Samenvatting wiskunde 5dejaar – Alle wiskunderichtingen – module 2 – made by Abdellah

---

(Y) VOORWOORD

Dit is de samenvatting wiskunde voor de toets die we zullen krijgen over goniometrie, deze periode wiskunde hebben we een alternatief examen. Goniometrie is een bitch, veel sterkte iedereen!

(X) INHOUDSTAFEL

---

(1) GONIOMETRIE: HERHALING + AANVULLING

*In deze hoofdstuk herhalen we de belangrijkste begrippen en leren we iets nieuws.

(1A) HERHALING: GONIOMETRISCHE GETALLEN, GONIOMETRISCHE CIRKEL

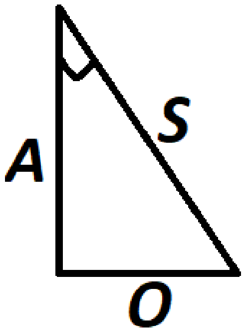
(1AI) GONIOMETRISCHE GETALLEN BIJ EEN SCHERPE HOEKSECTOR

SOS! CASTOA!

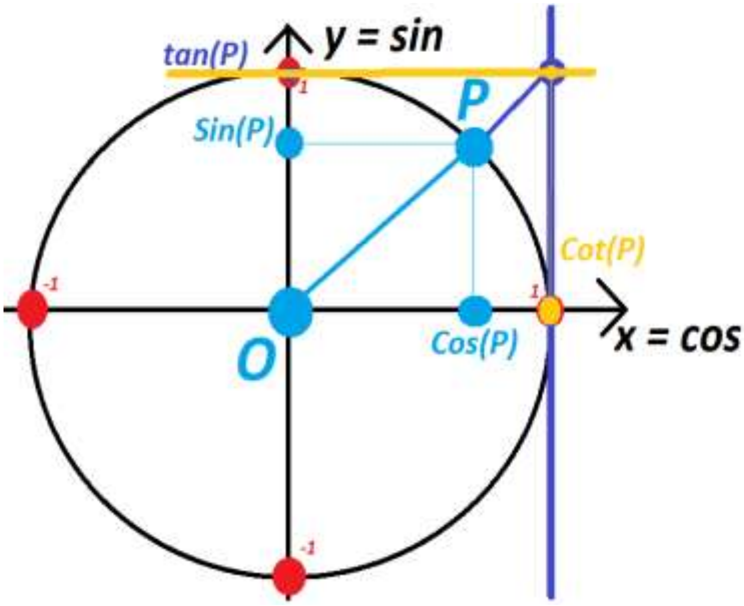
SOS: Sinus = $\frac{Overstaande\ rechthoekszijde}{Schuine\ zijde}$

CAS: Cosinus = $\frac{Aanliggende\ rechthoekzijde}{Schuine\ zijde}$

TOA: Tangens = $\frac{Overstaande\ \ rechthoekszijde}{Schuine\ zijde}$



(1AII) DE GONIOMETRISCHE CIRKEL



De goniometrische cirkel is een cirkel met straal 1 in een (orthonormaal) assenstelsel, op deze cirkel kunnen we van élk goniometrisch getal de sinus-, cosinus-, tangens- én cotangenswaarde bepalen.

Extra uitleg:
Sinus = y-waarde van punt
Cosinus = x-waarde van punt
Tangens = (1) trek rechte evenwijdig met y-as aan uiteinde cirkel (paarse rechte), (2) projecteer deze op y-as, (3) lees tangenswaarde af (zie foto)
Cotangens = zelfde werkwijze (zie foto hierlangs

(1AIII) BELANGRIJKSTE GONIOMETRISCHE FORMULES

(1) $Sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow Cos\ \alpha = \sqrt{1 - sin^2\alpha} \Leftrightarrow Sin\ \alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha}$ (grondformule)

(2) $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ⇔ $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (definitie tangens en cotangens) ⇔ $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$

(3) $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ (secans)

(4) $\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$ (cosecans)

(5) $1 + tan^2\,\alpha = sec^2\alpha = 1/cos^2\alpha$

(6) $1 + cot^2\,\alpha = csc^2\alpha = 1/sin^2\alpha$

(7) $\tan\alpha . \cot\alpha = 1$

$sin\,\alpha = \pm\frac{tan\,\alpha}{\sqrt{1+tan^2\,\alpha}}$ $\quad cos\,\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+tan^2\,\alpha}}$

Het teken hangt af van in welk kwadrant alfa ligt.

- -

(1B) EEN NIEUWE EENHEID OM HOEKEN UIT TE DRUKKEN: DE RADIAAL

*Tot nu toe hebben we altijd in graden gewerkt, nu gaan we ook werken in radialen

→ De hoekgrootte in radialen = lengte boog van de cirkel/straal van de cirkel

→ Hieruit volgt: 1 rad ≈ 57,29°

- -

(1BI) RADIALEN OMZETTEN NAAR GRADEN EN VICE VERSA

*2 formules: 180° = π ⇔ 360° = 2π (let op! We schrijven de eenheid 'rad' meestal niet!)

*Voorbeeldvraag 1: zet 83° om naar radialen

→ 180° = π

:180 ↓ ↓ :180

. 83 ↓ ↓ . 83

Regel van 3!

83° = π : (180 . 83)

⇔ 83° = 1,45 (rad)

*Voorbeeldvraag 2: zet 1,67 om naar graden

→ 180° = π

: π ↓ ↓ : π

. 1,67 ↓ ↓ . 1,67

Regel van 3!

180° : (π . 1,67) = 1,67

95,7° = 1,67 (rad)

- -

(1BII) MET RADIALEN REKENEN IN JE ZAKREKENMACHINE

*Je rekenmachine stond tot nu toe altijd op DEG (degrees), nu moet je ze kunnen zetten in de RAD-modus (radialen). Voorbeeld is gedaan met groene rekenmachine (casio fx-92/fx-92B)

*Stappenplan: (1) Zet je rekenmachine aan (als hij uit stond), druk hiervoor op [ON]

(2) Druk nu op [SHIFT] (rechtsboven)

(3) Druk nu op [SETUP] (naast de [ON]-knop)

(4) Druk nu op [4 : RAD] (druk hiervoor op 4)

(5) Teruggaan naar graden? Doe hetzelfde maar druk bij stap 4 op [3: DEG]

(LET OP) Druk nooit op [5: GRA], dit zijn gradiënten (nog een andere eenheid)

*Let op: sin 60 = sin 60 rad = -0,3048…

sin 60° = sin 60 graden = 0,8660…

- -

(1BIII) FORMULES VAN VERWANTE HOEKEN UITGEDRUKT IN RADIALEN (VORIG JAAR IN GRADEN)

*Opmerkingen vooraf: (1) hou in je achterhoofd: 90° = $\frac{\pi}{2}$ ⇔ 180° = π ⇔ 360° = 2π

(2) Bijna alle formules kan je aflezen op de goniometrische cirkel, dus hoef je ze niet vanbuiten te leren

*<u>Elk getal op de goniometrische cirkel heeft oneindig veel maatgetallen, je doet + 360°:</u>

→ (1) sin (x + k . 2π) = sin x / (2) cos (x + k . 2π) = cos x / tan (x + k . 2π) = tan x / cot (x + k . 2π) = cot x

*<u>Formules voor tegengestelde hoeken:</u>

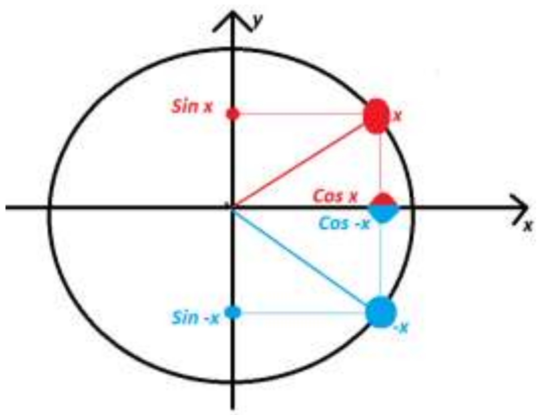
→ Uit de cirkel (C) lezen we af: (1) sin(-x) = - sin x

(2) Cos(-x) = cos x

→ Uit sin en cos leiden we tan en cot af: (3) tan(-x) = - tan x

(4) cot(-x) = - cot x

Hoe the fuck leiden we tan en cot af?
tan(-x) = sin(-x)/cos(-x) = -sin x/cos x
= - sin x/cos x = - tan x
→ Cot zelfde werkwijze.



*Formules voor complementaire hoeken (90° - x):

→ (1) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ / (2) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ / (3) $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot x$ / (4) $\cot(\frac{\pi}{2} - x) = \tan x$

→ Hoe deze formules onthouden: COsinus is het COmplement van sinus etc…

→ Sin verandert gewoon in cos, cos in sin, tan in cot, cot in tan.

*Formules voor anticomplementaire hoeken (90° + x):

→ $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$ / (2) $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$ / (3) $\tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\cot x$ / (4) $\cot(\frac{\pi}{2} + x) = -\tan x$

→ Deze zijn een beetje vanbuiten leren: als je sin en cos kent kan je tan en cot eruit afleiden.

*Formules voor supplementaire hoeken (180° - x):

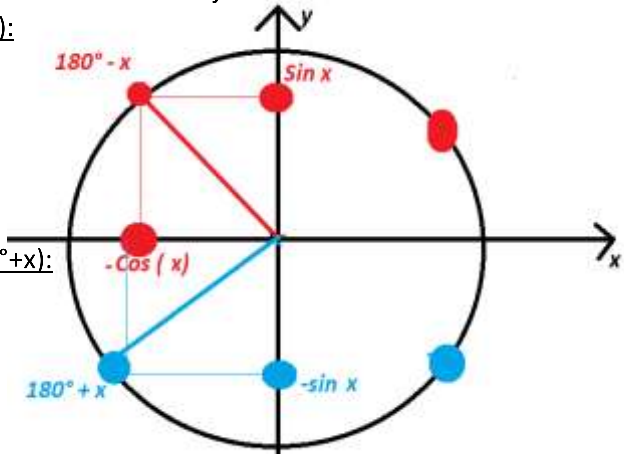
→ Uit de C lezen we af: (1) Sin ($\pi - x$) = sin(x)

(2) Cos ($\pi - x$) = - cos(x)

→ Hieruit leiden we tan en cot af:

(3) Tan ($\pi - x$) = - tan(x)

(4) Cot ($\pi - x$) = - cot(x)



*Formules voor antisupplementaire hoeken (180°+x):

→ Uit de C lezen we af: (1) Sin ($\pi + x$) = - sin x

(2) Cos ($\pi + x$) = - cos x

→ Hieruit leiden we tan en cot af:

(3) Tan ($\pi + x$) = tan(x)

(4) Cot ($\pi + x$) = cot(x)

→ Wtf? – en – wordt +!

*Of je 'spiekt' op de goniometrische cirkel zodat je de formules niet vanbuiten hoeft te leren of je leert de formules vanbuiten, aan jou de keuze!

- -

(1BIII) TOEPASSING OP VERWANTE HOEKEN: HERLEIDEN NAAR HET EERSTE KWADRANT

*Omdat het nuttig is om met een hoek te werken in het eerste kwadrant leren we hier hoe we een hoek moeten herleiden naar het eerste kwadrant, we onderscheiden 4 gevallen.

→ (1) α zit in het eerste kwadrant

→ Je hoeft niks te herleiden!

→ (2) α zit in het tweede kwadrant

→ Gebruik de formules van supplementaire hoeken (180° - x)

→ Voorbeeldoefening: herleid $\frac{31\pi}{36}$ (155°) naar het eerste kwadrant

→ Oplossing: Sin ($\frac{31\pi}{36}$)Sin($\frac{36\pi}{36} - \frac{5\pi}{36}$) = Sin ($\frac{5\pi}{36}$)

→ Waarom 36/36? Als we daar 5/36 aftrekken bekomen we de 31/36!

→ (3) α zit in het derde kwadrant

→ Gebruik de formules van antisupplementaire hoeken (180° + x)

→ Voorbeeldoefening: herleid 210° naar het eerste kwadrant

→ Oplossing: Cos(210°) = cos (180° + 30°) = - cos 30°

→ (4) α zit in het vierde kwadrant

→ Gebruik de formule van formules voor tegengestelde hoeken (-x)

→ Voorbeeldoefening: herleid $\frac{29\pi}{18}$ (290°) naar het eerste kwadrant:

→ Oplossing: $\sin(\frac{29\pi}{18}) = \sin(\frac{29\pi}{18} - 1 \,.\, 2\pi) = \sin(-\frac{7\pi}{18}) = -\sin(\frac{7\pi}{18})$

→ Bij het vierde kwadrant moet je een extra tussenstap maken om de hoek negatief te maken!

---

(2) GONIOMETRISCHE FORMULES

*In dit hoofdstuk gaan we véél formules leren, hou je vast.

(2A) BETEKENIS VAN $\frac{x}{n}$

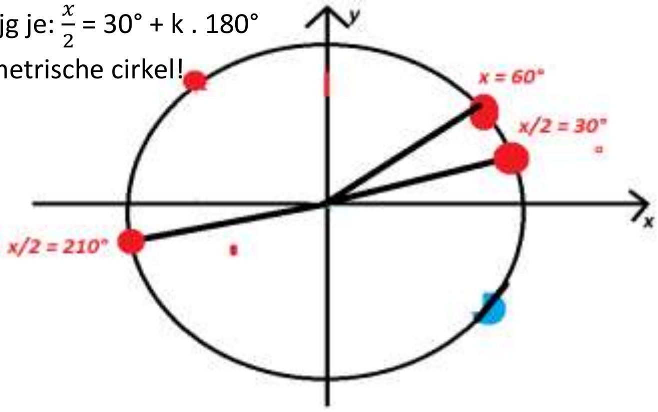
*Stel x = 60°

→ Je begrijpt: een hoekgrootte heeft oneindig veel maatgetallen ➔ x = 60° + k . 360°

→ Als je deze hoekgrootte deelt door 2 krijg je: $\frac{x}{2}$ = 30° + k . 180°

→ Nu heb je twéé hoeken op de goniometrische cirkel!

Meer moet je niet weten, je moet gewoon weten dat als je x deelt door een natuurlijk getal je méérdere hoekgrootten hebt (2 = 2 hoekgrootten, 3 = 3 hoekgrootten, 4 = 4 hoekgrootten …), wel nooit delen door nul! Want… **wie deelt door nul is een snul**.



(2B) GONIOMETRISCHE FORMULES

*Je moet volgende 23 formules niet vanbuiten kennen voor de toets (je krijgt een formuleblad).

→ Je moet 22 formules van de 23 wél kunnen bewijzen, maar de bewijzen zijn logisch.

(2BI) OPTELLINGSFORMULES (VOOR SINUS EN COSINUS)

*Als je twéé goniometrische getallen α en β hebt, kan je ze met deze formules optellen.

*(1) cos (α – β) = cos(α) . cos(β) + sin(α) . sin(β)

→ Geen bewijs kennen voor (1) voor mnr. Wantens klassen (idk voor Vandelaer)

*(2) cos (α + β) = cos [α –(-β)] [uitleg: rekenen in R, haakjesregel: -(- = +!)]

= cos(α) . cos(-β) + sin(α) . sin(-β) [uitleg: formule (1) toegepast]

= cos(α) . cos(β) + sin(α) . [- sin(β)] [uitleg: formules van verwante hoeken toegepast]

= cos(α) . cos(β) - sin(α) . sin(β) [uitleg: rekenen in R, + . - = -!]

*(3) sin (α – β) = cos[90°-(α – β)] (uitleg: verwante hoeken toegepast ➔ complementaire hoeken)

= cos[(90° - α) – β] (uitleg: rekenen in R ➔ associativiteit toegepast)

= cos(90° - α) . cos(β) + sin(90° - α) . sin(β) (uitleg: formule (1) toegepast)

= sin(α) . cos(β) - cos(α) . sin(β) (uitleg: verwante hoeken ➔ complementaire hoeken)

*(4) sin (α + β) = sin[α –(-β)] (uitleg: rekenen in R, -(- wordt +!)

= sin(α) . cos(-β) - cos(α) . sin(-β) (uitleg: formule (3) toegepast!)

= sin(α) . cos(β) - cos(α) . [-sin(β)] (uitleg: verwante hoeken ➔ tegengestelde hoeken)

= sin(α) . cos(β) + cos(α) . sin(β) (uitleg: rekenen in R, - . - = +!)

(2BII) OPTELLINGSFORMULES VOOR TANGENS

*(5) tan (α + β) = $\frac{sin\ (\alpha+\beta)}{cos\ (\alpha+\beta)}$ (uitleg: definitie van tangens ➔ tan = sin/cos)

= $\frac{sin(\alpha).cos(\beta)+cos(\alpha)\ .sin(\beta)}{cos(\alpha)\ .cos(\beta) - sin(\alpha)\ .sin(\beta)}$ (uitleg: formule (4) in teller en (2) in noemer)

= $\dfrac{\frac{sin(\alpha).cos(\beta)+\ cos(\alpha)\ .sin(\beta)}{\cos(\alpha)\ .\ \cos(\beta)}}{\frac{cos(\alpha)\ .cos(\beta) - sin(\alpha)\ .sin(\beta)}{\cos(\alpha)\ .\ \cos(\beta)}}$ [uitleg: teller en noemer delen door $\cos(\alpha)\ .\ \cos(\beta)$]

= $\dfrac{\frac{sin(\alpha)\ .\cancel{cos(\beta}}{\cos(\alpha)\ .\ \cancel{cos(\beta)}} + \frac{\cancel{cos(\alpha)}.sin(\beta)}{\cancel{cos(\alpha)}\ .\ \cos(\beta)}}{\frac{\cancel{cos(\alpha)}\ .\cancel{cos(\beta)}}{\cancel{cos(\alpha)}\ .\cancel{cos(\beta)}} - \frac{sin(\alpha)\ .sin(\beta)}{\cos(\alpha)\ .\ \cos(\beta)}}$ [uitleg: rekenen in R ➔ breuk splitsen, schrappen)

$= \dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\,.\,\tan(\beta)}$ (uitleg: definitie tangens = sin/cos, rekenen in R)

*(6) tan (α - β) = $\dfrac{sin\,(\alpha-\beta)}{cos\,(\alpha-\beta)}$ (uitleg: definitie van tangens ➔ tan = sin/cos)

$= \dfrac{sin(\alpha).cos(\beta)-cos(\alpha)\,.sin(\beta)}{cos(\alpha)\,.cos(\beta)+sin(\alpha)\,.sin(\beta)}$ (uitleg: formule (3) in teller en (1) in noemer)

$= \dfrac{\dfrac{sin(\alpha).cos(\beta)-cos(\alpha)\,.sin(\beta)}{\cos(\alpha)\,.\,\cos(\beta)}}{\dfrac{cos(\alpha)\,.cos(\beta)+sin(\alpha)\,.sin(\beta)}{\cos(\alpha)\,.\,\cos(\beta)}}$ [uitleg: teller en noemer delen door $\cos(\alpha)\ .\ \cos(\beta)$]

$= \dfrac{\dfrac{sin(\alpha)\,.\cancel{cos(\beta}}{\cos(\alpha)\,.\,\cancel{\cos(\beta)}}-\dfrac{\cancel{cos(\alpha)}.sin(\beta)}{\cancel{\cos(\alpha)}\,.\,\cos(\beta)}}{\cancel{\dfrac{cos(\alpha)\,.cos(\beta)}{cos(\alpha)\,.cos(\beta)}}+\dfrac{sin(\alpha)\,.sin(\beta)}{\cos(\alpha)\,.\,\cos(\beta)}}$ [uitleg: rekenen in R ➔ breuk splitsen, schrappen)

$= \dfrac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\,.\,\tan(\beta)}$ (uitleg: definitie tangens = sin/cos, rekenen in R)

→ Merk op: als je formule (5) kan bewijzen moet je voor (6) gewoon alle tekens omdraaien.

- -

(2BIII) VERDUBBELINGSFORMULES

*Je gebruikt deze formules als je het goniometrisch getal van α gegeven hebt en je 2α wilt kennen, je wilt dus het dubbele kennen van α.

*(7) sin(2α) = sin(α + α) [rekenen in R ➔ 2α = α + α net zoals 2 . 4 = 4 + 4 bijvoorbeeld]

= sin(α) . cos(α) + cos(α) . sin(α) [formule (4) toegepast]

= sin(α) . cos(α) + sin(α) . cos(α) [rekenen in R ➔ . is commutatief]

= 2sin(α) . cos(α) [rekenen in R ➔ +]

*(8) cos(2α) = cos(α + α) [rekenen in R ➔ uitleg: zie (7)]

= cos(α) . cos(α) - sin(α) . sin(α) [formule (2) toegepast]

= $\cos^2 α – \sin^2 α$ [rekenen in R ➔ vermenigvuldiging uitvoeren]

*(9) cos(2α) = $\cos^2 α – \sin^2 α$ [formule (8) toegepast]

= $\cos^2 α – (1 – \cos^2 α)$ [grondformule: $\sin^2 α + \cos^2 α = 1 ⇔ \sin^2 α = 1 – \cos^2 α$]

= $\cos^2 α – 1 + \cos^2 α$ [rekenen in R ➔ haakjes wegwerken ➔ - dus tekens omkeren!]

= $2\cos^2 α – 1$ [rekenen in R ➔ optelling uitvoeren]

*(10) cos(2α) = $\cos^2 α – \sin^2 α$ [formule (8) toegepast]

= $(1 – \sin^2 α) – \sin^2 α$ [grondformule: $\sin^2 α + \cos^2 α = 1 ⇔ \cos^2 α = 1 – \sin^2 α$]

= $1 – \sin^2 α – \sin^2 α$ [rekenen in R ➔ associativiteit]

= $1 – 2\sin^2 α$ [rekenen in R ➔ aftrekking uitvoeren]

*(11) tan(2α) = tan(α + α) [rekenen in R ➔ 2α = α + α net zoals 2 . 4 = 4 + 4 bijvoorbeeld]

$= \dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\alpha)}{1-\tan(\alpha)\,.\,\tan(\alpha)}$ [formule (5) toegepast]

$= \dfrac{2.tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$ [rekenen in R ➔ optelling + vermenigvuldiging uitvoeren]

- -

(2BIII) VERDUBBELINGSFORMULES UITGAANDE VAN TANGENS (t-formules)

*Deze formules bewijzen we op een specialere manier, in de vorige punten gingen we altijd uit van het linkerlid en werkten we deze uit. Hier gaan we vanuit het rechterlid (RL) beginnen en deze proberen uit te werken naar het linkerlid (LL).

*(12) sin(2α) = $\dfrac{2.tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}$

➔ RL = $\dfrac{2.tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} = \dfrac{2.tan(\alpha)}{\frac{1}{cos^2\alpha}}$ [goniometrische formule in noemer: $1 + tan^2$ α = $1/cos^2$α]

$= 2.\,tan(\alpha)\,.\,cos^2\alpha$ [rekenen in R ➔ delen door breuk = maal omgekeerde]

$= 2.\,\frac{sin(\alpha)}{\cancel{cos(\alpha)}}\,.\,\cancel{cos^2}\alpha$ [definitie tangens ➔ tan = sin/cos, rekenen in R ➔ schrap]

$= 2.\,\sin(\alpha)\,.\,\cos\alpha$ [cos viel 1 keer weg, rekenen in R]

= sin(2α) [formule (7) toegepast]

= LL [formule bewezen!]

*(13) $\cos(2\alpha) = \frac{1-tan^2(\alpha)}{1+tan^2(\alpha)}$

➔ RL = $\frac{1-tan^2(\alpha)}{1+tan^2(\alpha)} = \frac{1-tan^2(\alpha)}{\frac{1}{cos^2\alpha}}$ [goniometrische formule in noemer: $1 + tan^2\,\alpha = 1/cos^2\alpha$]

$= [1 - tan^2(\alpha)]\,.\,cos^2(\alpha)$ [delen door een breuk = maal het omgekeerde]

$= \cos^2(\alpha) - \tan^2(\alpha)\,.\,\cos^2(\alpha)$ [rekenen in R ➔ distributief uitwerken]

$= \cos^2(\alpha) - \frac{sin^2\alpha}{\cancel{cos^2\alpha}}\,.\,\cancel{\cos^2(\alpha)}$ [definitie tangens ➔ tan = sin/cos]

$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ [rekenen in R ➔ schrappen]

= cos(2α) [formule (8) toegepast]

= LL [formule bewezen!!!]

*(14) $\tan(2\alpha) = \frac{2.tan(\alpha)}{1-tan^2(\alpha)}$ [deze formule is dezelfde als (11), hetzelfde bewijs dus]

- -

(2BIII) HALVERINGSFORMULES UITGAANDE VAN COS(2α) (formules van Carnot)

*Hier gebruiken we nog een andere methode van bewijzen: i.p.v. van het LL of RL te beginnen zullen we hier gebruik maken van het gelijkwaardigheidsteken ⇔, dus er een vergelijking van maken.

*(15) $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$ [formule (9) toegepast]

⇔ $2\cos^2\alpha - 1 = \cos(2\alpha)$ [beide leden omgewisseld, dat mag, alles blijft gewoon hetzelfde]

⇔ $2\cos^2\alpha = \cos(2\alpha) + 1$ [-1 overgebracht naar de andere kant, wordt +1]

⇔ $2\cos^2\alpha = 1 + \cos(2\alpha)$ [de optelling in R is commutatief]

⇔ $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$ [2 overgebracht naar de andere kant, dus gedeelt door 2]

➔ hieruit volgt… $\cos\alpha = +/-\sqrt{\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}}$ [de macht overgebracht naar de andere kant]

→ Het teken van alfa hangt af van in welke kwadrant hij zit.

*(16) $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$ [formule (10) toegepast]

⇔ $1 - 2\sin^2\alpha = \cos(2\alpha)$ [vergelijking oplossen: beide leden omgewisseld]

⇔ $2\sin^2\alpha = \cos(2\alpha) - 1$ [+1 overgebracht naar ander lid, wordt -1]

⇔ *$2\sin^2\alpha = \cos(2\alpha) +(-1)$ [rekenen in R ➔ +(- = -!]*

→ Waarom doe ik deze extra tussenstap? De aftrekking in R is niet commutatief, de optelling wél en elke aftrekking kunnen we als een optelling schrijven!

⇔ $2\sin^2\alpha = -1 + \cos(2\alpha)$ [Rekenen in R ➔ optelling in R is commutatief]

⇔ $2\sin^2\alpha = 1 - \cos(2\alpha)$ [Rekenen in R ➔ tegengestelde van het rechterlid (RL) nemen]

⇔ $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$ [Vergelijking oplossen: 2 overbrengen naar de andere kant]

➔ hieruit volgt… $\sin\alpha = \frac{+}{-\sqrt{\frac{1-\sin(2\alpha)}{2}}}$

- -

(2BIV) FORMULES VAN SIMPSON (EERSTE VORM)

*Deze formules leggen het verband tussen de som en anderzijds het product van goniometrische getallen. Om deze formules te bewijzen beginnen we terug vanaf het rechterlid (RL).

*(17) 2 sin α . cos β = sin(α – β) + sin(α + β)

➔ RL = sin(α – β) + sin(α + β) = [sin(α) . cos(β) - ~~cos(α) . sin(β)~~] + [sin(α) . cos(β) ~~+ cos(α) . sin(β)~~]
[Optellingsformules (3) en (4) toegepast + schrappen (rekenen in R)]
= sin(α) . cos(β) + sin(α) . cos(β) [Proper overschrijven]
= 2 . sin(α) . cos(β) [rekenen in R ➔ optelling uitvoeren]
= LL [formule is bewezen!]

*(18) 2 cos α . cos β = cos(α – β) + cos(α + β)

➔ RL = cos(α – β) + cos(α + β) = [cos α . cosβ ~~+ sin α . sinβ~~] + [cosα . cosβ ~~- sin α . sinβ~~]
[Optellingsformules (1) en (2) toegepast + schrappen (rekenen in R)]
= cos α . cosβ + cos α . cosβ [proper overschrijven]
= 2 . cos α . cosβ [rekenen in R ➔ optelling uitvoeren]
= LL [formule is bewezen!]

*(19)) 2 sin α . sin β = cos(α – β) - cos(α + β)

➔ RL = cos(α – β) - cos(α + β) = [cos α . cosβ + sin α . sinβ] - [cosα . cosβ - sin α . sinβ]
[Optellingsformules (1) en (2) toegepast + schrappen (rekenen in R)]
= ~~cos α . cos~~β + sin α . sinβ - ~~cosα . cos~~β + sin α . sinβ [rekenen in R: schrappen]
= sin α . sinβ + sin α . sinβ [proper overschrijven]
= 2 sin α . sin β [rekenen in R ➔ optelling uitvoeren]

- -

(2BV) FORMULES VAN SIMPSON (TWEEDE VORM)

*Omdat wiskundeleerkrachten anders geen job hebben bestaat nog een vorm van de formules van Simpson (yeay!), dezen moeten we ook kunnen bewijzen. We beginnen opnieuw bij elke formule vanaf het rechterlid (RL) en steunen op de eerste vorm van de formules van Simson (17)(18)(19).

*(20) sin x + sin y = 2 sin$(\frac{x}{2}+\frac{y}{2})$. cos$(\frac{x}{2}-\frac{y}{2})$

➔ RL = 2 sin$(\frac{x}{2}+\frac{y}{2})$. cos$(\frac{x}{2}-\frac{y}{2})$
= $\sin[(\frac{x}{2}+\frac{y}{2})-(\frac{x}{2}-\frac{y}{2})]+\sin[(\frac{x}{2}+\frac{y}{2})+(\frac{x}{2}-\frac{y}{2})]$ [formule (17) toegepast]
= $\sin[\cancel{\frac{x}{2}}+\frac{y}{2}-\cancel{\frac{x}{2}}+\frac{y}{2}]+\sin[\frac{x}{2}+\cancel{\frac{y}{2}}+\frac{x}{2}-\cancel{\frac{y}{2}}]$ [rekenen in R: haakjes wegwerken, schrap.]
= $\sin\left(\frac{y}{2}+\frac{y}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)$ [proper overschrijven]
= $\sin\left(\cancel{2}\,.\frac{y}{\cancel{2}}\right)+\sin\left(\cancel{2}\,.\frac{x}{\cancel{2}}\right)$ [rekenen in R ➔ optelling uitvoeren, schrappen]
= sin y + sin x [proper overschrijven]
= LL [formule is bewezen!]

*(21) sin x - sin y = 2 cos$\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)$. sin$\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)$

➔ RL = 2 cos$\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)$. sin$\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)$
= 2 sin$\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)$. cos$\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)$ [rekenen in R ➔ vermenigvuldiging is commutatief]
= $\sin[(\frac{x}{2}-\frac{y}{2})-(\frac{x}{2}+\frac{y}{2})]+\sin[(\frac{x}{2}-\frac{y}{2})+(\frac{x}{2}+\frac{y}{2})]$ [formule (17) toegepast]
= $\sin[\cancel{\frac{x}{2}}-\frac{y}{2}-\cancel{\frac{x}{2}}-\frac{y}{2}]+\sin[\frac{x}{2}-\cancel{\frac{y}{2}}+\frac{x}{2}+\cancel{\frac{y}{2}}]$ [rekenen in R: haakjes wegwerken, schrap.]
= $\sin\left(-\cancel{2}\,.\frac{y}{\cancel{2}}\right)+\sin\left(\cancel{2}\,.\frac{x}{\cancel{2}}\right)$ [rekenen in R ➔ optelling uitvoeren, schrappen]
= sin (-y) + sin x [proper overschrijven]
= -sin y + sin x [tegengestelde hoeken: verwante hoeken]
= +(-sin y) + sin x [Rekenen in R ➔ +(- = -!]
= sin x +(-sin y) [de optelling in R is commutatief]

= sin x – sin y [haakjesregel] = LL [formule is bewezen!]

*(22) cos x + cos y = 2 cos $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right).\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)$

➔ RL = 2 cos $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right).\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)$

= $\cos[(\frac{x}{2}+\frac{y}{2})-(\frac{x}{2}-\frac{y}{2})] + \cos[\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)+(\frac{x}{2}-\frac{y}{2})]$ [formule (18) toegepast]

= $\cos[\cancel{\frac{x}{2}}+\frac{y}{2}-\cancel{\frac{x}{2}}+\frac{y}{2}] + \cos[\frac{x}{2}+\cancel{\frac{y}{2}}+\frac{x}{2}-\cancel{\frac{y}{2}}]$ [rekenen in R: haakjes wegwerken, schrap.]

= $\cos\left(2.\frac{y}{2}\right) + \cos\left(2.\frac{x}{2}\right)$ [rekenen in R ➔ optelling uitvoeren, schrappen]

= cos (y) + cos x [proper overschrijven]

= cos x + cos y [optelling in R is commutatief]

= LL [formule is bewezen!]

*(23) cos x - cos y = $-2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right).\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)$

➔ RL = $-2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right).\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)$

= $2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right).\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)$ [tegengestelde hoeken]

= $\cos[(\frac{x}{2}+\frac{y}{2})-(\frac{y}{2}-\frac{x}{2})] - \cos[\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)+(\frac{y}{2}-\frac{x}{2})]$ [formule (19) toegepast]

= $\cos[\frac{x}{2}+\cancel{\frac{y}{2}}\cancel{-\frac{y}{2}}+\frac{x}{2}] - \cos[\left(\cancel{\frac{x}{2}}+\frac{y}{2}\right)+\frac{y}{2}\cancel{-\frac{x}{2}}]$ [Rekenen in R: haakjes wegwerken, schrap.]

= $\cos[\frac{x}{2}+\frac{x}{2}] - \cos[\frac{y}{2}+\frac{y}{2}]$ [proper overschrijven]

= $\cos\left(2.\frac{x}{2}\right) + \cos\left(2.\frac{y}{2}\right)$ [rekenen in R ➔ optelling uitvoeren, schrappen]

= cos(x) – cos (y) [proper overschrijven]

= LL [formule bewezen!]

- -

(2BIII) ALLE FORMULES OPGESOMD (FORMULEBLAD)

Formuleblad Goniometrie

Definities: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\quad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$ $\quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$

Grondformule: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\quad \tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ $\quad \cot^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

$\sin\alpha = \pm\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$ $\quad \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$

Rechthoekige driehoek: SOSCASTOA

Willekeurige driehoek: $S = \frac{1}{2}.b.c.\sin A = \frac{1}{2}.a.b.\sin C = \frac{1}{2}a.c.\sin B$

Sinusregel: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

Cosinusregel: $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos A$

Optellingsformules:

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$

$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha.\tan\beta}$

$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}$

Verdubbelingsformules:

- *Eerste vorm:* $\sin 2\alpha = 2.\sin\alpha.\cos\alpha$
  $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2.\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$
  $\tan 2\alpha = \frac{2.\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
- *Uitgedrukt in* $\tan\alpha$: $\sin 2\alpha = \frac{2.\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ $\quad \cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$
- *t-formules:* $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$

Halveringsformules: $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ $\quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

Formules van Simpson:

$2.\sin\alpha.\cos\beta = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)$ $\quad \sin\alpha + \sin\beta = 2.\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$2.\cos\alpha.\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$ $\quad \sin\alpha - \sin\beta = 2.\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$2.\cos\alpha.\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$ $\quad \cos\alpha + \cos\beta = 2.\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$2.\sin\alpha.\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$ $\quad \cos\alpha - \cos\beta = -2.\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

Opmerking: de goniometrische formules voor willekeurige driehoeken heb ik niet besproken in de samenvatting omdat deze niet in de cursus zaten.

Dus, kort: je gebruikt de sinusregel en cosinusregel louter als je in een willekeurige (niet-rechthoekige) driehoek werkt en met deze formules kan je hoeken of afmetingen van zijden te weten komen.

Echter is het dit jaar niet belangrijk.

- -

(2C) SPECIALE GONIOMETRISCHE GETALLEN

*Sommige goniometrische getallen moet je vanbuiten kennen, gelukkig bestaat hier een Bietstrucje voor.

HOEKGROOTTE	SINUS	COSINUS	TANGENS	COTANGENS
0° / 0 π	(klein) 0	(groot) 1	0	/
30° / $\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45° / $\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60° / $\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90° / $\frac{\pi}{2}$	*(groot) 1*	*(klein) 0*	*/*	*0*
180° / π	*0*	*1*	*0*	*/*
270° / $\frac{3\pi}{2}$	*1*	*0*	*/*	*0*

→ Ga deze tabel nu niet vanbuiten leren, Biets had hiervoor trucjes.

→ Sinus vanbuiten leren: de getallen gaan van klein naar groot.

→ Als je sinus kent: merk op → cosinus gaat omgekeerd van groot naar klein.

→ Tangens kan je hieruit bepalen dankzij tan = sin/cos

→ Als je tangens hebt bepaald kan je cotangens ook snel bepalen omdat het het omgekeerde is.

- -

(2D) VOORBEELDOEFENINGEN

*Omdat wiskunde veel oefenen is en de werkwijze snappen is, doe ik hier van elke soort oefeningen eentje voor.

- -

(2DI) VOORBEELDOEFENINGEN UIT OEFENING 1: VEREENVOUDIG ZONDER ZRM

a) Sin(105°)

→ Deze sinuswaarde kennen we niet en we hebben géén rekenmachine!

→ Merk op: je kan 105° schrijven als 60° + 45°

→ Dus… sin(105°) = sin(60° + 45°) → dit is de 4de optellingsformule!

→ Oplossing: $\sin(60° + 45°) = \sin(60°) + \cos(45°) + \cos(60°) + \sin(45°)$

Algemene werkwijze: krijg je zo'n soort oefening, zoek hoeken die je kent (zie puntje 2C) en probeer het als een optelling van die hoeken te schrijven

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

b) $cos^2\alpha + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)$

→ Je ziet hier twee optellingsformules met een kwadraat, mag je die formules dan gebruiken? Ja!

$cos^2\alpha + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)$

$= cos^2\alpha + [\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right).\cos(\alpha) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right).\sin(\alpha)]^2 + [\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right).\cos(\alpha) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right).\sin(\alpha)]^2$

➔ Oeioei: we kennen hier geen hoekgroottes, wat nu?

→ Wacht jawel! We moeten gewoon herleiden naar het eerste kwadrant (zie hfdstuk 1)

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

→ Nu we deze getallen kennen kunnen we deze invullen!

$= cos^2\alpha + [\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right).\cos(\alpha) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right).\sin(\alpha)]^2 + \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right).\cos(\alpha) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right).\sin(\alpha)\right]^2$

$= cos^2\alpha + [-\frac{1}{2}.\cos(\alpha) - \frac{\sqrt{3}}{2}.\sin(\alpha)]^2 + \left[-\frac{1}{2}.\cos(\alpha) + \frac{\sqrt{3}}{2}.\sin(\alpha)\right]^2$ (alle getallen invullen)

→ Hier herken je het dubbel product: **(a +/- b)² = a² +/- 2ab + b²**

$= cos^2\alpha + [\frac{1}{4}.cos^2\alpha - \cancel{2}.\left[-\frac{1}{\cancel{2}}.\cos(\alpha)\right].\frac{\sqrt{3}}{2}.\sin(\alpha) + \frac{3}{4}.sin^2(\alpha)$

$+[\frac{1}{4}.cos^2\alpha + \cancel{2}.\left[-\frac{1}{\cancel{2}}.\cos(\alpha)\right].\frac{\sqrt{3}}{2}.\sin(\alpha) + \frac{3}{4}.sin^2(\alpha)$

→ Wtf hebben we hier gedaan? Gewoon het dubbelproduct uitgewerkt volgens de regel

➔ Je ziet hier ook dat je dingen mag schrappen: 2 . ½ mag je schrappen!

$= cos^2\alpha + [\frac{1}{4}.cos^2\alpha - [-1.\cos(\alpha)].\frac{\sqrt{3}}{2}.\sin(\alpha) + \frac{3}{4}.sin^2(\alpha)$

$+[\frac{1}{4}.cos^2\alpha + [-1.\cos(\alpha)].\frac{\sqrt{3}}{2}.\sin(\alpha) + \frac{3}{4}.sin^2(\alpha)$

➔ Hier heb ik de geschrapte 2's weggehaald om het overzichtelijk te maken, je ziet nu dat je de haakjesregel voor +(- en –(- moet gebruiken!

$= cos^2\alpha + [\frac{1}{4}.cos^2\alpha \cancel{+ [\mathbf{1}.\mathbf{cos}(\boldsymbol{\alpha})].\frac{\sqrt{3}}{2}.\mathbf{sin}(\boldsymbol{\alpha})} + \frac{3}{4}.sin^2(\alpha)$

$+[\frac{1}{4}.cos^2\alpha \cancel{- [\mathbf{1}.\mathbf{cos}(\boldsymbol{\alpha})].\frac{\sqrt{3}}{2}.\mathbf{sin}(\boldsymbol{\alpha})} + \frac{3}{4}.sin^2(\alpha)$

➔ Merk nu op: we hebben twéé dezelfde tegengestelde termen die we mogen schrappen, ik heb ze in het vet aangeduid

$= cos^2\alpha + [\frac{1}{4}.cos^2\alpha + \frac{3}{4}.sin^2(\alpha)] + [\frac{1}{4}.cos^2\alpha + \frac{3}{4}.sin^2(\alpha)$ (nu alles mooi overschrijven

$= cos^2\alpha + [\frac{1}{4}.cos^2\alpha + \frac{1}{4}.cos^2\alpha + \frac{3}{4}.sin^2(\alpha) + \frac{3}{4}.sin^2(\alpha)$

➔ We hier gelijke termen bij elkaar gebracht zodat we ze sews kunnen optellen!

$= 1.\ cos^2\alpha + [\frac{2}{4}.cos^2\alpha + \frac{6}{4}.sin^2(\alpha)$ ➔ Hier hebben we de optelling in R gewoon uitgevoerd

➔ Ik heb hier 1 . cos alfa geschreven om iets duidelijk te maken!

$= \frac{2}{2}.\ cos^2\alpha + \frac{1}{2}.cos^2\alpha + \frac{3}{2}.sin^2(\alpha)$ ➔ We hebben de breuken vereenvoudigd, 1 = 2/2

$= \frac{3}{2}.\ cos^2\alpha + \frac{3}{2}.sin^2(\alpha)$ ➔ we hebben de optelling in R uitgevoerd

$= \frac{3}{2}\ (cos^2\alpha + \sin^2(\alpha))$ ➔ We hebben 3/2 als gemeenschappelijke factor dus kunnen we afzonderen

$= \frac{3}{2}.1$ ➔ De grondformule van de goniometrie

$= \frac{3}{2}$ (PROFICIAT! JE HEBT DE OEFENING OPGELOST)

h) $sin^2(\alpha + B) - 2\sin a.\cos B\ .\sin(a + B) + cos^2B$

➔ Ja lap, net zoals bij de vorige oefening heb je hier optellingsformules die je kan (moet) gebruik.

$[\mathbf{sin}\,\boldsymbol{a}.\mathbf{cos}\,\boldsymbol{B} + \mathbf{cos}\,\boldsymbol{B}\ .\mathbf{sin}\,\boldsymbol{a}]^2 - 2.\sin a.\cos B.[sin\,a.cos\,B + cos\,B\ .sin\,a] + cos^2B$

➔ Zie jij het ook? JA! Hier moet je het **dubbel product** weeral oplossen!

$=[\sin^2 a.\cos^2 B + 2.\sin a.\cos B + \cos^2 B\ .\sin^2 a]\ -2.\sin a.\cos B.[sin\,a.cos\,B +$

$cos\, a\ .sin\, B] + cos^2 B$

➔ Nu gaan we de haken in het roosgekleurde gedeelte distributief uitwerken…

=$[\sin^2 a . \cos^2 B + 2 . \sin a . \cos B\ . \cos B . \sin a + \cos^2 B\ . \sin^2 a]$ $-2. \sin a . \cos B . sin\, a . cos\, B +$ $(-2 . \sin a \cos B . \cos a . \sin B]$ $+ cos^2 B$

=$\sin^2 a . \cos^2 B + 2 . \sin a . \cos B . \cos B . \sin a + \cos^2 B\ . \sin^2 a]$
$-2. sin^2 a . \cos^2 B -2 . \sin a \cos B . \cos a . \sin B]$ $+ cos^2 B$ (we hebben distributief uitgewerkt)

= $\sin^2 a . \cos^2 B$ $-2. sin^2 a . \cos^2 B$ $+ 2 . \sin a . \cos B . \cos B . \sin a + \cos^2 B\ . \sin^2 a]$
$-2 . \sin a \cos B . \cos a . \sin B$ $+ cos^2 B$ (we hebben gelijksoortige termen bij elkaar gebracht)

= $-sin^2 a . \cos^2 B + cos^2 B$ $+ 2 . \sin a . \cos B . \cos B . \sin a + \cos^2 B\ . \sin^2 a]$
$-2 . \sin a \cos B . \cos a . \sin B$
(we hebben hier de aftrekking in R uitgevoerd, cos² B vanvoor gezet zodat we kunnen ontbinden in factoren sews)

= $(-sin^2 a + 1)\, cos^2 B$ $+ 2 . \sin a . \cos B . \cos B . \sin a + \cos^2 B\ . \sin^2 a]$
$-2 . \sin a \cos B . \cos a . \sin B$
(We hebben hier cos² B afgezonderd zodat we makkelijker verder kunnen rekenen)

= $(1 - sin^2 a)\, cos^2 B$ $+ 2 . \sin a . \cos B . \cos B . \sin a + \cos^2 B\ . \sin^2 a]$ $-2 . \sin a \cos B . \cos a . \sin B$
(De optelling in R is commutatief ➔ - kan je namelijk schrijven als +(-)

= $cos^2 a . cos^2 B$ $\cancel{+ \mathbf{2 . sin\, a . cos\, B . cos\, B . sin\, a}}$ $+ \cos^2 a\ . \sin^2 B]$ $\cancel{\mathbf{-2 . \sin a \cos B . \cos B . \sin a}}$
(We zien twee dingen die we kunnen schrappen (vetgedrukt), mocht je al eerder schrappen)

= $cos^2 a . cos^2 B + \cos^2 a\ . \sin^2 B]$
(We hebben hier één gemeenschappelijke term, namelijk: cos² a, die we kunnen afzonderen)

= $cos^2 a\, (cos^2 a + sin^2 B)$ (➔ We hebben hier afgezonderd)
= $cos^2 a(1)$ (grondformule van de goniometrie)
= $\underline{\boldsymbol{cos^2 a}}$ (een getal maal 1 is hetzelfde getal)
= Wees trots op jezelf de oefening is opgelost!

k) sin 7x . cos x – cos 7x . sin x
= sin (7x – x) = sin(6x) ➔ dit is letterlijk een optellingsformule

- -

(2DII) VOORBEELDOEFENINGEN 2: GONIOMETRISCHE GELIJKHEDEN BEWIJZEN

a) $\tan(45° - x) = \frac{1-\tan x}{1+\tan x}$

➔ Je hebt vier manieren om te bewijzen volgens Kevin: (1) Het RL uitwerken tot je LL uitkomt
(2) Het LL uitwerken tot je het RL uitkomt
(3) Er een vergelijking van maken
(4) (1) en (2) gecombineerd

➔ Ik kies hier voor optie (1) omdat deze het makkelijkst is.

LL = $\tan(45° - x) = \frac{\sin(45°-x)}{\cos(45°-x)}$ (definitie tangens)

➔ Hier zie je dat we al twee optellingsformules kunnen gebruiken

= $\frac{\sin 45°\ . \cos x - \cos 45° . \sin x}{\cos 45° . \cos x + \sin 45° . \sin x}$

➔ Nu gaan we alles delen door cos 45° . cos x zodat we tangens uitkomen

$= \dfrac{\frac{\sin 45°.\cos x - \cos 45°.\sin x}{\cos 45°.\cos x}}{\frac{\cos 45°.\cos x + \sin 45°.\sin x}{\cos 45°.\cos x}}$ (dit mag, wat we in de teller doen ook in de noemer!)

$= \frac{\tan 45° - \tan x}{1 + \tan 45°.\tan x}$ (als we de breuk vereenvoudigen komen we dit uit)

$= \frac{1 - \tan x}{1 + 1.\tan x} = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$ = RL (formule is bewezen!)

> Opmerking: de verbetersleutel heeft dit op een andere manier bewezen, ik heb expres een andere manier gekozen om te tonen dat er niet één specifieke manier is om iets te bewijzen. Je moet zelf creatief zijn en de – liefst makkelijkste – manier vinden om te bewijzen!

d) $\cos A = \sin B\ .\sin C - \cos B\,.\cos C$ voor een driehoek ABC

➔ LET HIER OP! Je hebt gekregen dat je een driehoek hebt, dus… A + B + C = 180°

$= \sin B\ .\sin C + (-\cos B\,.\cos C)$

➔ Ik ben aan het voorbereiden om de commutativiteit te gebruiken: - is niet commutatief
+ is wél commutatief

$= -\cos B\,.\cos C + \sin B\,.\sin C \ \ = -\cos(B - C)$

(hier heb ik de commutativiteit toegepast + we herkennen een optellingsformule

$= -\cos(B - C) = \cos\big(-(B - C)\big) = \cos(B - C)$

➔ Hier heb ik gebruik gemaakt van tegengestelde hoeken, die hebben dezelfde cosinus!

$= \cos(B - C) = \cos A$ (A + B + C = 180° ⇔ A = 180° - B – C!)

➔ De formule is bewezen!!!

b) $\tan(45° + x) - \tan(45° - x) = \frac{4 sinx \cos x}{cos^2 x - sin^2 x}$

➔ Dit is een grote bevalling, wat gaan we doen? We vertrekken beter van het LL hier!

LL = $\tan(45° + x) - \tan(45° - x) = \frac{\sin(45°+x)}{\cos(45°+x)} - \frac{\sin(45°-x)}{\cos(45°-x)}$

➔ We hebben hier de definitie tan = sin/cos gebruikt, want we willen sin en cos overhouden!

➔ Merk op: Je herkent hier nu alle vier optellingsformules in onze breuken!

$= \frac{\sin(45°+x)}{\cos(45°+x)} - \frac{\sin(45°-x)}{\cos(45°-x)} = \frac{\sin(45°).\cos x + \cos 45°\,.\sin x}{\cos 45°.\cos x - \sin 45°\,.\sin x} - \frac{\sin(45°).\cos x - \cos 45°\,.\sin x}{\cos 45°.\cos x + \sin 45°\,.\sin x}$

➔ In deze stap hebben we de formules toegepast, merk op dat we 45° kennen!

$= \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}.\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\,.\sin x}{\frac{\sqrt{2}}{2}.\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\,.\sin x} - \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}.\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\,.\sin x}{\frac{\sqrt{2}}{2}.\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\,.\sin x}$ [herinner jezelf: sin(45°) = cos(45°) = $\frac{\sqrt{2}}{2}$]

➔ Je hebt hier télkens één gemeenschappelijke term die je kan afzonderen!

$= \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}.(\cos x + \sin x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}.(\cos x - \sin x)} - \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}.(\cos x - \sin x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}.(\cos x + \sin x)}$ (we hebben hier afgezonderd)

➔ Je kan één term hier telkens schrappen omdat we een vermenigvuldiging hebben!

$= \frac{(\cos x + \sin x)}{(\cos x - \sin x)} - \frac{(\cos x - \sin x)}{(\cos x + \sin x)}$

➔ Nu zit je met de aftrekking, die je pas kan doen als je gelijke noemers hebt, dus…

$= \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x + \sin x)}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} - \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x - \sin x)}{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}$

➔ Nu zal je natuurlijk de vermenigvuldigingen die je hebt moeten uitvoeren, merk op dat we in de noemers merkwaardige producten hebben.

$= \frac{(\cos x + \sin x)^2}{cos^2 x - sin^2 x} - \frac{(\cos x - \sin x)^2}{cos^2 x - sin^2 x}$

➔ Nu zit je met twee merkwaardige producten in de tellers: het dubbel product!

$= \frac{cos^2x+2\cos x\,.\sin x+sin^2x}{cos^2x-sin^2x} - \frac{cos^2x-2\cos x\,.\sin x+sin^2x}{cos^2x-sin^2x}$ (dubbele producten uitgewerkt)>

➔ Ja lap, we zijn er nog steeds niet, maar als je goed kijkt zie je: GRONDFORMULE

$= \frac{cos^2x+sin^2x+2\cos x\,.\sin x}{cos^2x-sin^2x} - \frac{cos^2x+sin^2x-2\cos x\,.\sin x}{cos^2x-sin^2x}$

➔ Dus… Mag je nu de grondformule door het getal '1' vervangen!

$= \frac{1+2\cos x\,.\sin x}{cos^2x-sin^2x} - \frac{1-2\cos x\,.\sin x}{cos^2x-sin^2x}$

➔ Waar je hier waarschijnlijk de fout in zal gaan omdat je zo'n goede leerling bent: 2 cos x sin x is een formule van Simpson, dan moeten we die toch toepassen?

→ NEEN! Je moet het rechterlid altijd in doog houden om te kijken waarnaar je eigenlijk zoekt.

➔ Nu gaan we de aftrekking uitvoeren aangezien we zo ver mogelijk als we hebben gekund vereenvoudigen en eenzelfde noemer hebben!

$= \frac{1+2\cos x\,.\sin x-(1-2\cos x\sin x)}{cos^2x-sin^2x}$ (we hebben de aftrekking uitgevoerd)

➔ Nu zal je de haakjes moeten uitwerken

$= \frac{1+2\cos x\,.\sin x-1+2\cos x\sin x)}{cos^2x-sin^2x}$ (we hebben de haakjes uitgewerkt)

$= \frac{2\cos x\,.\sin x+2\cos x\sin x)}{cos^2x-sin^2x}$ (1 – 1 = 0!)

$= \frac{4\cos x\,.\sin x}{cos^2x-sin^2x}$ (we hebben de optelling in R uitgevoerd)

= RL (formule is bewezen!!!)

- -

(2DIII) VOORBEELDOEFENINGEN: OEFENING 3 ⇔ LIJKT OP OEFENING 4

OPGAVE: schrijf sin 3a (a = alfa, makkelijker voor mij om te typen) in een vorm waarin sin a als enige goniometrische getal voorkomt.

OPLOSSING: $\sin 3a = \sin(2a + a)$ [We willen werken naar een formule die we kennen, daarom]

$= \sin(2a).\cos(a) + \cos(2a)\,.\sin(a)$[2a, we moeten dus een verdubbelingsformule gebruiken]

$= (2\sin a\cos a)\,.\cos a + [1 - 2sin^2a].\sin a$

➔ Sinus heeft één formule (7), maar cosinus heeft er 3 (8, 9, 10), hoe weet ge welke ge het beste gebruikt?

→ Ge gebruikt best degene waarin sinus alleen voorkomt want ze vroegen in de opgave sinus en niks anders!

$= 2\sin a\cos^2 a + [1 - 2sin^2a].\sin a$

$= 2\sin a\cos^2 a + \sin a - 2\sin^3 a$ (We hebben distributief uitgewerkt)

➔ Hoe krijgge verdoeme uwen cosinus weg?

→ Denk aan de grondformule: sin² a + cos² a = 1

$= 2\sin a\,(1 - sin^2a) + \sin a - 2\sin^3 a$

$= 2\sin a - 2sin^3a + \sin a - 2\sin^3 a$

$= 3\sin a - 4sin^3a$ (we hebben de optelling in R gewoon uitgevoerd)

➔ Dit is het antwoord! Alfa als enige vorm!!

- -

(2DIV) VOORBEELDOEFENINGEN: OEFENING 6 ⇔ LIJKT OP OEFENING 5

OPGAVE: Bereken sin 2a, cos 2a, tan 2a, sec 2a als cos a = $-\frac{2}{3}$ en **a in het derde kwadrant ligt**.

OPLOSSING: Je kan oftewel direct cos 2a berekenen maar je zal sowieso je sinus moeten zoeken, gelukkig gaat dit zeer snel met de grondformule (sin² a + cos² a = 1)

(1) sin² a + cos² a = 1 ⇔ $\sin a = -\sqrt{1 - cos^2a}$

Waarom die minteken? Alfa zit in het derde kwadrant, de sinus in het derde kwadrant is negatief! NIET OVER HET HOOFD ZIEN!

$= -\sqrt{1-(-\frac{2}{3})^2}$

$= -\frac{\sqrt{5}}{3}$

Nu kunnen we direct sin 2a en cos 2a uitrekenen met de formules.

(2) sin 2a = 2 sin a . cos a = 2 . $\left(-\frac{2}{3}\right) . \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{5}}{9}$

(3) cos 2a = cos² a – sin² a = $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = -\frac{1}{9}$

Uit sin 2a en cos 2a kunnen we tan 2a makkelijk berekenen: tan = sin/cos!

(4) $\tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{\frac{4\sqrt{5}}{9}}{-\frac{1}{9}} = \frac{4\sqrt{5}}{\cancel{9}} . \left(-\frac{\cancel{9}}{1}\right) = -4\sqrt{5}$

Daarna kunnen we hieruit secans 2a berekenen, secans is namelijk 1/cos

(5) $\sec 2a = \frac{1}{\cos 2a} = \frac{1}{-\frac{1}{9}} = 1 . (-9) = -9$

➔ PROFICIAT! JE HEBT DE VRAAG OPGELOST!!!!

- -

(2DIV) VOORBEELDOEFENINGEN: OEFENING 7 ⇔ BEREKEN ZONDER ZRM SIN 22,5° en COS 22,5°

OPGAVE: Bereken zonder ZRM sin 22,5° en cos 22,5°

OPLOSSING: In deze oefening is de moeilijkheid de juiste formule zoeken, je denkt direct waarschijnlijk verdubbelings- of halveringsformule want 22,5° kennen we niet, 45° wél! Om de sinus te vinden gaan we formule (16) moeten toepassen.

$$\sin 22{,}5° = \sqrt{\frac{1-\cos(45°)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{\frac{2}{1}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2} . \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

➔ Dus, wtf heb ik hier gedaan? Ik heb de formule ingevuld, dan heb ik de waarde van cos(45) ingevuld omdat we die weten, daarna heb ik op gelijke noemers gezet zodat we de aftrekking kunnen uitvoeren, ik heb deze daarna uitgevoerd. Hierna heb ik de breuk zoveel mogelijk proberen weg te werken en de wortel ook.

cos 22,5° doe je op een analoge wijze dus doe ik deze niet voor.

- -

(2DV) VOORBEELDOEFENINGEN: OEFENING 8: VEREENVOUDIGEN

a) sin² (a + B) + sin² (a – B) + cos 2a . cos 2B

➔ Hier zie je direct dat je twéé optellingsformules moet toepassen!

= $[\sin a . \cos B + \cos a . \sin B]^2 + [\sin a . \cos B - \cos B . \sin a]^2 + \cos 2a . \cos 2B$

➔ Je ruikt het al: je moet het dubbel product opnieuw toepassen!

= $[sin^2 a . cos^2 B \cancel{+ 2 \sin a \cos B \cos a \sin B} + cos^2 a . sin^2 B] +$

$[sin^2 a . cos^2 B \cancel{- 2 \sin a \cos B \cos a \sin B} + cos^2 a . sin^2 B] + \cos 2a . \cos 2B$

➔ Je ziet nu direct dat je twee termen mag schrappen (doorgestreept), en gelukkig ook want dat bespaart ons tijd!

= $[\boldsymbol{sin^2 a . cos^2 B + cos^2 a\ sin^2 B}] + [\boldsymbol{sin^2 a . cos^2 B + cos^2 a\ sin^2 B}] + \cos 2a\ . \cos 2B$

➔ We hebben geschrapt en zien dat we nu mogen optellen…

= 2 . $[\boldsymbol{sin^2 a . cos^2 B + cos^2 a\ sin^2 B}] + \cos 2a . \cos 2B$

➔ Ja lap, hoe gaan we nu verder? We kunnen 2a en 2B al anders schrijven (verdubbelingsformule)

= 2 . $[\boldsymbol{sin^2 a . cos^2 B + cos^2 a\ sin^2 B}] + (2\cos^2 a - 1) . (2\cos^2 B - 1)$

➔ Nu we merendeels cosinussen hebben willen we eigenlijk van die sinussen af, hoe?

→ GRONDFORMULE

= 2 . $[\boldsymbol{(1 - cos^2 a) . cos^2 B + cos^2 a\ (1 - cos^2 B)}] + \boldsymbol{(2cos^2 a - 1)(2cos^2 B - 1)}$

➔ Ik weet dat je het jammer genoeg niet zou willen horen, maar we moeten alles, letterlijk alles distributief uitwerken. Om de orde erin te houden werk ik eerst voor de plusteken distributief uit en daarna na de minteken. Onthou de basisregel: eerst kleine haakjes uitwerken dan grote!

= (1) $2 \,.\left[(\mathbf{1} - \boldsymbol{cos^2 a})\,.\,\boldsymbol{cos^2 B} + \boldsymbol{cos^2 a}\,(\mathbf{1} - \boldsymbol{cos^2 B})\right]$

= (1) $2 \,.\left[(\boldsymbol{cos^2 B} - \boldsymbol{cos^2 a}\,\boldsymbol{cos^2 B} + \boldsymbol{cos^2 a}\ - \boldsymbol{cos^2 a}\,\boldsymbol{cos^2 B})\right]$

= (1) $\left[\mathbf{2}\boldsymbol{cos^2 B} - \mathbf{2}\boldsymbol{cos^2 a}\,\boldsymbol{cos^2 B} + \mathbf{2}\boldsymbol{cos^2 a}\ - \mathbf{2}\boldsymbol{cos^2 a}\,\boldsymbol{cos^2 B}\right]$

= (1) $\left[\mathbf{2}\boldsymbol{cos^2 B} - \mathbf{4}\boldsymbol{cos^2 a}\,\boldsymbol{cos^2 B} + \mathbf{2}\boldsymbol{cos^2 a}\right]$

$= (\mathbf{2})\ \left(\mathbf{2}\boldsymbol{cos^2 a} - \mathbf{1}\right)\left(\mathbf{2}\boldsymbol{cos^2 B} - \mathbf{1}\right)$

$= (2)\ 2cos^2 a\,.\,2\,cos^2 B - 2\,cos^2 a - 2cos^2 B + 1$

$= (2)\ 4cos^2 a\,cos^2 B - 2\,cos^2 a - 2cos^2 B + 1$

➔ Alles is distributief uitgewerkt, ik ga (1) en (2) terug invullen in onze gelijkheid!

= (1)$\left[\mathbf{2}\boldsymbol{cos^2 B}\cancel{- \mathbf{4}\boldsymbol{cos^2 a\,cos^2 B}} + \mathbf{2}\boldsymbol{cos^2 a}\right]\cancel{+ 4cos^2 a\,cos^2 B} - 2\,cos^2 a - 2cos^2 B + 1$

➔ Ik hoop dat je hier ook ziet dat je twee termen mag schrappen!

= $\cancel{\left[\mathbf{2}\boldsymbol{cos^2 B} + \mathbf{2}\boldsymbol{cos^2 a}\right] - 2\,cos^2 a - 2cos^2 B} + 1$

➔ Hier zie je nu dat je eigenlijk alles behalve de ‘1’ mag schrappen!

= 1 (proficiat! Je hebt zo goed mogelijk vereenvoudigd!)

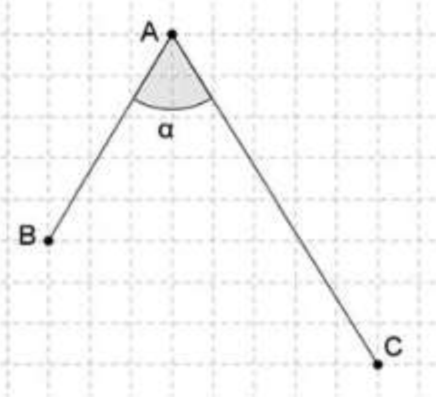
b) $cos^4 x - sin^4 x = (cos^2 x - sin^2 x)\ (cos^2 x + sin^2 x)$ [ontbinding in factoren]

$= cos^2 x - sin^2 x\ .\ 1$ [grondformule]

$= cos^2 x - sin^2 x = cos(2x)$ [verdubbelingsformule]

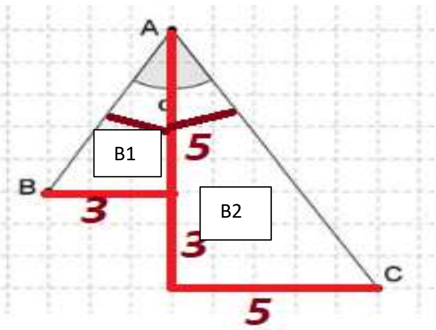
- -

(2DVI) VOORBEELDOEFENINGEN: OEFENING 14 – TANGENS EXACT BEREKENEN ADHV FIGUUR



Waar de meesten nu in fout gaan: ze verbinden punt B met punt C en gaan ervanuit dat er een hoek van 90° is, dan mag je TOA toch gebruiken? Ja dat is waar, maar er is géén 100% rechte hoek, dus mag je TOA niet gebruiken. What the fuck moet je dan wel doen?

→ Kijk goed naar de driehoek: je kan deze wél verdelen in 2 driehoeken waarvan je zeker kan zeggen dat ze beiden een rechte hoek van 90° hebben



Dit is 100% juist, want over deze twee driehoeken kan je met 100% zekerheid zeggen dat ze een rechte hoek hebben! We hebben onze hoek a ook ingedeeld in twee andere hoeken en noemen een hoek B1 en de andere B2

Dus… $\tan a = \tan(B1 + B2)$ ➔ Huh? Waarom? Omdat B1 + B2 = alfa (zie figuur!)

$\tan(B1 + B2) = \frac{\tan B1 + \tan B2}{1 - \tan B1\,.\tan B2}$ ➔ Dit is letterlijk formule 14 ingevuld!

Maar B’s kennen we niet? Wat we niet kennen kunnen we altijd uitrekenen!

➔ tan (B1) = $\frac{3}{5}$

➔ tan (B2) = $\frac{5}{8}$

Dit is letterlijk de formule TOA toegepast!

➔➔ Nu kunnen we invullen: tan a $= \tan(B1 + B2) = \frac{\frac{3}{5}+\frac{5}{8}}{1-\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{8}} = \frac{49}{25}$ (het antwoord is gevonden!)

- -

(2DVII) VOORBEELDOEFENINGEN: OEFENING 15 (FORMULES VAN SIMPSON TOEPASSEN)
OPGAVE: Schrijf als een som…

a) sin x . sin 3x ➔ Deze oefening is (bijna) letterlijk de formule van Simpson toepassen

➔ Formule (19) is een formule met 2 sinussen: 2 sin α . sin β = cos(α – β) - cos(α + β)

➔ Maar wat met die – 2 – ervoor? Kunnen we simpeler oplossen dan je denkt!

sin x . sin 3x = $\frac{1}{2}\,.\,(2\sin x\,.\sin 3x)$

➔ Mag dit zomaar? Ja, ½ . 2 wordt toch 1, dus dat is dezelfde uitspraak!

sin x . sin 3x = $\frac{1}{2}\,.\,[\cos(x-3x)-\cos(x+3x)]$ = $\frac{1}{2}\,.\,[\cos(-2x)-\cos(4x)]$

➔ Hier heb ik formule (19) letterlijk ingevuld en gerekend in R (rekenen in R moet je nu wel kunnen na 5 jaar wiskunde en 15 pagina's samenvatting).

$\frac{1}{2}\,.\,[\cos(-2x)-\cos(4x)] = \frac{1}{2}[\cos(2x)-\cos(4x)]$

➔ Waarom is die minteken verdwenen? Verwante hoeken! Tegengestelde hoeken hebben dezelfde cosinus (zie hoofdstuk 1).

$\frac{1}{2}[\cos(2x)-\cos(4x)] = \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{2}\cos(4x)$

➔ Hier heb ik distributief uitgewerkt en dit is eveneens het antwoord, dit is een som!

b) sin 9x . sin 5x . sin x

➔ Hier heb je nu zo 3 dingen én géén 2, mag je Simpson nog steeds gebruiken? JA!

→ Wél een kleine opmerking: je neemt maximum 2 dingen bij elkaar!

sin 9x . sin 5x . sin x = $\frac{1}{2}(2\,.\sin 9x\,.\sin 5x)\,.\sin x$

➔ Opnieuw hier: ½ . 2 wordt 1 dus dat blijft hetzelfde!

$\frac{1}{2}(2\,.\sin 9x\,.\sin 5x)\,.\sin x = \frac{1}{2}\,.\,[\cos(9x-5x)-\cos(9x+5x)]\,.\sin x$

➔ Ik heb hier formule (19) letterlijk ingevuld, vergeet je sinus x niet over te nemen!

$\frac{1}{2}\,.\,[\cos(9x-5x)-\cos(9x+5x)]\,.\sin x = \frac{1}{2}\,.\,[\cos(4x)-\cos(14x)]\,.\sin x$

➔ Hier heb ik gewoon gerekend in R (+ en -), moet je kunnen.

➔➔ Wat doe je nu? De ½ binnen de haakjes brengen!

$\left[\frac{1}{2}\cos(4x)-\frac{1}{2}\cos(14x)\right]\,.\sin x$

➔ Je kan de sin x nog distributief binnen de haakjes brengen!

$\left[\frac{1}{2}\cos(4x)\,.\sin x-\frac{1}{2}\cos(14x).\sin x\right]$

➔ Nu denk je zeker: wtf? Maar laten we eerst de commutativiteit in R gebruiken en dan teruggaan naar ons formuleblad.

$\left[\frac{1}{2}\cos(4x)\,.\sin x-\frac{1}{2}\cos(14x).\sin x\right] = \left[\frac{1}{2}\sin x\,.\cos 4x-\frac{1}{2}\sin(x).\cos 14x\right]$

➔ JAAA KIJK NU NAAR JE FORMULEBLAD: we kunnen formule 17 twéé keren toepassen!

➔➔ Om de ordelijkheid te bewaren pas ik formule 17 twee keren apart toe, als ik de uitkomsten heb breng ik ze in onze gelijkheid.

ROOD: $\frac{1}{2}\sin x\,.\cos 4x = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.(2.\sin x\,.\cos 4x) = \frac{1}{4}\,.\,(2\sin x\cos 4x)$

$= \frac{1}{4}.[\sin(-3x) + \sin(5x)]$

➔ Hier heb ik gewoon de formule van Simpson toegepast

GROEN: $\frac{1}{2}\sin(x).\cos 14x = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.$(2 . sin x . cos 14x) $= \frac{1}{4}.(2\sin x \cos 14x)$

$= \frac{1}{4}.\sin(x - 14x) + \sin(x + 14x) = \frac{1}{4}.[\sin(-13x) + \sin(15x)]$

Nu kunnen we terug invullen in onze oorspronkelijke gelijkheid:

$\left[\frac{1}{2}\sin x . \cos 4x - \frac{1}{2}\sin(x).\cos 14x\right]$ = $[\frac{1}{4}.[\sin(-3x) + \sin(5x)] - \frac{1}{4}.[\sin(-13x) + \sin(15x)]\ ]$

= $[\frac{1}{4}.\sin(-3x) + \frac{1}{4}.\ \sin(5x)] - [\frac{1}{4}.[\sin(-13x) + \sin(15x)]\ ]$ (haakjes aan linkerkant weggewerkt)

= $[\frac{1}{4}.(-\sin(3x)) + \frac{1}{4}.\ \sin(5x) - \frac{1}{4}.[(-\sin(13x)) + \sin(15x)]\ ]$ (tegengestelde hoeken!)

= $[\frac{1}{4}.(-\sin(3x)) + \frac{1}{4}.\ \sin(5x) - \frac{1}{4}.[(-\sin(13x)) + \sin(15x)]\ ]$

➔ Tot nu toe heb ik ingevuld en gerekend in R

= $-\frac{1}{4}.\sin(3x)) + \frac{1}{4}.\ \sin(5x) + \frac{1}{4}.\sin(13x) - \frac{1}{4}\sin(15x)$ (haakjesregel toegepast aan rechterkant)

➔ Praktisch gezien is dit al een wiskundig juist antwoord, maar als we het een beetje properder schrijven…

$\frac{1}{4}.\ \sin(5x) + \frac{1}{4}.\sin(13x) - \frac{1}{4}.\sin(3x)) - \frac{1}{4}\sin(15x)$

➔ Ennn de oefening is opgelost!

- -

(2DVII) VOORBEELDOEFENINGEN: OEFENING 16 (VEREENVOUDIGEN)

a) cos 15° . cos 30° . cos 75°

➔ Hier zie je al dat je de formules van Simpson gaat moeten gebruiken maar je moet nog beslissen welken je het beste samenneemt.

➔➔ De eerste en derde neem je het beste samen want deze zullen getallen vormen die je kent!

$\cos 15° . \cos 30° . \cos 75° = \frac{1}{2}.(2\cos 15° . \cos 75°) . \cos 30°$

➔ Hier ben ik aan het voorbereiden om een formule van Simpson te gebruiken

$= \frac{1}{2}.[\cos(15° - 75°) + \cos(15° + 75°)] . \cos 30°$

➔ In deze tussenstap heb ik formule (18) letterlijk toegepast.

$= \frac{1}{2}.[\cos(-60°) + \cos 90°] . \cos 30°$

➔ Hier heb ik de aftrekking en optelling uitgevoerd

$= [\frac{1}{2}.\cos 60° + \frac{1}{2}.\cos 90°] . \cos 30°$

➔ Distributief uitgewerkt + tegengestelde hoeken hebben dezelfde cosinus!!!

$= [\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.0] . \frac{\sqrt{3}}{2}$

➔ De getallen die we kennen heb ik hier ingevuld

$= \left[\frac{1}{4} + 0\right].\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{8}}$

➔ Hier heb ik gerekend en uiteindelijk kwam ik het vetgedrukte (juiste) resultaat uit!

b) $4 . \sin\frac{x}{3} . \sin\frac{\pi + x}{3} . \sin\frac{\pi - x}{3}$

➔ Hier ga je net zoals bij de vorige oefening gebruik moeten maken van de formules van Simpson, echter is de vraag: welke 2 neem ik bij elkaar?

➔➔ Het antwoord is: je neemt de 2de en 3de bij elkaar omdat er een + en – staat, dus zal er sowieso iets wegvallen als je aan het uitrekenen bent!

$4 . \sin\frac{x}{3} . \sin\frac{\pi + x}{3} . \sin\frac{\pi - x}{3} = [2 . \sin\frac{\pi + x}{3} . \sin\frac{\pi - x}{3}] . 2\sin\frac{x}{3}$ (Niet vergeten: 2 . 2 wordt 4!)

$= \left[\cos(\frac{\pi + x}{3} - \frac{\pi - x}{3}\right) - \cos(\frac{\pi + x}{3} + \frac{\pi - x}{3})]] . 2\sin\frac{x}{3}$

➔ Hier heb ik de formule van Simpson letterlijk toegepast.

➔➔ Je hebt gelijke noemers dus je kan weer rekenen in R!

$= \left[\cos(\frac{\pi + x - (\pi - x)}{3}\right) - \cos(\frac{\pi + x + \pi - x}{3})]] \,.\, 2\sin\frac{x}{3}$

$= \left[\cos(\frac{\pi + x - \pi + x}{3}\right) - \cos(\frac{\pi + x + \pi - x}{3})]] \,.\, 2\sin\frac{x}{3}$ (ik zei toch dat we zouden kunnen schrappen 😉)

➔ Hier heb ik wat gerekend in R, nu mooi overschrijven…

$= \left[\cos(\frac{+x+x}{3}\right) - \cos(\frac{\pi + \pi}{3})]] \,.\, 2\sin\frac{x}{3} = = [2.\left[\cos(\frac{2x}{3}\right) - \cos(\frac{2\pi}{3})]] \,.\, 2\sin\frac{x}{3}$

➔ Hier opnieuw wat gerekend, maar nu zit je vast! Je zou denken dat je geen hoekgroottes meer kent, maar 2pi/3 = 120°! Dit kan je herleiden naar het eerste kwadrant om een hoekgrootte te verkrijgen die je kent!

$$\cos(\frac{2\pi}{3}) = \cos\left(\frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$= \left[\cos(\frac{2x}{3}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)]] \,.\, 2\sin\frac{x}{3}$

$= \left[\cos\left(\frac{2x}{3}\right) + \frac{1}{2}\right].\, 2\sin\frac{x}{3}$

➔ Nu kunnen we de sinus binnen haakjes brengen!

$= \left[2\cos\left(\frac{2x}{3}\right).\sin\frac{x}{3} + \frac{1}{2}.\, 2\sin\frac{x}{3}\right]$

➔ Je riekt het al: formule van Simpson sews, maar eerst beter een klein detailtje vereenvoudigen (2 en ½)

$= \left[2\cos\left(\frac{2x}{3}\right).\sin\frac{x}{3} + \sin\frac{x}{3}\right]$

➔ We hebben geen formule cosinus . sinus, wél sinus . cosinus, gelukkig bestaat de commutativiteit zodat we die twee dingen kunnen omwisselen!

$= \left[2\sin\left(\frac{x}{3}\right).\cos\frac{2x}{3} + \sin\frac{x}{3}\right]$

➔ NU kunnen we formule 17 toepassen

$= \left[\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{2x}{3}\right) + \sin\left(\frac{x}{3} + \frac{2x}{3}\right) + \sin\frac{x}{3}\right]$

➔ Nu gewoon rekenen in R en we komen tot de oplossing!

$= \left[\sin\left(-\frac{x}{3}\right) + \sin(x) + \sin\frac{x}{3}\right]$

➔ Je moet opnieuw de formules van verwante (hier: tegengestelde) hoeken gebruiken!

$= \left[\cancel{-\sin\left(\frac{x}{3}\right)} + \sin(x) \cancel{+ \sin\frac{x}{3}}\right]$

➔ Je ziet hier dat je twéé dingen mag schrappen (rekenen in R)

= sin(x) ➔ DIT IS JE ANTWOORD!

o) $\frac{\sin 12x - \sin 6x}{\cos 12x + \cos 6x}$

➔ Als je kijkt naar je formuleblad zie je dat je in de teller en noemer te maken hebt met twéé verschillende formules van Simpson van de tweede vorm, namelijk (21) in de teller en (22) in de noemer, dus ga je ze nu letterlijk toepassen!

$$\frac{\sin 12x - \sin 6x}{\cos 12x + \cos 6x} = \frac{\cancel{2\cos\left(\frac{12x}{2} + \frac{6x}{2}\right)}.\sin(\frac{12x}{2} - \frac{6x}{2})}{\cancel{2\cos\left(\frac{12x}{2} + \frac{6x}{2}\right)}.\cos(\frac{12x}{2} - \frac{6x}{2})}$$

➔ Je ziet hier direct dat je twéé termen mag schrappen omdat het dezelfde zijn!

$$= \frac{.\sin(\frac{12x}{2} - \frac{6x}{2})}{\cos(\frac{12x}{2} - \frac{6x}{2})} = \frac{.\sin(\frac{6x}{2})}{\cos(\frac{6x}{2})} = \frac{.\sin(3x)}{\cos(3x)}$$

➔ Hier heb ik gewoon gerekend, de breuk vereenvoudigd.

= tan(3x) ➔ Aahja want sin/cos = tan!

➔ DIT WAS DE OPLOSSING!

Veel succes op de toets iedereen!!! Jullie kunnen het!
