken, grafisch kan je ook inzien dat je altijd twee oplossingen hebt aangezien je langs beide kanten van een afstand 35 van de oorsprong kan zitten.

7.4.11) Denkvraag over afstand tussen punt en een vlak: moeilijker

*Geef t.o.v. een orthonormale basis de vergelijking van een vlak dat evenwijdig is met het vlak ABC en dat op een afstand 2 van het punt D ligt met A(-1,-1,-1), B(-1,0,2), C(3,5,0) en D(0,2,2).

--> Hier moet je éérst de vergelijking v/d vlak bepalen, voor een vlak heb je twéé richtingsgetallen en één punt nodig. We hebben hier 4 punten gekregen, we kunnen dus twee richtingsgetallen bepalen: B – A = (0, 1, 3)

D – C = (-3, -3, 2)

*Twéé richtingsgetallen uitgerekend en één punt gegeven = determinant invullen

→ Je bekomt: $7x - 4y - 4z - 1 = 0$

--> Je hebt een vlak evenwijdig met dit vlak gekregen, evenwijdige vlakken hebben een verschillende D-waarde: $7x - 4y - 4z + D = 0$

--> Invullen in formule afstand punt tot vlak: $d = \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \Leftrightarrow 2 = \frac{|7.0-4.2-4.2+D|}{\sqrt{7^2+(-4)^2+(-4)^2}}$

➔ Afzonderen naar D: $2\sqrt{7^2+(-4)^2+(-4)^2} = |-16+D|$

$\Leftrightarrow 18 = |-16+D|$

➔ $-16+D = 18 \vee -16+D = -18$ $(eig. van\ abs. waarde)$

$\Leftrightarrow D = 34\ \ of\ \ D = -2$

→ We hebben dus nu twee vlakken:

$7x - 4y - 4z + 34 = 0\ \ en\ \ 7x - 4y - 4z - 2 = 0$

7.4.12) Vergelijking van vlak bepalen loodrecht op twee vlakken als een afstand is gegeven

*Geef t.o.v. een orthonormale basis de vergelijking van een vlak dat loodrecht op α en β staat en op een afstand 10 van de oorsprong ligt met $\alpha: 4x - y = z$ en $\beta: 4x + 7y - 9z = 4$

→ Het gezochte vlak A dat we zoeken staat loodrecht op onze gegeven vlakken, het staat dus loodrecht op de snijlijn e van vlakken α en β.

--> De rechte e kunnen we dus schrijven als: $\begin{cases} 4x - y = z \\ 4x + 7y - 9z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y - z = 0 \\ 4x + 7y - 9z = 4 \end{cases}$

→ Je moet dit stelsel niet uitrekenen, zoals je weet is een rechte een snijlijn van twee vlakken

→ Je kan hieruit de richtingsgetallen van de rechte bepalen.

--> a: $k . \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} = k . [9 - (-1.7)] = k . 16$

b: $-k . \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -9 \end{vmatrix} = -k . [4.(-9) - 4.(-1)] = -k . [-36 + 4] = -k . (-32) = 32$

c: 32 (ga zelf na!)

--> We hebben dus voorlopig de richtingsgetallen: (16, 32, 32), aangezien richtingsgetallen evenredig zijn mogen we dit vereenvoudigen tot (1, 2, 2)

--> Omdat we weten dat de vlak hierop loodrecht staat, wordt de voorlopige vgl van de vlak dus: $x + 2y + 2z + D = 0$ OF als je niet hebt vereenvoudigd:

$16x + 32y + 32z + D = 0$

➔ Nu moet je D zoeken. Je hebt géén punt gekregen maar wel een afstand, een afstand 10 van de oorsprong. Je moet nu de formule gebruiken voor afstand van een punt tot een vlak: $d = \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

--> We vullen in: $10 = \frac{|1.0+2.0+2.0+D|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}$

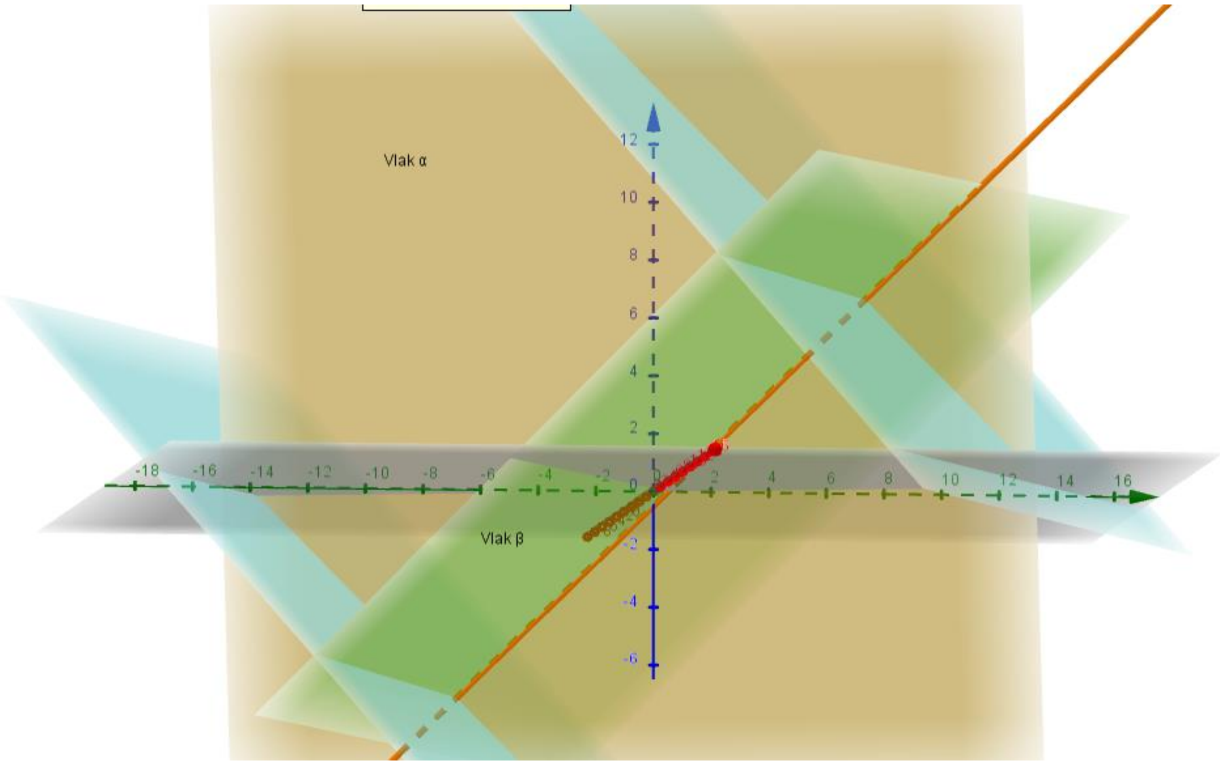
--> We zonderen af naar D: $10\sqrt{1^2+2^2+2^2} = |D|$

$\Leftrightarrow |D| = 30 \Leftrightarrow D = +30\ \ of\ \ D = -30$

--> We hebben dus twee vlakken als oplossing:

x + 2y + 2z + 30 = 0 en x + 2y + 2z – 30 = 0

*Nachecken met Geogebra geeft… (zie volgende pagina)



De ingekleurde vlakken zijn de vlakken alfa en beta die we hebben gegeven. Ik heb hier ook de snijlijn van getekent. Zo zie je natuurlijk perfect dat de vlak(ken) die we zochten loodrecht op die snijlijn zaten. Omdat we ook met afstand hebben gerekent hebben we natuurlijk twéé vlakken als oplossing (want je kan de afstand hebben langs beide kanten van de xyz-assen).

7.4.13) Hoeken van een driehoek berekenen als drie punten zijn gegeven

*Bereken t.o.v. een orthonormale basis de hoeken van ΔABC met $A(5,3,4)$, $B(3,0,-2)$ en $C(1,6,7)$.

--> We berekenen eerst die van hoek A, daarna die van B. C doe je zelf.

--> We berekenen de richtingsgetallen van rechte AB en AC.

--> Voor hoek A is het belangrijk dat je **B – A en C – A** doet, A moet dus altijd als laatste voorkomen. Je mag <u>absoluut niet</u> A – B en A – C doen, dan krijg je een andere hoek.

➔ $B - A = (3,0,-2) - (5,3,4) = (-2,-3,-6) = \vec{R}$

➔ $C - A = (1,6,7) - (5,3,4) = (-4,3,3) = \vec{S}$

--> We noemen de bekomen richtingsgetallen de richtingsvectoren van de rechte.

→ Nu kunnen we het inproduct op analytische manier uitrekenen:

$\vec{R}.\vec{S} = (-2)(-4) + (-3)3 + (-6)3 = -19$

--> We zijn geïnteresseerd in de hoek zoals uit de opgave blijkt. Daarom moeten we het inproduct ook nog eens op de normale manier toepassen.

➔ $\vec{R}.\vec{S} = |\vec{R}|.|\vec{S}|.\cos(\vec{R},\vec{S})$

--> We zien dat we eerst de afstand tussen R en O en S en O moeten berekenen.

--> $|\vec{R}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (-6)^2}$ (de -0 mogen we weglaten --> oorsprong!)

$= 7$

--> $|\vec{S}| = \cdots = \sqrt{34}$ (ga zelf na!)

--> Nu kunnen we de gewone uitdrukking van het inproduct invullen:

$\vec{R}\,.\vec{S} = 7\sqrt{34}\,.\cos(\vec{R},\vec{S})$ ➔ (1) = (2) dus…

$\Leftrightarrow -19 = 7\sqrt{34}\,.\cos(\vec{R},\vec{S})$

$\Leftrightarrow \frac{-19}{7\sqrt{34}} = \cos(\vec{R},\vec{S}) \Leftrightarrow (R,S) = 117{,}74°$!!! Je hebt je oplossing!

--> Voor hoek B berekenen we de rige's van AB en BC

--> We doen A – B en C – B

$A - B = (5{,}3{,}4) - (3{,}0,-2) = \big(5-3, 3-0, 4-(-2)\big) = (2{,}3{,}6) = R$

$C - B = (1{,}6{,}7) - (3{,}0,-2) = (-2, 6, 9) = S$

➔ Het is belangrijk voor hoek B dat je B vanachter staat (snap je nu de regelmaat? Voor hoek A moet A vanachter in richtingsgetallen, voor hoek B, B en dan voor C natuurlijk C)

--> We berekenen het inproduct nu analytisch:

$R\,.S = 68\ (ik\ laat\ de\ pijltjes\ boven\ de\ vectoren\ weg\ om\ tijd\ te\ besparen)(1)$

--> We berekenen het inproduct ook normaal:

$R\,.S = |R|\,.|S|\,.\cos(R,S)$ ➔ Hey! R . S kennen we al!

$\Leftrightarrow 68 = |R|\,.|S|\,.\cos(R,S)$

➔ We moeten nu apart de afstand tussen R en O en S en O berekenen.

--> $R = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7$

--> $S = \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + 9^2} = 11$

Je mag de '-0' weglaten omdat je de afstand tussen de richtingsvector en de oorsprong hebt

==> We vullen in: $68 = 7.11\,.\cos(R,S)$

$\Leftrightarrow \cos(R,S) = \frac{68}{77} \Leftrightarrow (R,S) = 28°$

--> C kan je nu wel zelf.

7.4.14) Klein bewijsje met afstanden en het inproduct

*Ik baseer me hier volledig op de verbetersleutel maar verklaar de tussenstappen.

Bewijs: $\cos(\vec{A},\vec{B}) = \frac{x_1.x_2+y_1y_2+z_1.z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}.\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$

We berekenen het scalair product op twee manieren:

$\vec{A}.\vec{B} = x_1.y_1 + x_2.y_2 + x_3.y_3$ (1) Analytische uitdrukking inproduct

$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}|.\cos(\vec{A},\vec{B})$ (2) Gewone uitdrukking

(1)=(2): $|\vec{A}|.|\vec{B}|.\cos(\vec{A},\vec{B}) = x_1.y_1 + x_2.y_2 + x_3.y_3$ Je mag beide uitdrukkingen gelijkstellen aan elkaar

$\Leftrightarrow \cos(\vec{A},\vec{B}) = \frac{x_1.y_1+x_2.y_2+x_3.y_3}{|\vec{A}|.|\vec{B}|}$ Je zondert cosinus af

$\Leftrightarrow \cos(\vec{A},\vec{B}) = \frac{x_1.y_1+x_2.y_2+x_3.y_3}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2}.\sqrt{x_2{}^2+y_2{}^2+z_2{}^2}}$ De A en B in de noemer betekenen de afstand van A en O en B en O (zoals we hebben gezien in andere voorbeeldoefeningen), dus deze vervang je door de definitie van afstand tussen twee punten (als één punt O is)

7.4.15) Vergelijking van een loodvlak als een rechte en een ander vlak zijn gegeven

*Geef t.o.v. een orthonormale basis een vergelijking van het loodvlak door e op α met…

$e\colon \frac{x-2}{3} = 1 - y = \frac{2z}{3}$ en $\alpha\colon x - 2y + 3z + 7 = 0$

--> Om de vergelijking van een vlak op te stellen heb je twéé richtingsgetallen en één punt nodig.

--> Je hebt al één stel richtingsgetallen: (3, -1, 3/2) = afgelezen van de rechte

--> Je hebt nog ééntje, die van de normaalvector van α, namelijk (1, -2, 3)

--> Je hebt nog één punt nodig, maar aangezien je weet dat het loodvlak dat je zoekt door e gaat kan (mag, moet) je een random x, y of z-waarde invullen om een punt te bepalen.

➔ Pak z = 0: $\begin{cases} \frac{x-2}{3} = 0 \\ 1 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ ➔ Dus we hebben punt (2,1,0)

--> We vullen de determinant in:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 3/2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{R1-R2} \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z & 0 \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 3 & -1 & 3/2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 3 & -1 & 3/2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow$$

--> Uitwerken: $x - 2\left[(-1.3) - \left(-2 . \frac{3}{2}\right)\right] + (-1)y - 1\left[9 - \frac{3}{2}\right] + z[-5\,]$

$= x - 2[-3 + 3] - y(7{,}5) - 5z$

$= 0(x-2) - 7{,}5y + 7{,}5 - 5z = -7{,}5y - 5z + 7{,}5$

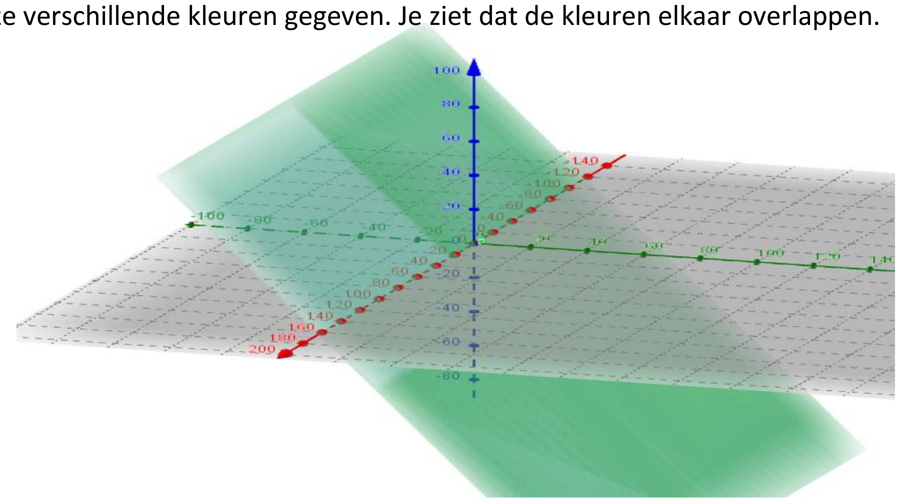
→ In de verbetersleutel staat dit vereenvoudigd tot: $3y + 2z - 3 = 0$

--> MAAR: Beide antwoorden zijn juist!

Als je me niet gelooft: ik heb beide vlakken ingegeven in Geogebra en ze verschillende kleuren gegeven. Je ziet dat de kleuren elkaar overlappen.

Veel succes op de toets! Jullie kunnen het allemaal!!!

Ruimtemeetkunde is een bitch maar dit is het laatste hoofdstuk, dan hoef je er nooit meer in aanraking mee te komen.



7.5) Overzicht formules hoofdstuk 7

*EVENWIJDIGE OF LOODRECHTE STAND ONDERZOEKEN:

EVENWIJDIG	1) $e \mathbin{//} f \rightarrow a = k\,.\,a' \wedge b = k\,.\,b' \wedge c = k\,.\,c'$
	2) $e \mathbin{//} \alpha \rightarrow Aa + Bb + Cc = 0$
	3) $\alpha \mathbin{//} \beta \rightarrow A = k\,.\,A' \wedge B = k\,.\,B' \wedge C = k\,.\,C'$
LOODRECHT	4) $e \perp f \rightarrow aa' + bb' + cc' = 0$
	5) $e \perp \alpha \rightarrow a = k\,.\,A \wedge b = k\,.\,B \wedge c = k\,.\,C$
	6) $\alpha \perp \beta \rightarrow AA' + BB' + CC' = 0$

*GEVOLGEN VAN DE FORMULES EVENWIJDIGE/LOODRECHTE STAND:

Rechte met normaalvector en gegeven punt	7) $\frac{\boldsymbol{x-x_1}}{\boldsymbol{A}} = \frac{\boldsymbol{y-y_1}}{\boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{z-z_1}}{\boldsymbol{C}}$
Vlak met normaalvector en gegeven punt	8) $\boldsymbol{a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1)}$

*BASISFORMULES AFSTANDEN:

Afstand tussen twee punten	9) $\lvert AB \rvert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
Afstand tussen punt en een vlak	10) $d = \frac{\lvert Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

→ **Alle andere afstanden bepaal je door een specifieke stappenplan**