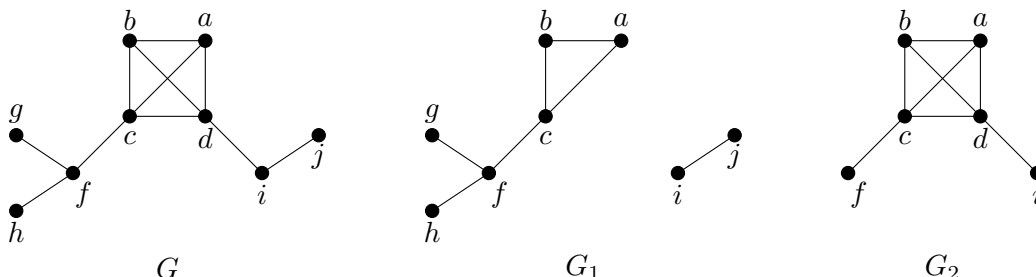


Práctica 3 - Subgrafos

1. Consideremos los siguientes grafos.



- ¿Cuántos subgrafos conexos de G tienen 4 vértices e incluyen un ciclo?
 - Describa el subgrafo G_1 de G como un subgrafo inducido y en términos de la eliminación de vértices de G .
 - Describa el subgrafo G_2 de G como un subgrafo inducido y en términos de la eliminación de vértices de G .
 - Trace el subgrafo de G inducido por el conjunto de vértices $U = \{b, c, d, f, i, j\}$.
 - Sea e la arista cf . Trace el subgrafo $G \setminus e$.
 - Sean e_1 y e_2 las aristas ac y ad respectivamente. Trace el subgrafo $(G \setminus e_1) \setminus e_2$.
 - Encuentre un subgrafo de G que no sea un subgrafo inducido.
2. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con $|V| \geq 2$ tal que todos los subgrafos inducidos de G son conexos. ¿Es posible identificar al grafo G ?
3. Determine la máxima cantidad de aristas en un subgrafo bipartito de los grafos P_n , C_n y K_n .
4. Sea $G = (V, E)$ un grafo con $|V| = n \geq 2$ y vértices v_1, v_2, \dots, v_n . Se define el *grado promedio* de G , denotado por $d(G)$, como

$$d(G) = \frac{1}{n} \sum_{v \in V} d(v).$$

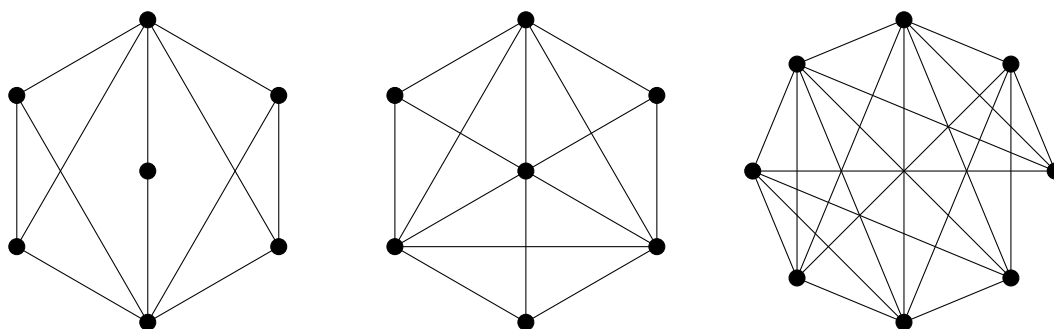
- a) Pruebe que $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$, donde

$$\delta(G) = \min_{v \in V} \{d(v)\}, \quad \Delta(G) = \max_{v \in V} \{d(v)\}.$$

Sea G un grafo simple y $v \in V(G)$. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- Si $d(v) = \Delta(G)$, entonces $d(G - v) \leq d(G)$. Es decir, borrar el vértice v no puede aumentar el grado promedio.
 - Si $d(v) = \delta(G)$, entonces $d(G - v) \leq d(G)$. Es decir, borrar el vértice v no puede aumentar el grado promedio.
5. Pruebe que todo subgrafo inducido de un grafo de línea es también un grafo de línea.
6. Sea G un grafo simple claw-free. Pruebe que si $\Delta(G) \geq 5$, entonces G tiene a C_4 como subgrafo.

7. Pruebe que un grafo G es bipartito si y solo si no tiene ningún ciclo impar como subgrafo.
8. Pruebe que el n -cubo Q_n es $K_{2,3}$ -free.
9. Sea $k \in \mathbb{N}$. Sea G el subgrafo de Q_{2k+1} inducido por el conjunto de vértices para los cuales la diferencia entre la cantidad de ceros y unos es uno.
 - a) Pruebe que G es regular.
 - b) Determine $|V(G)|$ y $|E(G)|$.
10. a) Pruebe que $\alpha(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y $\omega(C_n) = \begin{cases} 3, & \text{si } n = 3, \\ 2, & \text{si } n \geq 4. \end{cases}$
 - b) Pruebe que $\alpha(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y $\omega(P_n) = 2$.
 - c) Pruebe que $\alpha(W_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y $\omega(W_n) = \begin{cases} 4, & \text{si } n = 3 \\ 3, & \text{si } n \geq 4 \end{cases}$
11. Consideremos que el conjunto vacío es un conjunto estable de todo grafo. Pruebe que para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ la cantidad de conjuntos estables del camino P_n coincide con el $(n+1)$ -ésimo término de la sucesión de Fibonacci. Considere P_0 como el grafo vacío.
12. Pruebe que para todo grafo G se tiene $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$.
13. Sea H un subgrafo inducido de un grafo G . Pruebe que $\alpha(H) \leq \alpha(G)$ y $\omega(H) \leq \omega(G)$. ¿Se puede concluir lo mismo si H es un subgrafo no inducido?
14. Sean G y H dos grafos simples.
 - a) Determine $\alpha(G + H)$ y $\alpha(G \vee H)$ en función de $\alpha(G)$ y $\alpha(H)$.
 - b) Determine $\omega(G + H)$ y $\omega(G \vee H)$ en función de $\omega(G)$ y $\omega(H)$.
 - c) Pruebe que $W_n \cong K_1 \vee C_n$. Utilice esto para dar una demostración alternativa del ejercicio (9.c)
15. Sea G un grafo simple. Pruebe que si \overline{G} es no conexo, entonces existen dos subgrafos inducidos G_1 y G_2 de G tal que $G = G_1 \vee G_2$.
16. a) Dar una descomposición modular de cada uno de los siguientes grafos.



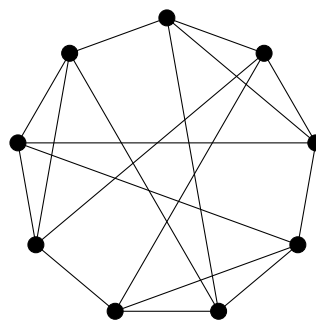
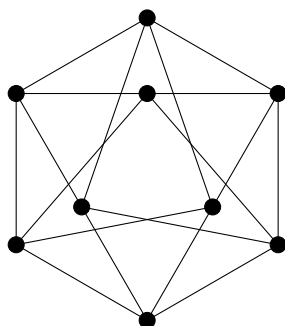
- b) Para cada grafo G del ítem anterior, calcular $\alpha(G)$ y $\omega(G)$ utilizando la descomposición modular.
- c) Un grafo es un *cografo* si es P_4 -free. Un grafo es un *cografo* si y solo si los grafos modulares de su descomposición son triviales. Determine si cada uno de los grafos del ítem (a) son cografos. En caso que no lo sean, encontrar un P_4 inducido.

17. Dados dos grafos G y H , el *producto cartesiano* de G y H , denotado $G \square H$, es el grafo con conjunto de vértices $V(G) \times V(H)$, donde dos vértices (g_1, h_1) y (g_2, h_2) son adyacentes si y solo si se verifica una de las siguientes dos condiciones:

- $g_1 = g_2$ y $h_1 h_2 \in E(H)$,
- $h_1 = h_2$ y $g_1 g_2 \in E(G)$.

- a) Trace los grafos $K_2 \square K_2$, $P_2 \square P_3$ y $P_3 \square C_4$.
- b) Determine $|E(G \square H)|$ en función de $|E(G)|$ y $|E(H)|$.
- c) Determine $\omega(G \square H)$ en función de $\omega(G)$ y $\omega(H)$.

18. a) Pruebe que cada uno de los siguientes grafos es isomorfo a $K_3 \square K_3$.



b) Pruebe que $K_3 \square K_3$ es autocomplementario.

19. Pruebe que para $n \geq 2$, el n -cubo Q_n es isomorfo al grafo $Q_{n-1} \square K_2$.