Семинар 10. Ядерные реакции

Клименок Кирилл Леонидович

13.06.2021

1 Теоретическая часть

Мы уже поговорили про распады, но, к сожалению или к счастью, этим ядерный мир не ограничивается, и сегодня мы посмотрим на то, что происходит, когда ядра разного состава могут взаимодействовать между собой.

1.1 Сечение реакции

Начнем с очень простой модели, которую мы уже рассматривали в рамках термодинамики во втором семестре, а именно простое столкновение шариков между собой. Как же это связанно с ядреными реакциями? Самым прямым образом: чтобы ядерная реакция произошла, 2 ядра должны как минимум столкнуться — вот для этого мы и можем ввести сечение. Смысл сечения как раз и показывает вероятность той или иной реакции пройти, а размерность совпадает с размерностью площади.

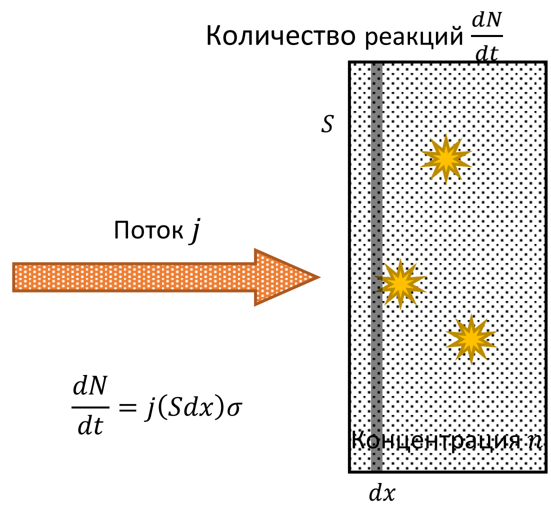

Рис. 1. Схема для вывода сечения реакции через налетающий поток частиц

Теперь опять добавим щепотку математики для картинки выше. Пусть у нас есть поток налетающих частиц j и мишень с концентрацией ядер n. Посмотрим, сколько реакций за единицу времени dN/dt будет происходить. Очевидно, что скорость будет пропорциональна налетающему потоку и количеству ядер в слое, где мы рассматриваем реакции $nSdx$, но тогда, чтобы соблюсти размерность, нам как раз и надо домножить на что-то с размерностью площади — это и будет сечение. То есть:

$$\frac{dN}{dt} = j(nSdx)\sigma$$

Естественно, измерять сечения в квадратных метрах в микромире неудобно, и вводят единицу «барн», которая равна 10^{-24} см^2.

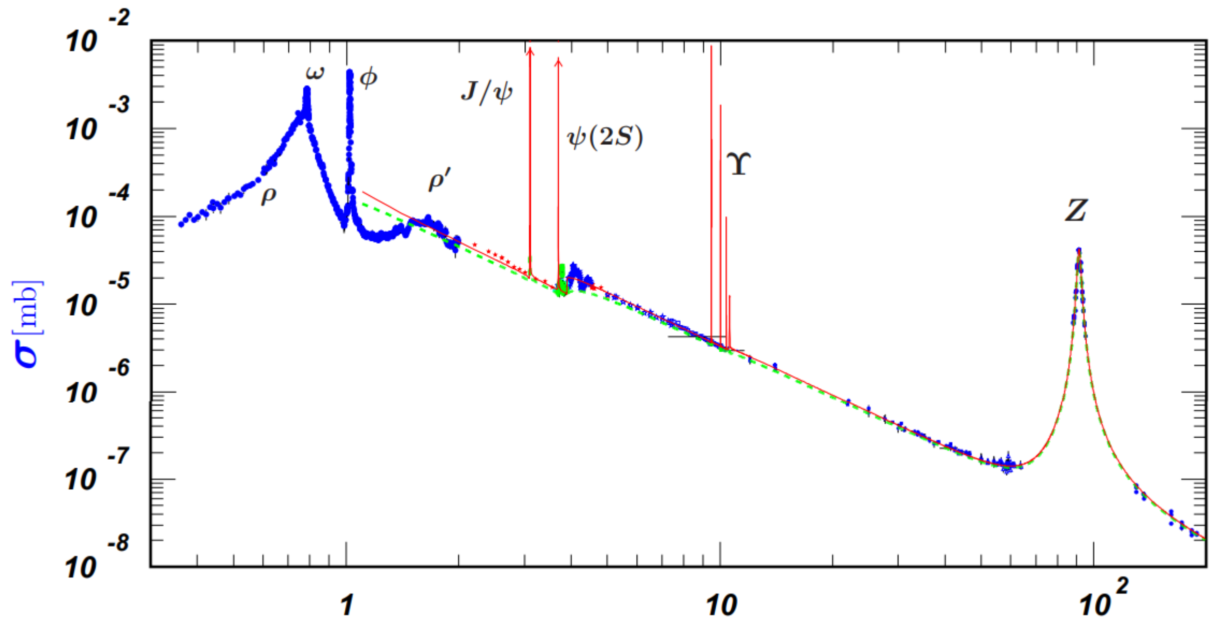

Рис. 2. Зависимость сечения реакции от энергии налетающих частиц

Теперь давайте посмотрим на характерную картиночку для зависимости сечения реакции от энергии налетающих частиц. Мы увидим 2 особенности:

- Наличие около-линейного спада во всех диапазонах энергий
- Какие-то очень похожие на резонанс пики

Вот именно их мы и попытаемся описать в рамках наших моделей.

1.2 Нерезонансные реакции. Закон Бете

Как обычно, нам нужно собрать какую-то модельку, которая бы как-то описывала, что вообще происходит с ядром при реакции. Идея очень напоминает идею переходного комплекса в химии, а если говорить по-простому, то это идея составного ядра. Суть ее в том, что налетающее ядро или частица попадает внутрь ядра, образуется большая нестабильная структура, которая в дальнейшем может распасться на что-то. И то, на что распадается это составное ядро, называется каналом реакции:

$$a + A \to P^* \to \begin{cases} A + a \text{ «упругий канал»} \\ B + b \text{ другие каналы} \\ C + c \text{ другие каналы} \end{cases}$$

Теперь давайте посмотрим, что происходит с частицей, которая влетает в ядро. Из-за того, что ядро это потенциальная яма с глубиной порядка $U_0 \sim 100$ МэВ, а налетающая частица представляет из себя волну де Бройля, то это должно вам напомнить задачу о пролете частицы над ямой из семинаров 4-5, ведь для нее есть возможность и отразиться от ямы. Тогда окончательно мы можем записать сечение как произведение вероятности «попасть» в ядро и вероятности пройти через него:

$$\sigma \approx 4\pi(\lambda + R)^2 D(E) = 4\pi(\lambda + R)^2 \frac{4k\kappa}{(k+\kappa)^2} \approx 16\pi(\lambda + R)^2 \sqrt{\frac{E}{U_0}}$$

$$\lambda \sim \frac{1}{p} \sim \frac{1}{\sqrt{E}}$$

$$\sigma \sim \frac{\sqrt{E}}{E} \sim \frac{1}{\sqrt{E}} \sim \frac{1}{v}$$

Здесь, как и раньше, $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ и $\kappa = \sqrt{\frac{2m(U_0+E)}{\hbar^2}}$, v — скорость налетающей частицы. Как нам это интерпретировать? Все максимально просто и имеет классическую аналогию с пулей и мишенью. Если скорость пули маленькая, то она застревает в мишени, а если большая — прошивает ее насквозь и улетает куда-то дальше.

1.3 Резонансные реакции. Формула Брейта-Вигнера

Так, общий тренд мы уловили, а теперь давайте обсудим, что делать с резонансами. Во-первых, разберемся, почему они физически появляются. Тут все просто: если резонанс есть, это означает, что мы так угадали энергию налетающей частицы, что наше составное ядро какое-то время может существовать само. Почему же тогда у нас могут быть разные по ширине резонансные пики? Тут все еще проще: есть соотношение неопределенностей энергия-время $E\tau \approx \hbar$ и получается, что ширина линии обратно пропорциональна времени жизни. Теперь, что же с точки зрения математики? Здесь мы не будем выводить формулу, а просто запишем ее по аналогии со структурой резонансной линии из задачек про колебания:

$$\sigma_{ab} = \pi\lambda^2 \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{(E-E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

$$\Gamma = \Gamma_a + \Gamma_b + \dots$$

$$\frac{\Gamma_a}{\Gamma_b} = \frac{\tau_b}{\tau_a}$$

Теперь разбираемся с буквами в этой формуле. Первый множитель с длиной волны нужен нам чтобы совпасть по размерности, и идея из закона Бете сохраняется. Разность $E - E_0$ тоже достаточно понятна — просто положение резонанса на энергии E_0 и энергия налетающей частицы E. Теперь с буквами Г. Они имеют размерность энергии и несут в себе смысл обратных времен составного ядра, а индекс соответствует каналу, по которому оно распадается (опять же, это берется из соотношения неопределнностей $\Gamma\tau \approx \hbar$)

1.4 Ядерные реакторы

Тут должен был быть разговор про цепные ядерные реакции и то, как реактор устроен и управляется, но все задачи из задания по этой теме в задачнике решены. Из основных идей, которые надо сказать, это написать саму реакцию деления ядра урана:

$$n +^{235} U \to^{92} Kr +^{141} Ba + 3n$$

Мы видим, что при делении появляется больше нейтронов, чем в нее влетает. Таким образом можно сказать, что один нейтрон может породить цепную реакцию деления урана. Такая реакция есть и возможна в атомной бомбе, и проблема в том, что она неконтролируема. Если же мы посмотрим на вылетевшие нейтроны, то они будут с характерной энергией для ядра порядка МэВ, и их нужно будет замедлить, чтобы повысить вероятность провзаимодействовать с ядром урана (там нужна энергия нейтронов порядка эВ). Для этого можно использовать или тяжелую воду, или графит. Время такого торможения составляет микросекунды, и на таком масштабе мы не можем регулировать реактор. Но нам везет, и механизм поддержания реакции в критическом режиме, когда не происходит ни рост, ни уменьшение числа нейтронов, основан на реакции:

$$^{87}Kr \to^{86} Kr + n$$

Исходное вещество получается как продукт дальнейших распадов дочерних ядер, а «запаздывающие» нейтроны из этой реакции появляются через минуту, и именно их количество можно контролировать.

2 Практическая часть

2.1 Задача 8.45

Условие При просвечивании детали тепловыми нейтронами с длиной волны $\lambda = 1$ Å на изображении было обнаружено темное пятно, свидетельствующее о наличии инородного включения. Контраст (отношение интенсивности прошедших нейтронов к падающим) был равен 1,26. Какова должна быть длина волны нейтрона, чтобы контраст вырос до 2?

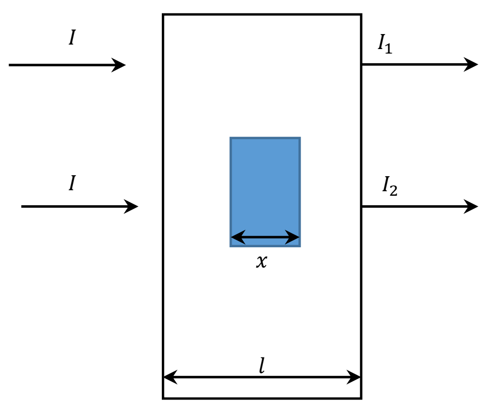

Рис. 3. Рисунок к задаче 8.45

Решение Эта задачка на нерезонансную реакцию и закон Бете. Мы знаем уравнение на количество реакций в единице толщины и можем его проинтегрировать по всей длине нашего включения:

$$\frac{dN}{dt} = j(nSdx)\sigma \Rightarrow \frac{dN}{Sdt} = \frac{dj}{dx} = -jn\sigma \Rightarrow j(x) = j_0 \exp\left(-n\sigma x\right)$$

Тогда

$$I_1 = I \exp\left[-n_1\sigma_1 l\right]$$
$$I_2 = I \exp\left[-n_1\sigma_1(l-x) - n_2\sigma_2 x\right]$$
$$\frac{I_2}{I_1} = \exp\left[x(n_2\sigma_2 - n_1\sigma_1)\right] = 1,26$$

Теперь приплетем сюда закон Бете и скажем, что $\sigma \sim 1/v \sim \lambda$, и тогда безнаказанно добавим в показатель экспоненты множитель q:

$$\frac{I_2'}{I_1'} = \exp\left[xq(n_2\sigma_2 - n_1\sigma_1)\right] = 2$$

Решая это уравнение, получаем, что $q = 3$, то есть ответ — в 3 раза.

2.2 Задача 8.68

Условие При облучении ядра ^{115}In нейтронами с энергией $E_n = 1,44$ эВ происходит их резонансное поглощение. Распад составного ядра происходит по двум каналам — радиационному (с испусканием γ-квантов) и упругому (с вылетом нейтрона). Полное сечение этой реакции равно $\sigma_0 = 2,7 \cdot 10^4$ бн. Ширина нейтронного канала распада $\Gamma_n = 1,2 \cdot 10^{-3}$ эВ. Оценить среднее время жизни составного ядра относительного испускания γ-квантов, считая, что $\Gamma_\gamma \gg \Gamma_n$. Частицы считать бесспиновыми.

Решение Ну тут все должно начинаться с формулы Брейта-Вигнера для резонансного случая $E = E_0$:

$$\sigma_{n,\gamma} = 4\pi\lambda^2 \frac{\Gamma_n\Gamma_\gamma}{(\Gamma_n + \Gamma_\gamma)^2} \approx 4\pi\lambda^2 \frac{\Gamma_n}{\Gamma_\gamma} \approx \sigma_0$$

Так как ширины каналов имеют смысл вероятностей процессов, то сечение излучения γ-кванта будет много больше, чем сечение упругого рассеяния, и тогда:

$$\sigma_{n,\gamma} \approx \sigma_0 \approx 4\pi\lambda^2 \frac{\Gamma_n}{\Gamma_\gamma} \;\Rightarrow\; \Gamma_\gamma \approx 4\pi\lambda^2 \frac{\Gamma_n}{\sigma_0}$$

Ну а как у нас время жизни связано с шириной канала, мы уже говорили: чем сечение упругого рассеяния больше, тем меньше время жизни, и тогда:

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma_\gamma} \approx 10^{-15} \text{ с}$$

2.3 Комментарии к задачам из задания

Нулевки Первая — это задачка по механике, а вторая — про формулку из самого начала.

Задача 7.10 Тут закон сохранения импульса и закон сохранения энергии, а для нейтрино связь энергии и импульса: $E_\nu = p_\nu c$.

Задача 8.45 Решена.

Задача 8.62 Тут нужно написать кинетическое уравнение того, что происходит с аргоном: почему растет и почему уменьшается, а дальше проинтегрировать.

Задача 8.68 Решена.

Задача 9.4 Решена в задачнике.

Задача 9.11 Решена в задачнике.