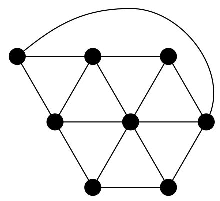
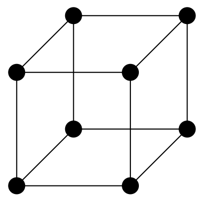
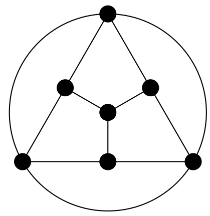
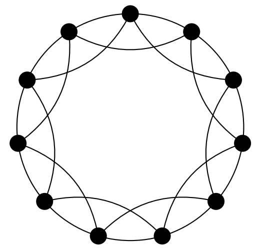
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
Av. Pellegrini 250. S2000BTP Rosario. Sta. Fe

Práctica 9 - Coloreo de Grafos

1. Determinar el número cromático de los siguientes grafos:

2. Determinar el número cromático de los siguientes grafos:

   a) El grafo completo K_n.
   b) El grafo bipartito completo $K_{m,n}$.
   c) C_n, el ciclo de n vértices, con $n \geqslant 3$.
   d) P_n, el camino de n vértices, con $n \geqslant 2$.

3. Determinar el número cromático del grafo rueda W_n para $n \geqslant 3$. ¿Qué relación hay entre $\chi(C_n)$ y $\chi(W_n)$? Explicar.

4. Dado un mapa plano, se desea colorear las regiones del mismo de manera que dos regiones limítrofes (i.e. con un segmento en común, no solo un punto) posean distinto color.

   a) Determinar la mínima cantidad de colores necesarios para colorear los países de América Latina.
   b) Determinar la mínima cantidad de colores necesarios para colorear las provincias de Argentina.
   c) Determinar la mínima cantidad de colores necesarios para colorear los departamentos de la provincia de Santa Fe.

5. Sea G un grafo sin lazos con al menos una arista. Probar que G es bipartito si y solo si $\chi(G) = 2$.

6. Dar un ejemplo de un grafo G tal que $\chi(G) = 3$ y ningún subgrafo de G sea isomorfo a K_3.

7. Sean G y H dos grafos cualesquiera. Determinar $\chi(G + H)$ y $\chi(G \vee H)$ en función de $\chi(G)$ y $\chi(H)$.

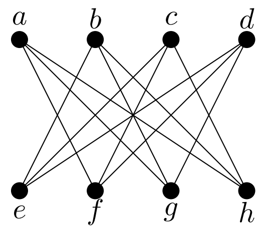
8. Sea G un grafo con componentes conexas $C_1, \ldots, C_k$, y sea $G_i = G[C_i]$ con $i \in [k]$. Probar que $\chi(G) = \max\limits_{i=1,\ldots,k} \chi(G_i)$.

9. Un grafo G se dice k-color crítico si su número cromático es k y el número cromático de todo subgrafo propio inducido de G es menor a k. Equivalentemente, G es k-color crítico si $\chi(G) = k$ y $\chi(G - v) < k$ para todo $v \in V(G)$. ¿Cuáles de los grafos del ejercicio 1 son k-color crítico?

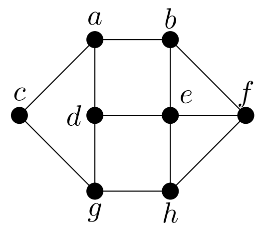
10. Sea G un grafo k-color crítico. Probar que:

   a) G es conexo.
   b) $\mathrm{gr}(v) \geqslant k - 1$ para todo $v \in V(G)$.
   c) G no tiene vértices de corte.

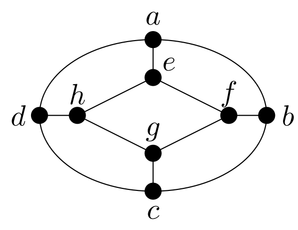
11. Obtener un coloreo para cada uno de los siguientes grafos mediante el algoritmo greedy utilizando el orden dado de los vértices. Determinar si el coloreo obtenido es óptimo.



a, e, b, f, c, g, d, h



e, a, b, g, h, d, c, f



a, g, b, h, c, e, d, f

12. a) Probar que dado un grafo cualquiera G, existe un orden de los vértices de G tal que el *algoritmo greedy* devuelve un coloreo óptimo.
    b) Para cada grafo del ejercicio 11, dar un orden de los vértices para el cual el *algoritmo greedy* devuelva un coloreo óptimo.

13. Sea G un grafo con vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ y secuencia de grados $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n$, donde $d_i = d(v_i)$. Probar que:
    a) $\chi(G) \leqslant 1 + d_1$.
    b) $\chi(G) \leqslant 1 + \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \min\{d_i, i-1\}$.

14. Sea G un grafo con $|V(G)| = n$ y $|E(G)| = m$. Probar que
    a) $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant n + 1$
    b) $\chi(G)\chi(\overline{G}) \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$
    c) $\chi(G) \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$
    d) $\chi(G) \leqslant 1 + \max\{\delta(G') : G'$ subgrafo inducido de $G\}$

15. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que para todo par de números $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $2\sqrt{n} \leqslant a + b \leqslant n + 1$ y $n \leqslant a \cdot b \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$, existe un grafo G de n vértices para el cual $\chi(G) = a$ y $\chi(\overline{G}) = b$.

16. Para todo grafo G, tenemos que $\chi(G) \leqslant 1 + \Delta(G)$.
    a) Dar ejemplos de grafos en los cuales esta cota se alcanza, es decir grafos G para los cuales $\chi(G) = 1 + \Delta(G)$.
    b) Dar ejemplos de grafos en los cuales esta cota no se alcanza, es decir grafos G para los cuales $\chi(G) < 1 + \Delta(G)$, o equivalentemente $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.

17. Sean G y H grafos simples con $|V(G)| = n$. Probar que:
    a) G tiene un k-coloreo si y solo si $\alpha(G \square K_k) \geqslant n$.
    b) $\chi(G \square H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$.

18. Un *coloreo por aristas* en un grafo G es una asignación $f : E(G) \to \mathcal{C}$ (donde $\mathcal{C}$ es un conjunto de colores) tal que si e_1 y e_2 son dos aristas con un extremo en común, entonces $f(e_1) \neq f(e_2)$.
    a) Determinar un coloreo por aristas mínimo de los grafos K_4, $K_{3,3}$ y Petersen.

b) Describir los grafos que admiten un coloreo por aristas con exactamente dos colores.

19. Probar que las aristas de G pueden ser coloreadas con k colores si y sólo si los vértices del grafo $L(G)$ pueden ser coloreados con k colores.

    Nota: al mínimo valor de $k \in \mathbb{N}$ para el cual existe un coloreo por aristas con k colores se lo conoce como *número de coloreo por aristas de* G, y se denota $\chi'(G)$. Como consecuencia de este ejercicio, resulta que $\chi(L(G)) = \chi'(G)$.

20. Sea G un grafo con vértices $v_1, \ldots, v_n$, y $\omega(G) \geqslant 2$. Consideremos el grafo G_M que tiene conjunto de vértices

$$V(G_M) = \{w\} \cup \{v_1, \ldots, v_n\} \cup \{u_1, \ldots, u_n\}$$

    y conjunto de aristas

$$E(G_M) = E(G) \cup \{u_i v_j : v_i v_j \in E(G),\, i, j \in [n]\} \cup \{w u_i : i \in [n]\}.$$

    Probar que

    a) $\omega(G_M) = \omega(G)$.
    b) $\chi(G_M) = \chi(G) + 1$.
    c) Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un grafo H para el cual $\chi(H) - \omega(H) \geqslant k$.

21. Probar que si $\overline{G}$ es bipartito entonces G es perfecto.

22. El propietario de una tienda de mascotas recibe un envío de peces tropicales. Entre las distintas especies hay algunos pares en que una es depredadora de la otra. En consecuencia, estos pares de especies deben mantenerse en peceras distintas.

    Construir un modelo de este problema como un problema de coloreo de grafos y describir cómo determinar el menor número de peceras necesarias para preservar todos los peces del envío.

23. Como presidenta de los comités estudiantiles, Antonela debe programar los horarios para la reunión de 15 comités. Cada comité se reúne durante una hora a la semana. Las reuniones de dos comités con un miembro en común deben programarse a horas distintas.

    Modelar como un problema de coloreo de grafos y describir cómo determinar el menor número de horas que Antonela tiene que considerar para programar las reuniones de los 15 comités.

24. a) En los laboratorios químicos JJ, Juana recibe tres embarques que contienen un total de siete sustancias químicas diferentes. Asimismo, la naturaleza de estas sustancias es tal que para todo $1 \leqslant i \leqslant 5$, la sustancia i no puede almacenarse en el mismo compartimento que la sustancia $i+1$ o la $i+2$. Determinar el menor número de compartimentos separados que Juana necesitará para almacenar en forma segura estas siete sustancias.
    b) Suponga que además de las condiciones del ítem anterior, los cuatro pares siguientes de las mismas siete sustancias requieren también compartimentos separados: 1 y 4, 2 y 5, 2 y 6, 3 y 6. ¿Cuál es el menor número de compartimentos de almacenamiento que necesita ahora Juana para almacenar en forma segura estas siete sustancias?

25. Se quiere organizar en Rosario un torneo de tenis donde n participantes jueguen todos contra todos. Cada tenista puede disputar a lo sumo un partido por día. Los encuentros se disputarán en canchas techadas, por lo que no se suspenderá ningún encuentro por mal tiempo.

    ¿Cuántos días como mínimo son necesarios para desarrollar el torneo? Modelar el problema como un problema en grafos y resolverlo para $n = 5$.

26. Sea G un grafo de n vértices. Dado un orden $\sigma = v_1, \ldots, v_n$ de $V(G)$, consideremos $G_i = G[\{v_1, \ldots, v_i\}]$ y $f(\sigma) = 1 + \text{máx}\{d_{G_i}(v_i) : 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

   a) Mostrar que el algoritmo greedy aplicado a G con el orden σ obtiene un coloreo que usa a lo sumo $f(\sigma)$ colores.

   b) Sea σ^* un orden de los vértices que se obtiene de la siguiente manera: v_n es un vértice con $d(v_n) = \delta(G)$, y para cada $i = 1, \ldots, n-1$, v_{n-i} es un vértice con grado mínimo en el subgrafo $H_i = G - \{v_{n-i+1}, \ldots, v_n\}$. Probar que $f(\sigma^*) = 1 + \text{máx}\{\delta(G') : G' \text{ subgrafo inducido de } G\}$.

   c) Probar que para todo orden σ, se tiene $f(\sigma^*) \leqslant f(\sigma)$, donde σ^* es el orden definido en el ítem anterior.

   Nota: Observemos que este ejercicio nos da una prueba alternativa de la cota del ejercicio (14d).

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119