PLAN

PLANIFICATION D'UNE SESSION D'EXAMENS

Lors d'examens de rattrapage, 8 étudiants (A, B, C, D, E, F, G et H) doivent repasser différentes épreuves se déroulant chacune sur une demi-journée.

La répartition des épreuves par étudiant est la suivante :

- Biologie : A et B,
- Mathématiques : C et D,
- Histoire : C, E, F et G,
- Physique : A, E, F et H,
- Anglais : B, F, G et H.

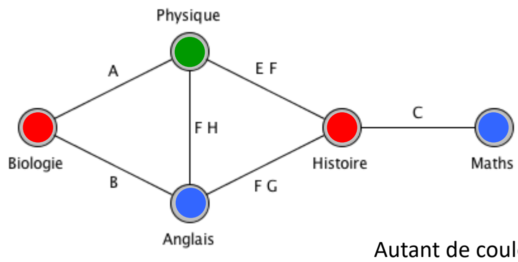
Comment organiser la session de rattrapage pour qu'elle soit la plus courte possible ?

Problèmes d'incompatibilité

PLANIFICATION D'UNE SESSION D'EXAMENS

- Biologie : A et B,
- Mathématiques : C et D,
- Histoire : C, E, F et G,
- Physique : A, E, F et H,
- Anglais : B, F, G et H.

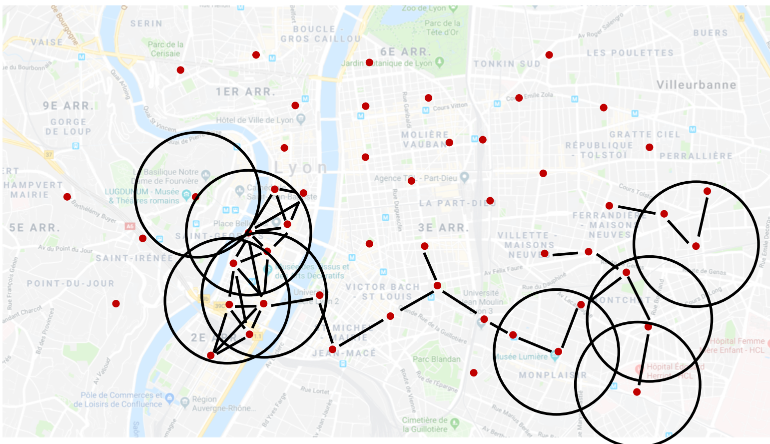
Problème de coloration



Autant de couleurs que
de demi-journées.

ALLOCATIONS DE FRÉQUENCES

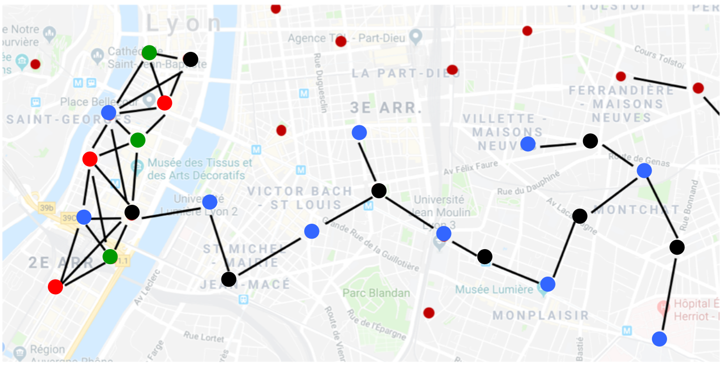
Comment attribuer des fréquences à un ensemble d'émetteurs, en minimisant leur nombre, sachant que deux émetteurs trop proches ne peuvent pas avoir la même fréquence ?



Graphe d'incompatibilités

ALLOCATIONS DE FRÉQUENCES

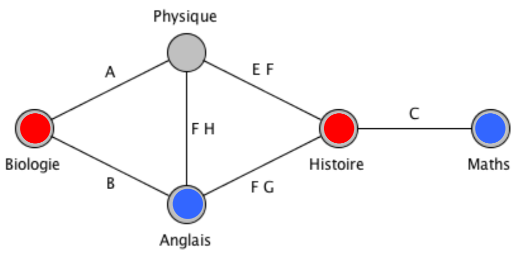
Comment attribuer des fréquences à un ensemble d'émetteurs, en minimisant leur nombre, sachant que deux émetteurs trop proches ne peuvent pas avoir la même fréquence ?



Coloration

COLORATION DES SOMMETS

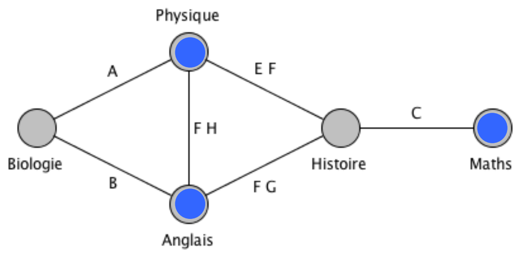
Un stable est une partie S de X constituée de sommets deux à deux non adjacents.



Un stable maximum est un stable de cardinal maximum.

COLORATION DES SOMMETS

Un transversal est une partie T de X constituée de sommets tel que toute arête de U possède au moins une extrémité dans T.

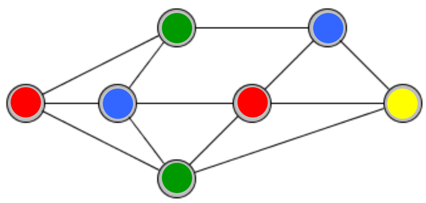


Un transversal minimum est un transversal de cardinal minimum.

T est transversal ⇔ X-T est stable

COLORATION DES SOMMETS

On appelle coloration des sommets de G, toute application de l'ensemble des sommets X dans un ensemble C, appelé ensemble des **couleurs**, telle que deux sommets adjacents soient toujours de couleurs différentes.



Une coloration des sommets est une partition de l'ensemble des sommets en stables.

COLORATION DES SOMMETS

Le nombre chromatique de G est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour une coloration des sommets.
On le note $\chi(G)$.

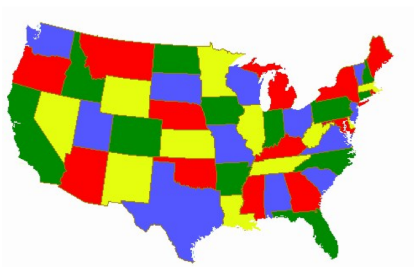
> Trouver une coloration des sommets avec $\chi(G)$ couleurs est un problème de la classe des problèmes NP.

Théorème
Si le maximum des degrés de G est d_{max} alors :

$$\chi(G) \leq d_{max}+1$$

COLORATION DES SOMMETS

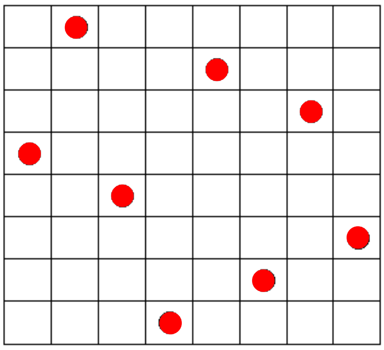
Combien de couleurs faut-il, au maximum, pour colorier une carte géographique ?



Théorème
Tout graphe planaire est 4-coloriable.

COLORATION DES SOMMETS

Proposer une modélisation par les graphes du problème du positionnement des 8 reines sur un échiquier et énoncer le problème à résoudre en terme de graphe :

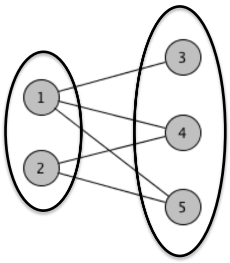


COLORATION D'UN GRAPHE

COLORATION DES SOMMETS

G=(X,U) est un graphe biparti si on peut diviser les sommets en deux sous-ensembles stables X_1 et X_2.

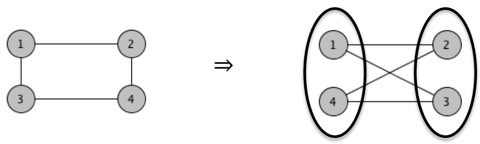
On le note G=(X_1,X_2,U).



COLORATION DES SOMMETS

Théorème
G est biparti $\Leftrightarrow \chi(G) = 2$

Théorème
G est biparti $\Leftrightarrow$ G ne contient pas de cycle de longueur impaire.



ALGORITHME GREEDY COLORING

Dans cet algorithme, les couleurs sont des entiers pris dans C={1,2,3,…}.
L'algorithme renvoie la couleur c(x) de chaque sommet x.

GreedyColoring(G=(X,U),c) ;
{ Ranger les sommets dans une liste ordonnée L ;
tant que (L non vide) **faire**
{ x = 1^{er} sommet de L ;
c(x) = le plus petit entier (numéro de couleur) possible de C ;
Enlever x de L ;
}
}

Algorithme non optimal !
Mais il existe au moins un ordre sur les sommets qui produit la coloration optimale !

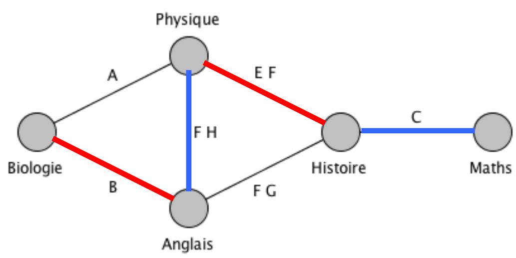
ALGORITHME DE WELSH ET POWELL

```
WelshPowell(G=(X,U),c) ;
{     Ranger les sommets par ordre de degrés décroissant dans la liste ordonnée L ;
      k = 1 ;
      tant que (L non vide) faire
      {     x = 1er sommet de L ;
            c(x) = k ; Enlever x de L ;
            y = 1er sommet de L ;
            tant que (fin de liste L non atteinte) faire
            {     si (y non adjacent à un sommet de couleur k) alors
                  {     c(y) = k ; Enlever y de L ;
                  }
                  y = sommet suivant dans L ;
            }
            k = k+1 ;
      }
}
```

Algorithme non optimal ! … amélioration possible avec l'heuristique DSATUR.

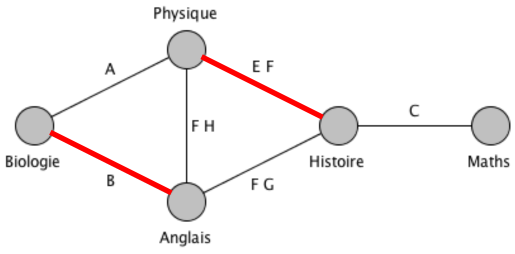
COLORATION DES ARÊTES

Un couplage est une partie C de U constituée d'arêtes deux à deux non adjacentes.



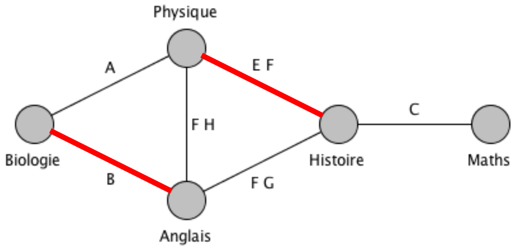
Un couplage maximum est un couplage de cardinal maximum.

Soit un couplage C de U.
On dit qu'un sommet est C-saturé s'il existe un arête de C qui lui est incidente.
On dit qu'un sommet est C-insaturé s'il n'existe pas d'arête de C qui lui est incidente.

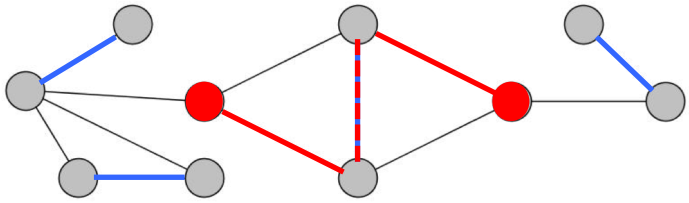


Un couplage C est parfait si tous les sommets du graphe sont C-saturés.

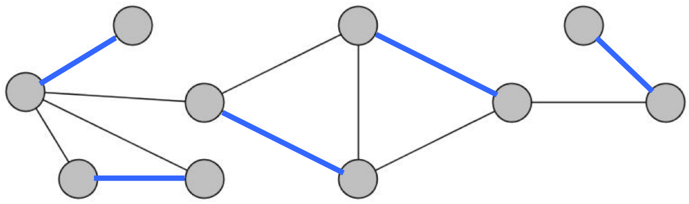
Soit un couplage C de U.
Une chaîne C-alternée est une chaîne simple qui commence en un sommet C-insaturé et dont les arêtes sont alternativement dans C et dans U-C.



Soit un couplage C de U.
Une chaîne C-alternée qui se termine par un sommet C-insaturé est dite améliorante.



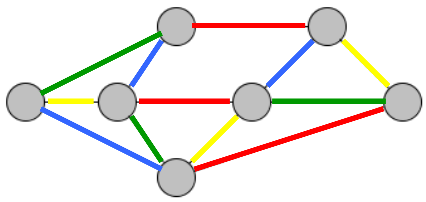
Soit un couplage C de U.
Une chaîne C-alternée qui se termine par un sommet C-insaturé est dite améliorante.



Théorème
Un couplage C est de cardinal maximum si et seulement le graphe n'a pas de chaîne C-alternée améliorante.

COLORATION DES ARÊTES

On appelle coloration des arêtes de G, toute application de l'ensemble des arêtes U dans un ensemble C, appelé ensemble des couleurs, telle que deux arêtes adjacentes soient toujours de couleurs différentes.

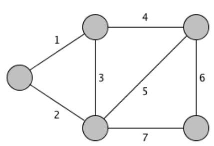


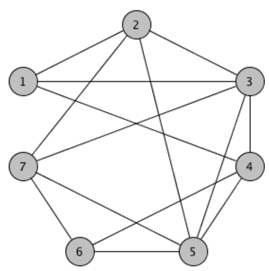
Une coloration des arêtes est une partition de l'ensemble des arêtes en couplages.

COLORATION DES ARÊTES

L'indice chromatique de G est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour une coloration des arêtes.
On le note $\chi'(G)$.

Le problème de coloration des arêtes est un cas particulier du problème de coloration des sommets.





<u>Théorème de Vizing</u>
Soit G un graphe simple.
Si le maximum des degrés de G est d_{max} alors :

$$\chi'(G) \leq d_{max}+1$$

<u>Théorème</u>
Si le maximum des degrés de G est d_{max} alors :

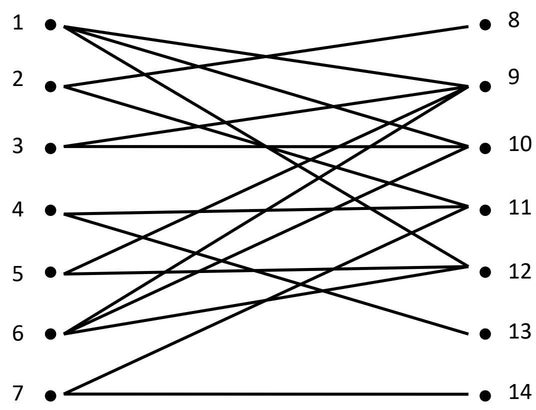
$$d_{max} \leq \chi'(G)$$

Algorithme d'obtention d'un couplage maximum dans un graphe biparti :

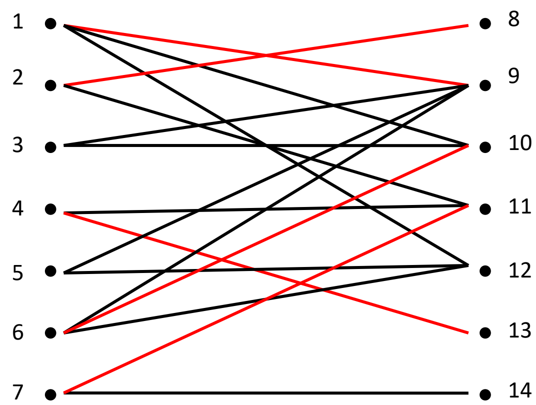
CouplageMaxGrapheBiparti($G=(X_1,X_2,U)$,C) ;
{ C = ∅ ;
  tant que (il existe x C-insaturé dans X_1) **faire**
  { **s'il existe** une chaîne C-alternée améliorante à partir de x vers un sommet C-insaturé de X_2 **alors**
    { C = C-améliorée ;
    }
  }
}

parcours en profondeur à partir de x

Graphe biparti :



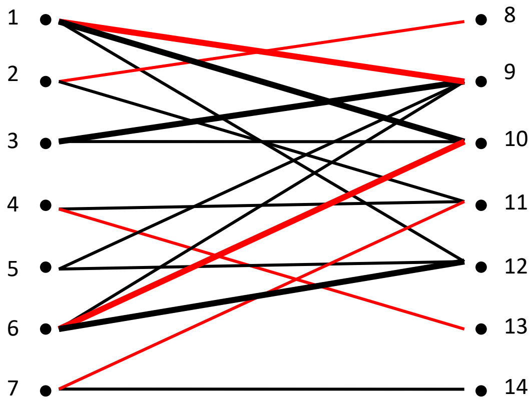
Couplage initial quelconque (ici de cardinal 5) :



COLORATION D'UN GRAPHE

APPLICATION AU COUPLAGE

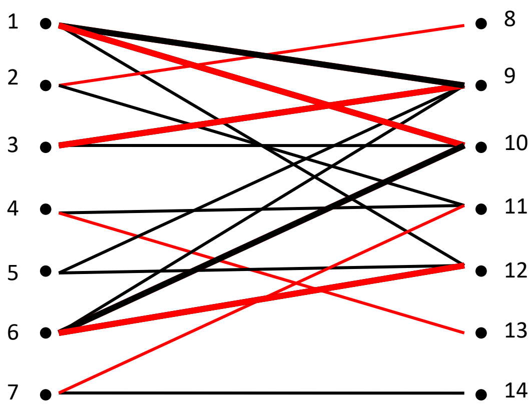
Recherche d'une chaîne améliorante (d'une fille libre vers un garçon libre) :



COLORATION D'UN GRAPHE

APPLICATION AU COUPLAGE

On inverse les couleurs :



Couplage de cardinal 6 :

Plus de chaîne améliorante ⇒ couplage maximum