PARCIAL 2 - RESOLUCIÓN

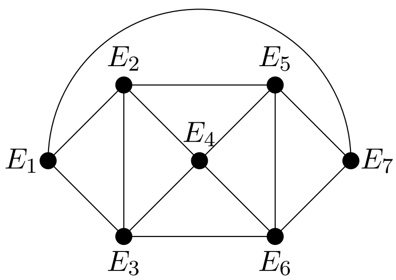
Ejercicio 1

Se busca asignar las frecuencias de transmisión para siete estaciones de radio de una región. Algunas emisoras presentan conflictos por los que no pueden emitir en la misma frecuencia. La tabla adjunta indica con una X cada par de emisoras con conflictos. ¿Cuántas frecuencias distintas son necesarias en esta región como mínimo?

Modelar este problema como uno de Teoría de Grafos y resolverlo, explicitando la respuesta.

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7
E_1		X	X				X
E_2	X		X	X	X		
E_3	X	X		X		X	
E_4		X	X		X	X	
E_5		X		X		X	X
E_6			X	X	X		X
E_7	X				X	X	

Definimos el grafo G que tiene como conjunto de vértices las distintas emisoras, y tal que dos emisoras están conectadas por una arista si presentan conflictos, es decir, si no pueden emitir en la misma frecuencia.
De esta manera, obtenemos el siguiente grafo.

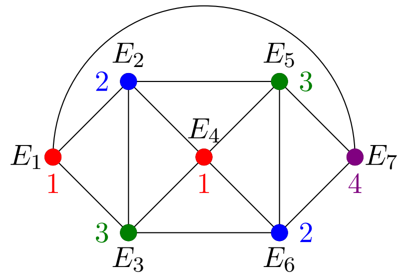


Sea f la función que a cada estación le asigna una frecuencia. Observemos que si dos estaciones de radio tienen conflictos, entonces la función f le asigna frecuencias distintas. Luego, f no es más que un coloreo de G.
Buscamos entonces el menor valor de k tal que existe un k-coloreo de G. Esto es, $\chi(G)$.
Por un lado, observemos que $\{E_1, E_2, E_3\}$ es una clique en G. Luego, $\omega(G) \geq 3$, y como $\chi(G) \geq \omega(G)$, resulta $\chi(G) \geq 3$
Supongamos que existe un 3-coloreo f de G. Observemos que f debe asignar colores distintos a E_1, E_2 y E_3. Sin perder generalidad, $f(E_1) = 1$, $f(E_2) = 2$ y $f(E_3) = 3$.
Como $\{E_2, E_3, E_4\}$ también es una clique, $f(E_4)$ no puede ser ni 2 ni 3, con lo cual el único color disponible es 1. Luego, $f(E_4) = 1$. De manera similar, considerando la clique $\{E_2, E_4, E_5\}$, resulta $f(E_5) = 3$, y considerando la clique $\{E_4, E_5, E_6\}$, resulta $f(E_6) = 2$.

Finalmente, no nos queda ningún color disponible para asignarle a E_7, ya que este es adyacente a E_1, E_5 y E_6, y tenemos $f(E_1) = 1$, $f(E_5) = 3$ y $f(E_6) = 2$.
Por lo tanto, no existe ningún 3-coloreo de G, por lo que

$$\chi(G) \geq 4 \tag{1}$$

Por otro lado, consideremos el siguiente 4-coloreo de G:



Resulta entonces

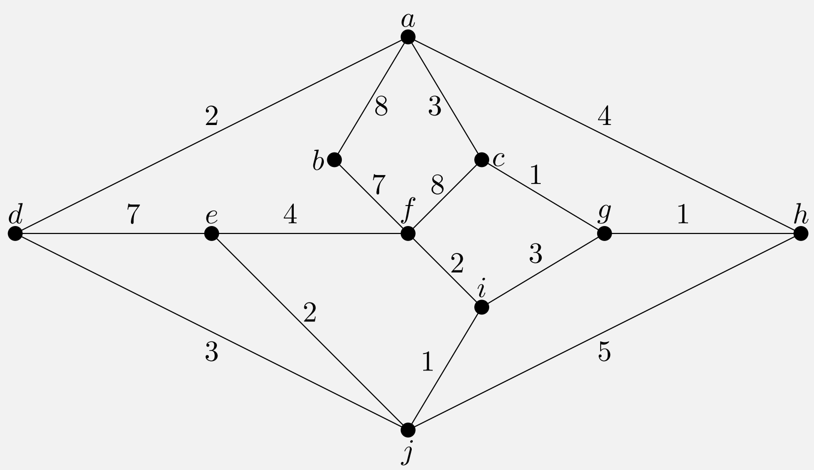
$$\chi(G) \leq 4 \tag{2}$$

De (1) y (2), resulta $\chi(G) = 4$.
Concluimos que la menor cantidad de frecuencias distintas necesarias en esta región es 4.

■

Ejercicio 2

Considerar el siguiente grafo ponderado G.



a) Hallar un camino de peso mínimo entre el vértice a y cada uno de los restantes vértices, mediante el algoritmo de Dijkstra.

b) Hallar un árbol recubridor de peso mínimo del grafo.

c) Exhibir el árbol recubridor del grafo que obtiene el algoritmo de *búsqueda en profundidad* (DFS) siguiendo el orden alfabético de los vértices. ¿Se trata de un árbol de peso mínimo? Justificar la respuesta.

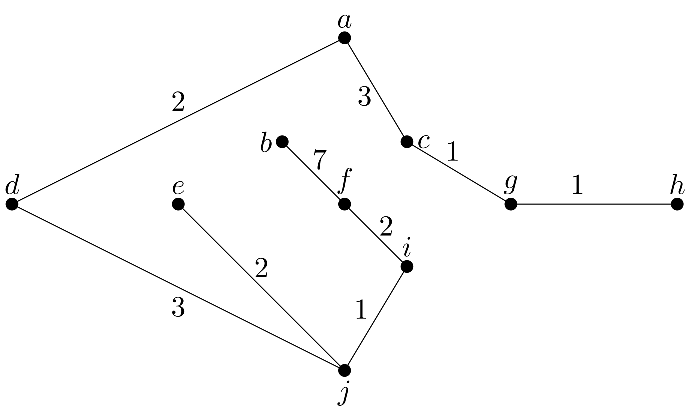
a) Ejecutamos el algoritmo de Dijkstra en el grafo dado G, comenzando con el vértice a. En la siguiente tabla, resumimos las etiquetas de los vértices en cada iteración del algoritmo.

Iter.	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
1 (a)	$-$	$(8, a)$	$(3, a)$	$(2, a)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(4, a)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
2 (d)		$(8, a)$	$(3, a)$	$-$	$(9, d)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(4, a)$	$(\infty, -)$	$(5, d)$
3 (c)		$(8, a)$	$-$		$(9, d)$	$(11, c)$	$(4, c)$	$(4, a)$	$(\infty, -)$	$(5, d)$
4 (g)		$(8, a)$			$(9, d)$	$(11, c)$	$-$	$(4, a)$	$(7, g)$	$(5, d)$
5 (h)		$(8, a)$			$(9, d)$	$(11, c)$		$-$	$(7, g)$	$(5, d)$
6 (j)		$(8, a)$			$(7, j)$	$(11, c)$			$(6, j)$	$-$
7 (i)		$(8, a)$			$(7, j)$	$(8, i)$			$-$	
8 (e)		$(8, a)$			$-$	$(8, i)$				
9 (b)		$-$				$(8, i)$				
10 (f)						$-$				

Obtenemos entonces los siguientes caminos de longitud mínima entre a y cada uno de los demás vértices de G:

Vértice	Camino	Longitud
b	a, b	8
c	a, c	3
d	a, d	2
e	a, d, j, e	7
f	a, d, j, i, f	8
g	a, c, g	4
h	a, h	4
i	a, d, j, i	6
j	a, d, j	5

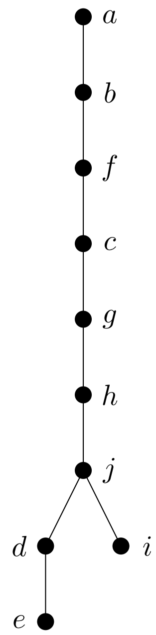
b) Hallamos un árbol recubridor de peso mínimo de G mediante el algoritmo de Kruskal. Es decir, vamos agregamos aristas una a una, eligiendo una arista de menor peso posible de manera que no se generen ciclos. De esta manera, obtenemos el siguiente árbol recubridor T, que sabemos por teoría, que será de peso mínimo.



El orden en que fuimos agregando las aristas es: cg, gh, ij, ad, ej, fi, ac, dj, bf.

El peso de T es 22.

c) Mediante el algoritmo de búsqueda en profundidad con el orden alfabético de los vértices, obtenemos el siguiente árbol recubridor T'.



El peso de T' es $8+7+8+1+1+5+3+1+7=41$. T' no es un árbol de peso mínimo, ya que por lo hecho el ítem anterior, el peso mínimo de un árbol recubridor de G es 22.

■

Ejercicio 3

Probar que si G es un grafo simple, k-regular y bipartito, entonces es 1-factoreable.

Lo haremos por inducción sobre k.

Caso base. $k=1$. Si G es un grafo simple y 1-regular, G es un k-factor, por lo cual resulta inmediato que G es 1-factoreable.

Hipótesis inductiva. Supongamos que todo grafo simple k-regular y bipartito es 1-factoreable.

Paso inductivo. Sea G un grafo simple $(k+1)$-regular y bipartito. Queremos ver que G es 1-factoreable. Por corolario del teorema de Hall, visto en la teoría, sabemos que todo grafo bipartito y regular tiene matching perfecto. Luego, sea M un matching perfecto de G. Consideremos el grafo $G' = (V(G), E(G) \setminus M)$, que se obtiene a partir de G borrando las aristas del matching M.

Observemos que para cada vértice $v \in V(G)$ existe una única arista del matching M que incide en v (pues M es perfecto y satura a todos los vértices de G), tenemos que $d_{G'}(v) = d_G(v) - 1 = (k+1) - 1 = k$. Resulta entonces que G' es k-regular. Además, al ser subgrafo de un grafo bipartito, G' también es bipartito. La hipótesis inductiva es válida para G' y tenemos que G' es 1 factoreable.

Es decir, existen 1-factores $H_1, H_2, \ldots, H_\ell$ de G' que son disjuntos por aristas y tales que

$$E(G') = \bigcup_{i=1}^{\ell} E(H_i)$$

Notemos que $H_1, H_2, \ldots, H_\ell$ son también 1-factores de G.

Consideremos $H_{\ell+1}$ el grafo dado por $H_{\ell+1} = (V(G), M)$. Como M es un matching perfecto, $H_{\ell+1}$ es un 1-factor de G. Y como $M \cap E(G') = \emptyset$, tenemos que $H_1, H_2, \ldots, H_\ell, H_{\ell+1}$ son 1-factores de G disjuntos por aristas. Además

$$E(G) = E(G') \cup M = \left(\bigcup_{i=1}^{\ell} E(H_i) \right) \cup E(H_{\ell+1}) = \bigcup_{i=1}^{\ell+1} E(H_i)$$

Luego, G es 1-factoreable, y queda probado el enunciado.

■

Ejercicio 4

Determinar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

a) Si G es un bosque con n vértices y m aristas, entonces tiene $n-m$ componentes conexas.

b) Un árbol sin vértices de grado dos tiene la misma cantidad de hojas que de vértices internos.

c) Sea G un grafo y f un $\chi(G)$-coloreo de G. Entonces existe algún color x tal que su clase de color es un conjunto estable máximo, i.e. de cardinal $\alpha(G)$.

a) **VERDADERO.**

Sea G un bosque con n vértices y m aristas. Como G es un bosque, G es acíclico.

Sean $G_1, \ldots, G_k$ las componentes conexas de G. Cada G_i es conexo y además es acíclico pues G es acíclico. Luego, G_i es un árbol para cada $i = 1, \ldots, k$.

Sean $n_i = |V(G_i)|$ y $m_i = |E(G_i)|$. Tenemos que

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i, \qquad m = \sum_{i=1}^{k} m_i$$

Por otro lado, como cada G_i es un árbol, vale $n_i = m_i + 1$. Luego, tenemos

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i = \sum_{i=1}^{k} (m_i + 1) = \left(\sum_{i=1}^{k} m_i \right) + k = m + k$$

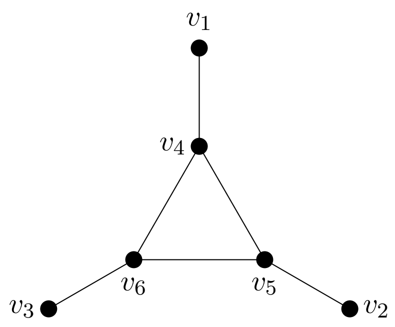
Luego, $n = m + k$, o lo que es lo mismo, $k = n - m$. G tiene $n - m$ componentes conexas.

b) **FALSO.**

Basta considerar $T = K_{1,3}$. T es un árbol que tiene solo un vértice interno (de grado 3) y 3 hojas.

c) **FALSO.**

Consideremos, por ejemplo el siguiente grafo G.



Observemos que $\chi(G) = 3$. En efecto, G tiene una clique de tamaño 3 por lo que $\chi(G) \geq 3$, y además podemos encontrar un 3-coloreo, por ejemplo

$$f(v_1) = f(v_6) = 1 \qquad f(v_2) = f(v_4) = 2, \qquad f(v_3) = f(v_5) = 3.$$

Cada clase de color tiene 2 vértices, mientras que $\alpha(G) = 3$. Un conjunto estable máximo es $\{v_1, v_2, v_3\}$.

■