Matching

Pablo Torres

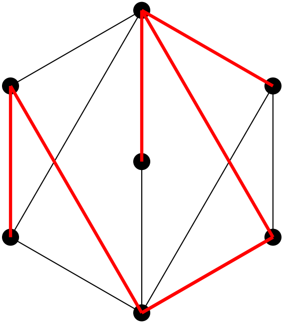
Departamento de Matemática
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

Curso de Complementos de Matemática I - Matemática Discreta

Matching

Definición: Un matching en un grafo G en un conjunto de aristas (no bucles) que no tienen extremos en común.
Un vértice extremo de alguna arista de un matching M se dice saturado por M (M-saturado).
Un matching es perfecto en un grafo G si satura todos los vértices de G.

Ejemplos:



Matching maximal - máximo

Definición: Un matching maximal en un grafo G es un matching tal que no existe otro matching de mayor cardinal en G que lo contenga.
Un matching máximo en G es un matching de cardinal máximo en G.

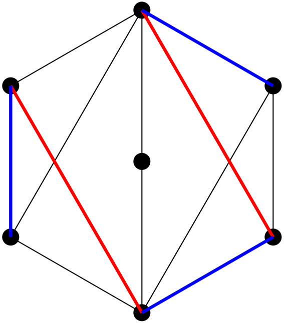
Ejemplos:

1. Si M es matching maximal, ¿es máximo?
2. Si M es matching máximo entonces es maximal.

Caminos alternantes - aumentantes

Definición: Dado un matching M en G, un camino M-alternante es un camino en G que alterna aristas en M y en $E(G) - M$ (no en M).
Un camino M-aumentante es un camino M-alternante cuyos extremos son distintos y no están M-saturados.

Ejemplos:



Observación

Si P es un camino M-aumentante en G, entonces al sacar las aristas de $M \cap P$ y colocar las aristas de $P - M$ tenemos un nuevo matching M' que

Teorema de Berge (1957) - Matching

Lema

Toda componente conexa de la diferencia simétrica de dos matchings es un camino o un ciclo par.

Prueba:
Sean M y M' matchings de G y $F = M \triangle M'$. Consideremos el grafo $G_F = (V(G), F)$. Luego, todo vértice de G_F tiene grado a lo sumo 2, ya que en cada vértice puede incidir a lo sumo una arista de cada matching. En consecuencia $\Delta(G_F) \leq 2$ y por lo tanto toda componente conexa de G es un camino o un ciclo (probar). Si una componente conexa es un ciclo, debe alternar entre aristas de M y de M' y por lo tanto su longitud es par.
$\square$

Teorema de Berge (1957) - Matching

Teorema (Berge, 1957)

Un matching M de un grafo G es máximo ssi G no tiene camino M-aumentante.

Prueba:
$(\implies)$✓ Observación previa.
$(\impliedby)$ Supongamos que M' es un matching de G con $|M'| > |M|$. Probaremos que existe un camino M-aumentante en G. Sea $F = M' \triangle M$. Cada componente de G_F es un camino o un ciclo par (Lema anterior). Como $|M'| > |M|$, debe existir un camino P en G_F que tiene más aristas de M' que de M. Como el camino alterna aristas de ambos matchings, los extremos están saturados por M'. En consecuencia, P es un camino M-aumentante en G. $\square$

Matching en grafos bipartitos

Sea $G[X, Y]$ un grafo bipartito y M un matching en $G[X, Y]$ que satura todos los vértices de X. Es claro que si conjunto $S \subseteq X$ entonces en $N(S) = \cup_{v \in S} N(v)$ existen al menos $|S|$ vértices, i.e. $|N(S)| \geq |S|$. Veamos que la condición de Hall: “para todo $S \subseteq X, \ |N(S)| \geq |S|$” es suficiente y necesaria para la existencia de un matching que satura X.

Teorema (Hall, 1935)

Un grafo bipartito $G[X, Y]$ tiene un matching que satura X ssi para todo $S \subseteq X, \ |N(S)| \geq |S|$.

Prueba:

$(\implies)$✓ Para $S \subseteq X$, existen $|S|$ vértices saturados en Y por aristas con un extremo en S, luego $|N(S)| \geq |S|$. $\square$

Matching en grafos bipartitos

Teorema (Hall, 1935)

Un grafo bipartito $G[X, Y]$ tiene un matching que satura X ssi para todo $S \subseteq X$, $|N(S)| \geq |S|$.

($\Longleftarrow$) Supongamos que existe un matching máximo M en G que no satura X y encontremos $S \subseteq X$ tal que $|N(S)| < |S|$.
Sea $u \in X$ un vértice no saturado por M. Si u tiene un vecino no saturado, entonces M no es máximo. Consideremos todos los caminos M alternantes desde u. Sea $T \subseteq Y$ los vértices en alguno de estos caminos en Y y $S \subseteq X$ los vértices en alguno de estos caminos en X (obs. $u \in S$).
Es claro que $T \subseteq N(S)$.
Veamos que $T = N(S)$.

Matching en grafos bipartitos

Sea $y \in N(S) - T$. En consecuencia, y no está M-saturado (en caso contrario $y \in T$). Hemos visto que $N(u) \subseteq T$. Luego, y es vecino de algún vértice $s \in S - \{u\}$. Luego, sy es una arista de G y además $sy \notin M$. Considerando un camino M-alternante de u hasta s (existe por def. de S) y la arista sy, tenemos un camino M-aumentante, contradiciendo que M es máximo.

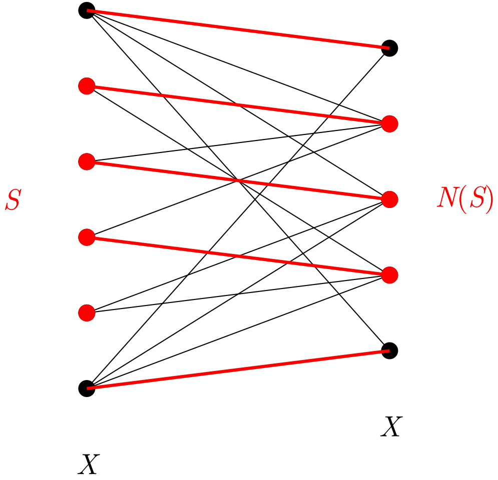
Ergo, $T = N(S)$.

Además, notemos que todos los vértices en $S - \{u\}$ tienen un único vecino (por M) en T y viceversa, luego $|T| = |S - \{u\}|$.

Por lo tanto, $|N(S)| = |T| = |S - \{u\}| = |S| - 1 < |S|$.

Matching en grafos bipartitos

Ejemplos



COROLARIO

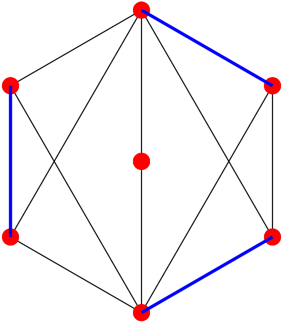
Todo grafo bipartito k-regular ($k \geq 1$) tiene un matching perfecto.

Prueba:
Sea $G[X, Y]$ bipartito k-regular. la cantidad de aristas de G es $k|X|$ ya que toda arista tiene exactamente un extremo en X y hay exactamente k aristas con un extremo en un vértice fijo. Análogamente para Y, la cantidad de aristas es $k|Y|$. En consecuencia, $k|X| = k|Y|$, i.e. $|X| = |Y|$.
Ergo, un matching que satura X (o Y) , es un matching perfecto.
Verifiquemos la condición de Hall para X. Sea $S \subseteq X$ y $E(S)$ las aristas con un extremo en S (y el otro en $N(S)$). Como G es k-regular, $|E(S)| = k|S|$. Por otro lado, la cantidad de aristas con un extremo en $N(S)$ es $k|N(S)|$, entonces $|E(S)| \leq k|N(S)|$.
Finalmente, $k|S| \leq k|N(S)|$, i.e. $|S| \leq |N(S)|$. $\square$

Matching y cubrimientos

Sea $F \subseteq V(G)$ tal que toda arista de G tiene al menos uno de sus extremos en F. Es evidente que si M es un matching entonces a aristas distintas de M le corresponden (son extremos) distintos elementos de F. Ergo, $|M| \leq |F|$.

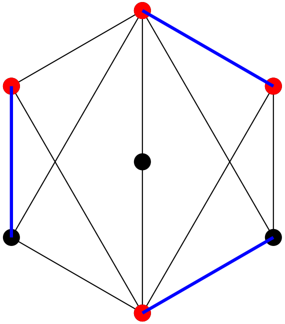
Ejemplo:



Matching y cubrimientos de aristas por vértices

Definición: Un cubrimiento de aristas por vértices de un grafo G es un conjunto de vértices $F \subseteq V(G)$ tal que toda arista de G tiene al menos un extremo en F. Notamos $\beta(G)$ al tamaño mínimo de un cubrimiento de aristas por vértices.

Ejemplo:



$$\beta(G) = 4 > 3 = |M|$$

Matching y cubrimientos de aristas por vértices

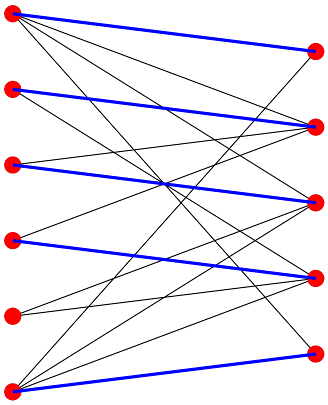
Definición: Un cubrimiento de aristas por vértices de un grafo G es un conjunto de vértices $F \subseteq V(G)$ tal que toda arista de G tiene al menos un extremo en F. Notamos $\beta(G)$ al tamaño mínimo de un cubrimiento de aristas por vértices.

- $\beta(K_n) = n - 1$.
- $\beta(K_{n,m}) = \min\{n, m\}$.
- $\beta(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.
- $\beta(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- $\beta(W_n) =$ 😁.
- $\beta(Q_n) =$ 😛.
- $\beta(K(n, k)) =$ 🤩.

Matching y cub. de aristas por vértices

Notemos $\alpha'(G)$ al tamaño de un matching máximo de G. De las observaciones anteriores, resulta que para todo grafo G,

$$\min\{|F| : F \text{ es un cub. de } G\} = \beta(G) \geq$$
$$\geq \alpha'(G) = \max\{|M| : M \text{ es un matching de } G\}.$$



Matching y cubrimientos de aristas por vértices

Teorema (König-Egerváry, 1931)

Si G es un grafo bipartito entonces $\beta(G) = \alpha'(G)$.

Prueba:

Sea F un cubrimiento por vértices mínimo de $G[X, Y]$ (grafo bipartito), i.e. $|F| = \beta(G)$. Construiremos un matching M tal que $|M| = |F|$, lo que implica la tesis.

Sean $R = F \cap X$ y $T = F \cap Y$. Consideremos H el subgrafo inducido por $R \cup (Y - T)$ y H' el subgrafo inducido por $T \cup (X - R)$.

Como $F = R \cup T$ es un cub. por vértices de G, entonces no hay aristas entre $Y - T$ y $X - R$. Sea $S \subseteq R$, si $|N_H(S)| < |S|$, entonces $T \cup N_H(S)$ es un cubrimiento de G, ya que todas las aristas que cubre S también las cubre $T \cup N_H(S)$. Pero $|T \cup N_H(S)| < \beta(G)$, lo que no puede ocurrir. En consecuencia, $|N_H(S)| \geq |S|$. Ergo, se verifica la cond. de Hall para R en H. $\square$

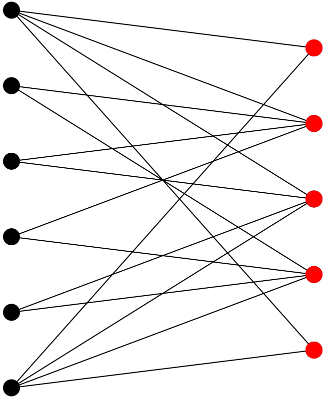
Matching y cubrimientos de aristas por vértices

Teorema (König-Egerváry, 1931)

Si G es un grafo bipartito entonces $\beta(G) = \alpha'(G)$.

Prueba:
Luego, existe un matching M_H en H que satura R. Por lo tanto $|M_H| = |R|$.
Análogamente, se puede obtener un matching $M_{H'}$ en H' que satura T y $|M_{H'}| = |T|$.
Como $V(H) \cap V(H') = \emptyset$, $M = M_H \cup M_{H'}$ es un matching de G con $|M| = |X \cup T| = |F|$ como estábamos buscando. $\square$

Estables y cubrimientos de aristas por vértices



S es un cub. mínimo

Si S es un cub. de aristas por vértices, entonces $\overline{S}$ es un estable , y viceversa.

Estables y cubrimientos de aristas por vértices

Proposición

Sean G un grafo, $S \subseteq V(G)$ y $n = |V(G)|$. Luego, S es un estable de G ssi $\overline{S}$ es un cubrimiento de aristas por vértices de G. Además, $\alpha(G) + \beta(G) = n$.

- $\beta(K_n) = n - 1$, $\alpha(K_n) = 1$.
- $\beta(K_{n,m}) = \min\{n, m\}$, $\alpha(K_{n,m}) = \max\{n, m\}$.
- $\beta(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, $\alpha(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- $\beta(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $\alpha(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.
- $\beta(W_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$, $\alpha(W_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- $\beta(Q_n) = 2^{n-1} = \alpha(Q_n)$.
- $\beta(K(n,k)) = \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{k}$, $\alpha(K(n,k)) = \binom{n-1}{k-1}$.