Práctica 2 - Isomorfismos

1. Una propiedad $\mathcal{P}$ se dice una *invariante* vía isomorfismo, si para todo grafo G que cumple la propiedad $\mathcal{P}$ y todo grafo H isomorfo a G, se verifica que H tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

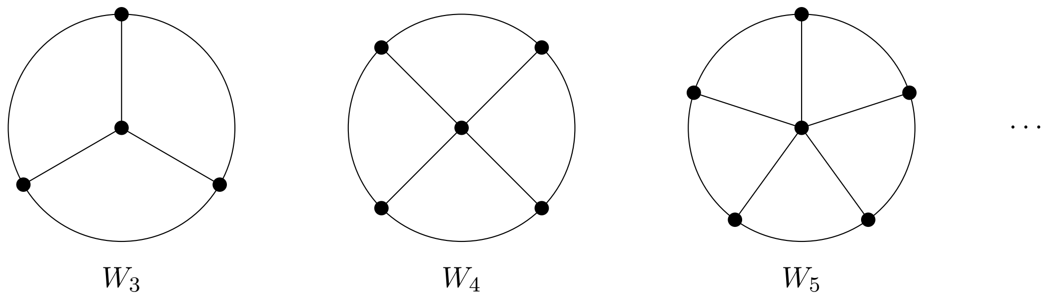
   Pruebe que las propiedades indicadas son invariantes (vía isomorfismo).

   a) Tener n vértices de grado k.
   b) Tener una arista (u, w) donde $d(u) = i$ y $d(w) = j$.
   c) Ser conexo.
   d) Ser bipartito.

2. a) Pruebe que si G y H son isomorfos, entonces tienen la misma secuencia de grados.
   b) ¿Es cierta la recíproca?

3. a) Dibuje todos los grafos simples etiquetados de cuatro vértices.
   b) Dibuje todos los grafos simples no etiquetados de cuatro vértices.
   c) Dibuje todos los grafos simples cúbicos (3-regulares) no etiquetados de n vértices, con $n \leqslant 8$.

4. Para $n \geqslant 3$, el grafo rueda con n radios, denotado por W_n es el grafo formado por un ciclo de longitud n y un vértice adicional que es adyacente a los n vértices del ciclo.



   ¿Es alguno de estos grafos W_n isomorfo a un grafo completo? Si es así, determine todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ para los cuales se verifica esta condición.

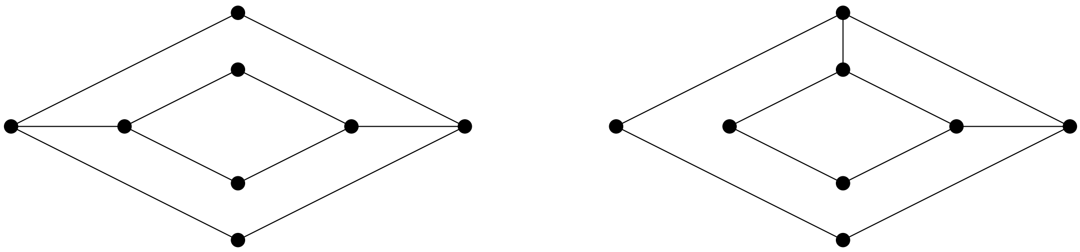
5. Para $n \geqslant 1$, el *lattice booleano* BL_n es el grafo cuyo conjunto de vértices es el conjunto de todos los subconjuntos de $[n]$ y dos vértices X e Y son adyacentes si la diferencia simétrica $X \Delta Y$ tiene exactamente un elemento.

   Pruebe que el lattice booleano BL_n es isomorfo al n-cubo Q_n para todo $n \geqslant 1$.

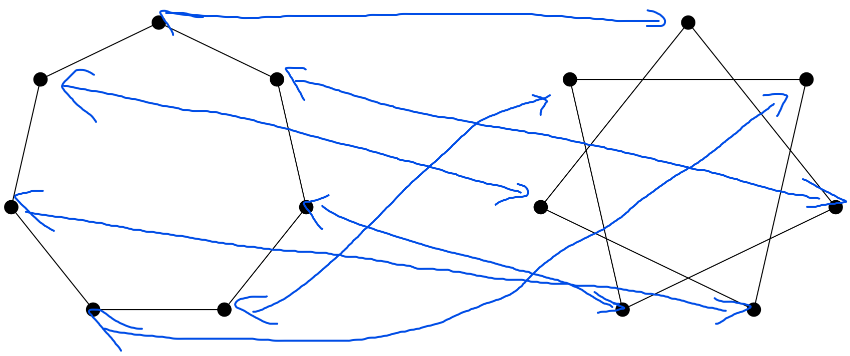
6. Demuestre que dos grafos G_1 y G_2 son isomorfos si y solo si sus vértices pueden ordenarse de manera que sus matrices de adyacencia sean iguales.

7. Para cada par de grafos, determine si los grafos son o no isomorfos.

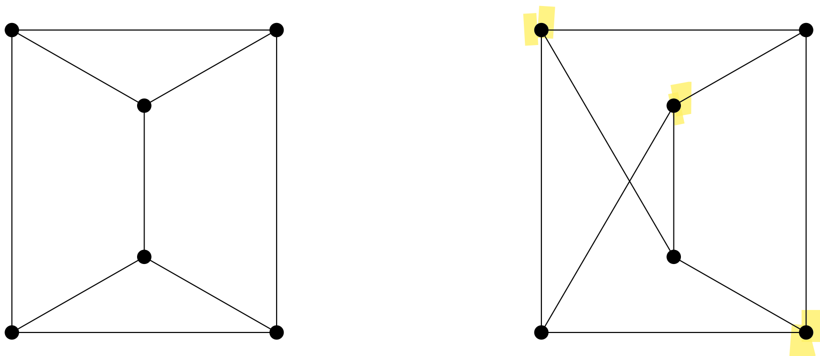
a)



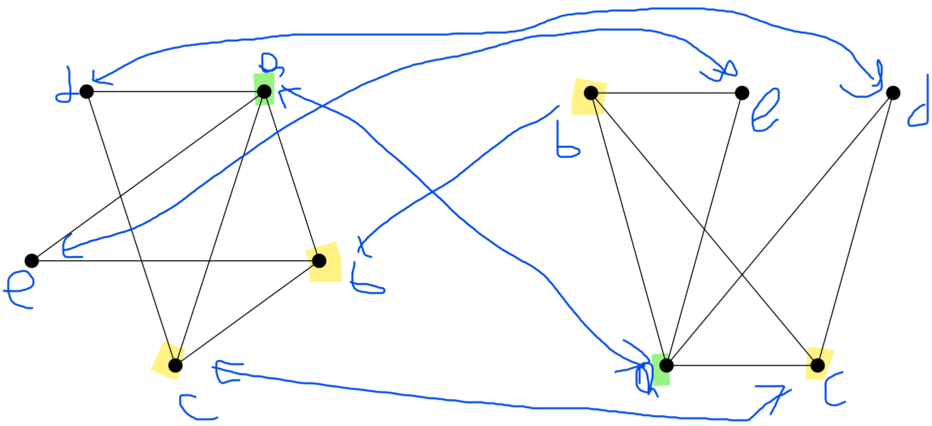
b)



c)



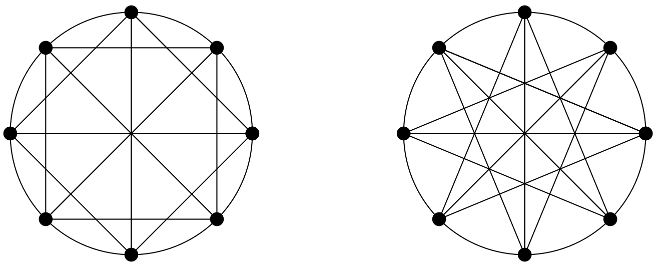
d)



ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

8. a) Si G_1 y G_2 son grafos simples, demuestre que G_1 y G_2 son isomorfos si y sólo si $\overline{G_1}$ y $\overline{G_2}$ son isomorfos.

   b) Determine si los grafos siguientes son isomorfos.



9. a) Sea G un grafo con n vértices. Si G es isomorfo a su propio complemento $\overline{G}$, ¿cuántas aristas debe tener G? (Un grafo con esta propiedad, se dice *autocomplementario*).

   b) Pruebe que si G es autocomplementario, entonces G es conexo.

   c) Encuentre un ejemplo de grafo autocomplementario de cuatro vértices y otro de cinco vértices.

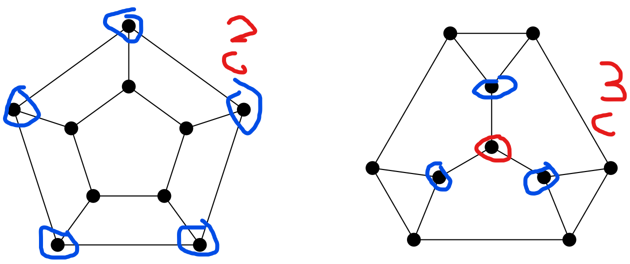
   d) Si G es un grafo autocomplementario con n vértices, donde $n > 1$, demuestre que $n = 4k$ o $n = 4k + 1$, para algún $k \in \mathbb{Z}^+$.

   e) Si G es un ciclo simple de n vértices, demuestre que G es autocomplementario si y sólo si $n = 5$.

10. Sea G un grafo simple. Pruebe que si θ es un automorfismo de G, entonces también lo es de $\overline{G}$.

11. a) Sea G un grafo. Muestre que la relación *es similar a* es una relación de equivalencia en $V(G)$.

    b) Las clases de equivalencia con respecto a la relación del ítem anterior se llaman *órbitas* del grafo. Determine las órbitas de los siguientes grafos.



12. Pruebe que si G es un grafo vértice-transitivo, entonces G es un grafo regular.

13. a) Pruebe que el grafo de línea del grafo completo K_5 es isomorfo al complemento del grafo de Petersen.

    b) Pruebe que el grafo de línea del grafo bipartito completo $K_{3,3}$ es autocomplementario.

14. Pruebe que el grafo estrella $K_{1,3}$ y el grafo rueda W_5 no son los grafos de línea de ningún grafo.

15. Sean n y k dos números naturales tal que $n > 2k$. El *grafo de Kneser* $K(n, k)$ es el grafo cuyo conjunto de vértices es $\binom{[n]}{k}$, y dos vértices son adyacentes si su intersección es vacía.

    a) Pruebe que $K(n, 1) \cong K_n$, para cada $n \geqslant 3$.

    b) Pruebe que $K(n, 2)$ es isomorfo al complemento del grafo de línea $L(K_n)$, para cada $n \geqslant 5$.