

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ПЕТРА  
ВЕЛИКОГО

ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ВЫСШАЯ ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

**Отчет по лабораторной работе №2  
по дисциплине "Интервальный анализ"**

Выполнил:

Студент: Байрамов Самир

Группа: 5030102/00201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург  
2023 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Теория</b>	<b>2</b>
2.1	Распознающий функционал . . . . .	2
2.2	Достижение разрешимости ИСЛАУ путём изменения правой части . . .	2
2.3	Достижение разрешимости ИСЛАУ путём изменения матрицы . . . . .	3
2.4	Оценки вариабельности решения . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Результаты</b>	<b>4</b>
3.1	Максимум распознающего функционала . . . . .	4
3.2	Достижение разрешимости за счёт коррекции правой части . . . . .	4
3.2.1	Равномерное уширение . . . . .	4
3.2.2	Неравномерное уширение . . . . .	5
3.3	Достижение разрешимости за счёт коррекции левой части . . . . .	5
3.4	Сравнительный анализ . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Вывод</b>	<b>7</b>

# 1 Постановка задачи

Имеем ИСЛАУ:

$$\begin{cases} [2, 4] \cdot x_1 + [4, 6] \cdot x_2 = [5, 9] \\ 3 \cdot x_1 + [-6, -4] \cdot x_2 = [-1, 1] \\ [0.5, 1.5] \cdot x_1 = [1, 3] \\ [0.5, 1.5] \cdot x_2 = [0, 2] \end{cases}$$

Необходимо найти решения ЛЗД. Для этого нужно

- исследовать разрешимость ЛЗД (найти максимум распознающего функционала)
- коррекция ЛЗД
  - достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции правой части (равномерное/неравномерное)
  - достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции матрицы

## 2 Теория

### 2.1 Распознающий функционал

Распознающим функционалом называется функция

$$\text{Tol}(x) = \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad}(\mathbf{b}_i) - \left| \text{mid}(\mathbf{b}_i) - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\} \quad (1)$$

Пусть

$$T = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \quad (2)$$

и это значение достигается распознающим функционалом в некоторой точке  $\tau \in \mathbb{R}^n$ . Тогда

- если  $T \geq 0$ , то  $\tau \in \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$ , т.е. линейная задача о допусках для интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  совместна и точка  $\tau$  лежит в допусковом множестве решений.
- если  $T > 0$  то  $\tau \in \text{int } \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$ , и принадлежность  $\tau$  допусковому множеству решений устойчива к малым возмущениям данных - матрицы и правой части.
- если  $T < 0$  то  $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \emptyset$ , т.е. линейная задача о допусках для интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  несовместна.

### 2.2 Достижение разрешимости ИСЛАУ путём изменения правой части

**Равномерное уширение правой части ИСЛАУ**

Расширение вектора  $\mathbf{b}$  происходит путем его замены на вектор:

$$\mathbf{b} + K\mathbf{e}, \quad K \geq 0, \quad \mathbf{e} = ([-1, 1], \dots, [-1, 1])^T \quad (3)$$

Тогда

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b} + K\mathbf{e}) = T + K \quad (4)$$

Но  $\text{Arg max Tol}$  - не изменится (положение точки  $T$ )

### Неравномерное уширение правой части ИСЛАУ

Если линейная задача о допусках с матрицей  $\mathbf{A}$  и вектором правой части  $\mathbf{b}$  первоначально не имела решений, то новая задача с той же матрицей  $\mathbf{A}$  и уширенным вектором

$$(\mathbf{b}_i + K \cdot v_i \cdot [-1, 1])_{i=1}^m \quad (5)$$

в правой части становится разрешимой при  $K \geq |T_v|$ , где

$$T_v = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ v_i^{-1} \left( \text{rad}(\mathbf{b}_i) - \left| \text{mid}(\mathbf{b}_i) - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right) \right\} \quad (6)$$

Значение  $\text{Arg max Tol}$  - изменится

## 2.3 Достижение разрешимости ИСЛАУ путём изменения матрицы

Общая схема равномерного метода заключается в том, что необходимо модифицировать матрицу  $\mathbf{A}$  за счет ее замены на  $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$ , где  $\mathbf{E}$  состоит из  $\mathbf{e}_{ij} = [-e_{ij}, e_{ij}]$

Причем значения точечных величин  $\mathbf{e}_{ij}$  удовлетворяют двум условиям:

$$0 \leq \mathbf{e}_{ij} \leq \text{rad } \mathbf{a}_{ij} \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^n e_{ij} \tau = K, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad K > 0 \quad (8)$$

Если  $K \geq |T|$ , то тогда линейная задача о допусках с матрицей  $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E} = ([\mathbf{a}_{ij} - \mathbf{e}_{ij}, \bar{\mathbf{a}}_{ij} + \bar{\mathbf{e}}_{ij}])$  и правой частью  $\mathbf{b}$  становится разрешимой.

## 2.4 Оценки вариабельности решения

Абсолютной вариабельностью оценки называется величина

$$\text{ive}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{A \in \mathbf{A}} \text{cond } A \cdot \left\| \text{Tol}(x) \right\|_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\max \text{Tol}(x)}{\|\mathbf{b}\|} \quad (9)$$

Относительной вариабельностью оценки называется величина

$$\text{rve}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{A \in \mathbf{A}} \text{cond } A \cdot \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x) \quad (10)$$

## 3 Результаты

### 3.1 Максимум распознающего функционала

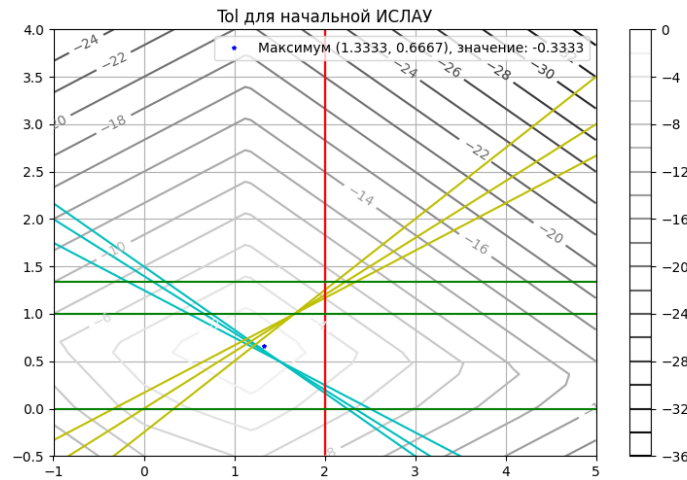


Рис. 1: Расположение максимума распознающего функционала

Максимум со значением  $T = -0.333$  расположен в точке  $\tau = (1.333, 0.6667)$ .

### 3.2 Достижение разрешимости за счёт коррекции правой части

#### 3.2.1 Равномерное уширение

Положим  $K = 1$ . Получается максимум со значением  $T = 0.6667$  расположен в точке  $\tau = (1.333, 0.6667)$ . При этом видим, что точка максимума осталась прежней.

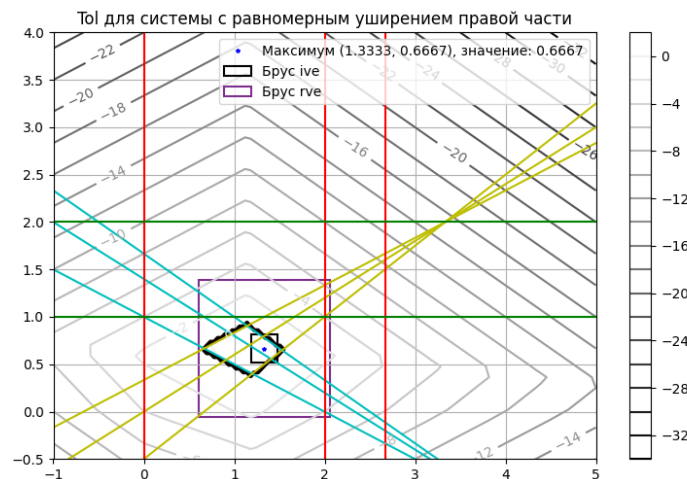


Рис. 2: Допусковое множество решений с равномерным уширением правой части

На данном рисунке черный квадрат имеет сторону  $2 \cdot \text{ive}$ , а фиолетовый -  $2 \cdot \text{rve}$ . Область обведенная черной линией - допустовое множество  
 $\text{ive} : 0.1473502$   $\text{rve} : 0.726363348$

### 3.2.2 Неравномерное уширение

Выберем произвольный вектор  $v = [0.5, 0.1, 1, 0.5]$  и постоянную  $K = 3$ .

Получается максимум со значением  $T = 0.724$  расположен в точке  $\tau = (0.96, 0.576)$ . При этом видим, что точка максимума сдвинулась.



Рис. 3: Допусковое множество решений с неравномерным уширением правой части

На данном рисунке черный квадрат имеет сторону  $2 \cdot \text{ive}$ , а фиолетовый -  $2 \cdot \text{rve}$ . Область обведенная черной линией - допустимое множество

$\text{ive} : 0.106272696$   $\text{rve} : 0.69755409$

### 3.3 Достижение разрешимости за счёт коррекции левой части

Для построения интервальной матрицы  $\mathbf{E}$  с уравновешанными интервальными элементами  $\mathbf{e}_{ij} = [-e_{ij}, e_{ij}]$  выбираем такие  $\mathbf{e}_{ij}$ , что:

$$\begin{cases} 0 \leq \mathbf{e} \leq 1 = \text{rad}(\mathbf{a}_{11}), \text{rad}(\mathbf{a}_{12}), \text{rad}(\mathbf{a}_{22}) \\ 0 \leq \mathbf{e} \leq 0.5 = \text{rad}(\mathbf{a}_{31}), \text{rad}(\mathbf{a}_{42}) \\ 1.333 \cdot \mathbf{e} + 0.666 \cdot \mathbf{e} = K \geq |T| = 0.333 \end{cases} \Rightarrow 0.1666 \leq \mathbf{e} \leq 0.5$$

сформируем матрицу

$$E = \begin{pmatrix} [-0.5, 0.5] & [-0.4, 0.4] \\ [-0.3, 0.3] & [-0.5, 0.5] \\ [-0.5, 0.5] & 0 \\ 0 & [-0.3, 0.3] \end{pmatrix} \quad (11)$$

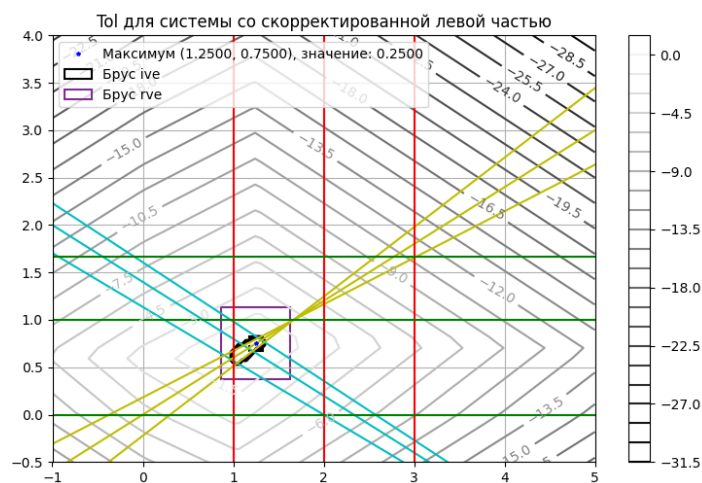


Рис. 4: Допусковое множество решений со скорректированной матрицей

На данном рисунке черный квадрат имеет сторону  $2 \cdot \text{ive}$ , а фиолетовый -  $2 \cdot \text{rve}$ . Область обведенная черной линией - допустимое множество  
 $\text{ive} : 0.068321425$      $\text{rve} : 0.3444088$

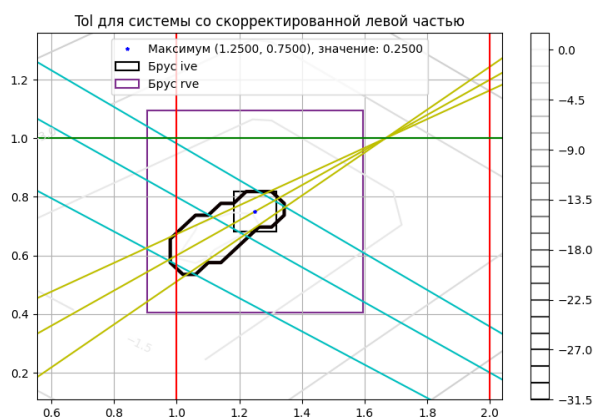


Рис. 5: Допусковое множество решений со скорректированной матрицей

### 3.4 Сравнительный анализ

Объект преобразования	$\tau$	max Tol	ive	rve	Образующие	Способ коррекции
Без изменений	(1.33, 0.667)	-0.333	-0.0846	-0.4170	-0.3333 -0.3333 -0.3333 0.3333	-
Правая часть	(1.33, 0.667)	0.667	0.1473	0.7263	0.6667 0.6667 0.6667 1.3333	Равномерно увеличим правой части с коэффициентом $K=1$
Правая часть	(0.96, 0.576)	0.724	0.1062	0.6975	0.7240 0.7240 2.4800 1.7870	Неравномерно увеличим правой части с коэффициентом $K=3$
Матрица	(1.25, 0.75)	0.25	0.0683	0.3444	0.4250 0.2500 0.2500 0.5990	Сужение матрицы с коэффициентом $K=1$

## 4 Вывод

1. После коррекции правой части равномерным уширением вектора  $\mathbf{b}$  безусловный максимум распознающего функционала  $Tol = 0.667$  в точке (1.333, 0.667), а форма поверхности распознающего функционала  $Tol$  не изменилась.  
Для неравномерного уширения видно, что формы поверхности и положения безусловных максимумов распознающего функционала  $Tol$  до и после неравномерного уширения вектора  $\mathbf{b}$  не совпадают.
2. Сравнивая данные коррекции, можно сказать, что неравномерное уширение дает меньшие значения вариабельности по сравнению с равномерным.
3. Квадрат  $rve$  на нашем примере не очень хорошо приближает допусковое множество решений, а вот квадрат  $ive$  почти полностью принадлежит  $\Xi_{tol}$ . И это очевидно, ведь мы имеем хорошую обусловленность матрицы ( $\text{cond}(\text{mid } \mathbf{A}) = 1.638$ ).