Samenvatting wiskunde 3de graad – module 2 – analyse – reële functies (1) – 7u wiskunde

---

(Y) VOORWOORD

Dit is de samenvatting ter voorbereiding van de toets over reële functies.

- -

(X) INHOUDSTAFEL

---

(1) HET VELD DER REËLE GETALLEN

- -

(1A) HET GEORDEND VELD DER REËLE GETALLEN

*We hebben vorige module gezien dat $\mathbb{R}, +, .$ een geordend veld is, dit betekende dat…
→ Het een groep, commutatieve ring mét eenheidselement is + een symmetrisch element heeft.

*In $\mathbb{R}, +, .$ definieerden we een totale orderrelatie, hierdoor kunnen we intervallen definiëren en elk reëel getal omsluiten tussen 2 opeenvolgende gehele getallen. Bv. $2 < 2{,}532 < 3$.
→ Dit laatste noemen we de **axioma van Archimedes**, een axioma is iets dat we voor 'waar' nemen zonder dat we er enig bewijs voor leveren.
→ EXTRA: In $\mathbb{C}, +, .$ vinden we géén totale orderrelatie, wat betekent dat we geen intervallen hebben en 2 getallen niet met elkaar kunnen vergelijken! Tot slot kunnen we géén teken toekennen aan een getal, we weten dus niet van een complex getal of het positief of negatief is. *<u>(niet kennen voor toets, wél kennen voor zelfstudie complexe getallen)</u>*.

- -

(1AI) ONDERZOEK VAN (NIET-LEGE DEEL-)VERZAMELINGEN IN $\mathbb{R}$

*Opmerking op voorhand: alle voorbeelden zijn gedaan op twee deelverzamelingen van $\mathbb{R}$, namelijk
$V_1 = \{0, 1, 2, 3 …\}$ en $V_2 =]2, 15]$

*Terminologie: **bovengrens (majorant)** = Alles hoger/gelijk aan de hoogste waarde in de verzameling
→ Majorant V_1 bestaat niet, de verzameling loopt tot in het oneindige door!
→ Majorant V_2 = voorbeelden: 15, 19, 32, 394 (alle antwoorden zijn juist)
ondergrens (minorant) = Alles kleiner/gelijk aan de kleinste waarde
→ Minorant V_1 = 0, -1, -93384 … ⇔ minorant V_2 = -1, 1, -6 …
supremum = de kleinste majorant (bovengrens) van de verzameling
→ Supremum V_1 bestaat niet, de verzameling loopt in het oneindige door.
→ Supremum V_2 = 15
infimum = de grootste minorant (ondergrens) van de verzameling
→ Infimum V_1 = 0 ⇔ Infimum V_2 = 2 (let op: desondanks 2 niet tot de verzameling behoort zal de verzameling 2 benaderen waardoor we het toch als inf. rekenen)
maximum = als hij bestaat geld: max V = sup V (sup = supremum)
→ Max V_1 bestaat niet, de verzameling loopt in het oneindige door.
→ Max V_2 = 15
minimum = als hij bestaat geldt: min V = inf V
→ Min V_1 = 0
→ Min V_2 bestaat niet, desondanks de verzameling 2 nadert mogen we 2 niet als minimum rekenen van de verzameling. 2 blijft wél de infimum van de verzameling.

- -

(1B) DE UITGEBREIDE REËLE RECHTE

*$\mathbb{R}$ heeft géén grootste- of kleinste element. We breiden de reële getallenas uit met de getallen plus- en min oneindig. ∞ zelve is echter géén reëel getal!

- -

(1BI) BELANGRIJKSTE REKENREGELS MET ONEINDIG

*De meeste rekenregels zijn voor de hand liggend, echter is er iets speciaals.

*VOORBEELDOEFENINGEN: (1) 7 +(+∞) = +∞

→ Een getal vermeerdert met oneindig is oneindig.

(2) 12 +(-∞) = 12 - ∞ = - ∞

→ Een getal vermindert met oneindig is min oneindig.

(3) 0.(± ∞) = /

→ Nul vermenigvuldigd met oneindig is onbepaald.

→ **Wie oneindig vermenigvuldigt met nul, is een snul**.

(4) +∞+(-∞) = /

→ We kunnen niet het symmetrisch element pakken van ∞

(5) (-4) . $(+\infty)^4$ + 3 . (-∞) = -∞

> Merk op dat je de haakjesregel die in R geldt ook voor oneindig geldt, echter als je iets vermenigvuldigt ermee of optelt en aftrekt blijft het oneindig.

- -

(1C) ABSOLUTE WAARDE VAN EEN REËEL GETAL

Definitie: $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$: $|x| = x \quad v \quad |x| = -x$ → Bijvoorbeeld: $|-3| = 3$!

Belangrijkste eigenschappen $|x| = 5 \Leftrightarrow x = 5 \ v \ x = -5$

→ De vergelijking valt uiteen als je een vergelijking oplost.

$|x| < 5 \Leftrightarrow -5 < x < 5$

→ Als je een ongelijkheid oplost met kleiner dan zit x in een interval.

$|x| > 5 \Leftrightarrow x > 5 \ v \ x < -5$

→ Een ongelijkheid met groter dan zorgt voor een gebroken interval.

$|x + y| \leq |x| + |y|$ → Neem bijvoorbeeld getallen: 5 = x en -3 = y

l 5+(-3)l ?≤? l5l + l-3l ⇔ l2l ?≤? l8l ⇔ 2 ! ≤ ! 8

> Enkele andere voor de hand liggende eig.:
> lx . yl = lxl . lyl
> lx/yl = lxl / lyl
> $|x^2| = |x|^2$
> !!! lx – yl = ly – xl !!!
> → Aftrekking is hier wél commutatief! Normaal in andere bewerkingen niet!

- -

(1D) OMGEVINGEN IN ℝ

*Een omgeving van een reëel getal a is een interval in ℝ dat a bevat.

→ Bijvoorbeeld V_2 van puntje (1AI) is een omgeving van 13. Omdat l15 – 2l = 13 (dit is de afstand tussen het laagste reëel getal in die omgeving en het hoogste.

→ Wij pakken altijd omgevingen met open intervallen tenzij het niet anders kan.

*Een ε-omgeving is een omgeving met een welbepaalde straal epsilon (ε)

→ De omgeving is dus het interval:]a – ε, a + ε[

→ Bijvoorbeeld V_2 van puntje (1AI) is een ε-omgeving van 8,5 met (ε-)straal van 6,5.

→ Waarom? Want 8,5 is juist in het midden en de straal is dan tot het begin- en einde.

*Terminologie: **Gereduceerde omgeving van a** = omgeving dat a zelf niet bevat

→ Bijvoorbeeld V_2 =]2, 15[\ {8,5} is een gereduceerde omgeving.

Linkeromgeving =]a – ε, **a]**, de rechterkant is dus weggelaten bij de linkeromgeving.

→ Bijvoorbeeld V_2 =]2; 8,5]

Gereduceerde linkeromgeving = linkeromgeving zonder a:]a – ε, **a[**

→ Bijvoorbeeld V_2 =]2; 8,5[

Rechteromgeving = **[a**, a + ε[, de linkerkant is hier weggelaten.

→ Bijvoorbeeld V_2 = [8,5;15[

Gereduceerde rechteromgeving = rechteromgeving zonder a: **]a**, a + ε[

→ Bijvoorbeeld V_2 =]8,5;15[

> Herhaling: intervalnotatie
> ------------------
> Bv. interval]1, 2], d.w.z. dat 1 niet in mijn interval hoort (daarom open haakje), maar 2 wél erin (daarom gesloten)

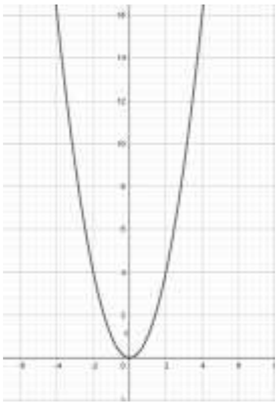
----

(2) REËLE FUNCTIES

*Een reële functie is een verzameling koppels reële getallen (x, y) zodat elk reëel getal hoogstens 1x voorkomt als beeld (dus, 0 keer als beeld of 1 keer als beeld).

(2A) HERHALING BELANGRIJKSTE BASISBEGRIPPEN BIJ FUNCTIES (HERHALING 4DEJAAR)

(2AI) VOORSTELLING VAN FUNCTIES



*Met een functievoorschrift: bv. ➔ $F(x) = x^2$ of $y = x^2$ of f: x --> x^2

*Met een functiewaardetabel: een tabel waar je x- en y-waarden op uitrekent.

*Met een grafiek: in geval van $y = x^2$ verkrijgen we een parabool.

(2AII) DOMEIN EN BEREIK VAN FUNCTIES

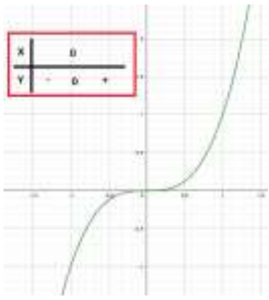
*Domein: alle mogelijke x-waarden van een functie.

➔ $y = x^2 \Leftrightarrow$ dom f = $\mathbb{R}$ (waarom? De grafiek loopt tot in het oneindige door)

*Bereik: alle mogelijke y-waarden van een functie

➔ $y = x^2 \Leftrightarrow$ Ber f = $\mathbb{R}^+$ (zoals je kan waarnemen op de grafiek)

(2AIII) NULWAARDE EN TEKENVERLOOP VAN FUNCTIES



*Nulwaarde: reëel getal dat als functiewaarde nul heeft → snijpunt x-as

➔ voor $y = x^2$ is de nulwaarde 0 (af te lezen van de grafiek)

*Tekenverloop: Hier onderzoeken we simpelweg het teken van alle y-waarden

➔ voor $y = x^3$ vinden we:

X		0	
Y	-	0	+

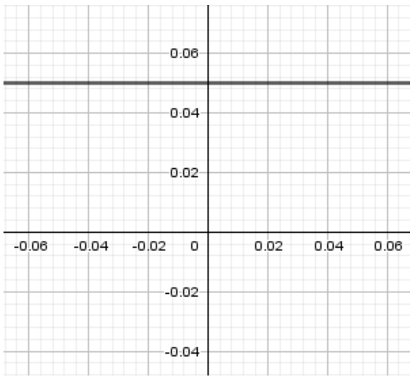
(2AIV) STIJGEN, DALEN, CONSTANT ZIJN VAN FUNCTIES

*Stijgen: Een functie stijgt letterlijk als je ze ziet stijgen op de grafiek van links naar rechts

→ voor $y = x^2$ daalt de grafiek tot de nulwaarde, dan stijgt hij tot in het oneindige (zie grafiek 2AII)

➔ We noteren dit als:

X		0	
Y	↘	0	↗



*Dalen: een functie daalt als ze op de grafiek (gelezen van rechts naar links) daalt.

→ al besproken: $y = x^2$ daalt en stijgt daarna

→ $y = x^3$ daalt niet, ze stijgt enkel.

*Constant zijn: een functie is constant als ze noch stijgt noch daalt.

→ voor g: y = 0,05 is de functie constant, zie grafiek hiernaast.

(2AV) MAXIMA EN MINIMA VAN FUNCTIES (EXTREMAWAARDEN VAN FUNCTIES)

*Absoluut maximum: grootste y-waarde van de functie ($y = x^2$ heeft bv. géén absoluut maximum)

*Relatief maximum: grootste y-waarde in een interval ($y = x^2$ heeft géén relatief maximum)

*Absoluut minimum: laagste y-waarde van de functie ($y = x^2$ heeft als absoluut minimum 0)

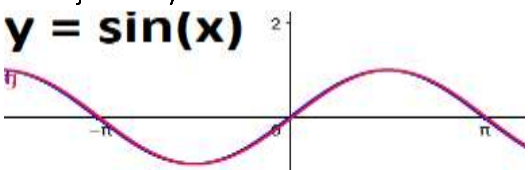
*Relatief minimum: laagste y-waarde van de grafiek ($y = x^2$ heeft als relatief minimum 0)

(2AVI) SYMMETRIE BIJ FUNCTIES

*Symmetrieas: een as waarop de functie op zichzelf wordt afgebeeld.
→ voor y = x^2 is de symmetrieas de y-as (de rechte met vergelijking x = 0)
→ **Functies met een af te lezen symmetrieas noemen we even functies**.
*Symmetriemiddelpunt: een punt waarop de functie wordt gepuntspiegeld.
→ voor y = x^3 is het symmetriemiddelpunt de oorsprong (0).
→ **Functies met een af te lezen symmetriemiddelpunt noemen we oneven functies**.

- -

(2B) BIJZONDERE FUNCTIES
*<u>Afbeelding en bijectie</u>:
→ AFBEELDING: elke x-waarde précies een y-waarde, niet alle y-waarden moeten één x-waarde.
→ Bv.: y = x^2 (grafiek vorige pagina), elke x-waarde heeft één y-waarde maar de y-waardes onder de x-as doen niet mee.
→ BIJECTIE: elke x-waarde précies een y-waarde, alle y-waarden précies één x-waarde.
→ Bv.: y = x^3 (grafiek vorige pagina), elke x-waarde heeft één y-waarde en elke y-waarde ook één x-waarde (zelfs onder de x-as ook hier).
*<u>Bepalen of de functie even of oneven is</u>:
→ GRAFISCH: functie met symmetriemiddelpunt = oneven ⬄ functie met symmetrieas = even
→ ALGEBRAÏSCH: EVEN functies ➔ f(-x) = f(x) /// ONEVEN functies ➔ f(-x) = -f(x)
→ Bv.: y = x^2 ➔ neem x = 5 ==> f(-5) ?=? f(5) ⬄ $(-5)^2$?=? 5^2 ⬄ 25 !=! 25 ➔ Functie is even!
→ Bv.: y = x^3 ➔ neem x = 5 ==> f(-5) ?=? -f(5) ⬄ $(-5)^3$?=? -5^3 ⬄ -125 !=! -125 ➔ Functie oneven!
→ LET OP: een functie kan ook niet even en niet oneven zijn! Bv.: y = x
*<u>Periodieke functies</u>:
→ PERIODIEK: functies die zichzelf constant herhalen.
→ Bv.: y = sin (x)
→ De functie herhaalt zich precies tot in het ∞
→ Deze functie is tevens een afbeelding, elke x heeft een y ⬄ niet elke y heeft een x!



- -

(2C) SOORTEN REËLE FUNCTIES
*<u>Algebraïsche functies</u>: functies waarin enkel bewerkingen in voorkomen (+, -, ., :, …)
→ Bv.: veeltermfuncties, rationale functies, irrationale functies.
*<u>Transcedente functies</u>: alle andere functies die niet algebraïsch zijn
→ Bv.: y = G(x) ➔ Dit is een functie die de x-waarde afrond op het dichtstbijzijnde geheel getal.
→ x = 0,574783566… ⬄ y = G(0,574783566…) ⬄ y = 1 (zo simpel is het)
y = sign (x) ➔ x > 0: sign(x) = 1 ⬄ x < 0: sign(x) = -1 ⬄ x = 0: sign(x) = 0
→ x = 4 ⬄ y = sign(4) = 1 (zo simpel is het)
andere functies: goniometrisch, cyclometrisch, hyperbolisch, exponentieel, logaritmisch …

- -

(2D) BASISBEWERKINGEN MET FUNCTIES
+: $\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 - 2x + 1 \\ g(x) = x + 1 \end{array}\right\}$ $f(x) + g(x) = (x^2 - 2x + 1) + (x + 1) = \underline{x^2} \underline{- 2x} \underline{+ 1} \underline{+ x} \underline{+ 1}$
$= x^2 - x + 2$
→ Voor + en – basisregels van optellen en haakjesregel, let op als je een min voor de haken hebt!
.: $\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 - 2x + 1 \\ g(x) = x + 1 \end{array}\right\}$ $f(x)\,.\;g(x) = (x^2 - 2x + 1)\,.\,(x + 1) = x^3 + x^2 - 2x^2 + 2x + x + 1$
$= x^3 - x^2 + 3x + 1$
→ Voor . basisregels van distributief uitwerken.
/: $\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 - 2x + 1 \\ g(x) = x + 1 \end{array}\right\}$ $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2-2x+1}{x+1} = x - 1\ (uitgewerkt\ met\ Horner)$
→ Voor / gewoon op een breuk zetten, voor dit hoofdstuk hoef je nog niet te werken met Horner!

x^n: $g(x) = x + 1$ ➔ $g^{2(x)} = [g(x)]^2 = (x+1)(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

→ Voor x^n gewoon basisregels merkwaardige producten OF distributief uitwerken

$\sqrt[n]{x}$: $g(x) = x + 1 \rightarrow \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+1}$

→ Om de wortel te nemen gewoon de functie onder een wortel zetten.

- -

(2E) NIEUWE BEWERKING MET FUNCTIES: SAMENGESTELDE VAN TWEE FUNCTIES

∘: dit bolletje betekent ‘samengestelde van twee functies’, de bewerking verloopt als volgt…

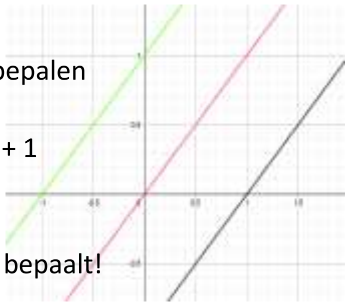
$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 - 2x + 1 \\ g(x) = x + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f(x) \circ g(x) = (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[x+1] = (x+1)^2 - 2(x+1) + 1 \\ \qquad = x^2 \cancel{+2x} + 1 \cancel{-2x} - 2 + 1 = x^2 \end{array}$$

→ Om de samengestelde te nemen, dan doe je de tweede functie ‘in’ de eerste functie, je vervangt de x-waarden van de eerste functie door de tweede en je rekent uit.

*LET OP! De samengestelde van twee functies is NIET COMMUTATIEF!

- -

(2D) INVERSE RELATIE VAN EEN FUNCTIE



*Neem de functie: $g: y = x + 1$, we willen g^{-1} algebraïsch en grafisch bepalen

→ STAPPENPLAN: (1) Schrijf het normale functievoorschrift → y = x + 1

(2) Verwissel (de) x(‘en) en y(‘en) met elkaar → x = y + 1

(3) Los algebraïsch op, probeer y af te zonderen.

→ x = y + 1 ⇔ x – 1 = y ⇔ y = x – 1

(X) PROFICIAT! Je hebt de inverse relatie algebraïsch bepaalt!

(4) Maak een grafiek van y = x + 1

(5) Teken vervolgens de eerste bissectrice (functie y = x, gaat door oorsprong, 45°)

(6) Spiegel de grafiek t.o.v. de eerste bissectrice.

(Y) PROFICIAT! Je hebt de inverse relatie grafisch getekend! (zie grafiek)

EINDE 1STE SAMENVATTING REËLE FUNCTIES