Ecole Supérieure en Sciences et Technologies
de l'Informatique et du Numérique

1ère année Classe Préparatoire — **Année: 2021/2022**
Module: Analyse 1 — **Semestre:1**

Série de TD N°1
Chapitre 1: Nombres Réels

Exercice 1.

1. Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
2. Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sqrt{N}$ est rationnel si et seulement si N est un carré parfait (de la forme m^2 où $m \in \mathbb{N}$).

Exercice 2.
Déterminer (s'ils existent) les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants

$A_1 = [0,1] \cap \mathbb{Q}, \quad A_2 = [6,47[\cup \{2\} \cup [100,+\infty[, \quad A_3 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 1 \leq 0\}$

$A_4 = \{x \in \mathbb{R}, e^x < \frac{1}{2}\}; \quad A_5 = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 7\}, \quad A_6 = \{x \in \mathbb{R}, \frac{1}{2} \leq \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}\}$

$A_7 = \{\sin x, \quad x \in]0,\pi[\}; A_8 = \{\frac{x+1}{x+2}, \quad x \in \mathbb{R}, x \geq 3\} \quad A_9 = \{(-1)^n + \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}^*\}.$

Exercice 3.
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On pose

$$(-A) = \{-x \quad /x \in A\}$$

Montrer que
1. Si A est majorée, $(-A)$ est minorée et on a : $\inf(-A) = -\sup(A)$.
2. Si A est minorée, $(-A)$ est majorée et on a: $\sup(-A) = -\inf(A)$.

Exercice 4.
Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.
Montrer que
1. Si $A \subset B$ alors $\sup(A) \leq \sup(B)$ et $\inf(A) \geq \inf(B)$.
2. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ et $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.
3. Si $A \cap B \neq \emptyset$ alors $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$ et $\inf(A \cap B) \geq \max(\inf A, \inf B)$.
4. On pose $A + B = \{a + b : a \in A \quad et \quad b \in B\}$ alors $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ et $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$

Exercice 5.

Soient les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants

$$A_1 = [\sqrt{3}, 4] \cap \mathbb{Q}; \quad A_2 = \{x \in \mathbb{R}, \exists p \in \mathbb{N}^* \quad \text{tel que} \quad x = \frac{\sqrt{2}}{p}\}$$

$$A_3 = \left\{ \frac{2n + (-1)^n}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

1. Montrer que A_1, A_2 et A_3 sont bornés.
2. Déterminer la borne supérieure, la borne inférieure, le minimum, le maximum, s'ils existent. Justifier votre réponse.

Exercice 6.

1. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, montrer que
a) $|x + y| \leq |x| + |y|$ b) $||x| - |y|| \leq |x - y|$
c) $\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$

2. Pour $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$|x_1 + x_2 + ... + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|.$$

3. Montrer que si $x \in \mathbb{R} \quad et \quad |x| \leq \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$ alors $x = 0$.

Exercice 7.

Soit E la fonction partie entière sur $\mathbb{R}$.
1. Calculer $E(2), E(2,01), E(1,99), E(-7,5), E(-\sqrt{2}), E(-2\pi)$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z} \quad E(x + n) = E(x) + n$.
3. Montrer que pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a
   i) $x \leq y \Rightarrow E(x) \leq E(y)$.
   ii) $E(x + y) - E(x) - E(y) \in \{0, 1\}$.
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad E(\frac{E(nx)}{n}) = E(x)$.

Exercice 8.

On définit le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ suivant

$$A = \{E(x) + E(\frac{1}{x}), \quad x \in \mathbb{R}_+^*\}.$$

1. Calculer $E(x) + E(\frac{1}{x})$ pour $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1,4$.
2. Montrer que $\forall x \in]0, 1]$: $E(x) + E(\frac{1}{x}) \geq 1$.
3. Montrer que A est minoré.
4. Montrer que A n'est pas majoré.
5. Déterminer $\sup A; \inf A; \max A; \min A$ s'ils existent. Justifier.