Modélisation d'un programme linéaire (PL)

Introduction : La programmation linéaire est un problème d'optimisation mathématique qui consiste à trouver l'optimum (maximum ou minimum) d'une fonction à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, liées tous par m contraintes $g_i(X) = 0$ ou $g_i(X) \geq 0$. Notons qu'un programme linéaire peut être ramené à un problème d'optimisation combinatoire.

I. Etapes de modélisation d'un programme linéaire (PL)

La formalisation mathématique d'un problème concret est une tâche délicate mais essentielle car elle conditionne la découverte ultérieure de la bonne solution. Elle comporte les mêmes phases quelles que soient les techniques requises ultérieurement pour le traitement (programmation linéaire ou programmation non linéaire) : Généralement il y a trois étapes à suivre pour pouvoir construire le modèle d'un programme linéaire :

1. Identifier les variables du problème à valeur non connues (variable de décision) et les représenter sous forme symbolique (exp. x_1, y_1).
2. Identifier les restrictions (les contraintes) du problème qui s'expriment en général par des relations entre les variables et qui se représentent sous forme d'un système d'équations ou d'inéquations linéaires.
3. Identifier l'objectif ou le critère de sélection et le représenter sous une forme linéaire en fonction des variables de décision. Spécifier si le critère de sélection est à maximiser ou à minimiser.

II. Présentation théorique

Un programme linéaire consiste à trouver le maximum ou le minimum d'une forme linéaire dite fonction objectif en satisfaisant certaines équations et inégalités dites contraintes. En langage mathématique, on décrira de tels modèles de la manière suivante :

Soient n variables de décision $x_1, x_2, \ldots, x_n$ l'hypothèse que les variables de décision sont positives implique que $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$.
La fonction objectif est une forme linéaire en fonction des variables de décision de type $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ où les coefficients $c_1, \ldots, c_n$ doivent avoir une valeur bien déterminée (avec certitude) et peuvent être positifs, négatifs ou nuls. Par exemple le coefficient c_i peut représenter un profit unitaire lié à la production d'une unité supplémentaire du bien x_i, ainsi la valeur de Z est le profit total lié à la production des différents biens en quantités égales à $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Supposons que ces variables de décision doivent vérifier un système d'équations linéaires définis par m inégalités :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases}$$

où les coefficients $a_{m1}, \ldots, a_{mn}$ et $b_1, \ldots, b_m$ doivent avoir une valeur bien déterminée (avec certitude) et peuvent être positifs, négatifs ou nuls. Le paramètre b_i représente la quantité de matière première disponible dont le bien x_i utilise une quantité égale à $a_{ij}\, x_i$.

En suivant les étapes de formulation ci-dessus, on peut représenter le PL comme suit :

$$\begin{cases} \max \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

III. Exemples de modélisations

Plusieurs problèmes de divers domaines sont représentés ou approximés par des modèles de PL. L'utilisation de ces techniques de modélisation s'est renforcée encore après avoir construit des algorithmes et des logiciels capables de résoudre de plus larges problèmes avec autant de variables de décision que de contraintes.

La tâche de formulation demande généralement une certaine expertise et connaissance du problème pour pouvoir relever facilement les différentes composantes du problème et ainsi donner un programme qui modélise au mieux la situation réelle. Dans ce qui suit, on présentera quelques exemples de formulation en programme linéaire liés à différents problèmes de décision.

Exemple 1: Problème de médecine :

Un spécialiste en médecine a fabriqué un médicament (des pilules) pour guérir les sujets atteints d'un rhume. Ces pilules sont fabriquées selon deux formats :

- Petite taille : elle contient 2 grains d'aspirine, 5 grains de bicarbonate et 1 grain de codéine.
- Grande taille : elle contient 1 grain d'aspirine, 8 grains de bicarbonate et 6 grains de codéine.

Pour guérir la maladie, le sujet a besoin de 12 grains d'aspirine, 74 grains de bicarbonate et 24 grains de codéine. Déterminer le nombre de pilules minimales à prescrire au sujet pour qu'il soit guérit.

Modélisation du problème en un PL

Le problème de médecine présente certaines ressemblances avec le problème de l'agriculture, dans les deux cas c'est un problème d'allocation de ressources.

- Les variables de décision qui représentent des valeurs inconnues par le décideur qui est dans ce cas le spécialiste en médecine sont :
  - x_1 : le nombre de pilules de petite taille à prescrire.
  - x_2 : le nombre de pilules de grande taille à prescrire.

On vérifie bien que les variables de décision x_1 et x_2 sont positives : $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$.

- Les contraintes imposées par le problème sur les valeurs possibles de x_1 et x_2 sont :

- La prescription doit contenir des pilules avec au moins 12 grains d'aspirine. Sachant qu'une petite pilule contient 2 grains d'aspirine et qu'une grande pilule contient un seul grain d'aspirine, on obtient la contrainte suivante : $2x_1 + x_2 \geq 12$.
- De la même façon que pour l'aspirine, la prescription du spécialiste en médecine doit contenir au moins 74 grains de bicarbonate. Ainsi la contrainte suivante doit être satisfaite : $5x_1 + 8x_2 \geq 74$.
- Finalement la contrainte imposée par le fait que la prescription doit contenir au moins 24 grains de codéine est : $x_1 + 6x_2 \geq 24$.

- Identification de la fonction objectif. On remarque qu'il y a plusieurs couples de solutions $(x_1,\ x_2)$ qui peuvent satisfaire les contraintes spécifiées à l'étape 2. La prescription doit contenir le minimum possible de pilules. Donc le critère de sélection de la quantité de pilules à prescrire est celle qui minimise le nombre total des pilules $Z = x_1 + x_2$.

Le programme linéaire qui modélise ce problème médical est donc le suivant :

$$\begin{cases} \min \quad x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 \geq 12 \\ 5x_1 + 8x_2 \geq 74 \\ x_1 + 6x_2 \geq 24 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exemple 2 : Problème de production

<u>Exemple 2.1.</u> Pour fabriquer deux produits P_1 et P_2 on doit effectuer des opérations sur trois machines M_1, M_2 et M_3, successivement mais dans un ordre quelconque. Les temps unitaires d'exécution sont donnés par le tableau suivant :

	M_1	M_2	M_3
P_1	11 mn	7 mn	6 mn
P_2	9 mn	12 mn	16 mn

On supposera que les machines n'ont pas de temps d'inactivité.
La disponibilité pour chaque machine est :

- 165 heures (9900 minutes) pour la machine M_1 ;
- 140 heures (8400 minutes) pour la machine M_2 ;
- 160 heures (9600 minutes) pour la machine M_3 .

Le produit P_1 donne un profit unitaire de 900 dinars et le produit P_2 un profit unitaire de 1000 dinars. Dans ces conditions, combien doit-on fabriquer mensuellement de produits P_1 et P_2 pour avoir un profit total maximum ?

Modélisation en un PL :

- Les variables de décisions sont :
  - x_1 : le nombre d'unités du produit P_1 à fabriquer
  - x_2 : le nombre d'unités du produit P_2 à fabriquer
- Les contraintes outre les contraintes de non-négativité sont :
  - $11x_1 + 9x_2 \leq 9900$ pour la machine M_1
  - $7x_1 + 12x_2 \leq 8400$ pour la machine M_2
  - $6x_1 + 16x_2 \leq 9600$ pour la machine M_3
- Le profit à maximiser est : $Z = 900x_1 + 1000\,x_2$

Le programme linéaire résultant est :

$$\begin{cases} \max \quad 900x_1 + 1000x_2 \\ 11x_1 + 9x_2 \leq 9900 \\ 7x_1 + 12x_2 \leq 8400 \\ 6x_1 + 16x_2 \leq 9600 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exemple 2.Problème de Production.

Un constructeur automobile a la possibilité de produire des voitures, des camionnettes et des vélos. Chaque voiture, camionnette et vélo vendue, rapporte un profit de 3000 u.m, 2000 u.m et 500 u.m respectivement. L'usine est constituée de 3 ateliers : découpage des tôles, assemblage et finition intérieure. Chaque atelier fonctionne 8 heures par jour. Le tableau suivant montre le temps (en minutes) nécessaire dans chaque atelier à la production de chaque véhicule.

	Découpage	Assemblage	Finition
Voiture	2	5	7
Camionnette	4	7	2
Vélo	0.5	1	0

Avant d'être livrés aux différents concessionnaires de la marque, les véhicules sont entreposés, en fin de journée, dans un hangar pouvant recevoir l'équivalent de 200 voitures. Une camionnette occupe 5 fois plus de place qu'un vélo et une voiture 3 fois plus de place qu'un vélo. Suite à des commandes importantes provenant de différentes sociétés de transport, l'entreprise est dans l'obligation de produire un minimum de 30 camionnettes par jour. Donner le programme linéaire correspondant à ce problème.

Modélisation en un PL :

- Les variables de décision du problème sont :
  - x_1 : le nombre de voitures à produire par jour.
  - x_2 : le nombre de camionnettes à produire par jour.
  - X_3: le nombre de vélos à produire par jour.

- Les contraintes de non-négativité sont vérifiées.
- Les contraintes du problème sont :
  - Temps de découpage par jour : $2x_1 + 4x_2 + 0.5x_3 \leq 8 \times 60$
  - Temps d'assemblage par jour : $5x_1 + 7x_2 + x_3 \leq 8 \times 60$
  - Temps de finition par jour : $7x_1 + 2x_2 \leq 8 \times 60$
  - Contrainte sur l'espace dans l'hangar : $3x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 3 \times 200$
  - Le nombre minimum de camionnettes à produire par jour : $x_2 \geq 30$
- La fonction objectif à maximiser est : $Z = 3000x_1 + 2000\,x_2 + 500\,x_3$.

Le programme linéaire résultant est :

$$\begin{cases} \max(3000x_1 + 2000\,x_2 + 500\,x_3) \\ \quad 2x_1 + 4x_2 + 0.5x_3 \leq 480 \\ \quad 5x_1 + 7x_2 + x_3 \leq 480 \\ \quad 7x_1 + 2x_2 \leq 480 \\ \quad 3x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 600 \\ \quad x_2 \geq 30 \\ \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Exemple 3: Problème d'alimentation

On se propose de réaliser une alimentation économique pour des bestiaux, qui contient obligatoirement 4 sortes de composants nutritifs, A, B, C et D. L'industrie alimentaire produit précisément deux aliments M et N qui contiennent ces composants : 1 Kg d'aliment M contient 100 g de A, 100 g de C, 200 g de D ; 1 Kg d'aliment N contient 100 g de B, 200 g de C, 100 g de D. Un animal doit consommer par jour au moins : 0.4 Kg de A, 0.6 Kg de B, 2 Kg de C et 1.7 Kg de D. L'aliment M coûte 10 u.m le Kg et N coûte 4 u.m le Kg. Quelles quantités d'aliments M et N doit-on utiliser par jour et par animal pour réaliser l'alimentation la moins coûteuse ?

Modélisation en un PL :

On peut résumer toutes les données du problème dans le tableau suivant :

	M	N	Quantités prescrites
A	0.1	0	0.4

B	0	0.1	0.6
C	0.1	0.2	2
D	0.2	0.1	1.7
Coût	10	4	

Ce genre de tableau peut aider à mieux analyser le problème et ainsi formuler le programme linéaire correspondant.

- Les variables de décision sont :
  - x_1 : la quantité d'aliments M à utiliser pour l'alimentation des deux bestiaux
  - x_2 : la quantité d'aliments N à utiliser pour l'alimentation des deux bestiaux

Les contraintes de non-négativité sont $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

- Le choix de cette quantité est contraint à la présence dans l'alimentation du composant

- A : $0.1x_1 \geq 0.4 \quad \Rightarrow \quad x_1 \geq 4$
- B : $0.1x_2 \geq 0.6 \quad \Rightarrow \quad x_2 \geq 6$
- C : $0.1x_1 + 0.2x_2 \geq 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 2x_2 \geq 20$
- D : $0.2x_1 + 0.1x_2 \geq 1.7 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 + x_2 \geq 17$

- La fonction objectif est une fonction coût : $Z = 10x_1 + 4x_2$.

Le programme linéaire est un programme de minimisation :

$$\begin{cases} \min \quad 10x_1 + 4x_2 \\ x_1 \qquad \geq 4 \\ \qquad x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \geq 20 \\ 2x_1 + x_2 \geq 17 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exemple 4 : Sélection de Médias

Une entreprise désire effectuer une campagne publicitaire dans la télévision, la radio et les journaux pour un produit lancé récemment sur le marché. Le but de la campagne est d'attirer le maximum possible de clients. Les résultats d'une étude de marché sont donnés par le tableau suivant :

	Télévision		Radio	Journaux
	Locale	Par satellite		
Coût d'une publicité	40 u.m	75 u.m	30 u.m	15 u.m
Nombre de client potentiel par publicité	400	900	500	200
Nombre de client potentiel femme par publicité	300	400	200	100

Pour la campagne, on prévoit de ne pas payer plus que 800 u.m pour toute la campagne et on demande que ces objectifs soient atteints :

1. Au minimum 2000 femmes regardent, entendent ou lisent la publicité ;
2. La campagne publicitaire dans la télévision ne doit pas dépasser 500 u.m;
3. Au moins 3 spots publicitaires seront assurés par la télévision locale et au moins de deux spots par la télévision par satellite.
4. Le nombre des publicités dans la radio ou dans les journaux sont pour chacun entre 5 et 10.

Modélisation en un PL :

- Les variables de décision du problème sont :
  - x_1 : le nombre de spots publicitaires dans la télévision locale
  - x_2 : le nombre de spots publicitaires dans la télévision par satellite
  - x_3 : le nombre de spots publicitaires dans la radio
  - x_4 : le nombre d'affiches publicitaires dans les journaux
- Les contraintes de non-négativité sont vérifiées.

- Les contraintes du problème sont :
  - Coût total de la compagne publicitaire : $40x_1 + 75x_2 + 30x_3 + 15x_4 \leq 800$
  - Nombre de clients femmes potentiels par publicité : $300x_1 + 400x_2 + 200x_3 + 100x_4 \geq 2000$

- Contraintes de la télévision : $40x_1 + 75x_2 \leq 500$, $x_1 \geq 3$ et $x_2 \geq 2$
- Contraintes sur le nombre de publicités dans la radio et dans les journaux :

$$5 \leq x_3 \leq 10 \text{ et } 5 \leq x_4 \leq 10.$$

- La fonction objectif à maximiser représente le nombre de clients potentiels par publicité $Z = 400\,x_1 + 900\,x_2 + 500\,x_3 + 200\,x_4$.

Le programme linéaire résultant est :

$$\begin{cases} \max \quad 400x_1 + 900x_2 + 500x_3 + 200x_4 \\ 40x_1 + 75x_2 + 30x_3 + 15x_4 \leq 800 \\ 30x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 10x_4 \geq 2000 \\ 40x_1 + 75x_2 \qquad\qquad\qquad \leq 500 \\ x_1 \geq 3 \\ x_2 \geq 2 \\ x_3 \geq 5 \\ x_3 \leq 10 \\ x_4 \geq 5 \\ x_4 \leq 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Exemple 5 : Problème du transport

__Une entreprise stock un produit dans trois dépôts A_1, A_2 et A_3. Les quantités stockées sont respectivement a_1, a_2 et a_3. Les dépôts doivent alimenter 4 magasins B_1, B_2, B_3 et B_4. La quantité du produit nécessaire au point de vente B_j : j=1, …,4 est bj. Si c_{ij} est le coût unitaire de transport du produit de dépôt A_i vers le point de vente B_j, comment l'entreprise doit-elle répartir les stocks du produit entre les points de vente ?

Modélisation en un PL :

Une condition nécessaire pour que ce problème possède une solution est que l'offre soit au mois égale à la demande d'où : $\sum_i a_i \geq \sum_j b_j$.

- Les variables de décision du problème sont :

x_{ij} : quantité du produit acheminée depuis le dépôt A_i au point de vente B_j.

- Les contraintes de non-négativité sont vérifiées.
- Les contraintes du problème sont :

  - La quantité acheminée de dépôt A_i vers le point de vente B_j ne dépasse pas la quantité disponible, d'où $\sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leq a_i$ pour i=1,…,3.
  - La quantité acheminée doit satisfaire la demande d'où $\sum_{i=1}^{3} x_{ij} \geq bj$ pour j=1,…,4.

- Fonction objectif : le coût de transport à minimiser, donc $Z(\min) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij}$, d'où le problème peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leq a_i \quad \text{pour } i=1,\ldots,3 \\ \sum_{i=1}^{3} x_{ij} \geq b_j \quad \text{pour } j=1,\ldots,4 \\ x_{ij} \geq 0 \quad \text{pour } i=1,\ldots,3 \text{ et } j=1,\ldots,4 \end{cases}$$

Exemple 6 : Problème du sac à dos

Considérons n objets, notés $i=1,\ldots,n$, apportant chacun un bénéfice c_i et possédant un poids a_i. On veut ranger ces objets dans un sac que l'on veut au maximum de poids b. Le problème de sac-à-dos (knapsack) consiste à choisir les objets à prendre parmi les n objets de manière à avoir un bénéfice maximal et respecter la contrainte du poids à ne pas dépasser. Chaque objet i, $i \in \{1,\ldots,n\}$, doit être sélectionné au moins p_i fois et au plus q_i fois. Ce problème se rencontre bien entendu dès que l'on part en randonnée en voulant emmener le plus possible d'objets utiles (nourriture, boissons,...). Ce problème est plus fréquemment utilisé pour remplir les camions de transport, les avions ou bateaux de fret et même pour gérer la mémoire d'un microprocesseur.

Modélisation en un PL :

La formulation en un problème linéaire en nombres entiers du problème de sac-à-dos est très simple. On utilise pour chaque objet $i \in \{1,\ldots,n\}$, une variable entière x_i correspondant au nombre de fois où l'objet *i* est choisi. Le problème du sac-à-dos est donc équivalent au programme en nombres entiers suivant.

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b, \qquad (1) \\ \mathrm{p_i} \le x_i \le \mathrm{q_i}, \quad \text{pour i} = 1,\ldots,\text{n} \\ x_i \in N, \qquad \text{pour i} = 1,\ldots,\text{n} \end{cases}$$

La contrainte (1) est dite contrainte de sac-à-dos. Elle est l'unique contrainte de ce programme linéaire en nombres entiers qui est un problème difficile algorithmiquement à résoudre.

Exemple 7 : Problème du voyageur de commerce :

On considère un ensemble de n villes et les distances c_{ij} qui les séparent. Le problème du voyageur de commerce consiste à déterminer le tour le plus court possible passant exactement une fois par chaque ville et revenant au lieu de départ (cycle Hamiltonien).

Modélisation en un PL :

Il y a n villes et nous notons c_{ij} la distance entre la ville i et la ville j. Pour modéliser le problème du voyageur de commerce, nous utilisons les variables suivantes :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le voyageur va de i vers j} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

Alors le problème du voyageur de commerce peut être modélisé comme suit :

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad \forall \text{ j} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad \forall \text{ i} \\ \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad \forall S \subset \{1,\dots,n\} \text{ et } 2 \leq |S| \leq n-1 \\ \sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} x_{ij} \geq 1 \quad \forall S \subset \{1,\dots,n\} \text{ et } \phi \neq S \neq \{1,\dots,n\} \\ x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall \text{ i}, \ \forall \text{ j} \end{cases}$$

La première contrainte dit qu'il entre exactement 1 fois dans chaque ville, tandis que la deuxième dit qu'il sort exactement 1 fois de chaque ville. Ceci n'est pas suffisant, car on pourrait aboutir ainsi à plusieurs petits tours, donc il reste à éliminer les sous-tours en mettant soit les troisièmes contraintes (élimination de sous-tours) soit les quatrièmes contraintes (connexité).