Санкт-Петербургский политехнический университет имени Петра Великого

Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и физики

Отчет по лабораторной работе №3 по дисциплине "Интервальный анализ"

Выполнил:

Студент: Байрамов Самир
Группа: 5030102/00201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2023 г.

Содержание

1 Постановка задачи

Задана система нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = y^2 \end{cases}$$

Необходимо найти корни данной системы точеченых нелинейных уравнений, используя интервальный метод Кравчика.

2 Теория

2.1 Внешнее множество решений

Внешним множеством решений называется объединенное множество решений, образованное решениями всех точечных систем $F(a, x) = b$

$$\Xi_{\text{uni}}(\mathbf{F}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists a \in \mathbf{a})(\exists b \in \mathbf{b})(F(a, x) = b)\} \tag{1}$$

2.2 Метод Кравчика

Метод Кравчика предназначен для уточнения двухсторонних границ решений систем уравнений, в общем случае нелинейных, заданных на некотором брусе $\mathbf{X} \subset \mathbb{IR}$, вида

$$F(x) = 0, \quad \text{где } \ F(x) = \{F_1(x), ..., F_n(x)\}^T, \ x = (x_1, ...x_n) \tag{2}$$

Также данный метод может быть использован для того, чтобы понять, что решений нет.
Отображение $\mathcal{K} : \mathbb{ID} \times \mathbb{R} \to \mathbb{IR}^n$, задаваемое выражением

$$\mathcal{K}(\mathbf{X}, \overline{x}) := \overline{x} - \Lambda * F(\overline{x}) - (I - \Lambda * \mathbf{L} * (\mathbf{X} - \overline{x}) \tag{3}$$

называеся оператором Кравчика на $\mathbb{ID}$ относительно точки $\overline{x}$.
Итерационная схема данного метода выглядит следующим образом

$$\mathbf{X}^{k+1} \leftarrow \mathbf{X}^k \cap \mathcal{K}(\mathbf{X}^k, \overline{x}^k), \ \ k = 0, 1, 2..., \ x^k \in \mathbf{X}^k \tag{4}$$

Сходимость данного метода гарантирована при выполнении условия

$$\rho(|I - \Lambda * \mathbf{L}|) < 1 - \text{спектральный радиус меньше единицы} \tag{5}$$

Частным случаем данного метода является линейный метод Кравчика, итерационная схема которого выглядит следующим образом:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \big(\Lambda * \mathbf{b} + (I - \Lambda * \mathbf{A}) * \mathbf{x}^k\big) \cap \mathbf{x}^k \tag{6}$$

$\mathbf{A}$ в данном случае является интервальной матрицей коэффициентов соответсвующей ИСЛАУ, а $\mathbf{b}$ - вектором свободных членов.
В случае линейности системы и выполнения условия $\eta = ||I - \Lambda * \mathbf{A}||_\infty \leq 1$ в качестве начального приближения можно взять брус

$$\mathbf{x}^0 = ([-\theta, \theta], ..., [-\theta, \theta])^T, \quad \text{где } \theta = \frac{||\Lambda \mathbf{b}||_\infty}{1 - \eta} \tag{7}$$

3 Результаты

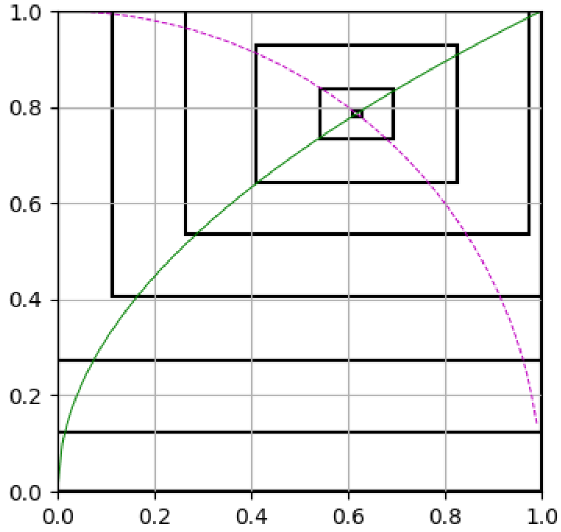

Рис. 1: Метод Кравчика - пересечение параболы и окружности

Получим таблицу результатов для некоторых $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$

№	$\mathbf{X}_2$	$\mathbf{X}_1$	ширина $\mathbf{X}_1$	ширина $\mathbf{X}_2$
1	[0, 1]	[0, 1]	1.0	1.0
2	$[0, 1]$	$[0.125, 1]$	0.875	1.0
3	$[0.111684, 1]$	$[0.406219, 1]$	0.0.5937	0.8883
4	$[0.266059, 0.973673]$	$[0.534126, 1]$	0.4658	0.7076
5	$[0.409351, 0.82672]$	$[0.64279, 0.92999]$	0.2871	0.4173
6	$[0.542195, 0.693873]$	$[0.735163, 0.83714]$	0.1020	0.1517
7	$[0.608239, 0.627829]$	$[0.779572, 0.79273]$	0.0132	0.0196
8	$[0.617871, 0.618197]$	$[0.786042, 0.786261]$	0.000219	0.0003264
9	$[0.618034, 0.618034]$	$[0.786151, 0.786151]$	$6.08 * 10^{-8}$	$9.06 * 10^{-8}$

4 Вывод

1. Полученные результаты подтверждают эффективность и сходимость интервального метода Кравчика для решения системы нелинейных уравнений. На каждой итерации метода границы решений сужаются, итерации продолжаются до достижения требуемой точности.

2. Точное решение системы $x = 0.6180339, y = 0.7861513$ совпадает с результатами, полученными методом. Таким образом, метод успешно находит корни системы нелинейных уравнений.

3. На 9 итерации метод дошел до $2.52 \cdot e^{-18}$ и $2.46 \cdot e^{-17}$ соответсвенно

4. Заметим, что сходимость метода обеспечивается выполнением условия $\rho(|I - \Lambda * \mathbf{L}|) < 1$ ($\rho = 0.75$), что подчеркивает важность выбора подходящих параметров и начальных условий для успешной работы метода.