GRAPHES ET APPLICATIONS

PLAN

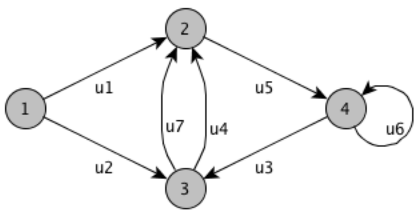
1. Introduction
2. **Généralités sur les graphes**
3. Représentation d'un graphe en machine
4. Parcours dans les graphes
5. Arbre recouvrant
6. Plus court chemin dans un graphe
7. Coloration d'un graphe
8. Graphes planaires
9. Flots et réseaux de transports
10. Réseaux d'interactions

GÉNÉRALITÉS SUR LES GRAPHES

GRAPHES ORIENTÉS

G=(X,U) graphe orienté

X = { 1, 2, 3, 4 }
ensemble de sommets
U = { u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7 }
ensemble d'arcs
n = 4 : nb de sommets
m = 7 : nb d'arcs



G est un p-graphe s'il existe au maximum p arcs ayant même extrémité initiale et même extrémité terminale

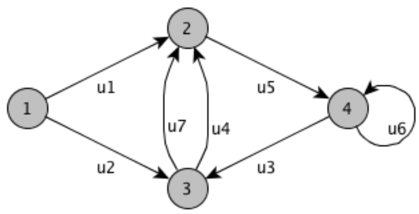
Une boucle est un arc ayant même extrémité initiale et terminale

G est simple si c'est un 1-graphe et s'il n'a pas de boucle

GRAPHES ORIENTÉS

Deux sommets i et j sont dits adjacents s’il existe un arc (i,j) ou un arc (j,i) les reliant

Deux arcs sont adjacents s’ils ont au moins une extrémité commune



Le sommet j est un successeur de i s’il existe un arc (i,j). L’ensemble des successeurs de i est noté $\Gamma^+(i)$

Le sommet j est un prédécesseur de i s’il existe un arc (j,i). L’ensemble des prédécesseurs de i est noté $\Gamma^-(i)$

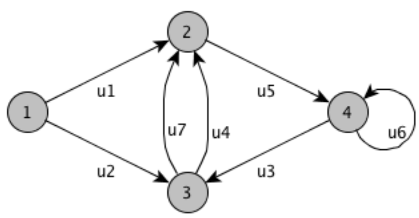
Une source est un sommet sans prédécesseur

Un puits est un sommet sans successeur

GRAPHES ORIENTÉS

Le degré extérieur (ou demi-degré extérieur) $d^+(i)$ du sommet i est le nombre d’arcs ayant i comme extrémité initiale

Le degré intérieur (ou demi-degré intérieur) $d^-(i)$ du sommet i est le nombre d’arcs ayant i comme extrémité terminale



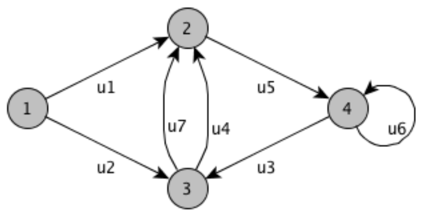
Le degré d(i) du sommet i est le nombre d’arcs ayant i comme extrémité :

$$d(i) = d^+(i) + d^-(i)$$

GRAPHES ORIENTÉS

Soit $A \subset X$,
L'ensemble des arcs sortants de A qui ne sont pas dans A est :

$\Omega^+(A)=\{(i,j)\in U \ / \ i\in A \text{ et } j\notin A\}$



L'ensemble des arcs entrants dans A qui ne sont pas dans A est :

$\Omega^-(A)=\{(i,j)\in U \ / \ i\notin A \text{ et } j\in A\}$

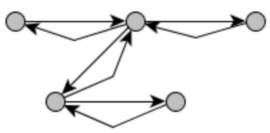
Le cocycle du graphe G relativement à A est l'ensemble des arcs incidents à A :

$\Omega(A)=\Omega^+(A)\cup\Omega^-(A)$

GRAPHES ORIENTÉS

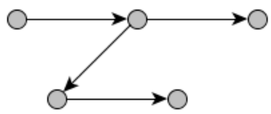
G=(X,U) est symétrique si et seulement si

$\forall \ (i,j)\in U \Rightarrow (j,i)\in U$



G=(X,U) est anti-symétrique si et seulement si

$\forall \ (i,j)\in U \Rightarrow (j,i)\notin U$



G=(X,U) est transitif si et seulement si

$\forall$ (i,j)$\in$U et (j,k)$\in$U $\Rightarrow$ (i,k)$\in$U

G=(X,U) est complet si et seulement si

$\forall$ i$\neq$j$\in$X $\Rightarrow$ (i,j)$\in$U ou (j,i)$\in$U

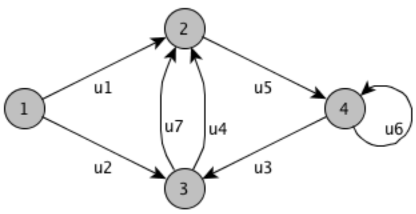
G=(X,U) est réflexif si et seulement si

$\forall$ i$\in$X $\Rightarrow$ (i,i)$\in$U

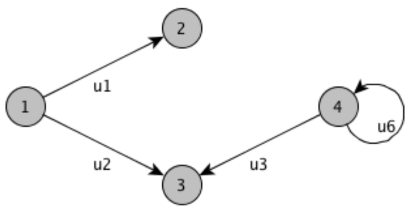
G=(X,U) est anti-réflexif si et seulement si

$\forall$ i$\in$X $\Rightarrow$ (i,i)$\notin$U

On appelle graphe partiel de G=(X,U) un graphe ayant le même ensemble de sommets X que G et ayant pour ensemble d'arcs une partie U' de U.

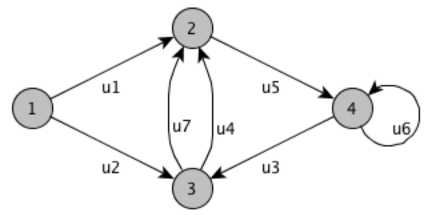


Par exemple,
G'=(X,{u_1, u_2, u_3, u_6}) :

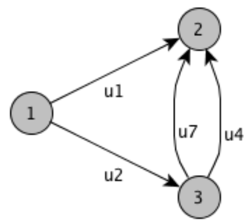


GRAPHES ORIENTÉS

Soit Y une partie de X.
On appelle sous-graphe de G=(X,U) engendré par Y un graphe ayant pour ensemble de sommets Y et pour ensemble d'arcs tous les arcs de G ayant leurs deux extrémités dans Y.



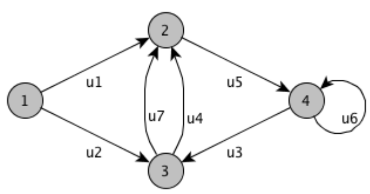
Par exemple,
G'=({1,2,3},{u_1, u_2, u_4, u_7}) :



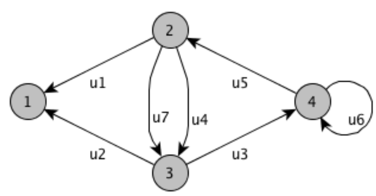
GRAPHES ORIENTÉS

Soit G=(X,U) un graphe orienté.
On appelle symétrique de G le graphe G^{-1}(X,U') avec :
(x,y)∈U' si et seulement si (y,x)∈U

Il s'agit d'un graphe dont l'orientation des arcs a été inversée par rapport au graphe initial.



G

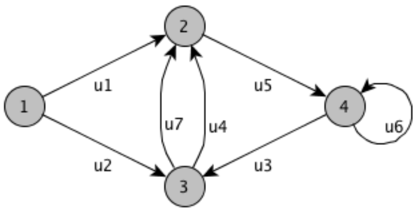


G^{-1}

GRAPHES ORIENTÉS

Un chemin de x à y dans G est une suite d'arcs u_1, … , u_k telle que :

- x est l'extrémité initiale de u_1,
- $\forall$ j∈{1,…,k-1} l'extrémité terminale de u_j coïncide avec l'extrémité initiale de u_{j+1},
- y est l'extrémité terminale de u_k.



Un chemin est dit simple s'il ne passe pas 2 fois par le même arc

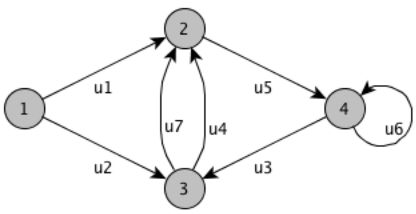
Un chemin est dit élémentaire s'il ne passe pas 2 fois par le même sommet

Un circuit est un chemin pour lequel l'extrémité initiale est égale à l'extrémité terminale (une boucle est un circuit)

GRAPHES ORIENTÉS

Une chaîne de x à y dans G=(X,U) est une suite d'arcs qui relie x à y sans tenir compte du sens des arcs

Un cycle est une chaîne fermée (x=y)



La distance entre deux sommets est définie par la longueur (en terme de nombre d'arcs) de la plus courte chaîne entre ces deux sommets

Le diamètre d'un graphe est la plus grande distance possible qui puisse exister entre deux de ses sommets (la plus longue des plus courtes chaînes)

GRAPHES ORIENTÉS

Un graphe orienté G=(X,U) est dit connexe si pour tout couple de sommets (i,j) il existe une chaîne joignant les sommets i et j

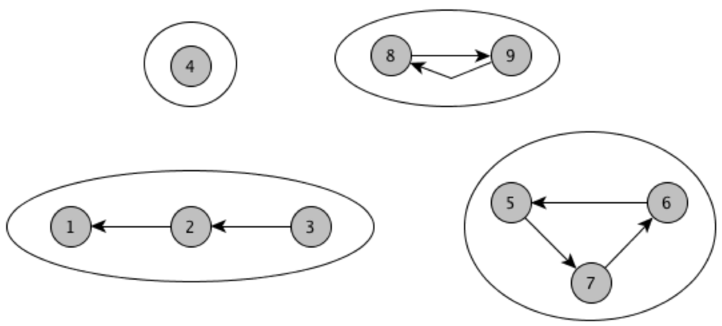
Soit $\Re$ une relation binaire :

$$i \, \Re \, j \Leftrightarrow \begin{cases} i=j \\ \text{ou} \\ \exists \text{ une chaîne joignant i et j} \end{cases}$$

$\Re$ est une relation d'équivalence.
Les classes d'équivalence induites sur X forment une partition de X : $X_1, \ldots, X_q$. Les sous-graphes $G_1, \ldots, G_q$ engendrés par $X_1, \ldots, X_q$ sont appelés les composantes connexes de G.

Le graphe G est dit connexe si q=1

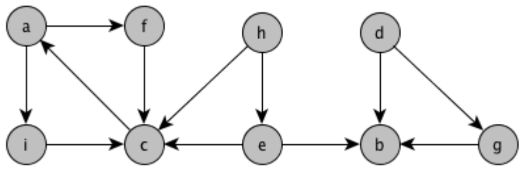
GRAPHES ORIENTÉS



4 composantes connexes

Un point d'articulation d'un graphe est un sommet qui, si on l'enlève du graphe, entraine une augmentation du nombre de connexité du graphe.

Un isthme d'un graphe est un arc qui, si on l'enlève du graphe, entraine une augmentation du nombre de connexité du graphe.



Un graphe orienté G=(X,U) est dit fortement connexe si pour tout couple de sommets (i,j) il existe un chemin de i à j

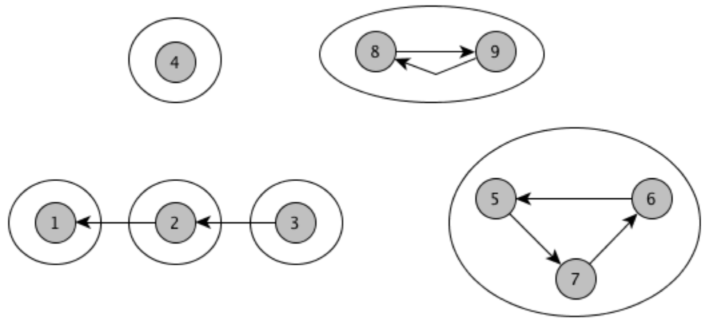
Soit $\Re$ une relation binaire :

$$i \,\Re\, j \Leftrightarrow \begin{cases} i=j \\ \text{ou} \\ \exists \text{ un chemin de } i \text{ à } j \text{ et de } j \text{ à } i \end{cases}$$

$\Re$ est une relation d'équivalence.
Les classes d'équivalence induites sur X forment une partition de X : $X_1, \ldots, X_q$. Les sous-graphes $G_1, \ldots, G_q$ engendrés par $X_1, \ldots, X_q$ sont appelés les composantes fortement connexes de G.

Le graphe G est dit fortement connexe si q=1

GRAPHES ORIENTÉS

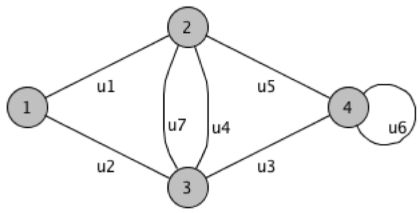


6 composantes fortement connexes

GRAPHES NON-ORIENTÉS

G=(X,U) graphe non-orienté

X = { 1, 2, 3, 4 }
ensemble de sommets
U = { u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7 }
ensemble d'arêtes
n = 4 : nb de sommets
m = 7 : nb d'arêtes



pas de degré extérieur et intérieur, seulement degré

pas de successeur, ni de prédécesseur, juste la notion de voisin

pas de chemin, ni de circuit, seulement chaîne et cycle

pas de forte connexité

un sous-ensemble de sommets YCX tel que 2 sommets distincts quelconques de Y sont reliés par une arête est une clique

GRAPHES NON-ORIENTÉS

Un graphe non-orienté est dit complet si pour tous sommets i et j distincts, il existe au moins une arête entre i et j

Dans le cas des graphes simples, un graphe complet est déterminé par son nombre de sommets n et noté K_n

Son nombre d'arêtes m est égal à : $m = n(n-1)/2$

D'une façon générale, dans le cas d'un graphe simple à n sommets, le nombre d'arêtes m vérifie :

$$m <= n(n-1)/2$$

La densité d'un graphe est égale au nombre d'arêtes présentes dans le graphe divisé par le nombre total d'arêtes possibles

GRAPHES NON-ORIENTÉS

Lors d'une réception, les convives qui se connaissent se serrent la main (jamais plus d'une fois avec la même personne).

1. Montrer qu'au moins 2 personnes ont serré le même nombre de mains
2. Montrer que le nombre total de mains serrées est pair
3. En déduire que le nombre de personnes ayant serré un nombre impair de mains est pair.

En déduire quelques propriétés sur les graphes simples non-orientés

GRAPHES NON-ORIENTÉS

Dans tout graphe simple non-orienté,

1. il existe au moins deux sommets ayant le même degré

2. la somme des degrés de tous les sommets du graphe est paire et est égale à deux fois le nombre d’arêtes

3. il y a un nombre pair de sommets qui ont un degré impair