Семинар 1. Предпосылки квантовой механики. Законы излучения абсолютно черного тела.

Клименок Кирилл Леонидович

13.06.2021

1 Теоретическая часть

1.1 Предпосылки возникновения «неклассической» теории

За прошлые 2 года обучения мы с вами рассмотрели основные разделы классической физики, а именно: механику, термодинамику, электричество и оптику, и по состоянию на текущий момент мы остановились примерно в том же месте, что и ученые конца 19 века. Кажется, что основные законы существования мира известны, и можно смело с их помощью объяснять все происходящие вокруг явления. К сожалению, это не совсем так, и вот ряд проблем, с которыми не очень понятно что делать.

Модель атома Резерфорда Опыт Резерфорда по рассеянию альфа-частиц на атомах тонкой фольги известен нам еще со школы, но стоит напомнить его основной вывод: положительный заряд и почти вся масса атома сосредоточены в его ядре, а характерные масштабы ядра много меньше масштабов атома. Но в сумме атом нейтрален, а это значит, что электроны «вращаются» вокруг ядра по каким-то траекториям. И вот оно противоречие: если электрон движется по финитной орбите к поле ядра, то у него есть ускорение, и он должен излучать что-то, как и любая уважающая себя заряженная частица, и в конечном итоге просто упасть на ядро, и все. Этого не происходит в реальном мире. Как это объяснить мы рассмотрим в семинаре 6.

Линейчатые спектры излучения и поглощения атомов При исследовании спектров излучения или поглощения различных материалов оказалось, что некоторые из них излучают или поглощают только определенные длины волн, а не все возможные. Это тоже проблема, у которой нет нормального классического обоснования. Ее решение тесно связано с первой проблемой, и она тоже будет обсуждена в 6 семинаре.

Внешний фотоэффект Явление, при котором свет выбивает электроны из катода вакуумной лампы было известно еще с 1839 года, но когда в нем начали разбираться, оказалось, что результаты противоречат классическому представлению. Казалось бы, чем больше интенсивность света, тем больше фототок независимо от длины волны, но в реальности есть строгая граница по длине волны (красная граница фотоэффекта), когда фототок вообще прекращается, с какой интенсивностью на фотокатод бы не светили. Эта проблема будет обсуждаться нами во 2 семинаре.

Равновесное тепловое излучение На этом явлении мы остановимся подробнее именно сегодня и обсудим, что же здесь не так.

1.2 Модель равновесного теплового излучения абсолютно твердого тела

Что-то слишком умный заголовок получается, не находите? Давайте разберемся, что же это за зверь такой, и с чем его едят. Во-первых, с классической точки зрения, почему тело излучает? Все просто: есть заряженные частицы, они движутся с ускорением, вот нам и излучение. Хорошо, но с чего вдруг они движутся? Ещё проще — тепловое движение. А если вспомнить, что, вообще-то, тела состоят из молекул, которые могут быть еще и полярными, то все вообще встает на свои места. Или еще нет? Если так, вот пример того, где мы это тепловое излучение можем видеть: разогреем железку до достаточно высокой температуры, около 500 градусов Цельсия — она начнет светиться красным, будем повышать температуру дальше — получим желтый, а затем и белый цвет свечения. Или еще более жизненный пример — обычная лампа накаливания. Температура вольфрамовой нити там около 2500 К — именно поэтому она и светится. И последний пример — это банально мы с вами. Если вспомнить актуальную пандемию и измерение температуры на входе в любые учреждения, то принцип работы термометра там точно такой же, правда мы с вами излучаем не в видимом, а в инфракрасном диапазоне.

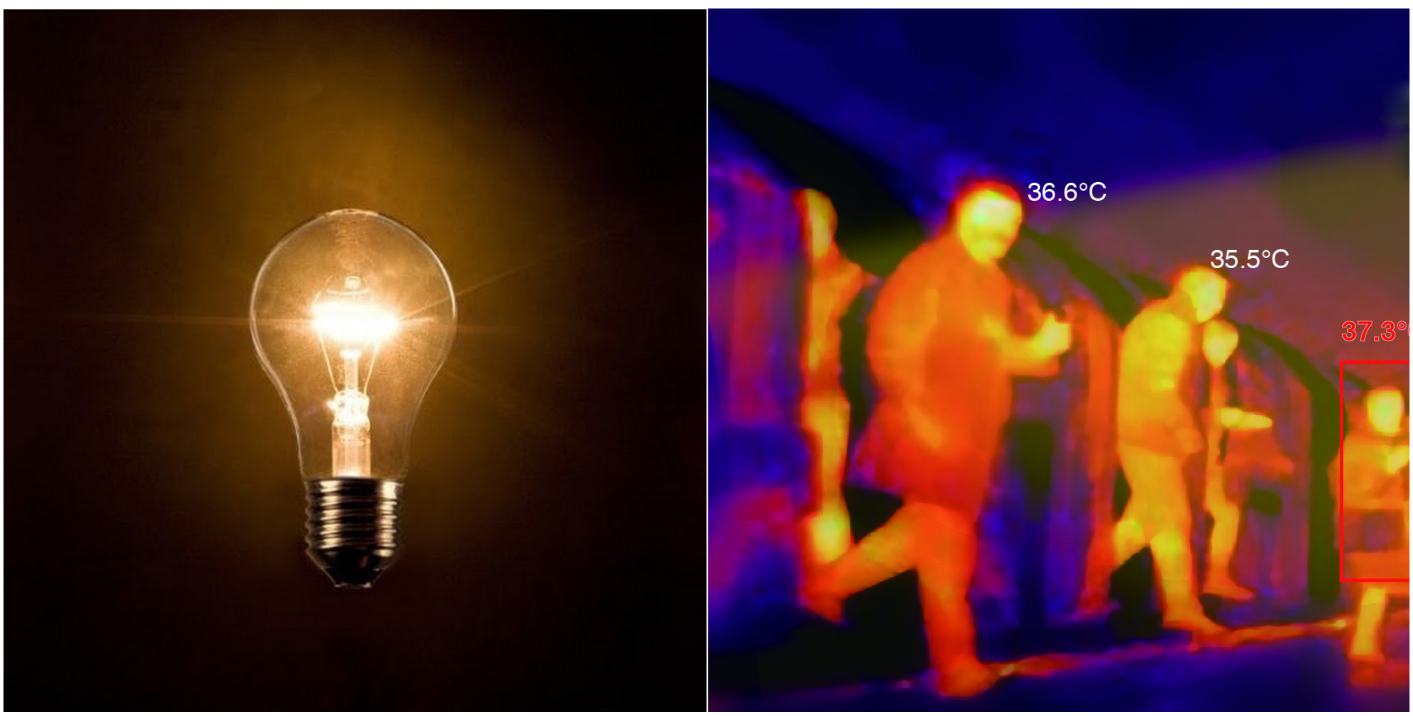

Рис. 1. Примеры равновесного теплового излучения

Теперь давайте разберемся с абсолютно черным телом или АЧТ. Во-первых, что это? АЧТ – тело, которое поглощает всё падающее излучение и равновесным образом переизлучает его. Для того, чтобы казаться умнее, введем несколько характеристик тела по отношению к излучению:

- Поглощательная способность: $a(\omega) = \dfrac{W_{\text{погл}}}{W_{\text{пад}}}$ – отношение всей поглощенной энергии ко всей падающей энергии излучения, $a_{\text{АЧТ}} = 1$

- Излучательная способность: $b(\omega) = \dfrac{W_{\text{изл}}}{W_{\text{АЧТ, изл}}}$ – отношение всей энергии, излучаемой телом, ко всей энергии излучаемым АЧТ, $b_{\text{АЧТ}} = 1$

- Отражательная способность: $1 - a(\omega)$ – какая доля энергии отражается от тела

Из основного, что по этим характеристикам нужно вынести — поглощательная способность всегда равна излучательной, даже если это какое-то обычное тело, а не абсолютно черное. Предлагаю вам самостоятельно подумать, почему, если это не так, можно собрать вечный двигатель.
Теперь построим простейшую модель абсолютно черного тела. Она представляет из себя полую камеру с нагретыми стенками, которые излучают и поглощают свет. На самом деле, идея такой камеры чем-то очень сильно схожа с обычным идеальным газом в сосуде, только там частицы упруго отражаются от стенок, а здесь поглощаются и переизлучаются обратно. Это представление упростит нам жизнь, потому что мы в явном виде из такой аналогии получим все, что нам надо. Оговоримся, что полость большая, все излучение изотропно, и дело происходит в тепловом равновесии. Также, площадка, через которую излучение проходит наружу, мала и не влияет ни на что.

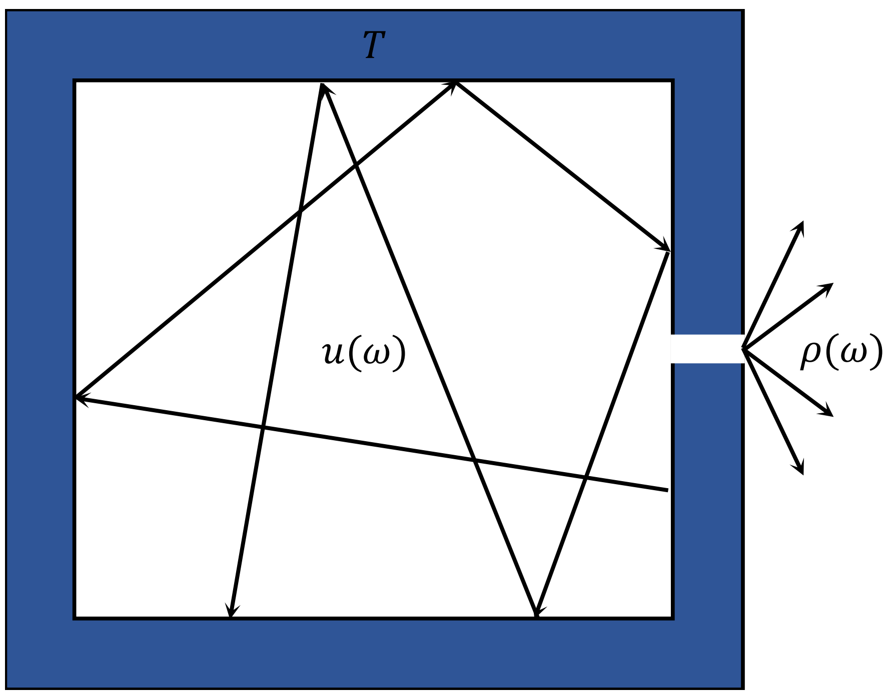

Рис. 2. Модель абсолютно черного тела. T — температура до которой нагреты стенки, $u(\omega)$ — плотность энергии излучения внутри полости, $\rho(\omega)$ — спектральная плотность излучения с единицы площади.

Введем 2 характеристики, которые мы будем использовать для описания этого излучения, а именно: плотность энергии излучения внутри полости $u(\omega) = \dfrac{dE}{d\omega}$ и спектральную плотность изучения, которую видит наблюдатель с единицы площади $\rho(\omega) = \dfrac{dE/d\omega}{dSdt}$. А теперь, чтобы их связать, нужно всего лишь проинтегрировать по времени и по всему телесному углу, из которого приходит излучение в отверстие. Ничего не напоминает? Мы делали подобное для частиц, которые бьются о единичную площадку стенки, когда говорили о распределении Максвелла во 2 семестре, только $u(\omega)$ станет здесь, по сути, концентрацией, а $\rho(\omega)$ - тем самым потоком на стенку. И для связи нужно лишь определиться со скоростью, но тут все просто: у излучения это скорость света. В результате имеем:

$$\rho(\omega) = \frac{cu(\omega)}{4} \tag{1}$$

Осталось разобраться с последним вопросом, а именно, сколько вообще волн в нашем излучении попадает в диапазон частот $d\omega$. Вот тут нам понадобится вспомнить одну из самых плохо запоминаемых тем 3 семестра, а именно резонаторы. Я надеюсь, что что-то еще всплывает в памяти, что не всякую волну можно запихать в нашу коробку из-за граничных условий (нуля поля E на стенках). Тогда, для простоты, будем считать коробку кубической со стороной L, и ограничения на все возможные волновые вектора можно будет записать как:

$$k_x = \frac{\pi A}{L}, k_y = \frac{\pi B}{L}, k_z = \frac{\pi C}{L}; A, B, C \in \mathbb{N}$$

$$\omega^2 = k^2c^2 \Rightarrow A^2 + B^2 + C^2 = \frac{\omega^2 L^2}{c^2\pi^2}$$

То есть, если мы нарисуем пространство состояний для всех возможных волн, то поверхность постоянной частоты будет сферой, а для подсчета всех волн на интервале частот $d\omega$ будет пропорционально сферическому слою, в который попадет некоторое количество состояний. Единственная оговорка, про которую надо сказать: характерные частоты, на которое мы смотрим — вообще все возможные, и поэтому дискретные точки в этом пространстве мы можем просто заменить непрерывным распределением. Тогда:

$$dN = \frac{1}{8}4\pi R^2 dR \sim \omega^2 d\omega \Rightarrow \frac{dN}{d\omega} \sim \omega^2 \tag{2}$$

Тогда, по теореме о равнораспределении по степеням свободы, каждая волна имеет kT энергии с 2 поляризациями и, если мы попытаемся посчитать всю энергию теплового излучения, то есть проинтегрировать:

$$E = \int\limits_0^{+\infty} 2kT\frac{dN}{d\omega}d\omega \to \infty$$

Мы получим расходимость. Эта проблема называется «ультрафиолетовой катастрофой». Дело в том, что в реальности, конечно, нет никаких бесконечных энергий, и при измерении спектральной плотности именно в зоне ультрафиолетовых волн начинается расходимость классической теории и эксперимента.

1.3 Формула Планка

В чем же заключался шикарный подгон Планка для решения этой проблемы? Он решил, что при колебаниях электромагнитного поля на данной частоте может быть запасено только целое число квантов колебаний $E_n = n\hbar\omega$. Тогда, в тепловом равновесии все должно быть распределено по Больцману, и средняя энергия для излучения на данной частоте уже не просто kT, а вот это:

$$\langle E \rangle = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} E_n \exp\left(-\frac{n\hbar\omega}{kT}\right)}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{n\hbar\omega}{kT}\right)} = \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}$$

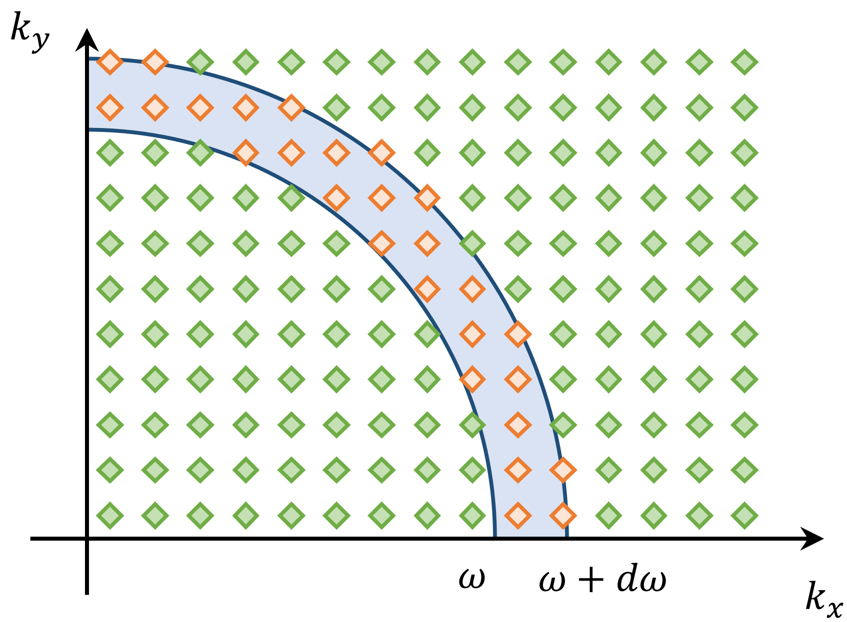

Рис. 3. Двумерный срез пространства всех возможных существующих в резонаторе волн. Точки соответствуют разрешенным состояниям ($A = 1, 2, ...; B = 1, 2, ...$), дуги окружностей — поверхность постоянной частоты. Те волны, которые попадают в интервал частот $d\omega$ выделены красным.

Честный расчет этих сумм можно также посмотреть во 2 семестре в теме о статсуммах или посчитать самостоятельно, если увидеть убывающую геометрическую прогрессию. Давайте исследуем это выражение для случая, когда энергия кванта излучения много больше и много меньше тепловой:

$$\hbar\omega \ll kT \Rightarrow \langle E \rangle = kT \text{ классический предел}$$

$$\hbar\omega \gg kT \Rightarrow \langle E \rangle = \hbar\omega \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right) \text{ случай высоких частот}$$

Как видно из этого выражения, никаких проблем с расходимостью при больших частотах больше нет, ведь там все спадает по экспоненте. Теперь мы можем спокойно записать спектральную плотность излучения или, другими словами, формулу Планка:

$$\rho(\omega)d\omega = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^2\left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1\right]}d\omega \tag{3}$$

$$\rho(\lambda)d\lambda = \frac{\pi hc^2}{\lambda^5\left[\exp\left(\frac{\hbar c}{\lambda kT}\right) - 1\right]}d\lambda \tag{4}$$

Отличия степеней частоты и длины волны связаны с тем, что мы заменяем не только саму переменную, но и дифференциал, по которому мы будем интегрировать.

Построим графики этих функций для разных температур (см. рисунок 4). Как видно из рисунка, у них есть максимум, по которому можно легко оценить характерную длину волны, которую

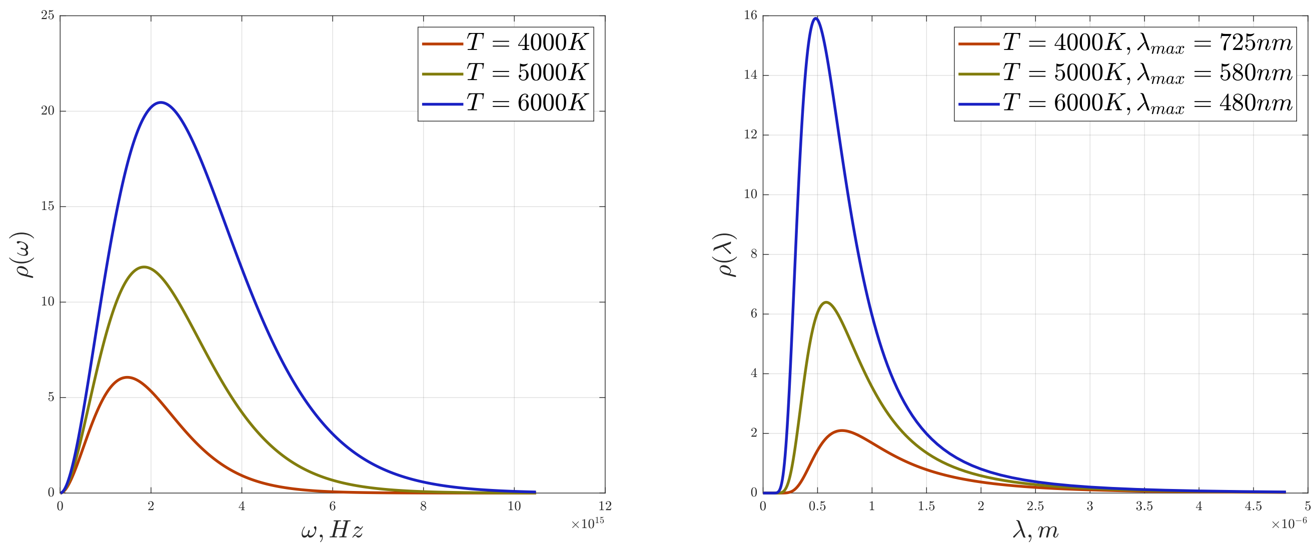

Рис. 4. Формулы Планка для разных температур. Слева представлена зависимость спектральной плотности излучения от циклической частоты, справа — от длины волны. Цвет линий соответствует характерной длине волны с максимальной спектральной плотностью.

излучает тело данной температуры. При этом, с ее изменением этот максимум смещается. Это смещение называют законом смещения Вина, и оно описывается уравнением:

$$\lambda_{max} = \frac{2.9 \cdot 10^6}{T[\text{K}]} \text{ нм} \tag{5}$$

И последнее по теории, что нам здесь нужно выяснить, это полная мощность излучения, или интегральная светимость. Для этого просто проинтегрируем функцию Планка по всем частотам и получим закон Стефана-Больцмана:

$$P_{total} = \int\limits_0^\infty \rho(\omega) d\omega = \int\limits_0^\infty \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2 \left[\exp\left(\dfrac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1\right]} d\omega = \sigma T^4 \tag{6}$$

Здесь $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}^4}$ — постоянная Стефана-Больцмана.

2 Практическая часть

2.1 Задача 0-1-1

Условие Вследствие повышения температуры положение максимума спектральной энергетической светимости абсолютно черного тела переместилось с 2 мкм на 1 мкм. Во сколько раз изменилась его интегральная энергетическая светимость?

Решение Это задачка на подстановку в 2 формулы: закон смещения Вина (5) и закон Стефана-Больцмана (6). Из первого найдем отношение температур и, зная его, найдем отношение светимостей:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda} \Rightarrow \frac{P}{P_0} = \frac{T^4}{T_0^4} = \frac{\lambda_0^4}{\lambda^4} = 2^4 = 16$$

2.2 Задача 0-1-2

Условие Оценить давление теплового излучения во внутренней области Солнца, где температура равна $1.3 \cdot 10^7$ К.

Решение Здесь нам нужно что-то знать про давление фотонного газа. Естественно, если покопаться в термодинамических потенциалах, подифференцировать их и немного поколдовать, то в явном виде можно получить формулу для давления. Естественно, здесь мы не будем этим заниматься, а максимально упростим себе жизнь путем аналогии с идеальным газом. Для него из молекулярно кинетической теории известны формулы для давления:

$$p = \frac{1}{3} nm\langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} n \langle E \rangle$$

Здесь явно видно, что давление это не что иное, как объемная плотность энергии, а коэффициент, который появляется в формуле, получается из 3-мерной геометрии нашего пространства. Тогда, просто по аналогии с этой формулой, давление фотонного газа выражается через объемную плотность энергии $u(\omega)$ с коэффициентом 1/3. Теперь можно спокойно выписывать все, что необходимо:

$$p = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{3} u(\omega) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{4}{3} c\rho(\omega) = \frac{4}{3} c\sigma T^4 = 6.5 \cdot 10^{29} \text{ Па}$$

2.3 Задача 1.22

Условие Спектр излучения космического рентгеновского источника соответствует спектру АЧТ. Максимум плотности излучения соответствует $\lambda_{max} = 2$ Å, а суммарная по спектру плотность потока на Земле равна $j = 10^{-11}$ Вт/см^2. Расстояние от источника до Земли $L = 1.3 \cdot 10^4$ световых лет. Оценить диаметр источника.

Решение Это задача на банальный закон сохранения энергии. С одной стороны запишем, какую энергию излучает источник со своей поверхности и приравняем это к той энергии, которая оказывается на сфере с радиусом L. А максимальная длина волны нужна для того, чтобы найти характерную температуру источника:

$$\sigma T^4 \cdot 4\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = j \cdot 4\pi L^2$$

$$T = \frac{0.29 \text{ Å}}{\lambda_{max}} \approx 1.5 \cdot 10^7 K$$

Окончательно, $D \approx 15.5$ км.

2.4 Задача 1.23

Условие АЧТ подвешено в вакуумной установке так, что через оптическое окно на него падает солнечный свет. Если стенки установки охладить до температуры $T_{ст1} = 77$ К, то тело будет иметь температуру $T_1 = 275$ К. Какова будет температура тела T_2, если $T_{ст2} = 295$ К?

Решение Разберемся с установкой. Абсолютно черное тело с некоторой температурой подвешено в вакуумной камере, оно за счет обмена излучением взаимодействует со стенками. Помимо прочего, есть еще и поток излучения от Солнца Φ, который тоже надо учитывать. С учетом теплового равновесия эти потоки, которые падают на тело, надо приравнять к потоку, который тело испускает:

$$S_{тела}\sigma T_{ст1}^4 + \Phi = S_{тела}\sigma T_1^4$$
$$S_{тела}\sigma T_{ст2}^4 + \Phi = S_{тела}\sigma T_2^4$$

Вычтем из одного из уравнений другое и получим выражение для T_2:

$$T_2^4 = T_1^4 + T_{ст2}^4 - T_{ст1}^4 = 340K$$

2.5 Задача 1.38

Условие Напряжение в сети возросло на 5 %. На сколько процентов увеличится освещенность, создаваемая вакуумной лампой накаливания с температурой нити $T = 1500$ К на длине волны 500 нм? Нить можно считать абсолютно черным телом. Рассмотреть случай, когда $R(T) = const$ и $R(T) = R_0 + \alpha(T - T_0)$.

Решение Для начала, сделаем общие для этих случаев выкладки. Первое: что от нас хотят? Освещенность на определенной длине волны это просто $\rho(\lambda)$, с этим и будем работать. Второе: я не хочу тянуть за собой всю формулу Планка и попытаюсь ее упростить в зависимости от значения показателя экспоненты. Для этого сравним $hc/\lambda \sim 10^{-19}$ и $kT \sim 10^{-21}$. Видно, что случай существенно квантовый, и экспонента забьет единичку. Тогда:

$$\rho(\lambda) \sim \exp\left(-\frac{hc}{\lambda kT}\right) \Rightarrow \ln\rho(\lambda) = -\frac{hc}{\lambda kT} \Rightarrow \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{hc}{\lambda kT}\cdot\frac{\Delta T}{T}$$

То есть, для того, чтобы решить задачу, нужно лишь по относительному изменению напряжения найти относительное изменение температуры, которое повлечет изменение интегральной светимости лампы. Делается это очень просто: мощность, подаваемая на лампу, меняет излучаемую мощность. Запишем эту пропорциональность: $\dfrac{V^2}{R} \propto T^4$. Тогда:

$$\text{Случай } R(T) = const \Rightarrow V^2 \propto T^4 \Rightarrow 2\frac{\Delta V}{V} = 4\frac{\Delta T}{T}$$
$$\text{Случай } R(T) \propto T \Rightarrow V^2 \propto T^5 \Rightarrow 2\frac{\Delta V}{V} = 5\frac{\Delta T}{T}$$

Именно эти соотношения и надо поставить в полученную в начале формулу.

2.6 Комментарии к задачам из задания

Нулевки Решены, см. выше.

Задача 1.22 Решена, см. выше.

Задача 1.26 Землю здесь вполне спокойно можно считать АЧТ, и нужно просто записать баланс энергий: сколько пришло от Солнца (попало на Землю) и сколько излучилось с поверхности Земли.

Задача 1.30 Закон Стефана-Больцмана в явном виде.

Задача 1.38 Решена, см. выше.

Задача 1.44 Вывод закона Стефана-Больцмана, но не для всех частот, а только для некоторых. Интеграл, который там получится, можно взять численно в вольфраме или забить и оценить его.

Задача 1.50 Решена в задачнике, плюс отсылки на прошлый семестр. Посмотрим, как кто помнит оптику.