Posudok oponenta na diplomovú prácu

Farbenia grafov s obmedzeniami do vzdialenosti dva

Bc. Jaroslav Petrucha

Oponent: Karina Chudá

Pojem $L(2,1)$-farbenia grafu bol predstavený v článku J. R. Griggs and R. K. Yeh, *Labeling graphs with a Condition at Distance 2*, SIAM Journal on Discrete Mathematics **5** (1992), 586-595. v súvislosti s problémom priradovania frekvencií. $L(2,1)$-farbenie grafu G je priradenie nezáporných celých čísel vrcholom grafu tak, že susedné vrcholy dostanú hodnoty s rozdielom aspoň 2 a vrcholy so spoločným susedom dostanú hodntoty s rozdielom aspoň 1, k-$L(2,1)$-farbenie grafu G pre nezáporné celé číslo k je $L(2,1)$-farbenie grafu G, pri ktorom sú použité iba farby neprevyšujúce k, a rozhodovacia verzia problému $L(2,1)$-farbenia pre daný graf G a dané nezáporné celé číslo k znamená rozhodnúť, či existuje k-$L(2,1)$-farbenie grafu G. Pojem $L(2,1)$-farbenia bol zovšeobecnený na pojem $L(p,q)$-farbenia pre nezáporné celé čísla p a q, pričom pre hodnoty priradené susedným vrcholom sa namiesto rozdielu aspoň 2 požaduje rozdiel aspoň p a pre hodnoty priradené vrcholom so spoločným susedom sa namiesto rozdielu aspoň 1 požaduje rozdiel aspoň q. Niektoré zdroje používajú namiesto p a q iné označenie, častý je pojem $L(h,k)$-farbenie. Prehľad o $L(p,q)$-farbeniach sa dá nájst napríklad v článku T. Calamoneri, *The $L(h,k)$-Labelling Problem: An Updated Survey and Annotated Bibliography*, The Computer Journal **54** (2011), no. 8, 1344-1371..

Hoci je rozhodovacia verzia problému $L(2,1)$-farbenia pre daný graf G a dané nezáporné celé číslo $k \leq 3$ polynomiálna, pre $k \geq 4$ ide vo všeobecnosti NP úplný problém. Pre $k = 4$ existuje algoritmus rozhodujúci problém $L(2,1)$-farbenia s časovou zložitosťou $O(1,3006^n)$. Pre $k \geq 5$ bol prvý algoritmus rozhodujúci problém $L(2,1)$-farbenia prezentovaný v článku D. Kráľ, *Channel assignment problem with variable weights*, SIAM Journal on Discrete Mathematics **20** (2006), 690-704. s časovou zložitosťou $O(4^n)$, neskôr bol vylepšený na $O(3,8730^n)$, následne na $O^*(3,2361^n)$ a v článku K. Junosza-Szaniawski, J. Kratochvíl, M. Liedlo, P. Rossmanith, and P. Rzążewski, *Fast Exact Algorithm for $L(2,1)$-Labeling of Graphs*, Theoretical Computer Science **505** (2013), 42-54. na súčasných $O^*(2,6488^n)$.

Z posledného článku vychádzal aj autor diplomovej práce. Pomocou algoritmu uvedeného v článku spolu s uplatnením ďalších techník vytvoril pre špeciálne triedy grafov algoritmy s menšou časovou zložitosťou, konkrétne pre planárne grafy s časovou zložitosťou $O^*(2,2^{n+o(n)})$ a pre vyvážene rozdeliteľné grafy s časovou zložitosťou $O^*(2,613^n)$.

Cieľom diplomovej práce bolo skúmať algoritmické problémy súvisiace s farbeniami grafov v situáciách, kedy sú predpísané minimálne rozdiely farieb nielen na susedných vrcholoch, ale taktiež vo vzdialenosti 2, a pokúsiť sa využiť výsledky o špeciálnych typoch grafov na zlepšenie algoritmu na $L(2,1)$-farbenie všeobecných grafov.

V časti 1 autor zadefinoval základné pojmy, poskytol stručný prehľad známych výsledkov, rozobral algoritmus rozhodujúci problém $L(2,1)$-farbenia pre stromy v polynomiálnomm čase a algoritmus rozhodujúci problém $L(2,1)$-farbenia pre všeobecné grafy s momentálne najmenšou časovou zložitostou $O^*(2,6488^n)$ - tento algoritmus v skutočnosti vráti najmenšie k, pre ktoré existuje $L(2,1)$-farbenie grafu.

V časti 2 sa autor zaoberal rozdelením grafu na vhodné podgrafy a použitím tohto na rozdelenie problému $L(2,1)$-farbenia pre pôvodný graf na podproblémy $L(2,1)$-farbenia pre spomínané vhodné podgrafy. Ako užitocné sa ukázalo rozdelenie grafu hranovým separátorom, prípadne špeciálnym hranovým separátorom - mostom spĺňajúcim dodatočnú podmienku. Skúmanie mostu spĺňajúceho dodatočnú podmienku viedlo k definícii triedy takzvaných chlpatých 2-hranovo súvislých grafov. Autor uviedol postup, ako prerobiť ľubovoľný algoritmus na doplnenie $L(2,1)$-farbenia chlpatých 2-hranovo súvislých grafov na algoritmus na rozhodovanie problému $L(2,1)$-farbenia pre všeobecné grafy, a pre $k \geq 12$ ukázal, že ak je časová zložitosť pôvodného algritmu $O^*(2,5^n)$ alebo väčšia, prerobením na nový algoritmus zostane zachovaná.

V časti 3 autor použil rozdelenie grafov zo špeciálnych tried grafov vrcholovým separátorom na podrafy na rozdelenie problému $L(2,1)$-farbenia pre pôvodný graf na podproblémy $L(2,1)$-farbenia pre tieto podgrafy spolu so spomínaným algoritmom s časovou zložitostou $O^*(2,6488^n)$, čo viedlo pre tieto špeciálne triedy k algoritmom, ktoré vrátia najmenšie k, pre ktoré existuje $L(2,1)$-farbenie grafu, s nižšou časovou zložitostou. Uvedený algoritmus pre planárne grafy má časovú zložitosť $O^*(2,2^{n+o(n)})$ a uvedený algoritmus pre vyvážene rozdeliteľné grafy má časovú zložisoť $O^*(2,613^n)$.

V časti 4 sa autor zaoberal experimentom na 2-hranovo súvislých grafov. Skúmal na nich vlastnosť kľúčovú v pôvodnom algoritme s časovou zložitostou $O^*(2,6488^n)$ ako aj v ďalších algoritmoch z neho odvodených alebo ho používajúcich. Autor popísal konštrukciu všetkých 2-hranovo súvislých grafov a jej šesť vylepšení tak, aby boli generované iba relevantné grafy a aby nebolo generovaných príliš veľa izomorfných grafov. Na vygenerovaných grafoch skúmal výskyt spomínanej kľúčovej vlastnosti.

Práca je napísaná v slovenskom jazyku, zo štylistického hľadiska je kvalitná a dobre čitateľná s minimom gramatických chýb - všimla som si 2.

Práca je písaná značne ležérne. Často sú vynechané podstatné informácie, ktoré sa na základe kontextu a ďalšieho narábania s objektami dajú domyslieť, ale takéto vynechávanie by bolo na hranici aj v článku, nieto ešte v diplomovej práci.

Autor pri rozbore východiskového algoritmu píše "Graf si rozdelíme na niekoľko podgrafov G_1, G_2, ... G_q tak, aby s vopred zvoleným k platilo:" (strana 9), za čím nasledujú podmienky kladené na mohutnosti vrcholových množín podgrafov. I keď na začiatku práce prehlasuje, že "Pokiaľ nebude povedané inak, grafy spomínané v tejto práci budú neorientované, súvislé a jednoduché, bez slučiek a násobných hrán." (strana 3), na tomto mieste by sa zišlo súvislosť podgrafov zdôrazniť. Prvým dôvodom je, že ich súvislosť je pre algoritmus a ohraničenie jeho časovej zložitosti kľúčová. Druhým dôvodom je, že súvislosť podgrafov vôbec nie je samozrejmá - zatiaľ čo podmienky kladené na mohutnosti vrcholových množín podgrafov by sa dali splniť triviálne, spolu s podmienkou súvislosti podgrafov už vyžadujú dôkaz, že takéto rozdelenie existuje. Tento dôkaz poskytli autori algoritmu vo svojom článku, v diplomovej práci by bolo žiadané aspoň spomenúť, že sa dá ukázať, že takéto rozdelenie je možné.

Ďalším príznakom ležérnosti je nerozlišovanie pojmov väčší a väčší rovný, konkrétne autor tvrdí, že "Bez ujmy na všeobecnosti má množina C viac susedov v množine A, než v množine B" (strana 31), správne by však bolo, že má množnina C v B má nanajvýš toľko susedov, ako v množine A, poprípade nerozlišovanie pojmov aspoň jeden, práve jeden, nanajvýš jeden, čo vedenie k nepresnostiam v definícii "Graf G budeme nazývať chlpatý 2-hranovo súvislý, ak je súvislý a pre každú mostovú hranu $e \in E(G)$ platí, že jeden z komponentov súvislosti grafu $G - e$ obsahuje jeden vrchol." (strana 18).

V algoritme autor požaduje "Pre každú hranu e_i a každý spôsob ofarbenia hrany e_i zo zoznamu Z_i spusti algoritmus $\mathcal{B}$ na G_v." (strana 23), zatiaľ čo by bolo potrebné, aby boli involované všetky hrany e_i súčasne.

Opakujúcou sa nepresnosťou je nerozlišovanie, či sa používa komponent súvislosti, ktorý vznikol po odstránení rezu, alebo tento komponent súvislosti v zjednotení s rezom, konkrétne "Akceptuj, ak pre niektoré ohodnotenie vrcholov u, w algoritmus Junosza-Szaniawski akceptoval na oboch komponentoch grafu $G - e$ zároveň." (strana 22) nestačí, treba, aby akceptoval súčasne na prvom komponente zjednotenom s hranou uw a na druhom komponente zjednotenom s hranou uw, podobne by vo vyjadreniach "Oba vrcholy patria do toho istého komponentu G_i:" (strana 17), "Vrchol u patrí do komponentu G_i, vrchol v do komponentu G_j, $i \neq j$:" (strana 17) mal byť namiesto výrazu G_i výraz $G_i - S_V$ a namiesto výrazu G_j výraz $G_j - S_V$.

Vo vete "Keďže najmenším súvislým grafom je strom, ďalej sa pri hornom odhade hodnoty $pp(k)$ obmedzíme práve na stromy." (strana 11) by malo byť najmenším súvislým grafom na n vrcholoch je strom na n vrcholoch, čo by zdôvodnovalo zúženie na stromy - že je najmenším súvislým grafom stom K_1 pri zdôvodnení nepomôže.

Najmenej závažným prípadom ležérnosti sú nepresné odhady, v "Ak $k \geq 2n$, akceptuj." (strana 22) by namiesto $2n$ stačilo $2n-2$, podobne by v "Ďalej však dokážeme, že všetky vrcholy množiny S vieme triviálne ofarbiť farbami veľkosti nanajvýš $3n$." (strana 15), "Ak $k \geq 3n$, tak je inštancia riešiteľná." (strana 15) namiesto $3n$ stačilo $3n - 1$. Časti, ktorých sa tieto nepresnosti týkajú, sú rovnako správne, ako by boli s presnejšími hodnotami, preto by sa dalo s nepresnosťami súhlasiť, ak by sa používali v ďalších výpočtoch a zjednodušenie by malo význam, takto sa javia byť iba prejavom nedbanlivosti.

Nakoniec, keďže autor tvrdí, že "Jedným zo zovšeobecnení farbenia grafu je $L(2,1)$-farbenie grafu, v ktorom vrcholom priradzujeme prirodzené čísla." (strana 1) bolo by vhodné použiť termín regulárne vrcholové farbenie grafu, pretože to je presne to farbenie grafu, ktoré zovšeobecňuje.

Autor v práci prezentuje relevantnú odbornú literatúru. Identifikuje podstatné časti rýchleho algoritmu, reprezentáciu farbenia a hlavne vhodné rozdelenie problému na podproblémy, ktoré potom používa aj v nových algoritmoch. Ďalšou autorovou technikou je použitie vhodného separátora grafu na rozdelenie grafu na podgrafy a tým aj rozdelenie problému na podproblémy. Nachádza špeciálne triedy grafov, planárne grafy a vyvážene rozdeliteľné grafy, ktoré majú vhodné separátory. Pre tieto triedy potom využíva spomínané techniky na konštrukciu rýchlejšieho algoritmu. Obzvlášť oceňujem, že sa autor neuspokojí s prvým rýchlejším algoritmom, ale optimalizuje jeho parameter tak, aby bol algoritmus čo najrýchlejší.

Cieľ diplomovej práce považujem za splnený. Autor preukázal schopnosť práce s odbornou literatúrou, využitia získaných poznatkov, aj vytvárania nových techník na riešenie problémov z oblasti informatiky. Podľa môjho názoru spĺňa predložená práca nároky na diplomovú prácu. Preto navrhujem predloženú diplomovú prácu pripustiť k obhajobe a po úspešnom zvládnutí obhajoby ohodnotiť diplomovú prácu známkou A.

V rámci obhajoby prosím autora o zodpovedanie nasledujúcich otázok:

- Na strane 24 píšete "Ostalo niekoľko hodnôt k, pre ktoré by náš algoritmus nedosahoval dobrú časovú zložitosť. Grafy, ktoré by dosahovali veľmi zlú časovú zložitosť, sú však veľmi špeciálne.". Mohli by ste tieto grafy nejako popísať, ukázať nejakú ich špecifickú vlastnosť?
- Na strane 35 píšete "V každom súvislom grafe H (s aspoň dvoma vrcholmi) existuje vrchol u taký, že graf $H - u$ je súvislý.". Mohli by ste toto tvrdenie dokázať?
- Na strane 41 píšete "Cesta P_w s hranou uv tvorí H-cestu, ak $w \neq u$, alebo H-kružnicu, ak $w = u$.". Keďze $w, u \in V(G) - V(H)$, tak $w, u \notin V(H)$, preto P_w s hranou uv netvorí ani H-cestu, ani H-kružnicu. Mohli by ste opraviť predposledný odsek dôkazu?
- Na strane 48 píšete "Polynóm p má tri rôzne korene, z ktorých najväčší má hodnotu zhruba 2,5944.". Mohli by ste uviesť korene p a porovnať ich?

Negramatické preklepy:

- strana 21, odsek 6, riadok 4: "$G - u$" má byť "$T - u$"
- strana 27, odsek 2, riadok 2: "H_i" má byť "S_i"
- strana 33, odsek 4, riadky 1-2: "zlepšujeme" a "zhoršujeme" má byť vymenené
- strana 42, odsek 9, riadok 1: "$f \in E(H - e)$" má byť "$f \in E(H' - e)$"

Dňa 06.06.2018

Karina Chudá