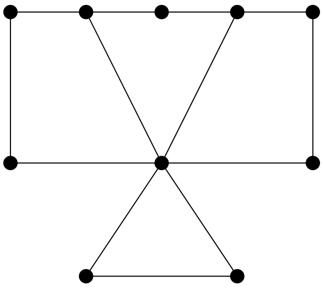
Práctica 5 - Ciclos Hamiltonianos

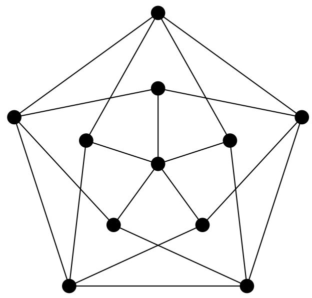
Definición: Un camino hamiltoniano en un grafo G es un camino simple (no cerrado) que pasa por todos los vértices de G, i.e. un camino simple no cerrado de longitud $|V(G)| - 1$.

1. Encuentre un ciclo hamiltoniano, si existe, para cada uno de los grafos siguientes. Si el grafo no tiene un ciclo hamiltoniano, determine si tiene un camino hamiltoniano.

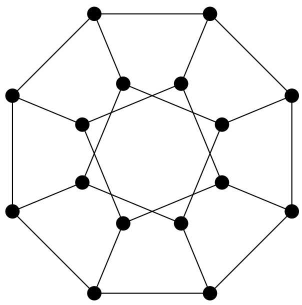
a)



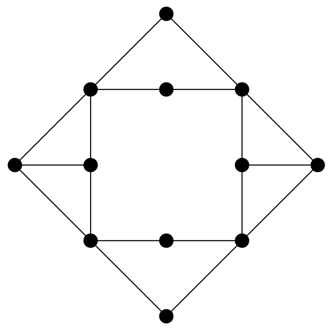
c)



b)



d)



2. De un ejemplo de un grafo conexo tal que

   a) no tenga ciclos eulerianos ni ciclos hamiltonianos;

   b) tenga un ciclo euleriano pero no tenga ciclos hamiltonianos;

   c) tenga un ciclo hamiltoniano pero no tenga ciclos eulerianos;

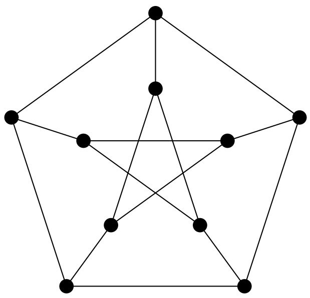
   d) tenga un ciclo euleriano y un ciclo hamiltoniano que sean distintos;

   e) tenga un ciclo euleriano y un ciclo hamiltoniano que sean iguales.

3. a) Caracterice el tipo de grafo en que un ciclo euleriano es también un ciclo hamiltoniano.

   b) Caracterice el tipo de grafo en que un camino euleriano es también un camino hamiltoniano.

4. Considerar el *grafo de Petersen*.



a) Muestre que el grafo de Petersen no tiene ciclos hamiltonianos pero si tiene un camino hamiltoniano.

b) Muestre que si se elimina cualquier vértice (y las aristas incidentes en él) del grafo de Petersen, entonces el subgrafo resultante tiene un ciclo hamiltoniano.

5. a) Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y bipartito, con $V = V_1 \cup V_2$, y V_1 y V_2 no vacíos. Demuestre que si $|V_1| \neq |V_2|$, entonces G no tiene un ciclo hamiltoniano.

   b) Demuestre que si el grafo G del ítem anterior tiene un camino hamiltoniano, entonces se tiene $|V_1| - |V_2| = \pm 1$.

   c) De un ejemplo de un grafo conexo y bipartito $G = (V, E)$ con $V = V_1 \cup V_2$, V_1 y V_2 no vacíos y $|V_1| = |V_2| + 1$, pero tal que G no tenga un camino hamiltoniano.

6. Determine para qué valores de $n \in \mathbb{N}$ (o de $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$ si corresponde) los siguientes grafos admiten un ciclo o un camino hamiltoniano. En los casos en los que el grafo admita dicho ciclo o camino, describa uno.

   a) El grafo completo K_n.

   b) El grafo completo bipartito $K_{m,n}$.

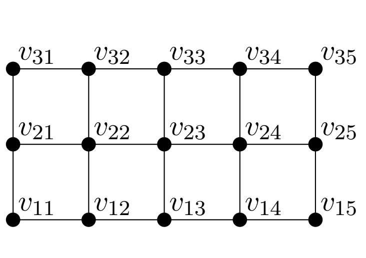
   c) El cubo-n Q_n.

   d) El grafo *grilla* $G_{m,n}$ cuyo conjunto de vértices está dado por

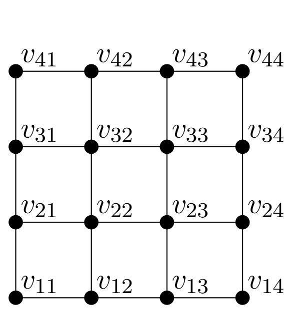
$$V(G_{m,n}) = \{v_{ij} : 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n\}$$

   y dos vértices v_{ij}, $v_{k\ell}$ son adyacentes si y solo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

   - $k = i$ y $\ell = j + 1$;
   - $k = i + 1$ y $\ell = j$;



$G_{3,5}$



$G_{4,4}$

7. a) Para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 2$, muestre que la cantidad de ciclos hamiltonianos distintos en el grafo bipartito completo $K_{n,n}$ es
$$\frac{1}{2}(n-1)!n!$$
   b) ¿Cuántos caminos hamiltonianos distintos tiene $K_{n,n}$ con $n \geqslant 1$?

8. a) De un ejemplo de un multigrafo conexo y sin lazos $G = (V, E)$ tal que $|V| = n \geqslant 2$ y $\text{gr}(x) + \text{gr}(y) \geqslant n - 1$ para todo par $x, y \in V$, pero tal que G no tenga un camino hamiltoniano.
   b) De un ejemplo de un grafo conexo y sin lazos $G = (V, E)$ tal que $|V| = n \geqslant 2$ que tenga un camino hamiltoniano pero tal que para algún par de vértices $x, y \in V$, $x \neq y$, se tiene $\text{gr}(x) + \text{gr}(y) \leqslant n - 2$.

9. Probar que un grafo G tiene un camino hamiltoniano ssi el grafo $G \vee K_1$ es hamiltoniano.

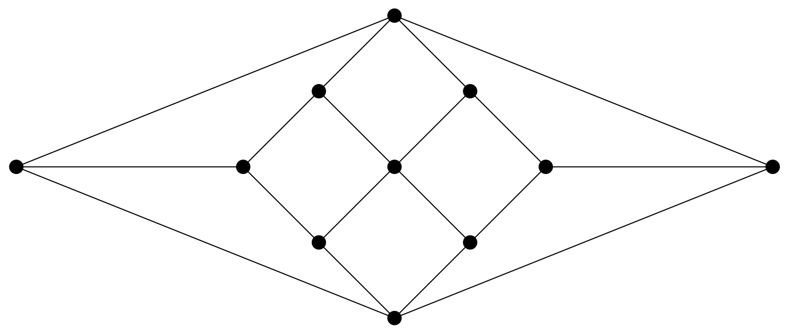
10. Demostrar que un grafo si G tiene un camino hamiltoniano entonces para todo $S \subset V(G)$ vale que $c(G - S) \leqslant |S| + 1$.

11. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con $|V| = n \geqslant 2$. Demuestre que si $\text{gr}(v) \geqslant \frac{n-1}{2}$ para todo $v \in V$, entonces G tiene un camino hamiltoniano.

12. a) Modele el siguiente problema utilizado grafos.
   ¿Pueden arreglarse las permutaciones de los primeros n números naturales en una sucesión de manera que las permutaciones adyacentes
$$p:\ p_1, \ldots, p_n \qquad \text{y} \qquad q:\ q_1, \ldots, q_n$$
   satisfagan $p_i \neq q_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$?
   b) Resuelva el problema del ítem anterior para $n = 1, 2, 3, 4$.

13. Sea $G = (V, E)$ un grafo y S un conjunto independiente en G. Para cada $a \in S$ y cualquier ciclo hamiltoniano C de G, habrá $\text{gr}(a) - 2$ aristas en E incidentes en a que no están en C. Por lo tanto, habrá al menos
$$\sum_{a \in S} (\text{gr}(a) - 2) = \sum_{a \in S} \text{gr}(a) - 2|S|$$
aristas en E que no están en C.

   a) ¿Por qué son distintas las $\sum_{a \in S} \text{gr}(a) - 2|S|$ aristas mencionadas?
   b) Si denotamos por $n = |V|$ y $m = |E|$, demuestre que si
$$m - \sum_{a \in S} \text{gr}(a) + 2|S| < n$$
   entonces G no tiene ningún ciclo hamiltoniano.
   c) Demuestre, utilizando el ítem anterior que el siguiente grafo no admite ciclos hamiltonianos.



14. Probar que si G y H son hamiltonianos entonces $G \square H$ es hamiltoniano.

15. En un tablero de ajedréz, un caballo puede mover de un casillero a otro que difiere en uno en una coordenada y en dos en la otra. Probar que en un tablero de $4 \times n$ no existe un tour hípico: un recorrido del caballo que pase por todos los casilleros exactamente una vez y retorne al casillero inicial.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119