
(Y) VOORWOORD

Dit is de samenvatting ter voorbereiding van de toets van limieten, voor het examen zullen alle aparte samenvattingen voor toetsen gecompileerd worden in één samenvatting.

Let op dat we niet over elk onderdeel een toets krijgen maar die delen getest zullen worden op het examen. De gecompileerde samenvatting die aan het einde van de module online komt te staan zal dus altijd vollediger zijn dan alle samenvattingen apart.

De inhoudstafel vinden jullie op de volgende pagina

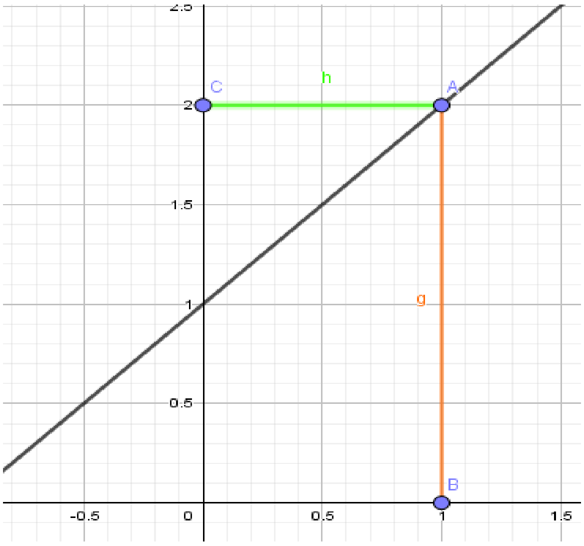
Inhoud

1) Analyse: Limieten

Nadat we continuïteit hebben gezien verdiepen we nu ons op limieten van een functie. Continuïteit vormt de basis voor dit hoofdstuk.

1.1) Grafische definitie van limieten

*Flashback naar continuïteit: een functie is **continu** in een **punt a** als je hem **kan tekenen** door dat punt **zonder je pen op te heffen** --> de functie op de afbeelding hieronder is continu in (1, 2)



*Met **limieten** zijn we geïnteresseerd wat x doet als het kortbij een getal komt, niet als x het getal zelf raakt. **We willen x zo kort mogelijk bij een getal brengen ZONDER het getal precies te raken.**

→ Als we x in de functie hiernaast 1 willen laten naderen schrijven we:

$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$

→ Als er een perforatie is (1, 2) zit is de functie niet meer continu in dit punt maar is dit wel nog een limiet want willen x enkel naderen, niet raken.

→→ Dit alles is énkel mogelijk omdat 1 een *ophopingspunt* is, een ophopingspunt is een punt waarvan je een <u>(gereduceerde) omgeving</u> van kunt maken en de (gereduceerde) omgeving punten bevat van dit domein.

→ **Elke ophopingspunt kan slechts één limiet hebben. Twee? Er zijn dan er afzonderlijke linker- en rechterlimieten. Een limiet bestaat als het linker- en rechterlimiet samenvallen.**

1.2) Definities van limieten

*Je moet op de toets kunnen overschakelen van de algemene definities naar de stomme $\varepsilon - \delta$-definities en vice versa. We bespreken de verschillende soorten definities.

1.2.1) Algemene definitie

***Normaal**: $\lim_{x \to a} f(x) = b$ ➔ We zeggen: <u>de limiet voor x *naderend* tot a is gelijk aan b</u>.

*$\boldsymbol{\varepsilon - \delta}$: $\forall \varepsilon : \exists \delta : \forall x \in dom\, f : 0 < |x - a| < \delta ==> |f(x) - b| < \varepsilon$

→ Voor elke epsilon-omgeving bestaat er een delta waarin alle functiewaarden zitten.

→ Let op: in je epsilon-delta-definitie staat -a en -b, als je van de normale- naar de $\varepsilon - \delta$-definitie moet gaan keer je je getallen om!

→ *Voorbeeld 1:* $\lim_{x \to 3} f(x) = 4$ ➔ $\forall \varepsilon : \exists \delta : \forall x \in dom\, f : 0 < |x - 3| < \delta ==> |f(x) - 4| < \varepsilon$

1.2.2) Rechterlimiet (RL)

***Normaal**: $\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = b$ ➔ x zal a naderen langs de rechterkant (x > a --> op de grafiek is dit langs rechts naderen)

* $\boldsymbol{\varepsilon - \delta}$: $\forall \varepsilon : \exists \delta : \forall x \in dom\, f : a < x - a < \delta + a ==> |f(x) - b| < \varepsilon$

→ Op de definitie zien we duidelijk dat ***we langs rechts naderen***.

→ *Voorbeeld 2:* $\lim_{\substack{x \to 6 \\ >}} f(x) = -5$ ➔ $\forall \varepsilon : \exists \delta : \forall x \in dom\, f : 6 < x < \delta + 6 => |f(x) + 5| < \varepsilon$

1.2.3) Linkerlimiet (LL)

*__Normaal__: $\lim_{\substack{x\to a \\ <}} f(x) = b$ ➔ x zal a naderen langs de linkerkant (x < a --> op de grafiek is dit langs links naderen)

* $\boldsymbol{\varepsilon - \delta}$: $\forall\varepsilon\colon \exists\delta\colon \forall x \in dom\ f\colon a - \delta < x < a \implies |f(x) - b| < \varepsilon$

→ *Voorbeeld 3:* $\lim_{\substack{x\to 3 \\ <}} f(x) = 4$ ➔ $\forall\varepsilon\colon \exists\delta\colon \forall x \in dom\ f\colon 3 - \delta < x < 3 \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon$

1.2.4) Limiet voor x nadert $+\infty$

*__Normaal__: $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ ➔ x zal oneindig naderen (bv. de functie f: x --> 1/x)

* $\boldsymbol{\varepsilon - \delta}$: $\forall\varepsilon\colon \exists P\colon \forall x \in dom\ f\colon x > P \implies |f(x) - b| < \varepsilon$

→ Dit klinkt misschien raar maar we vervangen onze δ door een P, omdat onze omgeving nu oneindig groot is. We laten onze x dus groter worden dan P. Dit moet je gewoon aannemen.

→ Handig trucje om te onthouden: **Bij x --> +∞ is x > P**

→ *Voorbeeld 4:* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 10$ ➔ $\forall\varepsilon\colon \exists P\colon \forall x \in dom\ f\colon x > P \Rightarrow |f(x) - 10| < \varepsilon$

1.2.5) Limiet voor x nadert $-\infty$

*__Normaal__: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = b$ ➔ x zal - oneindig naderen (bv. de functie f: x --> 1/x)

* $\boldsymbol{\varepsilon - \delta}$: $\forall\varepsilon\colon \exists P\colon \forall x \in dom\ f\colon x < -P \implies |f(x) - b| < \varepsilon$

→ Zie het verschil: Bij x --> +∞ is x > P ⇔ **! Bij x --> -∞ is x < -P !**

→ *Voorbeeld 5:* $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -2$ ➔ $\forall\varepsilon\colon \exists P\colon \forall x \in dom\ f\colon x < -P \Rightarrow |f(x) + 2| < \varepsilon$

1.2.6) Limiet voor y (het beeld van x = b) nadert ∞

*Bij sommige functies zal y oneindig naderen, dit is als je een **verticale asymptoot** hebt.

*__Normaal__: $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ➔ y zal oneindig naderen (bv. de functie f: x --> 1/x)

* $\boldsymbol{\varepsilon - \delta}$: $\forall Q\colon \exists\delta\colon \forall x \in dom\ f\colon 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > Q$

→ We pakken deze keer de letter Q omdat dezelfde reden: onze omgeving is oneindig groot!

→ Zie het verschil: Bij y --> +∞ is f(x) > Q ⇔ ! Bij x --> ∞ is x > P ! **('t is bijna hetzelfde)**

→ *Voorbeeld 6:* $\lim_{x\to -2} f(x) = +\infty$ ➔ $\forall\varepsilon\colon \exists P\colon \forall x \in dom\ f\colon x < |x + 2| < \delta \Rightarrow f(x) > Q$

1.2.7) Limiet voor y (het beeld van x = b) nadert $-\infty$

*__Normaal__: $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ ➔ y zal oneindig naderen (bv. de functie f: x --> 1/x)

* $\boldsymbol{\varepsilon - \delta}$: $\forall Q\colon \exists\delta\colon \forall x \in dom\ f\colon 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) < -Q$

→ Zie het verschil: Bij y --> -∞ is f(x) < -Q ⇔ ! Bij x --> $-\infty$ is x < -P ! **('t is bijna hetzelfde)**

→ *Voorbeeld 7:* $\lim_{\substack{x\to 1 \\ >}} f(x) = -\infty$ ➔ LET OP: we hebben bij deze oefening een RL en dit geval!

➔ $\lim_{\substack{x\to 1 \\ >}} f(x) = -\infty$ ➔ $\forall Q\colon \exists\delta\colon \forall x \in dom\ f\colon 1 < x < \delta + 1 -\!\!\Rightarrow f(x) < -Q$

1.2.7) Even alles op een rijtje zetten…

*We hebben alle verschillende definities van limieten gezien, je moet deze kunnen omzetten naar de epsilon-delta-notatie en vice versa.

→ Je kan de definities echter ook met elkaar combineren. Het blijft dus niet bij deze 7 definities. Het zijn er in totaal 15. Het beste is dat je ze herkent en kan toepassen (zie volgende oef.) i.p.v. dat je ze allemaal vanbuiten gaat leren.

1.2.8) Voorbeeldoefeningen met stappenplannen

*We maken samen enkele voorbeelden, want: oefening baart kunst! 😉

*<u>Voorbeeldoefening 1: van $\varepsilon - \delta$-notatie naar gewone lim-notatie</u>

→ $\forall\varepsilon: \exists\delta: \forall x \in dom\, f: 0 < x < \delta ==> |f(x)| < \delta$

→ STAP 1: Schrijf de basis op --> $\lim\limits_{\_\_} f(x) = \_\_\_\_\_$

→ STAP 2: Zijn er P's (x nadert + of – oneindig) of Q's (y = b nadert +- oneindig)?

--> Nee? Ga naar stap 4

→ STAP 3: Schrijf de $+\infty$ *of* $-\infty$ naargelang je een positieve- of negatieve P of Q hebt (of je kan ze allebei hebben)

→ STAP 4: Heb je te maken met een normale limiet, linkerlimiet of rechterlimiet?

--> Normale limiet: Neen.

--> Linkerlimiet: Neen.

--> Rechterlimiet: Ja! ➔ Je ziet duidelijk dat je langs rechts nadert.

→ STAP 5: Vul de waarde die x nadert voor je normale-/linker-/rechterlimiet in.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \_\_\_\_\_$

→ STAP 6: Vul de bijbehorende y-waarde (= b-waarde) van je limiet in!

→ Huh? Hoe zie je dit?

➔ We nemen onze definitie terug: $\forall\varepsilon: \exists\delta: \forall x \in dom\, f: 0 < x < \delta ==> |f(x)| < \delta$

--> Dat laatste kan je schrijven als: $|f(x) + 0| < \delta$ ➔ Nu zie je: b = 0!

→ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = 0$

→ $\forall P: \exists Q: \forall x \in dom\, f: x < -P ==> f(x) > Q$

→ STAP 1: Schrijf de basis op --> $\lim\limits_{\_\_} f(x) = \_\_\_\_\_$

→ STAP 2: Zijn er P's (x nadert + of – oneindig) of Q's (y = b nadert +- oneindig)?

--> Nee? Ga naar stap 4

--> Ja! Er zijn hier wél P's en Q's, we gaan naar stap 3.

→ STAP 3: Schrijf de $+\infty$ *of* $-\infty$ naargelang je een positieve- of negatieve P of Q hebt

--> $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \infty$

→ De oefening stopt hier: -∞ omdat we een negatieve P hebben,
∞ omdat we een positieve Q hebben

*<u>Voorbeeldoefening 2: van de gewone lim-notatie naar de $\varepsilon - \delta$-notatie</u>

→ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -2$

→ STAP 1: Heb ik ergens oneindig?

→ Nee? Sla stap 1 en 2 over

→ Ja: bij x --> a staat oneindig, dit betekent dat we een P hebben

→ STAP 2: Schrijf de basis rekening houdende met eventuele P's en Q's van de oneindigs.

→ $\forall\varepsilon: \exists P: \forall x \in dom\, f$

→ STAP 3: Schrijf de basis in deze stap als je geen oneindig had.

→ Wij hadden hier oneindig: we slaan stap 3 over.

→ STAP 4: Vul verder aan rekening houdende met eventuele P's en Q's en LL's of RL's

→ $\forall\varepsilon: \exists P: \forall x \in dom\, f: x < -P ==> |f(x) + 2| < \varepsilon$

→ $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ <}} f(x) = \infty$

→ STAP 1: Heb ik ergens oneindig?

→ Nee? Sla stap 1 en 2 over

→ Ja: bij b staat oneindig (zie algemene definitie), dit betekent dat we een Q hebben

→ STAP 2: Schrijf de basis rekening houdende met eventuele P's en Q's van de oneindigs.

→ $\forall Q: \exists \delta: \forall x \in dom\ f$

→ STAP 3: Schrijf de basis in deze stap als je geen oneindig had.

→ Wij hadden hier oneindig: we slaan stap 3 over.

→ STAP 4: Vul verder aan rekening houdende met eventuele P's en Q's en LL's of RL's

→ $\forall Q: \exists \delta: \forall x \in dom\ f: -2-\delta < x < 2 ==> f(x) > Q$

→ We hebben hier een linkerlimiet en Q is positief!

→ $\lim_{x\to 6} f(x) = -5$

→ STAP 1: Heb ik ergens oneindig?

→ Nee? Sla stap 1 en 2 over → We slaan stap 1 en 2 over!

→ STAP 2: Schrijf de basis rekening houdende met eventuele P's en Q's van de oneindigs.

→ STAP 3: Schrijf de basis in deze stap als je geen oneindig had.

→ Dit is de basis van de algemene definitie: $\forall \varepsilon: \exists \delta: \forall x \in dom\ f$

→ STAP 4: Vul verder aan rekening houdende met eventuele P's en Q's en LL's of RL's

→ $\forall \varepsilon: \exists \delta: \forall x \in dom\ f: 0 < |x-6| < \delta ==> |f(x)+5| < \varepsilon$

→ Dit is de algemene definitie letterlijk ingevuld.

*<u>Voorbeeldoefening 3: van tekst naar de $\varepsilon - \delta$-notatie (met omweg via de gewone lim-notatie)</u>

→ We kunnen f(x) willekeurig groot laten worden door x voldoende dichtbij -4 te nemen, maar kleiner dan 4.

→ STAP 1: Vertaal deze tekst naar de gewone lim-notatie

→ 1.1: Heb ik oneindig?

→ Ja! **We kunnen f(x) <u>willekeurig groot</u> laten worden**

→ 1.2: Waar staat mijn eventuele oneindig?

→ Bij de b, want we spreken over f(x), niet x! Als er stond x gewoon, was het bij de a.

→ Vul oneindig al in bij de b: $\lim_{\underline{\quad}} f(x) = \infty$

→ 1.3: Vul de rest verder aan:

→ Door x voldoende dichtbij -4 te nemen, maar kleiner dan -4 = LINKERLIMIET

→ $\lim_{\substack{x\to -4\\ <}} f(x) = \infty$

→ STAP 2: Vertaal de lim-notatie naar de $\varepsilon - \delta$-notatie

→ $\lim_{\substack{x\to -4\\ <}} f(x) = \infty$

→ We hebben een Q (bij b staat oneindig!): $\forall Q: \exists \delta: \forall x \in dom\ f$

→ We vullen aan: LET OP: linkerlimiet + Q

→ $\forall Q: \exists \delta: \forall x \in dom\ f:\ -4-\delta < x <\ -4 ==> f(x) > Q$ (! Oneindig is positief!)

→ We kunnen f(x) willekeurig klein laten worden door x voldoende dicht bij 7 te nemen, maar verschillend van 7.

→ STAP 1: Vertaal deze tekst naar de gewone lim-notatie

→ 1.1: Heb ik oneindig?

→ Ja

→ 1.2: Waar staat mijn eventuele oneindig?

→ Bij b → f(x) willekeurig klein

→ 1.3: Vul alles aan (inclusief de oneindig!)

→ Door x voldoende dichtbij 7 te nemen, (maar verschillend van 7) = LIMIET

→ $\lim_{x\to 7} f(x) = -\infty$

→ Herinner jezelf dat om een getal te naderen met een limiet we de functiewaarde <u>niet</u> willen raken. We nemen x dus voldoende dichtbij 7 (bv. 7,000001) maar we laten x 7 niet raken, want daarin zijn we niet geïnteresseerd.

→ STAP 2: Vertaal de lim-notatie naar de $\varepsilon - \delta$-notatie

→ $\lim_{x \to 7} f(x) = -\infty$

→ We hebben een Q (bij b staat oneindig!): $\forall Q: \exists \delta: \forall x \in dom\ f$

→ We vullen aan: LET OP: linkerlimiet + Q

→ $\forall Q: \exists \delta: \forall x \in dom\ f: 0 < |x - 7| < \delta ==> f(x) < -Q$ (! Oneindig is negatief, daarom -!)

*** Proficiat! Je kan nu het moeilijkste deel van het hoofdstuk! ***

1.3) Hoofdeigenschap van limieten

***Als de ophopingspunt van een limiet deel uitmaakt van het domein van f, dan is de functie continu.**

→ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ → f(a) rechts vervangt onze 'b' omdat a een functiewaarde is en dus bestaat.

→ Voorbeelden: volgende functie is continu: $\lim_{x \to 5} f(x+1) = 6$

→ Waarom? Als je x = 5 invult kom je als functiewaarde f(a) 6 uit, dus is de functie continu!

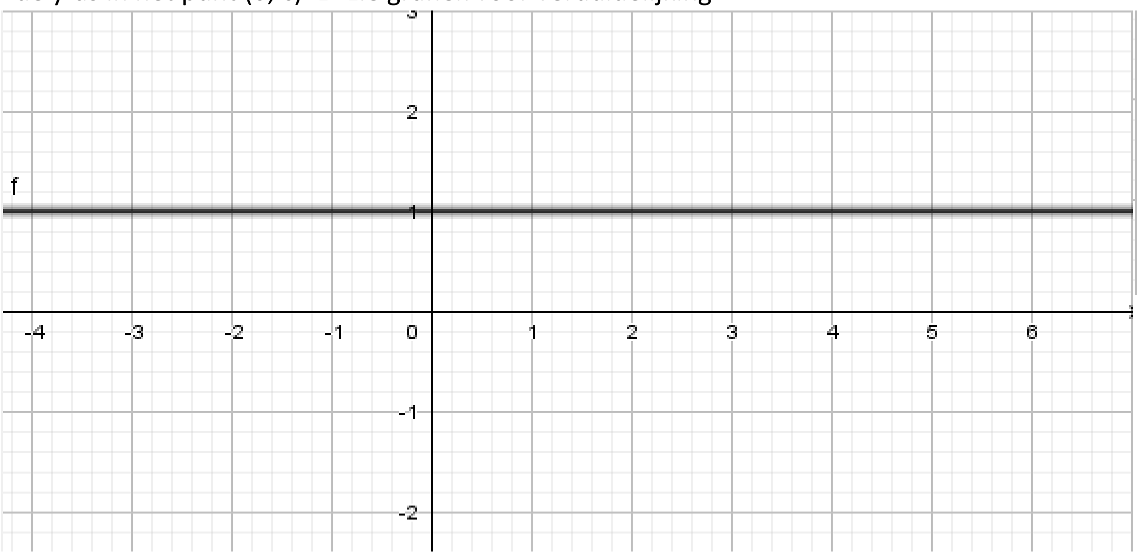
→ Vertaling naar $\boldsymbol{\varepsilon - \delta}$: $\forall \varepsilon: \exists \delta: \forall x \in dom\ f: 0 < |x - a| < \delta ==> |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

→ We hebben onze 'b' vervangen door f(a) omdat de functiewaarde bestaat in continue functies!

1.4) Gevolgen van de hoofdeigenschap

1.4.1) Limiet van een constante functie van de vorm f(x) = c

*Voorkennis: de constante functie is eentje van de vorm y = c en is evenwijdig met de x-as, het snijdt de y-as in het punt (0, c) → zie grafiek voor verduidelijking



→ De grafiek hierboven snijdt de y-as in het punt (0, 1), de vergelijking is: f(x) = 1

*De limiet van de constante functie y = c: $\lim_{x \to a} f(x) = c$

→ Elk reëel getal wordt op het getal c afgebeeld: de limiet van de functie hierboven is dus altijd 1!

1.4.2) Limiet van de identieke functie f(x) = x

*Deze functie (bijectie) is een rechte door de oorsprong en beeldt alles op zichzelf af → f(1) = 1

*De limiet van de identieke functie y = x: $\lim_{x \to a} f(x) = a$

→ Aangezien elk getal op zichzelf wordt afgebeeld is de limiet gewoon het getal zelf!

1.4.3) Commutativiteit van f en lim

*Bewerkingen: je kent de hoofdbewerkingen (operatoren) --> +, -, ., : … x^2, vierkantswortel

→ Een limiet op zichzelf is ook een operator (bewerking), idem voor f (de functie).

➔ Je mag ze allebei dus verwisselen (vermenigvuldiging in de reële getallenverzameling is commutatief ➔ omdat f is continu in a!)

→ Dus: $\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x)$ → We verduidelijken nu:

➔(1) $\lim_{x\to 5} f(x^2) = 25$ ➔ **De limiet van een veeltermfunctie is de x-waarde invullen**

➔ (2) $f\left(\lim_{x\to 5} x^2\right) = 25$

→ Deze eigenschap is zeer handig om dingen te bewijzen.

1.4.4) Eigenschappen van de hoofdbewerkingen bij limieten

(1) $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$ ➔ Je mag de optelling als het ware 'splitsen'.

$\lim_{x\to 1}[x + x^2 + 1] = \lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} x^2 + 1 = 1 + 2 = 3$

(2) $\lim_{x\to a}[f(x) \,.\, g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \,.\, \lim_{x\to a} g(x)$ ➔ Je kan de vermenigvuldiging ook 'splitsen'.

$\lim_{x\to 2}[2x + x^2 + 1] = \lim_{x\to 2} 2x \,.\, \lim_{x\to 2} x^2 + 1 = 4 \,.\, 5 = 20$

(3) $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$ ➔ Je kan de hele limiet tussen haakjes zetten i.p.v. slechts de f(x)

$\lim_{x\to 2}[x + 2x]^2 = \left[\lim_{x\to 2} x + 2x\right]^2 = \left[\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 2x\right]^2 = [2+4]^2 = 2^2 + 2.4.2 + 4^2 = 6^2 = 36$

(4) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ ➔ Je kan de wortelteken onder de hele limiet zetten.

$\lim_{x\to 1} \sqrt[2]{x+3} = \sqrt[n]{\lim_{x\to 1} x + 3} = \sqrt[2]{4} = 2$ (**limiet van een veeltermfunctie is de x-waarde invullen**)

(5) $\lim_{x-a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ ➔ Je kan de breukstrepen doortrekken naar de limiet zelf.

$\lim_{x-3} \frac{x^2+1}{x+1} = \frac{\lim_{x\to 3} x^2+1}{\lim_{x\to 3} x+1} = \frac{10}{4} = 2{,}5$

Al deze eigenschappen zijn er om het rekenwerk te vergemakkelijken, om een limiet uit te rekenen moet je altijd de x-waarde invullen en kijken of je een **reële uitkomst** krijgt.

→ In het volgend puntje gaan we alle mogelijkheden af met een reële uitkomst, als je moet delen door 0 of oneindig in je limiet hebt zit je in de problemen. Echter hebben we daar 'trucjes' voor die we daarna zullen zien. **Hou deze eigenschappen in je achterhoofd**!

1.5) Rekenen met limieten

*In dit onderdeel leren we rekenen met limieten, we beperken ons tot de functies die we tot nu toe hebben gezien: veeltermfuncties en rationale functies.

1.5.1) Rekenen met limieten bij veeltermfuncties

*We onderscheiden twee gevallen: (1) x --> a ➔ f(x) = f(a) (elke veeltermfunctie is continu!)

(2) x --> $\pm\infty$ ➔ f(x) = $\pm\infty$ (als het argument oneindig nadert)

→ We onderzoeken beide gevallen.

1.5.1.1) x --> a ➔ f(x) --> a: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

*Als het argument een reëel getal nadert moet je dit invullen in je functie om de limiet te berekenen.

→ Voorbeeld: $\lim_{x \to 2} x + 1 = 3$ ➔ We hebben 2 als functiewaarde ingevuld en verkregen 3.

$\lim_{x \to 3} x^3 - 3x + 1 = 19$ ➔ We hebben 3 als functiewaarde ingevuld, ons limiet is 19.

→ **Bij een veeltermfunctie moet je de functiewaarde dus gewoon invullen als x een willekeurig getal nadert!**

1.5.1.2) x --> $\pm\infty$ ➔ f(x) = $\pm\infty$: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

*Als het argument oneindig nadert, moet je oneindig invullen in de functie om de limiet te berekenen. We hebben in module 2 tijdens het hoofdstuk ‘reële functies’ leren rekenen met oneindig, we herhalen dat hieronder (bron: samenvatting reële functies © Abdellah).

(1BI) BELANGRIJKSTE REKENREGELS MET ONEINDIG

*De meeste rekenregels zijn voor de hand liggend, echter is er iets speciaals.

*VOORBEELDOEFENINGEN: (1) 7 +(+∞) = +∞

→ Een getal vermeerdert met oneindig is oneindig.

(2) 12 +(-∞) = 12 - ∞ = - ∞

→ Een getal vermindert met oneindig is min oneindig.

(3) 0.(± ∞) = /

→ Nul vermenigvuldigd met oneindig is onbepaald.

→ **Wie oneindig vermenigvuldigt met nul, is een snul.**

(4) +∞+(-∞) = /

→ We kunnen niet het symmetrisch element pakken van ∞

(5) (-4) . $(+\infty)^4$ + 3 . (-∞) = -∞

> Merk op dat je de haakjesregel die in R geldt ook voor oneindig geldt, echter als je iets vermenigvuldigt ermee of optelt en aftrekt blijft het oneindig.

---

* $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ ➔ werkwijze: Kijken naar de **hoogste graad** van de functie en **oneindig daar in-vullen**. De rest mag je weglaten

→ Voorbeelden: $\lim_{x \to +\infty} (3x + 16) => 3\,.\,\infty = \ \infty$ ➔ Hoogste graad: 3x

$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 4x^2 + 2 - 3) => (-\infty)^3 = -\infty$ ➔ Hoogste graad: x^3

$\lim_{x \to -\infty} (3x^2 + 16) => 3^2\,.\,(-\infty)^2 = \ \infty$ ➔ Hoogste graad: $3x^2$

1.5.1.3) Even op een rijtje zetten: rekenen met limieten bij veeltermfuncties

*We kennen twee mogelijkheden om de limieten van veeltermfuncties uit te rekenen.

VEELTERMFUNCTIE	x --> a	f(x) --> f(a)	(functiewaarde)
	x --> ∞	f(x) --> ∞	(hoogstegraadsterm)

(Bron: overzicht limieten mnr. Wanten Smartschool)

*We breiden onze kennis over het rekenen met limieten nu uit tot rationale functies.

1.5.2) Rekenen met limieten bij rationale functies

*We onderscheiden opnieuw twee hoofdgevallen: x --> a OF x --> $\pm\infty$

→ Deze hoofdgevallen zijn onder te verdelen in aparte gevallen die we nu zullen bespreken.

1.5.2.1) x --> a ➔ f(x) = ?

*Als het argument (x) een getal nadert, zijn er verschillende mogelijkheden voor het limiet.

→ **(1) a is een element van het domein --> f(x) = f(a)**

➔ x-waarde gewoon invullen zoals we hebben gezien bij veeltermfuncties.

→ Voorbeelden: $\lim_{x\to5}\frac{x^2-1}{x-1} => \frac{25-1}{5-1}=\frac{24}{4}=6$

$\lim_{x\to6}\frac{1}{x} => \frac{1}{6}$

→ **(2) a is geen element van het domein en zorgt voor een deling door 0 --> f(x) →** $\pm\infty$

→ Herinnering: wie deelt door 0 is een snul

➔ Als dit gebeurt zal de functiewaarde oneindig naderen, je moet een waarde kortbij je functiewaarde invullen in teller en noemer en het teken onderzoeken. Dit wordt duidelijk met de voorbeelden.

➔ Voorbeelden: $\lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{x^2-2}{x-1} => \frac{-1}{0} =/$ ➔ We pakken een waarde kortbij 1, groter dan 1.

→ $\frac{1{,}1^2-2}{1{,}1-1}=\frac{1{,}21-2}{0{,}1}=\frac{-0{,}79}{+0{,}1}=\frac{-}{+}=-=-\infty$

$\lim_{\substack{x\to0\\>}}\frac{1}{x} => \frac{1}{0} =/$ ➔ We pakken een waarde kortbij 0, groter dan 0.

→ $\frac{1}{0{,}1}=\frac{+}{+}=+=+\infty$

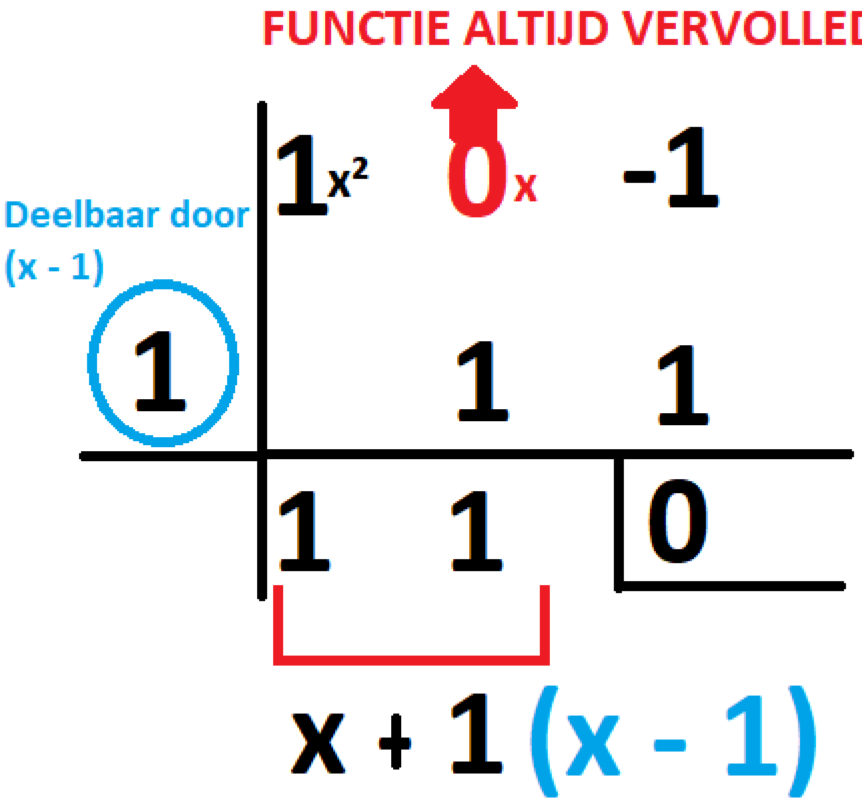
→ **(3) a is geen element van het domein en zorgt voor een deling van de vorm 0/0**

→ Deze mogelijkheid kan **tot alle mogelijkheden die we al hebben geleerd leiden**, je moet je functie vereenvoudigen en kijken of je één van bovenstaande mogelijkheden krijgt. Het kan ook terug een veeltermfunctie worden! Dit wordt duidelijk in de voorbeelden.

→ Voorbeeld: $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1} => \frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}=/$

→ Vereenvoudigen **moet** gebeuren met **Horner**

→ Je moet geen deler meer zoeken, die heb je al.



→ We hebben nu: $\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}=x+1$ ➔ We hebben terug een **veeltermfunctie**!

→ We vullen in: $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to1}(x+1) = 2$

→ Et voila! De oefening is opgelost!

1.5.2.2) Eventjes op een rijtje zetten: alle limieten die we al hebben gezien…

VEELTERMFUNCTIE	x	-->	a		f(x)	-->	f(a)	(functiewaarde)
	x	-->	∞		f(x)	-->	∞	(hoogstegraadsterm)
RATIONALE FUNCTIE	x	-->	a	1) a in dom f	f(x)	-->	f(a)	(functiewaarde)
				2) getal gedeeld door 0	f(x)	-->	∞	(teken van teller en noemer onderzoeken)
				3) 0 gedeeld door 0				(vereenvoudigen en hiermee verder rekenen)

1.5.2.3) x -->±∞ --> f(x) = ?

*Als het argument, x, oneindig nadert, onderscheiden we drie verschillende gevallen voor het limiet.

→ Je onderzoekt de hoogste graad van x in zowel de teller als noemer.

→ **(1) De hoogste graad van x in de teller is hoger dan die van de noemer**

→ f(x) zal in dit geval oneindig naderen, je moet echter weten of hij eerst +- en daarna – oneindig nadert of omgekeerd, zie voorbeeldoefeningen:

→ Voorbeelden: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x^3-9}{-2x} = ?$

→ Graad teller is hoger dan graad noemer --> f(x) zal oneindig naderen.

→ $\frac{5x^3-9}{-2x}$ → De -9 denken we weg, we onderzoeken enkel de hoogste graad.

→ $\frac{5x^3}{-2x}$ → De teller is positief en de noemer is negatief: $\frac{+}{-} = -$

→ De **teller** is **méér dan 1** (2) graad **hoger dan de noemer**, f(x) benadert dus énkel -∞.

→ $\lim_{\pm\infty}\frac{5x^3-9}{-2x} = -\infty$

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6-x^4}{6-x^3} = ?$

→ We denken de 6'en weg, we zijn enkel geïnteresseerd in hoogste machten.

→ Graad teller > graad noemer --> f(x) zal oneindig naderen

→ $\frac{-x^4}{-x^3} = \frac{-}{-} = +$

→ **De teller is slechts één graad hoger dan de noemer**, f(x) benadert zowel + oneindig als – oneindig. We weten dankzij onze vorige berekening dat **f(x) + oneindig als éérst zal naderen**.

→ We noteren: $\lim_{\pm\infty}\frac{6-x^4}{6-x^3} = \pm\infty$

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x^2+1}{3x} = ?$

→ Graad T > graad N --> f(x) zal oneindig naderen.

→ $\frac{-3x^2}{3x} = \frac{-}{+} = -$ → Graad T 1 graad hoger dan N, f(x) nadert zowel + als - oneindig. Dankzij onze berekeningen weten we dat f(x) -∞ éérst zal naderen.

→ We noteren: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x^2+1}{3x} = \mp\infty$

→ **(2) De hoogste graad in de teller is gelijk aan de hoogste graad in de noemer**

→ f(x) zal een welbepaald getal b benaderen, b = $\frac{ax^{hoogste\ graad}}{bx^{hoogste\ graad}} = \frac{a}{b}$

→ Voorbeeld: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-6x+7}{3x}$ ➔ Opnieuw: enkel de hoogste graad.

➔ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-6x+7}{3x}$ ➔ $\frac{-6\cancel{x}}{3\cancel{x}} = -2$ ➔ Dit is het antwoord! Simpeler kan niet.

➔➔ We noteren: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-6x+7}{3x} = -2$

→ **(3) De hoogste graad in de teller is kleiner dan de hoogste graad in de noemer**

→ f(x) zal 0 naderen, dit is altijd zo.

→ Voorbeeld: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-3}{4x^3-1} = 0$

1.5.2.4) Even op een rijtje zetten… Alle mogelijke limieten die we hebben gezien…

Deze kennen we al:

VEELTERMFUNCTIE	x --> a		f(x) --> f(a)	(functiewaarde)
	x --> ∞		f(x) --> ∞	(hoogstegraadsterm)
RATIONALE FUNCTIE	x --> a	1) a in dom f	f(x) --> f(a)	(functiewaarde)
		2) getal gedeeld door 0	f(x) --> ∞	(teken van teller en noemer onderzoeken)
		$\boxed{\text{3) 0 gedeeld door 0}}$		(vereenvoudigen en hiermee verder rekenen)

We hebben deze daarjuist geleerd, dit zijn ook de laatste limieten die we zien (dit jaar):

x --> ∞	1) graad T > graad N	f(x) --> ∞	(hoogstegraadsterm van teller en noemer,
	2) graad T = graad N	f(x) --> b	vervolgens vereenvoudigen
	3) graad T < graad N	f(x) --> 0	en hiermee verder rekenen)

1.6) Asymptoten

*Elke kromme heeft asymptoten, we focussen ons dit jaar op rationale functies maar meerdere functies (die we volgend jaar pas zien) hebben krommen als grafiek en elke kromme heeft asymptoten. We leren nu hoe we de asymptoten vinden.

1.6.1) Verticale asymptoot (VA)

*Een rechte met vergelijking x = a (verticale rechte) is een verticale asymptoot als geldt:

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}} f(x) = \pm\infty$ OF $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x) = \pm\infty$ ➔ Je moet maar één van beide mogelijkheden nachecken.

→ Voor een **rationale functie** zal **a (altijd) een pool** (nulwaarde van de noemer) zijn.

→ Voorbeeld: $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$ ➔ $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$

→ Want voor x = -2 geldt: $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ <}} f(x) = -\infty$ en voor x = 2 geldt: $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = -\infty$

➔ Waarom $-\infty$ en niet $+\infty$, omdat als je waarden neemt die -2 naderen maar kleiner zijn dan -2 je een negatief getal uitkomt. Idem voor 2.

→ De verticale asymptoot is dus: **x = 2**

*Opmerkingen: (1) Krommen kunnen oneindig veel VA's hebben.

(2) Als je de pool invult in je functie en je komt 0/0 uit, dan kan dat leiden naar eenderwelke andere limiet (zie 1.5: rekenen met limieten) en is er géén VA.

1.6.2) Horizontale asymptoot (HA)

*Een horizontale asymptoot is een rechte met de vergelijking y = q die de functie zal naderen.

→ **Een horizontale asymptoot bestaat enkel als de graad van de teller = graad van noemer**.

➔ Definitie met limieten: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = q$

➔ Voorbeeld: $f(x) = \frac{4x-1}{x+4}$ ➔ Graad teller = graad noemer → HA bestaat

→ $\frac{4x}{x}$(we zijn enkel geïnteresseerd in de hoogste macht!)

= 4 --> de rechte is dus: y = 4

--> Bestaat er ook een verticale asymptoot? Ja!

→ Pool = -4, als we -4 in de teller invullen krijgen we niet 0/0.

→ Dus: VA --> x = -4!

LET OP: DE HA BESTAAT OOK ALS GRAAD TELLER IS 1 GRAAD KLEINER DAN NOEMER, DE VERGELIJKING IS DAN Y = 0!!!

1.6.3) Schuine asymptoot (SA)

*Een schuine asymptoot is een rechte met de vergelijking y = mx + q die de functie zal naderen.

→ **Een schuine asymptoot bestaat enkel als de graad van de teller 1 > graad van de noemer**

➔ Definitie met limieten: $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$ (dit wordt duidelijk met de voorbeelden)

→ m vindt je door: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x[(g(x)]}$

→ q vindt je door: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - m(x)$

➔ Voorbeeld: $f(x) = \frac{3x^2-4x}{x-1}$ --> welke asymptoten zijn er allemaal?

--> VA: 1 = pool en zorgt niet voor een deling van de vorm 0/0 ➔ VA: x = 1.

--> HA: Bestaat niet, graad teller ≠ graad noemer.

--> SA: Bestaat wel, graad teller > graad noemer.

--> m = $\frac{3x^2-4x}{x(x-1)} = \frac{3x^2-4x}{x^2-x} = 3$ ➔ We kunnen al invullen: y = 3x + q

(We zijn enkel geïnteresseerd in de hoogste graad, dit deze rekenregels hebben we gezien bij puntje 1.5: rekenen met limieten)

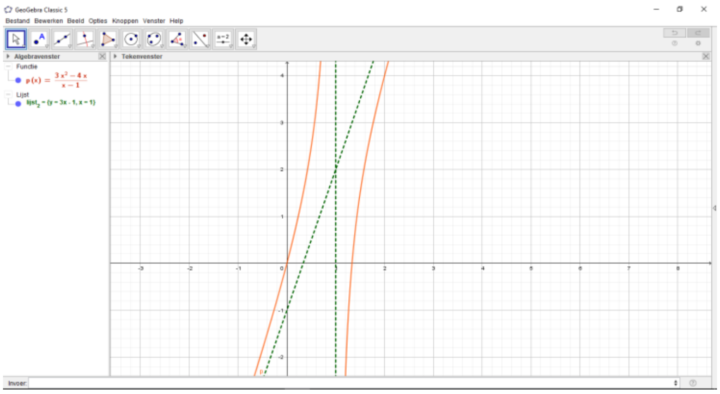
--> q = $\frac{3x^2-4x}{x-1} - 3x = \frac{3x^2-4x}{x-1} - \frac{3x(x-1)}{1(x-1)} = \frac{3x^2-4x}{x-1} - \frac{3x^2-3x}{x-1} = \frac{\cancel{3x^2}-4x-\cancel{3x^2}+3x}{x-1}$

$= \frac{-x}{x-1}$ ➔ We zijn opnieuw énkel geïnteresseerd in de hoogste graad!

→ $\frac{-x}{x} = -1 = q$

➔ q = -1 → We vullen in: y = 3x – 1 ← dit is je schuine asymptoot!

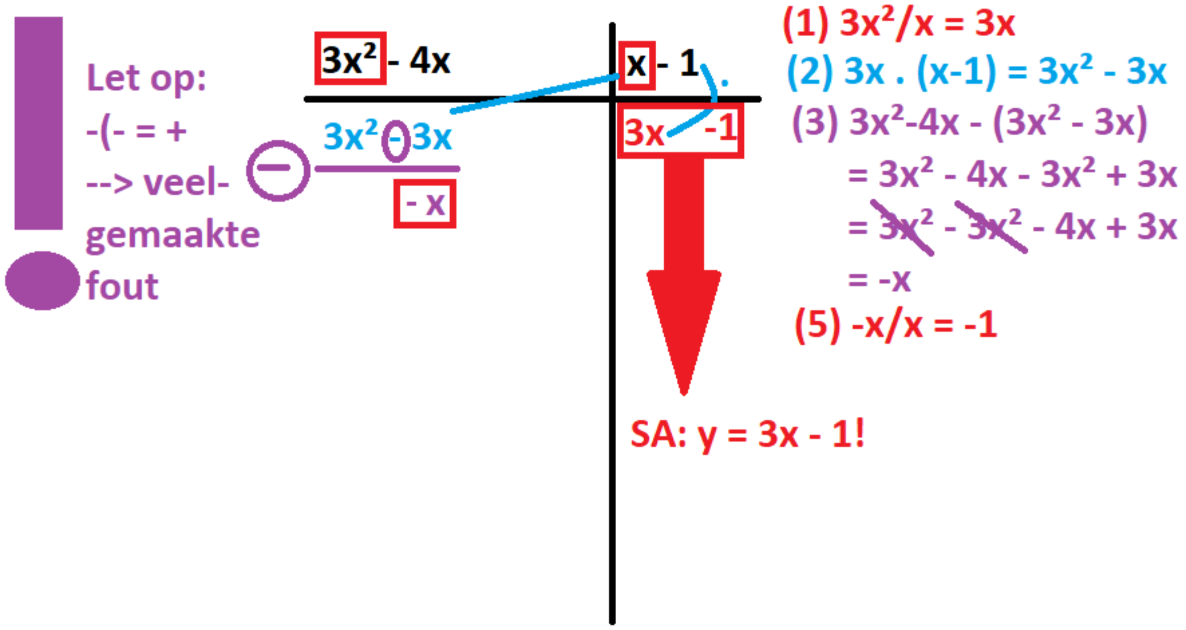
*Geogebra bevestigd dat onze oefening juist is:



!! LET OP: JE KAN NOOIT EEN SCHUINE ASYMPTOOT HEBBEN ALS DE TELLER 2- OF MEER GRADEN HOGER IS DAN DE NOEMER, DAN BESTAAT ENKEL DE VERTICALE ASYMPTOOT !!

1.6.3.1) Extra: SA bepalen met de euclidische deling bij rationale functies

*Je kan de schuine asymptoot (SA) ook bepalen met de euclidische deling, dit gaat alleen bij rationale functies. Bij andere functies (die we volgend jaar zien) zal dit dus niet meer mogelijk zijn en moet je de methode gebruiken die op de vorige pagina uitgelegd staat.
→ **Op de toets mag je één van beide methodes gebruiken om de schuine asymptoot te bepalen!**



1.7) Zelfevaluatie: heb ik deze samenvatting begrepen?

*Hier vindt je 6 meerkeuzevragen om te kijken of je limieten een beetje hebt begrepen. De juiste antwoorden vindt je in deel 1.8. Er is telkens maar één antwoord juist.

VRAAG 1: De juiste $\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\delta}$-notatie van $\lim_{\substack{x\to 5\\ >}} f(x) = 18$ is…

(A) $\forall\varepsilon$: $\exists\delta$: $\forall x \in dom\ f: a < 5 - a < \delta + a ==> |f(x) - 18| < \varepsilon$

(B) $\forall\varepsilon$: $\exists\delta$: $\forall x \in dom\ f: 5 < x < \delta + 5 ==> |f(x) - 18| < \varepsilon$

(C) $\forall\varepsilon$: $\exists\delta$: $\forall x \in dom\ f: 5 > x > \delta + 5 ==> |f(x) - 18| < \varepsilon$

(D) $\forall\varepsilon$: $\exists\delta$: $\forall x \in dom\ f: idk\ ik\ ga\ buizen\ op\ limieten$

VRAAG 2: De hoofdeigenschap van limieten zegt dat…
(A) Ophopingspunt limiet is een deel van ber f --> functie is continu.
(B) Ophopingspunt limiet is geen deel van ber f --> functie is continu.
(C) Ophopingspunt limiet is een deel van dom f --> functie is continu.
(D) Ophopingspunt limiet is geen deel van dom f --> functie is continu.

VRAAG 3: Ahmed gebruikt nooit zijn rekenmachine, op de toets moet hij echter $\lim_{x \to 5} \frac{x^2-x+2}{x-6}$ uitrekenen, wat raad je Ahmed aan om te doen om het rekenwerk te vergemakkelijken?

(A) Horner gebruiken om de rationale functie te vereenvoudigen.
(B) De euclidische deling gebruiken om de rationale functie te vereenvoudigen.
(C) De limiet opsplitsen zodat je vanboven en vanonder een limiet krijgt: $\frac{\lim(\dots)}{\lim(\dots)}$
(D) De breuk vereenvoudigen door te delen: $\frac{x^2 \cancel{-x}+2}{\cancel{x}-6} = \frac{x^2+2}{-6}$, daarna limiet berekenen.

Vraag 4: $\lim_{x \to -\infty} 3x^2 - 4x + 5 + 6x^3 = ?$

(A) 10
(B) ∞
(C) $\mp\infty$
(D) $-\infty$

Vraag 5: $\lim_{x \to -5} \frac{x^2-25}{x+5} = ?$

(A) -10
(B) $\pm\infty$
(C) $\mp\infty$
(D) 10

Vraag 6: Meneer Wanten geeft op de toets de functie f(x) = $\frac{x^3-6x+5}{x-1}$ en vraagt om de asymptoten te bepalen indien ze bestaan. Bram zit na te denken en uit te rekenen en schrijft op:

(I) Horizontale asymptoot: bestaat niet
(II) Verticale asymptoot: bestaat wel ➔ VA: x = 1
(III) Schuine asymptoot: bestaat wel ➔ SA: y = 2x + 9

→ Welke stelling(en) die Bram op zijn blad schrijft zijn juist?

(A) Stelling I is juist
(B) Stelling II is juist
(C) Stelling III is juist
(D) Stellingen II en II zijn juist
(E) Stellingen I en III zijn juist
(F) Stellingen I en II zijn juist
(G) Zowel stellingen I, II als III zijn juist.
(H) Stellingen I, II en III zijn fout.

Vraag 7: William schrijft op zijn toets: $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = \mp\infty$, is dit juist?

(A) Ja, William is juist.
(B) Neen, het juiste antwoord is: $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = \pm\infty$
(C) Neen, het juiste antwoord is: $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = \mathbf{-1}$
(D) Neen, het juiste antwoord is: $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$

Vraag 8: Alexander zegt dat horizontale- en schuine asymptoten tegelijk bestaan in een rationale functie, hoe weet je direct dat Alexander fout is?

(A) Omdat horizontale- en schuine asymptoten in die specifieke functie niet bestaan.
(B) Omdat horizontale- en schuine asymptoten enkel samen voorkomen in cyclometrische functies.
(C) Omdat de horizontale asymptoot eigenlijk een speciale schuine asymptoot is en ze dus nooit samen kunnen voorkomen.
(D) Omdat Alexander nooit gelijk heeft, hij weet er niks van.

1.8) Oplossing zelfevaluatie

VRAAG 1: A = KO --> 5 – a in het midden is fout

B = OK --> Juist vertaald naar epsilon-delta-definitie

C = KO --> ongelijkheidstekens staan verkeerd gericht

D = KO --> Hopelijk buis je niet op limieten

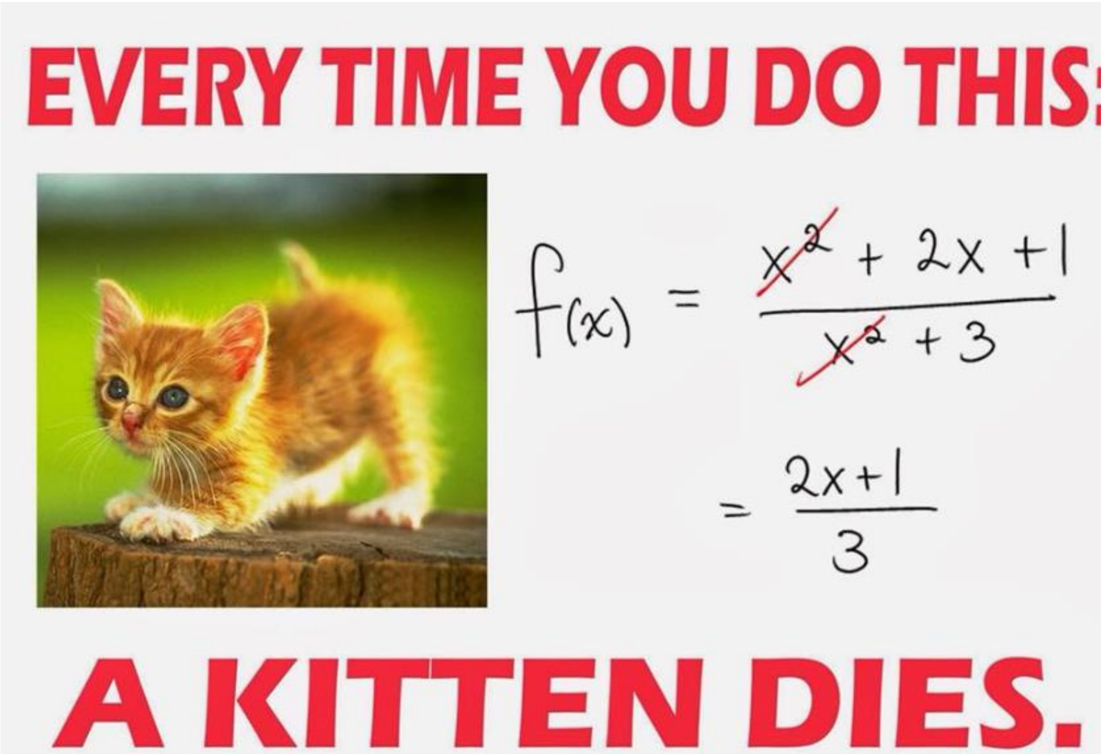
Vraag 2: **C = OK --> Letterlijk hoofdeigenschap.**

Vraag 3: A = KO --> Te omslachtig, neemt teveel tijd in beslag en zal misschien niet lukken.

B = KO --> Zelfde motivering als A.

C = OK --> Dit is een eigenschap van limieten, dit is een gevolg van de hoofdeigenschap. Je mag dit doen.

D = KO --> Dit is een fatale fout, je mag bij +/- NIET schrappen.



Vraag 4: **~~B~~ D= OK ➔ Je kijkt naar de hoogste graadterm en je vult daar oneindig in!**

Vraag 5: **A = OK ➔ Je verkrijgt een deling van de vorm 0/0, je moet vereenvoudigen met Horner!**

Vraag 6: **F = OK ➔ De schuine asymptoot bestaat NIET want de graad van de teller is méér dan 1 hoger dan die van de noemer. De horizontale asymptoot bestaat niet omdat graad teller is niet gelijk aan graad noemer. De verticale asymptoot bestaat wel en Bram heeft ze goed uitgerekend!**

Vraag 7: **D = OK ➔ Graad T < graad N, f(x) zal 0 naderen**

Vraag 8: **C = OK**

Hopelijk had je (voldoende) vragen juist! Veel succes op de toets!