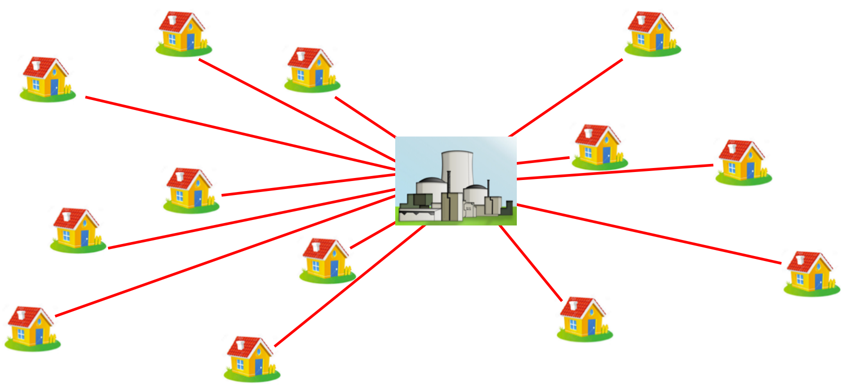
PLAN

1. Introduction
2. Généralités sur les graphes
3. Représentation d'un graphe en machine
4. Parcours dans les graphes
5. **Arbre recouvrant**
6. Plus court chemin dans un graphe
7. Coloration d'un graphe
8. Graphes planaires
9. Flots et réseaux de transports
10. Réseaux d'interactions

CONSTRUCTION D'UN RÉSEAU ÉLECTRIQUE

Construire un réseau électrique de manière à alimenter l'ensemble des maisons en électricité. Les coûts de construction des lignes sont proportionnels aux distances.

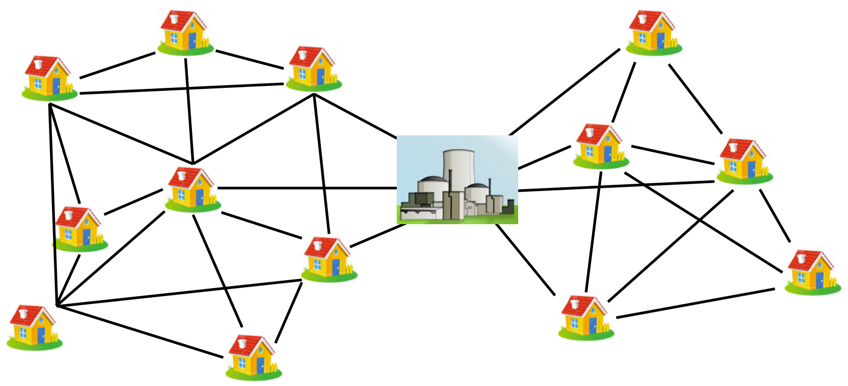


Comment construire le réseau éléctrique de manière à minimiser les coûts de fabrication ?

ARBRE RECOUVRANT

CONSTRUCTION D'UN RÉSEAU ÉLECTRIQUE

Graphe de « voisinage » non orienté :

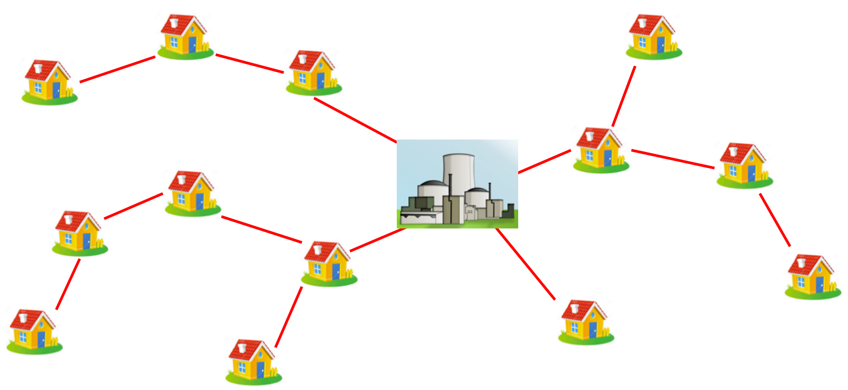


Recherche d'un arbre recouvrant de poids minimum

ARBRE RECOUVRANT

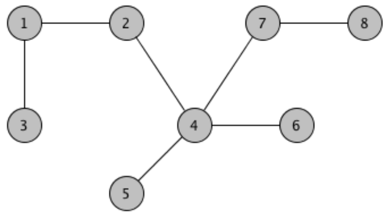
CONSTRUCTION D'UN RÉSEAU ÉLECTRIQUE

Arbre recouvrant de poids minimum :

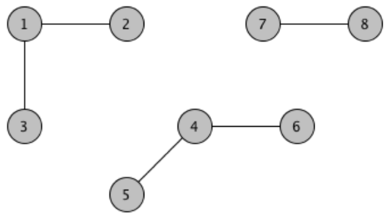


ARBRE ET FORÊT

Un arbre est un graphe connexe sans cycle (orienté ou non)



On appelle forêt un graphe dont chaque composante connexe est un arbre



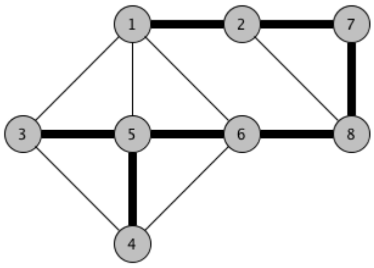
ARBRE

Soit G=(X,U) un graphe (avec n≥2).
Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. G est un arbre
2. Il existe dans G une chaîne et une seule joignant tout couple de sommets
3. G est sans cycle et maximal pour la propriété : « si on ajoute une arête, G possède un cycle »
4. G est connexe et minimal pour la propriété : « si on supprime une arête, G n'est plus connexe »
5. G est sans cycle et possède (n-1) arêtes
6. G est connexe et possède (n-1) arêtes

ARBRE

Théorème
Tout graphe G connexe possède un graphe partiel qui est un arbre

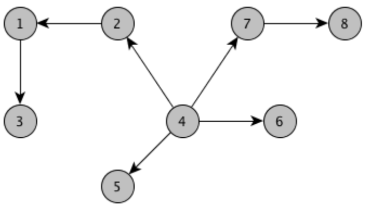


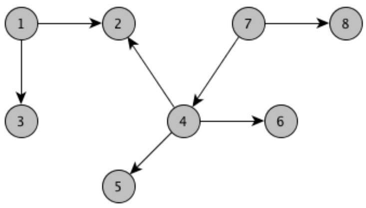
ARBORESCENCE

Un sommet s d'un graphe orienté G est une racine s'il existe dans G un chemin joignant s à tous les sommets de X

Un sommet s d'un graphe orienté G est une anti-racine s'il existe dans G un chemin joignant tous les sommets de X à s

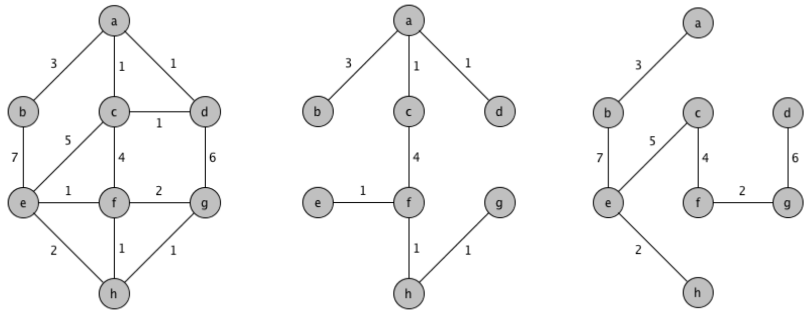
Un graphe orienté G est une arborescence de racine s si G est un arbre et s une racine de G





ARBRE RECOUVRANT DE POIDS MINIMUM (OU MAXIMUM)

<u>Objectif</u>
Trouver un graphe partiel d'un graphe valué G=(X,U,l) qui soit un arbre de poids minimum (ou maximum)



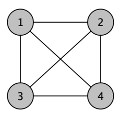
G $\quad$ **T_{min}** $\quad$ **T_{max}**

ARBRE RECOUVRANT

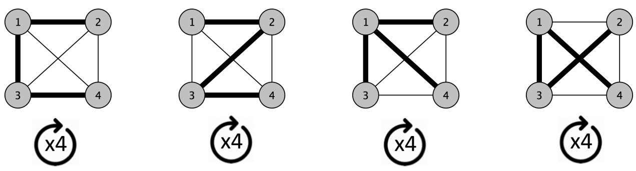
ARBRE RECOUVRANT DE POIDS MINIMUM (OU MAXIMUM)

Le nombre d'arbres recouvrants peut être important, même sur des petits graphes.

Lister tous les graphes partiels du graphe non orienté complet à 4 sommets (K_4) qui sont des arbres :

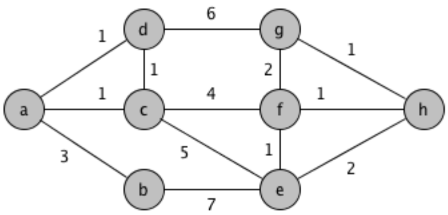


Il y a 16 arbres recouvrants différents :



ALGORITHME DE KRUSKAL - VERSION 1

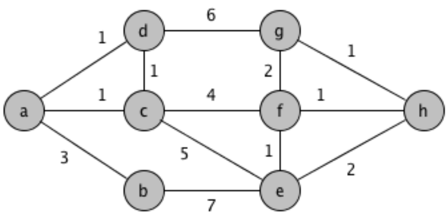
Kruskal1(G=(X,U,l),T) ; // recherche d'un arbre recouvrant de poids minimum
{ Numéroter les arêtes dans l'ordre des poids croissants ($l(u_1) \leq l(u_2) \leq \ldots \leq l(u_m)$) ;
  T = ∅ ;
  i = 0 ;
  tant que |T|<n-1 **faire**
  { **si** ($X,T\cup\{u_i\}$) ne contient pas de cycle **faire** $T = T\cup\{u_i\}$;
    i=i+1 ;
  }
}



O(mlog(m))

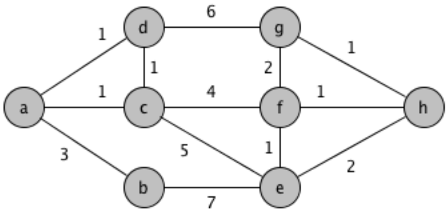
ALGORITHME DE KRUSKAL - VERSION 2

Kruskal2(G=(X,U,l),T) ; // recherche d'un arbre recouvrant de poids minimum
{ Numéroter les arêtes dans l'ordre des poids décroissants ($l(u_1) \geq \ldots \geq l(u_m)$) ;
  T = U ;
  i = 0 ;
  tant que |T|≥n **faire**
  { **si** ($X,T-\{u_i\}$) est connexe **faire** $T = T-\{u_i\}$;
    i=i+1 ;
  }
}



O(mlog(m))

Prim(G=(X,U,l),T) ;
{ prendre un sommet x quelconque dans X ;
    R = {x} ;
    T = $\varnothing$;
    Tant que $X \neq R$ **faire**
    { prendre (y,z) l'arête de poids minimum tel que $y \in R$ et $z \in X-R$;
        T = $T \cup \{(y,z)\}$;
        R = $R \cup \{z\}$;
    }
}



$O(n^2)$