

Семинар 9. Ядро. Радиоактивность

Клименок Кирилл Леонидович

10.11.2020

1 Теоретическая часть

Вот мы и закончили ту часть курса, которая отвечает за атомы, и теперь мы должны отправиться глубже в атомное ядро.



Рис. 1: Это выражение будет преследовать нас до конца курса квантовой микрофизики

1.1 Свойства ядра

Начнем мы с того, что попытаемся определить, какого же размера у нас ядро, и как мы можем это измерить. Тут нам вполне может помочь наша известная модель атома водорода, но вместо электрона можно использовать мюон. Так как он примерно в 200 раз тяжелее, то и его боровский радиус будет в 200 раз меньше (привет задачке из соответствующей недели). А если брать не водород, а что-то потяжелее, например свинец с характерным зарядом около 100 (на деле 82) то получится, что радиус будет еще примерно в 100 раз меньше. Итого получается, что радиус такого атома будет по порядку величины $10^{-10}/(2 \cdot 10^4) \text{ м} = 5 \cdot 10^{-15} \text{ м} = 5 \text{ фм}$. Получили порядок фемтометров. А что тогда с энергией ионизации или энергиями переходов? Формула для нее у нас тоже была, и она будет выше в $200 \cdot 100^2 = 2 \cdot 10^6$ раз, и это будет масштаб 10 МэВ. Но я напомним, что вся наша теория была построена для точечного ядра, а вот отклонение от «точечности» будут давать отклонение в экспериментальных данных, и по ним уже можно будет оценить более точный размер. На самом деле, самые внимательные из вас уже заметили некоторое сходство с задачей 4.42 из первого задания. Собственно в ней вы все это и делали.

В качестве альтернативы этому сложному методу можно попробовать посмотреть на дифракцию электронов на ядре. Тут все немного сложнее, ведь если мы хотим рассмотреть объекты с

характерным размером фемтометры, нам надо, чтобы и у электрона длина волны де Бройля была — фемтометры. А тогда это уже существенно релятивистский электрон с характерной энергией ГэВ. Кажется, что это не очень достижимо, но вот в 1961 году Нобелевскую премию Р. Хофштадтеру вручили именно за подобный эксперимент.

Хорошо, с размерами разобрались, теперь о составе. Тут вы, конечно, знаете про протоны и нейтроны. Сильно не буду вдаваться в подробности открытия, просто выдам ссылки на конкретные эксперименты. Для протона это опыты Блеккетта, когда в камере Вильсона были обнаружены треки протонов, которые выбивались из ядер азота, а для нейтрона это опыт Чедвика, где также по фотографиям треков были определены его масса и отсутствие заряда.

1.2 Энергия связи. Формула Вайцекера и модель жидкой капли

Начнем с того, что представим, как у нас собираются ядра. Пусть у нас есть коробки с отдельными протонами и отдельными нейтронами. Возьмем Z протонов и N нейтронов. Их массы мы знаем с очень хорошей точностью. А теперь совместим их в единое ядро. Оно является стабильным образованием и может существовать какое-то время. На вопрос, почему все эти составные части не разлетаются, ответ будет: «из-за сильного взаимодействия». О нем мы поговорим позже, а пока просто поверим в это. Но если ядро стабильно существует, значит по энергии оно выгоднее, чем отдельные его компоненты. Тогда мы можем ввести эту самую энергию связи как разницу энергий каждой компоненты ядра и ядра как целого:

$$E_{\text{св}} = (Zm_p c^2 + Nm_n c^2) - M_{\text{ядра}} c^2 \quad (1)$$

Ну и понятно, что чем больше энергия связи, тем более ядро стабильнее. Но в реальности надо смотреть не на полную энергию связи, а на удельную (на нуклон). Вот она, на рисунке 2.

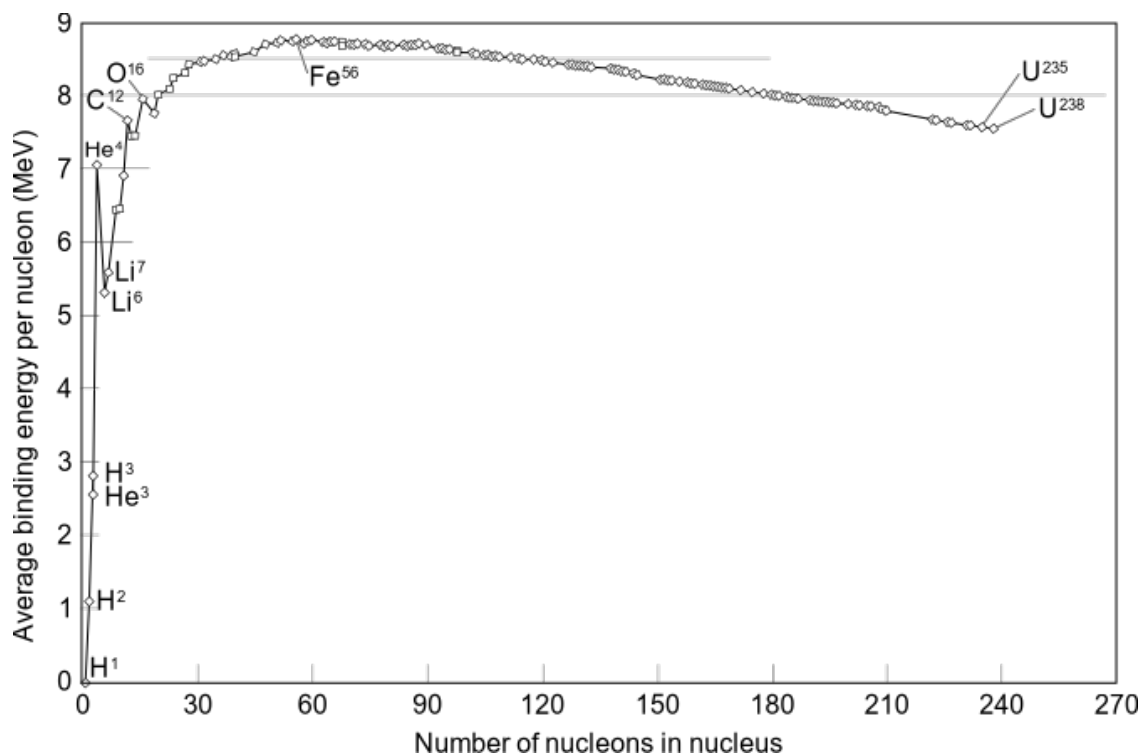


Рис. 2: Энергия связи на нуклон для различных ядер

Из характерных особенностей мы видим:

- Рост удельной энергии связи для легких ядер с характерными выбросами на ядрах гелия, углерода и кислорода
- Характерный максимум на железе в районе 8.5 МэВ
- Около линейный спад для более тяжелых ядер

Вот тут мы и должны составить какую-то модельку для описания этой картины. И первая модель, которую мы будем рассматривать, это жидко-капельная модель. В ней ядро представляется в форме капли «ядерной жидкости», и для нее пытаются записать энергию связи. Собственно формула для энергии связи называется формулой Вайцзекера:

$$E = \alpha A - \beta A^{2/3} - \gamma \frac{Z^2}{A^{1/3}} - \varepsilon \frac{(A/2 - Z)^2}{A} + k \frac{\delta}{A^{3/4}} \quad (2)$$

A — количество нуклонов, Z — количество протонов в ядре. Греческие буквы обозначают некоторые подгоночные постоянные. Давайте разберемся с каждым членом отдельно.

- αA — тут все просто — чем больше составных частей в ядре, тем пропорционально больше энергия связи
- $-\beta A^{2/3}$ — это влияние поверхности из-за нескомпенсированной силы, действующей на нуклоны на поверхности
- $-\gamma \frac{Z^2}{A^{1/3}}$ — влияние кулоновского отталкивания
- $-\varepsilon \frac{(A/2 - Z)^2}{A}$ — влияние эквивалентности протонов и нейтронов в сильном взаимодействии
- $k \frac{\delta}{A^{3/4}}$ $k = 1$ — для ядер с четным числом протонов и нейтронов, $k = -1$ для ядер с нечетным числом протонов и нейтронов и $k = 0$ для остальных случаев

Характерные параметры для формулы следующие $\alpha = 14.03$, $\beta = 13.03$, $\gamma = 0.53$, $\varepsilon = 77.25$, $\delta = 34.57$ в МэВ. Эта модель, несмотря на свою простоту, может предсказывать разные интересные вещи, например критерии самопроизвольного распада ядер и состава наиболее стабильных изотопов.

1.3 Оболочечная модель ядра

Вот вроде все хорошо в капельной модели, но она совершенно не дает понимания, откуда берутся пики для ${}^4_2\text{He}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ и некоторых других элементов. Здесь нам как раз и понадобится оболочечная модель. Идея тоже предельно простая: пусть у нас есть несколько нуклонов, объединенных в ядро, и мы хотим добавить туда же еще протон или нейтрон. Тогда, из-за сильного взаимодействия, наше исходное ядро будет сродни потенциальной яме для этих дополнительных нуклонов. А как только появляется яма, появляются и уровни в ней, которые можно заполнять. И одна из простейших идей — это взять обычный гармонический потенциал, но не одномерный, а трехмерный. Тогда для него устройство уровней энергии мы знаем и записать их можем:

$$E_N = \hbar\omega(N + 3/2)$$

$$N = n_x + n_y + n_z$$

Тут N — это просто сумма 3 независимых чисел, которые могут быть $0, 1, 2, \dots$. А теперь в этой параболической яме можно заполнить уровни энергии, но предварительно нужно ответить на вопрос: а сколько может сидеть протонов и нейтронов в одном состоянии? Ответ: по 2 протона и по 2 нейтрона, потому что протоны и нейтроны различимы между собой, и обоих есть спин, по которому они и будут отличаться. Итого получается картинка 3.

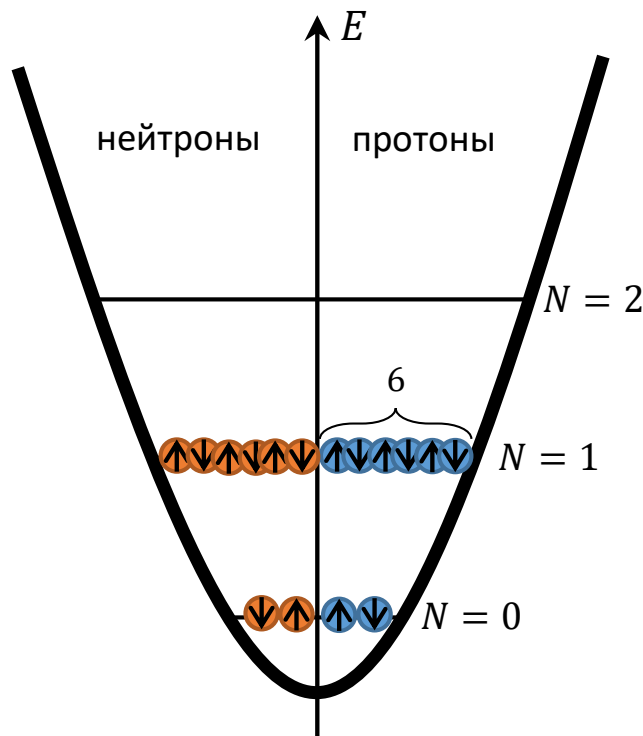


Рис. 3: Структура уровней энергии и их заполнения нуклонами в параболической модели

Осталось только записать таблички с максимальным количеством заполнения уровней для разных N . Вот она:

N	n_x, n_y, n_z	Всего p/n	Всего $p + n$	Элемент
0	(0,0,0)	2	4	${}^4_2\text{He}$
1	(0,0,1); (0,1,0); (1,0,0)	6	12	${}^{16}_8\text{O}$
2	(0,0,2); (0,2,0); (2,0,0) (1,1,0); (1,0,1); (0,1,1)	12	24	${}^{40}_{20}\text{Ca}$

Вот таким нехитрым образом в рамках очень простой модели мы получаем те самые «магические» стабильные ядра, которые и выбивались на нашем графике удельной энергии связи. Тогда любое излучение или поглощение электромагнитного кванта ядром в рамках данной модели можно рассматривать как переход нуклона в возбужденное состояние на более высокий уровень энергии или релаксацию с него.

Еще один небольшой комментарий про терминологию, с которой мы встретимся в задании. Сейчас я написал решение для уровней энергии в таком потенциале для обычных декартовых координат, но эту же задачу можно решить и в сферических координатах. Тогда уровни энергии будут называться по-другому и совпадать по нотации с уровнями энергии водородоподобного атома, а именно: $N = 0 \rightarrow (1S)$, $N = 1 \rightarrow (1P)$, $N = 2 \rightarrow (1D, 2S)$, $N = 3 \rightarrow (1F, 2P)$ и так далее. То есть это просто другое обозначение того же самого, и пугаться этого не надо.

1.4 Радиоактивность. Распады.

В целом, из школы мы помним, что исторически радиоактивность веществ была открыта супругами Кюри еще в конце 19 века, и там получалось 3 разных типа «излучения»: α — вылет ядер гелия, β — вылет электронов, γ — обычные фотоны, но с достаточно большой энергией. Естественно, есть и более экзотические распады, но их мы рассматривать не будем. Каждый из базовых типов распадов мы рассмотрим более подробно, но предварительно надо написать некоторый общий закон, который характеризует любые распады с изменением структуры ядра. Тут нам будет достаточно просто базовой логики. Процесс распада квантовый, поэтому там все завязано на вероятности, и нам надо написать закон для большого числа части. Процесс распада завязан исключительно на само ядро без его взаимодействия с чем-то еще, то есть это одночастичный процесс. Пользуясь этими 2 фактами, мы можем сказать: скорость распада будет тем больше, чем больше исходных ядер у нас есть:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= -\lambda N \\ N(t) &= N_0 \exp(-\lambda t) = N_0 \cdot 2^{-t/T_{1/2}} \\ T_{1/2} &= \ln 2 / \lambda\end{aligned}$$

λ здесь это активность распада или просто число распадов за единицу времени, а $T_{1/2}$ — это традиционный, известный нам со школы период полураспада. А полную карту характерных распадов можно посмотреть на рисунке 5.

α распад Тут из яда вылетает ядро гелия, и общая формула для записи распада с количеством нуклонов A и зарядом Z :

$$(A, Z) \rightarrow (A - 4, Z - 2) + He(4, 2)$$

Давайте для начала обсудим энергетическую выгодность такого распада. Из рисунка 2 видно, что для тяжелых ядер энергия связи на нуклон падает с коэффициентом примерно 1 МэВ на 150 нуклонов, а ядро гелия обладает энергией 28 МэВ. Тогда мы можем провести оценку, для каких ядер распад возможен:

$$\begin{aligned}E_{\text{св}}(A, Z) &< E_{\text{св}}(A - 4, Z - 2) + 28 \\ 8A &< \left(8 + \frac{4}{150}\right)(A - 4) + 28 \\ A &> 150\end{aligned}$$

И это магическим образом совпадает с тем, что мы видим на опыте в рисунке 5.

Теперь обсудим период полураспада. Для этого достаточно рассмотреть модель туннелирования α -частицы из зоны ядра через его кулоновский барьер на свободу. Тут нам поможет формула из 4 семинара, и окажется, что если у частицы есть энергия E_α то:

$$\ln T_{1/2} \sim -\ln D \sim a \frac{Z}{\sqrt{E_\alpha}} + b \quad (3)$$

Это называется законом Гейгера-Неттола.

Осталось обсудить характерные энергии и спектр α -частиц. Диапазон энергий составляет примерно от 4 до 10 МэВ, а спектр альфа-частиц всегда линейчатый, что подтверждает, что это внутриядерный процесс без всяких дополнительных извращений.

β распад На самом деле, β -распад это не обязательно вылет электрона: еще может вылетать позитрон, или ядро может захватывать электрон с нижних орбит атома (К-захват). Вот эти три основные формулы:

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z + 1) + e^- + \tilde{\nu}_e$$

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z - 1) + e^+ + \nu_e$$

$$(A, Z) + e^- \rightarrow (A, Z - 1) + \nu_e$$

Спектр электронов, в отличие от α -частиц, непрерывный, и по энергиям электроны могут достигать 1 МэВ, что делает их релятивистскими. Непрерывность связана с наличием этих самых дополнительных ν_e или $\tilde{\nu}_e$ нейтрино или антинейтрино, которые и уносят часть импульса, и как раз показывают большую сложность процесса, нежели в случае α распада.

γ излучение Тут нужно понимать, что формально состав ядра при излучении γ -кванта не меняется, поэтому мы не можем говорить об этом как о распаде, а просто о переходе для ядра из более возбужденного состояния в менее возбужденное или основное. Теперь механизмы возбуждения этого ядра. Бывают одноклонные, о них мы говорили в рамках оболочечной модели, а бывают коллективные. Представить их себе достаточно просто. Одно из таких возбуждений представлено на рисунке 4.

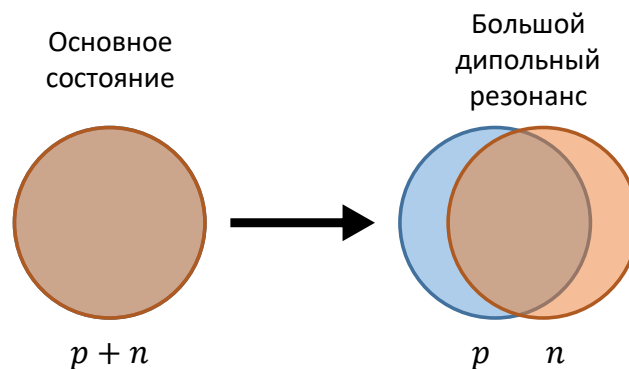


Рис. 4: Пример коллективного возбуждения ядра

Собственно, именно такого рода возбуждения и дают нам возможность говорить о Е и М фотонах, излучаемых возбужденным ядром, и делают наши оценки вероятности излучения для атома из прошлого семинара неактуальными.

2 Практическая часть

2.1 Задача 7.5

Условие С помощью формулы Вайцеккера найти заряд Z_0 наиболее устойчивого ядра-изобары при заданном нечетном значении A . Выяснить, каков характер активности у ядер ^{27}Mg , ^{29}P , ^{37}K , ^{67}Cu .

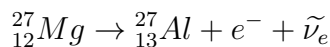
Решение Начнем стандартно с пояснения условия. Что такое ядра-изобары? Это ядра, имеющие одинаковые A , но разные символы (разные Z), например, $^{14}_6\text{C}$ и $^{14}_7\text{N}$. Теперь что за характер активности? Здесь просто спрашивают, какой распад будет характерен для данных нам ядер. Естественно, мы можем посмотреть для каждого из ядер на рисунок 5 и по табличке все определить, но давайте разберемся с этим так, как и предполагали авторы. У нас есть α и β распады (всякую экзотику исключаем). Но массовые числа ядер меньше 150, значит остаются только β с вылетом электрона или позитрона. Как определить, кто именно вылетит? Просто посмотрим, какие ядра стабильнее с уменьшением или увеличением заряда.

Теперь про Вайцеккера и использование его формулы. Очевидно, чтобы найти стабильное ядро, нам надо найти локальный максимум энергии связи при данном A и вариации Z . Для этого можно просто продифференцировать формулу энергии связи по заряду и приравнять производную к нулю. Я упрощу себе жизнь и возьму ^{27}Mg . Это четно-нечетное ядро, и поэтому последнего члена в формуле Вайцеккера не будет. Тогда производная:

$$\frac{dE}{dZ} = -\gamma \frac{2Z}{A^{1/3}} + \varepsilon \frac{(A/2 - Z)}{2A} = 0$$

$$Z_0 = \frac{A/2}{1 + 0.0075A^{2/3}}$$

Тогда для магния $^{27}_{12}\text{Mg}$ стабильным будет $Z_0 = 13$ то есть β распад должен увеличить заряд на 1, то есть такой магний должен испытать вылет обычного электрона:



2.2 Задача 7.57

Условие Нуклон из перезаполненной оболочки ядра углерода $^{13}_6\text{C}$, поглощает $E1$ -фотон и переходит в возбужденное состояние с наименьшей энергией. Найти спин ядра в конечном состоянии и указать его спектроскопическое обозначение.

Указание: Последовательность расположения однонуклонных ядерных уровней $N = 0; (1S_{1/2})$, $N = 1; (1P_{3/2}, 1P_{1/2})$, $N = 2; (2S_{1/2}, 1D_{3/2})$

Решение Тут все, конечно, очень сложно звучит, но на деле это задача на все те же правила отбора, которые у нас были на прошлой неделе, но уже в привязке к ядру, а не к атому. Во-первых, попробуем разобраться с фотоном. Это обычный $E1$ -фотон, значит момент, который он уносит, это 1 (напомню: за момент отвечает чиселко), а то что он электрический, означает, что четность этого фотона $(-1)^1 = -1$, значит из закона сохранения четности четность состояний в этом однонуклонном возбуждении должна быть разной (напомню: за четность отвечает механический момент l).

Теперь смотрим на заполнение уровней в оболочечной модели для обычного ${}^{12}_6\text{C}$. Уровень $N = 0$ или $1S$ заполнен полностью, а уровень $N = 1$ или $1P$ (здесь $l = 1$) заполнен так, чтобы там было еще 2 места. Значит, на него и должен упасть возбужденный нейтрон. А что у нас есть выше? Выше уровень $N = 2$, который, неожиданно, может быть и $2S$ (здесь $l = 0$) и $1D$ ($l = 2$). Кажется, что нам подходит и то, и другое, но поскольку от нас спрашивают именно состояние с минимальной энергией, то смотрим на указание и говорим, что нас интересует состояние $2S$, а спин тогда будет равен $1/2$, так как один нейтрон у нас некомпенсированный.

2.3 Комментарии к задачам из задания

Нулевки В первой задаче стандартный эффект Доплера, во второй просто баланс энергии и всё. Ничего интересного.

Задача 7.5 Частично решили, подставьте остальные элементы.

Задача 7.16 Как устроены уровни энергии в оболочечной модели, и что такое одноклонное возбуждение, я уже писал, осталось лишь найти характерную частоту осциллятора через глубину ямы.

Задача 7.20 Периоды полураспада обратно пропорциональны активностям, а чтобы связь активностей найти, нужно записать, что происходит с ${}^{234}\text{U}$ с кинетической точки зрения (за счет чего он появляется, и за счет чего уменьшается) и сказать что-то про стационарность.

Задача 7.51 Кажется, что ширина линии однозначно дает время жизни через соотношение неопределенностей, но вот незадача — ядро после первого излучения гамма-кванта движется, и работает эффект Доплера.

Задача 7.58 Попробуйте использовать рассуждения, аналогичные 7.57.

Задача 7.64 Спины протона и нейтрона по $1/2$, но протонов 2, и они спарены, а нейтрон нет. Поэтому надо взять теоретический g -фактор для нейтрона, который равен -3.92 .

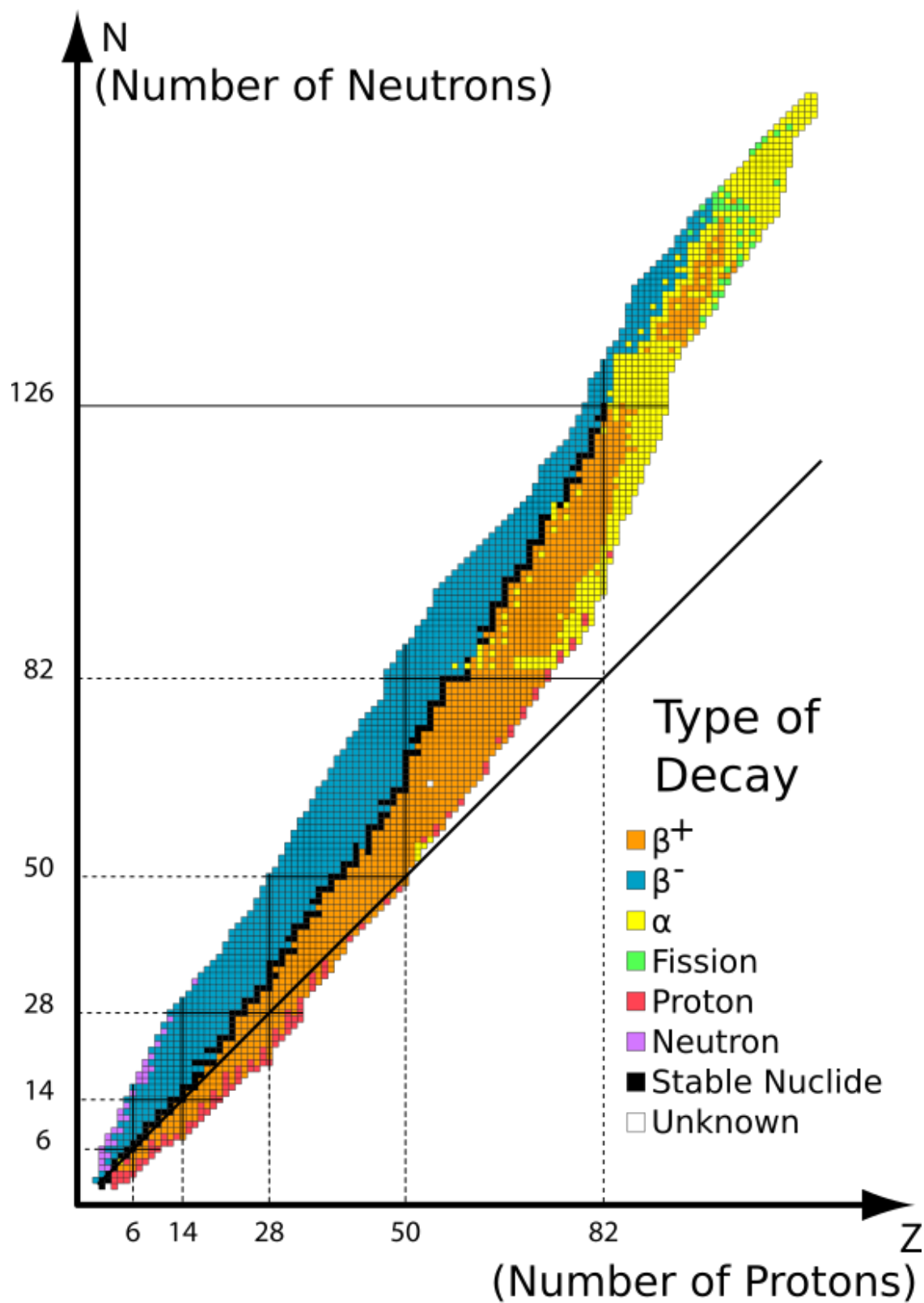


Рис. 5: Карта характерных распадов для различных ядер