Семинар 3. Корпускулярно-волновой дуализм. Соотношение неопределенностей

Клименок Кирилл Леонидович

17.09.2020

1 Теоретическая часть

1.1 Корпускулярно-волновой дуализм

На прошлой неделе мы с вами говорили о том, что световая волна может проявлять свойства частицы-фотона и взаимодействовать с другими частицами, например рассеиваться на свободных электронах (эффект Комптона). А может ли это работать и в обратную сторону, когда частица также будет проявлять волновые свойства? Если ответить на этот вопрос положительно, то окажется, что можно будет наблюдать такие явления как интерференция и дифракция для «обычных» частиц. Но перед этим я предлагаю оценить масштабы длин волн, с которыми нам придется иметь дело.

Из прошлых недель мы знаем, что энергия и импульс фотонов связаны следующими соотношениями:

$$p = \frac{E}{c}; \quad E = \hbar\omega$$

Из этих двух соотношений мы вполне спокойно можем вытащить импульс и попреобразовывать его:

$$p = \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar k = \frac{h}{\lambda} \tag{1}$$

Здесь k — волновой вектор, λ — длина волны. Вот мы и получили необходимую нам связь. Теперь мы можем оценить характерные длины волн. Возьмем классический пример электрона, разогнанного в поле с напряжением $U = 100$ В, и подставим в полученное выражение:

$$\lambda = \frac{h}{m_e V} = \frac{h}{\sqrt{2m_e eU}} \approx \frac{10^{-34}}{\sqrt{10^{-31} \cdot 10^{-19} \cdot 10^2}} \text{ м} \approx 10^{-10} \text{ м}$$

Характерное число в 1 Å, получается, примерно совпадает с длиной волны рентгена, а он, как, я надеюсь, вы помните из оптики, отлично дифрагирует на кристаллических решетках твердых тел. Напомню основное соотношение при такой дифракции. Пусть пучок электронов (или рентгеновское излучение) падает на плоскость кристалла под углом скольжения θ, и расстояние между такими плоскостями — d. Тогда направление на максимумы интенсивности определяется соотношением Брэгга-Вульфа:

$$2d \sin\theta = n\lambda$$

Такой опыт по дифракции электронов был проведен Дэвиссоном и Джермером, за что в 1937 году Дэвиссону была присуждена Нобелевская премия.

В качестве еще одного доказательства волновой природы электрона можно привести эксперименты Hitachi (1989) или Баха (2013), которые, по своей сути, повторяли классический опыт Юнга с интерференцией на 2 щелях. Очень слабый ток электронов проходил через специальную фокусирующую систему, и в эксперименте отслеживалась точка попадания электрона на экран. Так как ток был очень слабый, можно было считать, что электроны проходили через систему по-одному. На самом экране в начале эксперимента казалось, что точки попадания случайны, но при накоплении статистики оказывалось, что здесь присутствуют полосы с большей переменной концентрацией электронов — то есть, опыт Юнга повторялся.

И вот тут становится по-настоящему интересно, что происходит, и на чем же интерферирует электрон. Здесь и заканчивается классическое представление об электроне как о частице с нарисованным минусом, и подключается чисто квантовое описание электрона как волнового пакета, который, проходя через 2 щели, находится в обеих и интерферирует сам с собой. Здесь я не претендую на хорошее и строгое описание, а пытаюсь максимально просто донести саму идею. Ссылка на оригинальную статью Баха с видео формирования интерференционной картины электронов: `http://stacks.iop.org/NJP/15/033018/mmedia`.

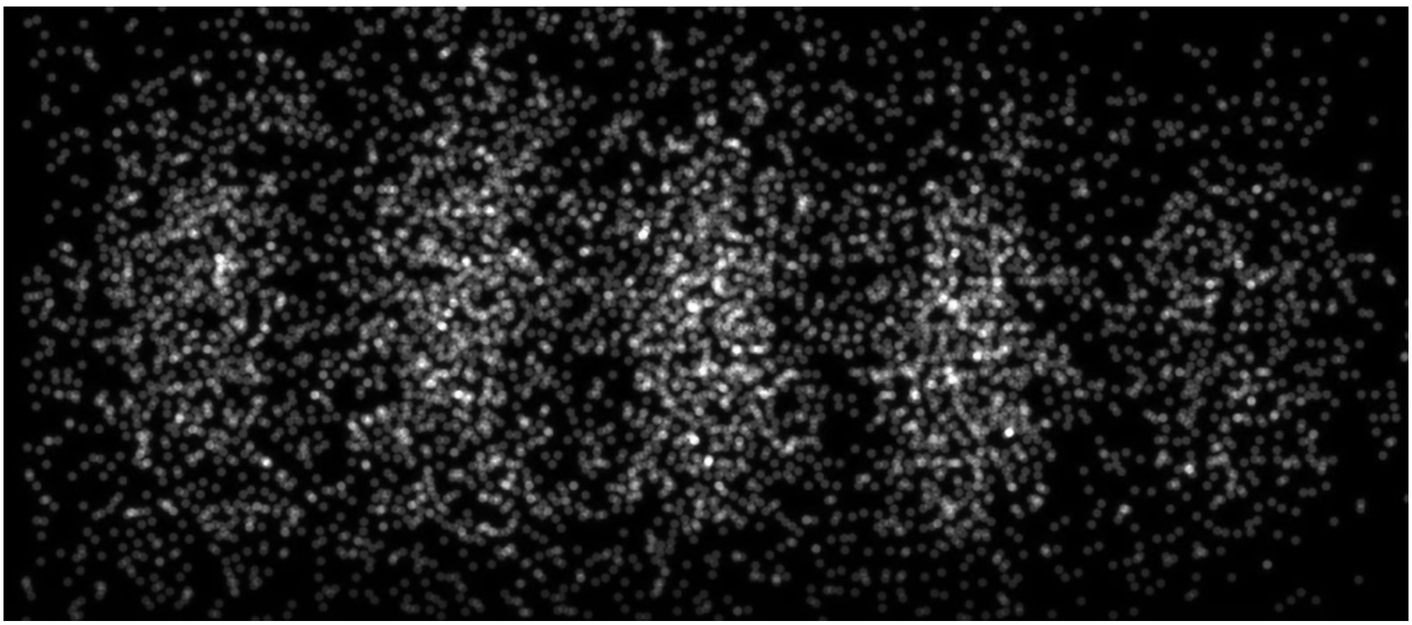

Рис. 1: Распределение попадания электронов в эксперименте Баха. Каждая точка соответствует задетектированному электрону.

1.2 Проблема измерения. Соотношение неопределенностей

С этими новыми «волновыми» электронами мы получили довольно занимательное противоречие нашему предыдущему опыту: как это так, электрон — и частица, и волна, и при этом проявляет только какое-то одно из свойств в зависимости от экспериментов. На деле, объяснить это достаточно просто, но нужно пойти к самым истокам нашего изучения физики, а именно к измерению. Рассмотрим простой пример измерения положения объекта в пространстве. Для этого нанесем в нашем пространстве сетку координат (или просто положим линейку) и осветим наш объект, чтобы мы могли увидеть, куда падает тень, и где сам объект относительно линейки. В классической физике и вашем 2-х летнем опыте физического практикума это кажется настолько естественным, что и в случае с отдельным электроном этот трюк вполне можно провернуть. На деле же, как только мы освещаем наш электрон, фотоны сталкивающиеся с ним, немного меняют его импульс, и он начинает куда-то двигаться. Аналогичная проблема возникает, если мы пытаемся измерить импульс — становится непонятно, где же конкретно этот электрон.

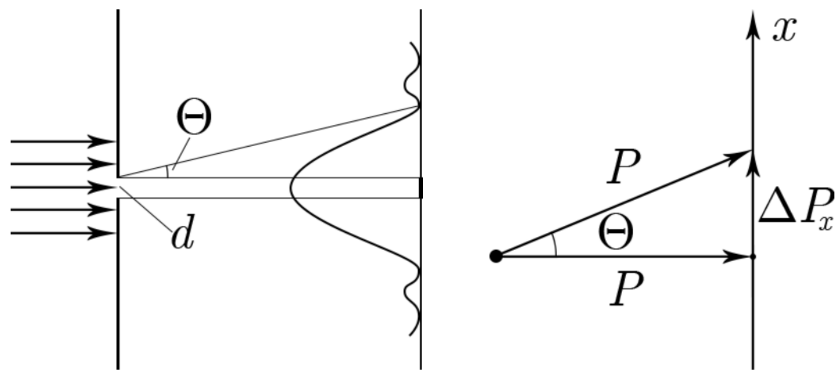

Рис. 2: Схема эксперимента по дифракции электронов на щели и для вывода соотношения неопределенностей.

Давайте рассмотрим простой пример с дифракцией электрона на отдельной щели определенной ширины. Пусть он летит на щель шириной d с импульсом p перпендикулярно ей. Это означает, что его длина волны $\lambda = h/p$, а из курса оптики, я надеюсь, вы помните, что направление на дифракционный минимум зависит от длины волны и ширины щели: $\sin\theta = \lambda/d$. То есть, у нашего электрона из-за щели появилась «неопределенная» составляющая импульса Δp, которая его и отклонила от своей начальной траектории. Из геометрии понятно, что $\sin\theta = \Delta p/p$, и отсюда окончательно можно сказать, что $d\Delta p = h$. А если мы будем рассматривать нашу щель как попытку локализовать электрон в определенном месте пространства, то ширина щели и будет, по сути, «неопределенностью» по координате. Окончательно мы можем записать соотношение неопределенностей следующим образом:

$$\Delta p_x \Delta x \sim h \tag{2}$$

Это соотношение прекрасно подходит для характерных оценок в задачах текущего семинара. Более точная запись соотношения неопределенностей представляет из себя связь дисперсий импульса и координаты, и записывается в форме Вейля:

$$\sigma_p^2 \sigma_x^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

И еще пара ремарок относительно полученных выражений. Во-первых, соотношение неопределенностей напрямую следует из волнового описания частиц и Фурье-анализа (пока я специально не акцентировал на этом внимания и не записывал ψ-функцию в явном виде, сейчас нам это не нужно). Но чтобы освежить в памяти смысл неопределённостей частота-время, я, как всегда, оставлю ссылку на видео 3Blue1Brown: `https://www.youtube.com/watch?v=MBnnXbOM5S4`. Во-вторых, довольно легко математическими преобразованиями получить не только соотношение импульс-координата, но и энергия-время: $\Delta E \Delta t \sim h$, если Δp и Δx — неопределенности в один и тот же момент времени, а в формуле для неопределенности по энергии сама энергия измеряется в разные моменты времени. То есть, в действительности присутствует огромная разница между физическими смыслами в двух разных соотношениях неопределенностей — для энергии и времени, и для координаты и импульса. Одно из самых ярких примеров использования этого соотношения — это нарушение закона сохранения энергии на масштабе времен Δt. Это нам понадобится, когда мы будем говорить о виртуальных частицах.

2 Практическая часть

2.1 Задача 2.15

Условие Чтобы получить пучок нейтронов, обладающих заданной энергией $E = 1$ эВ, используют брэгговское отражение первого порядка от кристалла LiF, для которого расстояние между плоскостями решетки $d = 2.32$ Å. На кристалл падает пучок нейтронов с различными энергиями. Оценить разброс нейтронов по энергиям в отраженном пучке, если его угловая ширина $\Delta\varphi = 0.1°$. Какую толщину кристалла D следует выбирать в этом эксперименте?

Решение На самом деле, эта задача больше на оптику, чем на кванты, так что давайте вспоминать все, что мы оттуда помним. Запишем условие Брэгга-Вульфа и оценим масштаб бедствия по углам отклонения:

$$\sin\varphi = \frac{\lambda}{2d}$$
$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} \approx 0.287 \text{ Å}$$
$$\sin\varphi \approx \varphi \approx 0.06$$

Как и должно было случится, мы получили малые углы. Теперь давайте сориентируемся, как будет влиять изменение угла на изменение энергии. Выше мы увидели следующую закономерность: $\lambda \sim \varphi \sim E^{-1/2}$. Отсюда и будет следовать:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\varphi}{\varphi} = \frac{\Delta E}{2E}$$

Выражаем из этого равенства $\Delta E = 2E\dfrac{\Delta\varphi}{\varphi} \approx 0.58$ эВ.

Остался не разобранным вопрос с толщиной. Она влияет на количество слоев и, соответственно, на количество отражений. То есть, перед нами простая дифракционная решетка с известной нам разрешающей способностью:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \leq R = mN = 1 \cdot \frac{D}{d}$$

Окончательно, $D = \dfrac{\lambda}{2\Delta\varphi} = 82$ Å.

2.2 Задача 2.43

Условие Оценить на основании соотношения неопределенностей радиус атома водорода в основном состоянии и энергию связи электрона в том же состоянии. Определить на основании таких же оценок размер двухатомной молекулы и энергию её основного состояния, рассматривая молекулу как одномерный гармонический осциллятор с собственной частотой ω_0 и приведенной массой μ.

Решение *Часть 1. Атом водорода.*

Для начала надо определиться с тем, что подставлять в соотношение неопределенностей. Тут, так как мы просто оцениваем, в качестве неопределенности координаты мы можем взять сам радиус атома, а качестве неопределенности импульса сам импульс: $\Delta x \sim r$; $\Delta p \sim p \Rightarrow p \cdot r = \hbar$. Теперь запишем полную энергию электрона в атоме водорода:

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}$$

Атом находится в основном состоянии, значит, в состоянии с минимальной энергией. Найдем минимум через производную энергии по времени:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\hbar^2 2r}{2mr^4} + \frac{e^2}{r^2} = 0 \Rightarrow \; = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0.53 \text{ Å}$$

Тогда энергия основного состояния:

$$E = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r} = -\frac{me^4}{2\hbar^2} = -13.6 \text{ эВ}$$

Что интересно, эта оценка дает точно совпадающий с теорией Бора результат.

Часть 2. Квантовый гармонический осциллятор.

За этим страшным названием скрывается лишь обыкновенная двухатомная молекула. Для начала, почему и здесь тоже надо применять соотношение неопределенностей, и почему эта штука не может обладать нулевой энергией? Все просто: если бы атомы в этой молекуле не колебались, то мы бы точно знали и координату каждого из них, и импульс (который, неожиданно, 0). Теперь собственно формулки. Полная энергия для такой молекулы, с учетом соотношения в форме Вейля:

$$E = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{kx^2}{2} = \frac{\hbar^2}{8\mu x^2} + \frac{\mu\omega_0^2 x^2}{2}$$

Аналогично первой части найдем минимум энергии, но для простоты будем считать производную не просто по координате, а по квадрату координаты, так как минимумы будут совпадать:

$$\frac{dE}{dx^2} = -\frac{\hbar^4}{8\mu x^4} + \frac{\mu\omega_0^2}{2} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0} \Rightarrow E = \frac{\hbar\omega_0}{2}$$

Этот результат, оказывается, также точно совпадает со строгим решением задачи о нулевом уровне энергии квантового гармонического осциллятора.

2.3 Задача 2.31

Условие Предполагая, что ядерные силы между нуклонами обусловлены обменом квантами ядерного поля — виртуальными пионами, оценить радиус Δr действия ядерных сил, если известно, что энергия покоя пионов $m_\pi c^2 \approx 140$ МэВ.

Решение Вот тут нам и пригодится соотношение неопределенностей энергия-время. Что это за пионы, и о чем идет речь в задаче? Когда мы говорим о взаимодействии, мы рассматриваем этот процесс как обмен какими-то частицами. Как работает электромагнитное взаимодействие? Есть тело, которое заряжено. Оно испускает квант электромагнитного излучения — фотон, он летит к другому заряженному телу, которое его поглощает и тем самым узнает о первом теле. При этом второе тело также посылает фотон, который поглощает первое тело. Это работает не только с электромагнитным, но и с другими взаимодействиями, в частности с сильным взаимодействием в атоме. А частицы такого взаимодействия называются пионами или π-мезонами.

Теперь, когда мы разобрались с тем, что происходит, давайте запишем соотношение неопределенностей. Неопределенность по энергии — это и есть масса нашего пиона, неопределнность по времени — время его жизни. А максимальная скорость, с которой частица может перемещаться в нашим мире это скорость света. Отсюда и получим оценку на характерный радиус сильного взаимодействия:

$$R \leq c\Delta t = c\frac{h}{\Delta E} = c\frac{h}{m_\pi c^2} \approx 2 \cdot 10^{-13} \text{ см}$$

2.4 Комментарии к задачам из задания

Нулевки В первой просто подставить в формулы, вторая, по сути, решена в 2.2.

Задача 2.10 Решена в задачнике.

Задача 2.15 Решена, см. 2.1.

Задача 2.26 Задачка ультра-релятивистская, так что надо использовать формулу для полной энергии именно как корень, а дальше все получится.

Задача 2.30 Часть решения я демонстрировал в теоретической части, а часть это просто оптика.

Задача 2.38 Задача подозрительно напоминает часть 1 из 2.2.

Задача 2.44 Решена в задачнике.