Samenvatting wiskunde – module 2 – algebra – complexe getallen – 33% v/h alternatief examen

---

(Y) VOORWOORD

Dit is de samenvatting wiskunde ter voorbereiding van de openboektoets (examen) over complexe getallen, deze toets telt voor 33% mee van het examenpunt voor wiskunde (20 van de 60 punten).

- -

(X) INHOUDSTAFEL

---

(1) COMPLEXE GETALLEN

- -

(1A) DE UITBREIDING VAN ℝ NAAR ℂ (de uitbreiding van reële- naar complexe getallen)

*Telkens als men een beperking tegenkomt in de wiskunde, breidt men de wiskunde uit.

→ $\sqrt{-9} = /$, je kan de wortel van een negatief getal niet bepalen in ℝ.

→ $\sqrt{-9} = \sqrt{(-1)(9)} = \sqrt{9i^2} = 3i$, je kan de wortel ervan wél bepalen in ℂ.

➔ Eerste afspraak: **i^2 = -1**, door de imaginaire eenheid 'i' toe te voegen heeft men de getallenverzameling kunnen uitbreiden zodat we negatieve wortels kunnen uitrekenen!

- -

(1B) ALGEMENE NOTATIE VAN EEN COMPLEX GETAL

*We noteren een complex getal: z = a + bi, a en b zijn reële getallen.

→ a = reëel gedeelte van z of Re(z)⇔ bi = imaginair gedeelte van z of Im(z)

→ Bijvoorbeeld: 3 + 5i, 9 + i, 8 (8 is een zuiver reëel getal), 3i (3i is een zuiver imaginair getal).

- -

(1C) BASISBEWERKINGEN MET COMPLEXE GETALLEN (BEHALVE DE WORTELTREKKING)

+: (1 + 2i) + (3 + 4i) = 1 + 2i + 3 + 4i = 1 + 3 + 2i + 4i = 4 + 6i

→ Werkwijze: basisregels gebruiken van optellen.

-: (1 + 2i) – (3 + 4i) = 1 + 2i – 3 - 4i = 1 – 3 + 2i – 4i = -2 – 2i

→ Werkwijze: zelfde als +, enkel de haakjesregel gebruiken want je hebt een – voor de haakjes!

.: (1 + 2i) . (3 + 4i) = 3 + 4i + 6i + $8i^2$ = 3 + 10i + 8.(-1) = 3 + 10i – 8 = 3 – 8 + 10i = -5 + 10i

→ Werkwijze: distributief uitwerken, onze eerste afspraak niet vergeten: **i^2 = -1**!!!

/: (1+2i) / (3 + 4i) = $\frac{1+2i}{3+4i} = \frac{1+2i(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3-4i+6i-8i^2}{3^2-4^2i^2} = \frac{3+2i-8.(-1)}{9-16.(-1)} = \frac{3+2i+8}{9+16} = \frac{11+2i}{25}$

→ Werkwijze: (1) Vermenigvuldig de noemer met het complex toegevoegde, daarna de teller

→ Het complex toegevoegde van een getal is een complex getal met eenzelfde reëel gedeelte maar een verschillend imaginair gedeelte! (3+4i) ⇔ (3-4i)

(2) Werk de teller distributief uit

(3) Gebruik in de noemer het merkwaardig product: (a+b)(a-b) = a^2 - b^2

(4) Reken verder wiskundig uit, niet vergeten: **i^2 = -1**!!!

(5) Proficiat! Je hebt 2 complexe getallen door elkaar gedeeld!

Opmerking: Als z = 3+4 dan is het complex toegevoegde $\bar{z}$ = 3 – 4i, we noteren dus z met een streepje erop

x^n: $(1+2i)^3$ = (1+2i)(1+2i)(1+2i) = $(1+2i)^2(1+2i)$ = $(1^2 + 4i + 2^2i^2)(1+2i)$ = (-3 + 4i)(1+2i) = -3 – 6i + 4i + $8i^2$
= -3 – 8 – 2i = -11 – 2i

→ Werkwijze: 2demacht = maak gebruik van merkwaardig product: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
hogeremacht = maak zoveel mogelijk 2demachten en gebruik het merkwaardig product, werk vervolgens distributief uit.

- -

(1D) VIERKANTSWORTELS UIT EEN COMPLEX GETAL

*Dit is niet moeilijk maar heeft een langere werkwijze, hou je vast!

*Herinner je de definitie van vierkantswortels (vkw): 3² = 9 ⇔ $\sqrt{9}$ = 3

*Voorbeeldoefening: bepaal alle complexe vierkantswortels uit 5 + 12i

→ $(x+yi)^2 = 5+12i$ (dit is waar, als we het kwadraat wegwerken verkrijgen we de vkw.

⇔ $x^2+2xyi+y^2i^2 = 5+12i$ (uitwerken van het merkwaardig product in LL)

⇔ $x^2+2xyi+y^2(-1) = 5+12i$ (gebruik gemaakt van de eerste afspraak: i² = -1!)

⇔ $x^2+2xyi-y^2 = 5+12i$ (y vermenigvuldigt met -1 wordt negatief)

⇔ $x^2-y^2+2xyi = 5+12i$ ⇔ $x^2-y^2+2xy = 5+12$ (we laten i weg = makkelijker)

→ De vergelijking zal nu uiteen vallen in een stelsel, aangezien twee complexe getallen (a + bi) en (c + di) gelijk zijn als a = c en b = d. De '+' fungeert als scheiding.

⇔ $\begin{cases} x^2-y^2=5 \\ 2xy=12 \end{cases}$ (vergelijking is uiteengevallen in een stelsel)

⇔ $\begin{cases} x^2-y^2=5 \\ y=\frac{12}{2x}=\frac{6}{x} \end{cases}$ (we hebben y afgezonderd, we gebruiken substitutie om stelsel op te lossen)

⇔ $\begin{cases} x^2-\left(\frac{6}{x}\right)^2=5 \\ y=\frac{6}{x} \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} x^2.x^2-\frac{36}{x^2}=5x^2 \\ y=\frac{6}{x} \end{cases}$ (We werken x² weg uit de noemer, dus doen we . x²)

⇔ $\begin{cases} x^4-36=5x^2 \\ y=\frac{6}{x} \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} x^4-5x^2-36=0 \\ y=\frac{6}{x} \end{cases}$

→ We hebben een bikwadratische (vierdegraads-)vergelijking, we vervangen x² door een variabele z, dus z = x². Dit doen we zodat we de vergelijking kunnen oplossen (met discr.)

⇔ $\begin{cases} z^2-5z-36=0 \\ y=\frac{6}{x} \end{cases}$ (we hebben x² vervangen door z)

$D=b^2-4ac=(-5)^2-4.1.(-36)=169>0$ ➔ twéé oplossingen

$z_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5)-\sqrt{61}}{2} = \frac{5-\sqrt{169}}{2} = -4$

$z_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5)+\sqrt{61}}{2} = \frac{5+\sqrt{169}}{2} = 9$

➔ We hebben twéé z-waarden gevonden, het stelsel zal uiteenvallen in 2 stelsels

⇔ $\begin{cases} z_1=-4 \\ y_1=\frac{6}{x} \end{cases}$ ∨ $\begin{cases} z_2=9 \\ y_2=\frac{6}{x} \end{cases}$ (opmerking: ∨ is het wiskundig symbool voor 'of')

⇔ $\cancel{\begin{cases} x_1^2=-4 \\ y_1=\frac{6}{x} \end{cases}}$ ∨ $\begin{cases} x_2^2=9 \\ y_2=\frac{6}{x} \end{cases}$ (we hebben z terug vervangen door x²)

➔ Nu gaan de meeste mensen de fout in. Mensen gaan verder rekenen met x² = -4 want je kan toch het vierkantswortel nemen van een complex getal, nietwaar?

→ Dat is waar, maar herinner jezelf wat ik in het begin zei: de algemene notatie van een complex getal is z = a + bi, a en b zijn reële getallen! Die 'i' maakt het complex!

→ Dus, we moeten de linkse stelsel verwerpen want $x \in \mathbb{R}$!

⇔ $\begin{cases} x^2=9 \\ y=\frac{6}{x} \end{cases}$ (we hebben nog steeds een kwadraat, het stelsel valt uiteen in twee)

⇔ $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=2 \end{cases}$ ∨ $\begin{cases} x_2=-3 \\ y_2=-2 \end{cases}$ (we zijn klaar met het algebraïsch werk, nu nog antwoord opschrijven)

➔ we zijn begonnen met x + yi, de antwoorden zijn dus: 3 + 2i, -3 – 2i

→ Proficiat! Je hebt alle complexe vierkantswortels bepaalt!

- -

(1E) COMPLEXE TWEEDEGRAADSVERGELIJKINGEN

*Algemene notatie tweedegraadsvergelijking: ax² + bx + c = 0

→ Oplossen met discriminant: D = b² - 4ac

→ D > 0: de vergelijking heeft twee reële oplossingen --> $\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

D = 0: de vergelijking heeft één reële oplossing --> $-\frac{b}{2a}$

D < 0: de vergelijking heeft twee complexe oplossingen --> $\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

- -

(1EI) COMPLEXE VIERKANTSVERGELIJKINGEN MET REËLE COËFFICIENTEN

*Voorbeeldoefening: z² + 12 = 5(1 – z)

(1) Zet om in de standaardvorm: z² + 12 = 5 – 5z ⇔ z² + 5z +7 = 0

(2) Bereken de discriminant: D = b² - 4ac = 5² - 5.1.7 = 25 – 35 = -10

→ De vergelijking heeft twee complexe oplossingen

(3) Bereken de oplossingen: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-5+\sqrt{-10}}{2}$ /// $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-5-\sqrt{-10}}{2}$

(4) Bereken de complexe wortels van – 10

$\sqrt{-10} = \sqrt{(-1)10} = i\sqrt{10}$

(5) Vul in: $x_1 = \frac{-5+i\sqrt{10}}{2} = -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2}i$ en $x_2 = \frac{-5-i\sqrt{10}}{2} = -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2}i$

- -

(1EI) COMPLEXE VIERKANTSVERGELIJKINGEN MET COMPLEXE COËFFICIENTEN

*Voorbeeldoefening: (2 – i)(z² - 6) = 5(2i + 1)z

(1) Zet om in de standaardvorm: 2z² - 12 – iz² + 6i = 10iz + 5z ⇔ 2z² - iz² - 5z – 10iz – 12 + 6i = 0

⇔ (2 – i)z² - (5 + 10i)z – 12 + 6i = 0

(2) Bereken de discriminant: D = b² - 4ac = (5 + 10i)² - 4 . (2 – i) . (-12 + 6i)

= [5² + 2 . 5 . 10i + 10²i²] – 8 + 4i . (-12 + 6i)

= [25 + 100i – 100] +96 – 48i – 48i + 24i²

= -75 + 100i + 96 – 96i – 24 = -3 + 4i

(3) Bereken de oplossingen: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(5+10i)+\sqrt{-3+4i}}{2.(2-i)}$ /// $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(5+10i)-\sqrt{-3+4i}}{2.(2-i)}$

(4) Bereken de complexe wortels uit de discriminant:

$(x+yi)^2 = -3+4i$ ⇔ … ⇔ oplossingen: -1 – 2i, 1 + 2i (reken zelf na, stappenplan vorige pg.)

(5) Vul in… $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(5+10i)+\sqrt{-3+4i}}{2.(2-i)} = \frac{-5-10i-1-2i}{4-2i} = \frac{-6-12i(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)} = \frac{-24-12i-48i-24i^2}{4^2-2^2i^2} = \frac{60i}{20} = 3i$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \cdots (reken\ zelf\ na) = 2i$

→ Opl = {3i, 2i}

- -

(1E) DE COMPLEXE GETALLENVERZAMELING IS GEEN GEORDEND VELD

*We definiëren geen totale orderrelatie (dus kunnen we twéé getallen niet met elkaar vergelijken)

→ Gevolgen: (1) Je kan niet zeggen of een complex getal positief of negatief is

(2) Er zijn geen ongelijkheden (>, < …) noch intervallen in C.

(3) We kunnen niet zeggen dat het ene complex getal groter is dan de andere

*LET OP: Voor zuiver reële getallen kunnen we al die dingen wel nog doen!

- -

(1D) [VERDIEPING] DE HOOFDSTELLING VAN DE ALGEBRA (STELLING D'ALEMBERT)

*Letterlijk: elke veelterm met complexe coëfficiënten en graad > of = 1, heeft tenminste één nulw.

*Stelling: elke veelterm met complexe coëfficiënten en graad n heeft ten hoogste n nulwaarden in C.

→ elke veelterm met graad n heeft precies n nulwaarden, rekeninghoudend met het feit dat twee dezelfde nulwaarden kunnen samenvallen.

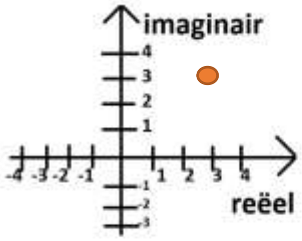
*Stel je hebt een zevendegraadsvergelijking, deze heeft 7 oplossingen waarvan minstens één reëel is. Als je bv. 1 oplossing in R hebt, moet je in je achterhoofd houden dat de 6 andere oplossingen in C zitten.

---

(2) GONIOMETRISCHE GEDAANTE VAN EEN COMPLEX GETAL

(2A) HET COMPLEXE VLAK (HET VLAK VAN GAUSS)

*Vroeger beelden we elk getal uit op de reële getallenas, deze ging tot het oneindige door.
*Nu we de imaginaire eenheid hebben toegevoegd, bekomen we een vlak:



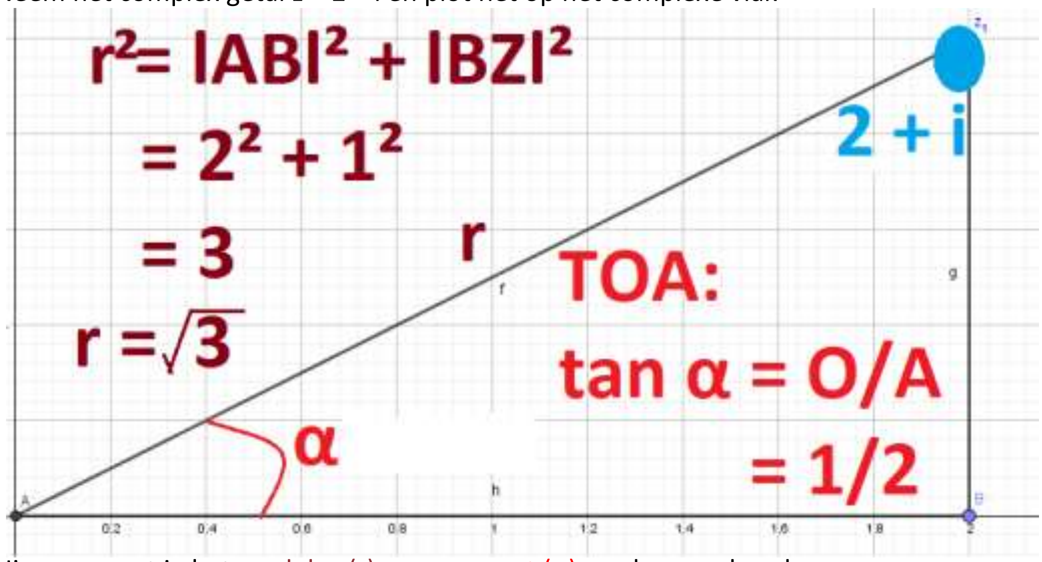
> Dus… y-as = imaginair (da's met die 'i')
> x-as = reële getallenas (kennen we al)
> We behouden onze vertrouwde reële getallenas, we breiden deze dus enkel uit. Zo kan je ook zien dat er véél meer getallen zijn dan de reële getallen.

*Met elk punt van het complexe vlak komt één complex getal mee overeen.
→ Op de grafiek hierboven is het oranje punt het getal 3 + 3i

---

(2B) MODULUS EN ARGUMENT VAN EEN COMPLEX GETAL

*Neem het complex getal z = 2 + i en plot het op het complexe vlak



*Hiervan moet je het modulus (r) en argument (α) van kunnen berekenen.
→ MODULUS = afstand tussen oorsprong en het complex getal.
→ Kan je uitrekenen met Pythagoras (want rechthoekige Δ), heb ik voorgedaan op de afbeelding.
→ Merk op, bij z = a + bi is de modulus $\boldsymbol{r = \sqrt{a^2 + b^2}}$ (uitgewerkt met Pythagoras)
→ ARGUMENT = de tangens van de hoek tussen de reële as (x-as) en de oorsprong
→ Kan je uitrekenen met TOA (want rechthoekige driehoek), heb ik voorgedaan op afbeelding.
→ Merk op, bij z = a + bi is het argument **tan = b/a**, in dit geval: tan α = ½ (want i = 1i)

*Andere voorbeeldoefening zonder grafiek: bepaal het modulus en argument van z = 3 + 8i
→ MODULUS: $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73}$
→ ARGUMENT: $\tan \alpha = \frac{b}{a} = \frac{8}{3}$

*<u>Je kan het modulus en argument nu berekenen met én zonder grafiek</u>.

(2C) GONIOMETRISCHE GEDAANTE VAN EEN COMPLEX GETAL

*Wij hebben tot nu toe altijd met één notatie gewerkt, de normale (algebraïsche) notatie van een complex getal. Nu zullen we een tweede manier leren om een complex getal voor te stellen.

*Formule: $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ → Hierbij is… r = modulus, α = argument, i = imaginaire eenheid.

→ Het bewijs heb ik achterwege gelaten aangezien we ze niet moeten kennen.

*Voorbeeldoefening 1: zet 8 + 4i om naar de goniometrische notatie

→ Stappenplan: (1) Bereken het modulus en argument

→ MOD: $r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{8^2+4^2} = \sqrt{80} = \sqrt{16\,.\,5} = 4\sqrt{5}$

→ ARG: $\tan\alpha = \frac{b}{a} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 26{,}6°$

(2) Vul je gevonden waarden voor MOD en ARG in de formule

→ $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 4\sqrt{5}(\cos 26{,}6° + \ i\sin 26{,}6°)$

→ Dit is het! Je hebt goed omgezet!

*Voorbeeldoefening 2: zet $4\sqrt{5}(\cos\frac{1}{2}\ .\ i\sin\frac{1}{2})$ om naar de normale (algebraïsche) notatie

→ Stappenplan: (1) Reken de goniometrische getallen uit

→ $4\sqrt{5}(\cos 26{,}6° + \ i\sin 26{,}6°) = \ 4\sqrt{5}(0{,}894 + i\,.\,0{,}448)$

(2) Reken distributief uit.

→ $4\sqrt{5}(0{,}894 + i\,.\,0{,}448) = 8 + 4i$

→ Dit is het! Goed terug omgezet naar de normale notatie!

- -

(2D) BASISBEWERKINGEN MET COMPLEXE GETALLEN IN DE GONIOMETRISCHE NOTATIE

+/-: deze formules laten we achterwege aangezien ze niet nuttig zijn.

.: $z_1.z_2 = r_1.r_2[\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2)$

→ Je doet dus de product van de modulussen en telt de argumenten bij elkaar op.

→ Voorbeeld: $[4\cos(20°) + i\sin(20°)]\,.\,[3\cos(70°) + i\sin(70°)] = 12[\cos(90°) + i\sin(90°)]$

/: $z_1/\ z_2 = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\alpha_1-\alpha_2) + i\sin(\alpha_1-\alpha_2)]$

→ Je deelt dus de modulussen en trekt de argumenten van elkaar af.

→ Voorbeeld: $[4\cos(20°) + i\sin(20°)]/\ [2\cos(70°) + i\sin(70°)] = 2[\cos(-50°) + i\sin(-50°)]$

x^n: $z^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$

→ Om een complex getal tot de n-de macht te verheffen: modulus tot de n-de macht en de argumenten vermenigvuldigen met het exponent n.

→ Voorbeeld: $4[\cos(20°) + i\sin(20°)]^5 = 1024[\cos(100°) + i\sin(100°)]$

$\sqrt[n]{x}$: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\ \left[\cos\left(\frac{\alpha+k.360°}{n}\right) + i\sin\ \left(\frac{\alpha+k.360°}{n}\right)\right]$

→ Je neemt de n-de wortel van de modulus dus en deelt alle hoekpunten van alfa door de n.

→ LET OP: k = 0, 1, 2 … n-1 (dus bij een 5demachtswortel gaat k tot 4!)

→ Voorbeeld: $\sqrt[3]{2+11i}$

→ Stap 1: zet om naar de goniometrische notatie

→ 2 + 11i → MOD: $r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2^2+11^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

→ ARG: $\alpha = \frac{b}{a} = \frac{11}{2} = 80°$ (hoe graden ? Gerekend met $\tan^{-1}$!)

→ NOTATIE: $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \ 5\sqrt{5}(\cos 80° + i\sin 80°)$

→ Stap 2: Bepaal de n-demachtswortels volgens de formule

→ $\sqrt{13}(\cos 80° + i\sin 80°)$ = $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}\left[\cos\left(\frac{80°+k.360°}{3}\right) + i\sin\ \left(\frac{80°+k.360°}{n}\right)\right]$

→ Stap 3: Bepaal alle verschillende k-waarden

→ k = 0 → $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}\left[\cos\left(\frac{80°}{3}\right) + i\sin\ \left(\frac{80°}{3}\right)\right] = \sqrt[3]{5\sqrt{5}}\ [\cos(\frac{80°}{3})] + \ \sqrt[3]{5\sqrt{5}}[\mathrm{i}\sin(\frac{80°}{3})]$

$= 2 + i$ (afgerond)

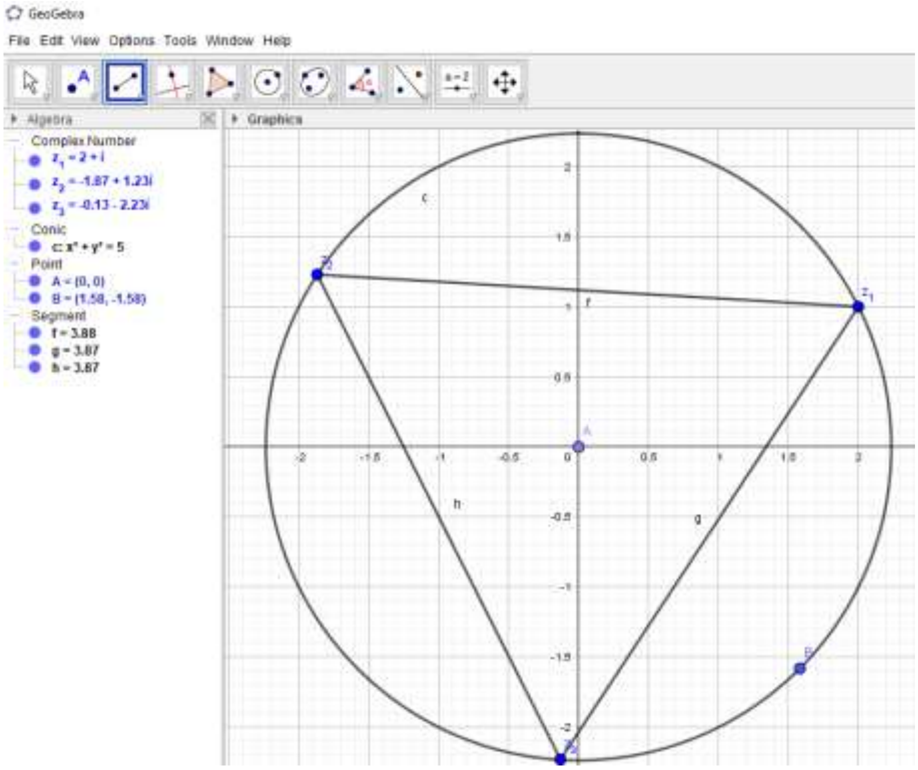
→ k = 1 ➔ $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}\left[\cos\left(\frac{80°+1.360°}{3}\right) + i\sin\ \left(\frac{80°+1.360°}{3}\right)\right] =$

$\sqrt[3]{5\sqrt{5}}\ [\cos(\frac{440°}{3})] + \sqrt[3]{5\sqrt{5}}[\mathrm{i}\sin(\frac{440°}{3})] = -1{,}87 + 1{,}23i$

→ k = 2 ➔ $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}\left[\cos\left(\frac{80°+2.360°}{3}\right) + i\sin\ \left(\frac{80°+2.360°}{3}\right)\right] =$

$\sqrt[3]{5\sqrt{5}}\ [\cos(\frac{800°}{3})] + \sqrt[3]{5\sqrt{5}}[i\sin(\frac{800°}{3})] = -0{,}13 - 2{,}23i$

*Merk op dat we – als we deze getallen plotten – 3 punten verkrijgen in het complexe vlak.



Elk punt dat je verkrijgt na de wortels te trekken van complexe getallen in goniometrische vorm zitten op een cirkel met als straal de (in dit geval derdemachtswortel) van de modulus, die als we hem afronden ongeveer overeen komt met 2,23 zoals we ook kunnen aflezen.

- -

(2E) BINOMIALE VERGELIJKINGEN OPLOSSEN IN $\mathbb{C}$

*Een binomiale vergelijking is een vergelijking van de vorm $z^n = a$, met z, a ∈ $\mathbb{C}$

→ Hieruit volgt: $z = \sqrt[n]{a}$, een binomiale vergelijking oplossen is dus hetzelfde als de wortels bepalen uit een complex getal. Een binomiale vergelijking heeft dus n oplossingen.

*Voorbeeldoefening: $z^3 = 2 - 11i \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{2 - 11i}$ → Uitwerking van deze wortel: zie vorig puntje

→ $Opl = \{2 + i; -1{,}87 + 1{,}23i;\ -0{,}13 - 2{,}23i\}$

- -

(2F) FORMULE VAN MOIVRE

*Neem de formule voor de vermenigvuldiging: $z^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$

→ Nemen we r = 1 dan verkrijgen we: $z^n = (\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$

→ Merk op dat we z^n kunnen schrijven als $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$(r schrijven we niet want r = 1 nu)

→ Dan verkrijgen we: $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = (\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$, dit is de formule van Moivre

*M.b.v. de formule van Moivre kunnen we o.a. goniometrische formules maken voor sin en cos.

→ Bv.: n = 2 ➔ $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = (\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)$

⇔ $\cos^2\alpha + 2\cos\alpha\, i\sin\alpha + i^2\sin^2\alpha = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$

⇔ $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2\cos\alpha\sin\alpha = \cos 2\alpha + \sin 2\alpha$ **(1)**

⇔ $\mathbf{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha \wedge 2\cos\alpha\sin\alpha = \sin 2\alpha}$ **(2)** (dit zijn verdubbelingsformules!)

(1) $i^2 = -1$!!
(2) (a + bi) = (c + di)
⇔ a = c ∧ b = d!!!

(BIJLAGE) FORMULARIUM COMPLEXE GETALLEN

- -

<u>(1) COMPLEXE GETALLEN</u>

ALGEMENE NOTATIE COMPLEX GETAL: z = a + bi met a, b ∈ ℝ!

MACHTEN VAN i: $i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \,.\, i = -i$

$i^4 = i^2 \,.\, i^2 = +1$

TWEEDEGRAADSVERGELIJKING: $D = b^2 - 4ac$

→ D > 0: 2 reële oplossingen --> $\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

D = 0: 1 reële oplossing --> $-\frac{b}{2a}$

D < 0: 2 complexe oplossingen --> $\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

HOOFDSTELLING V/D ALGEBRA/STELLING D'ALEMBERT (VERDIEPING): elke veelterm met complexe coëfficiënten en graad > of = 1, heeft tenminste één nulwaarde.

- -

<u>(2) GONIOMETRISCHE GEDAANTE VAN EEN COMPLEX GETAL</u>

MODULUS r VAN GETAL z = a + bi: $\mathrm{r} = \sqrt{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2}$

ARGUMENT α VAN GETAL z = a + bi: $\tan \alpha = \frac{b}{a}$

GONIOMETRISCHE NOTATIE: $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

VERMENIGVULDIGING: $z_1.z_2 = r_1.r_2[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2)$

DELING: $z_1/\, z_2 = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 - \alpha_2)]$

MACHTSVERHEFFING: $z^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$

WORTELTREKKING: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,\left[\cos\left(\frac{\alpha+k.360°}{n}\right) + i\sin\,\left(\frac{\alpha+k.360°}{n}\right)\right]$

BINOMIAALVERGELIJKING: $z^n = a$

→ HIERUIT VOLGT: : $z = \sqrt[n]{a}$, om binomiaalvergelijking op te lossen gebruik vorige formule!

FORMULE VAN MOIVRE: $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \,(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$

→ Wordt gebruikt om goniometrische formules voor cos en sin te maken/bewijzen!

EINDE SAMENVATTING COMPLEXE GETALLEN ZELFSTUDIECURSUS ALTERNATIEF EXAMEN M2!

→ Neem wat pannekoeken om jezelf te belonen!

→ Veel succes op de toets/het examen.