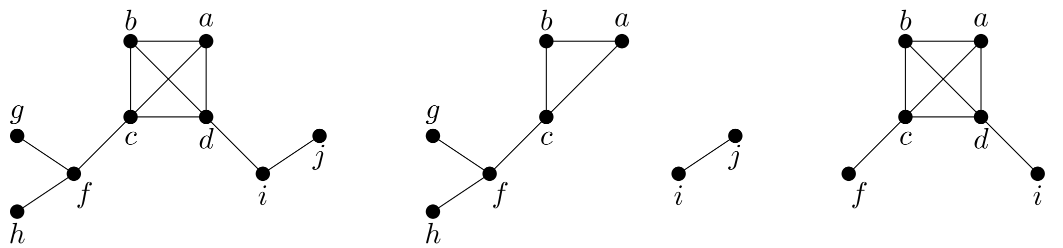
Práctica 3 - Subgrafos

1. Consideremos los siguientes grafos.



G $\qquad$ G_1 $\qquad$ G_2

a) ¿Cuántos subgrafos conexos de G tienen 4 vértices e incluyen un ciclo?

b) Describa el subgrafo G_1 de G como un subgrafo inducido y en términos de la eliminación de vértices de G.

c) Describa el subgrafo G_2 de G como un subgrafo inducido y en términos de la eliminación de vértices de G.

d) Trace el subgrafo de G inducido por el conjunto de vértices $U = \{b, c, d, f, i, j\}$.

e) Sea e la arista cf. Trace el subgrafo $G \backslash e$.

f) Sean e_1 y e_2 las aristas ac y ad respectivamente. Trace el subgrafo $(G \backslash e_1) \backslash e_2$.

g) Encuentre un subgrafo de G que no sea un subgrafo inducido.

2. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con $|V| \geqslant 2$ tal que todos los subgrafos inducidos de G son conexos. ¿Es posible identificar al grafo G?

3. Determine la máxima cantidad de aristas en un subgrafo bipartito de los grafos P_n, C_n y K_n.

4. Sea $G = (V, E)$ un grafo con $|V| = n \geqslant 2$ y vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Se define el *grado promedio* de G, denotado por $d(G)$, como

$$d(G) = \frac{1}{n} \sum_{v \in V} d(v).$$

a) Pruebe que $\delta(G) \leqslant d(G) \leqslant \Delta(G)$, donde

$$\delta(G) = \min_{v \in V}\{d(v)\}, \qquad \Delta(G) = \max_{v \in V}\{d(v)\}.$$

Sea G un grafo simple y $v \in V(G)$. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

b) Si $d(v) = \Delta(G)$, entonces $d(G - v) \leqslant d(G)$. Es decir, borrar el vértice v no puede aumentar el grado promedio.

c) Si $d(v) = \delta(G)$, entonces $d(G - v) \leqslant d(G)$. Es decir, borrar el vértice v no puede aumentar el grado promedio.

5. Pruebe que todo subgrafo inducido de un grafo de línea es también un grafo de línea.

6. Sea G un grafo simple claw-free. Pruebe que si $\Delta(G) \geqslant 5$, entonces G tiene a C_4 como subgrafo.

7. Pruebe que el n-cubo Q_n es $K_{2,3}$-free.

8. Sea $k \in \mathbb{N}$. Sea G el subgrafo de Q_{2k+1} inducido por el conjunto de vértices para los cuales la diferencia entre la cantidad de ceros y unos es uno.

   a) Pruebe que G es regular.

   b) Determine $|V(G)|$ y $|E(G)|$.

9. a) Pruebe que $\alpha(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ y $\omega(C_n) = \begin{cases} 3, & \text{si } n = 3, \\ 2, & \text{si } n \geqslant 4. \end{cases}$

   b) Pruebe que $\alpha(P_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ y $\omega(P_n) = 2$.

   c) Pruebe que $\alpha(W_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ y $\omega(W_n) = \begin{cases} 4, & \text{si } n = 3 \\ 3, & \text{si } n \geqslant 4 \end{cases}$

10. Consideremos que el conjunto vacío es un conjunto estable de todo grafo. Pruebe que para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ la cantidad de conjuntos estables del camino P_n coincide con el $(n+1)$-ésimo término de la sucesión de Fibonacci. Considere P_0 como el grafo vacío.

11. Pruebe que para todo grafo G se tiene $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$.

12. Sea H un subgrafo inducido de un grafo G. Pruebe que $\alpha(H) \leqslant \alpha(G)$ y $\omega(H) \leqslant \omega(G)$. ¿Se puede concluir lo mismo si H es un subgrafo no inducido?

13. Sean G y H dos grafos simples.

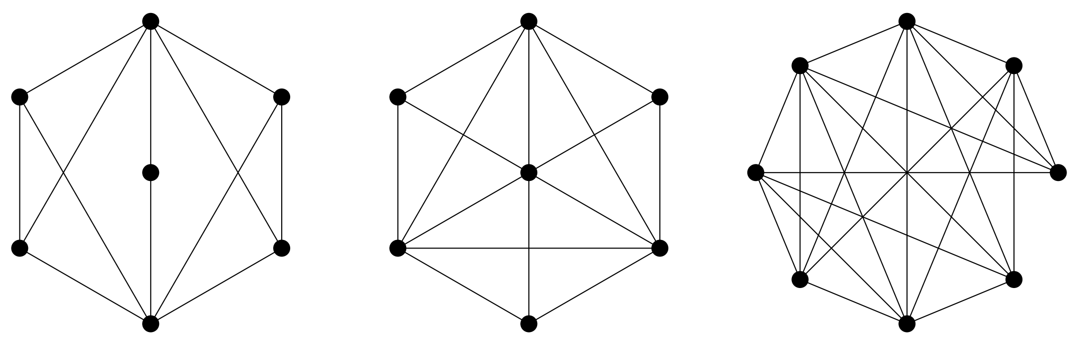
    a) Determine $\alpha(G + H)$ y $\alpha(G \vee H)$ en función de $\alpha(G)$ y $\alpha(H)$.

    b) Determine $\omega(G + H)$ y $\omega(G \vee H)$ en función de $\omega(G)$ y $\omega(H)$.

    c) Pruebe que $W_n \cong K_1 \vee C_n$. Utilice esto para dar una demostración alternativa del ejercicio (9.c)

14. Sea G un grafo simple. Pruebe que si $\overline{G}$ es no conexo, entonces existen dos subgrafos inducidos G_1 y G_2 de G tal que $G = G_1 \vee G_2$.

15. a) Dar una descomposición modular de cada uno de los siguientes grafos.



    b) Para cada grafo G del ítem anterior, calcular $\alpha(G)$ y $\omega(G)$ utilizando la descomposición modular.

    c) Un grafo es un *cografo* si es P_4-free. Un grafo es un cografo si y solo si los grafos modulares de su descomposición son triviales. Determine si cada uno de los grafos del ítem (a) son cografos. En caso que no lo sean, encontrar un P_4 inducido.

16. Dados dos grafos G y H, el *producto cartesiano* de G y H, denotado $G \square H$, es el grafo con conjunto de vértices $V(G) \times V(H)$, donde dos vértices (g_1, h_1) y (g_2, h_2) son adyacentes si y solo si se verifica una de las siguientes dos condiciones:

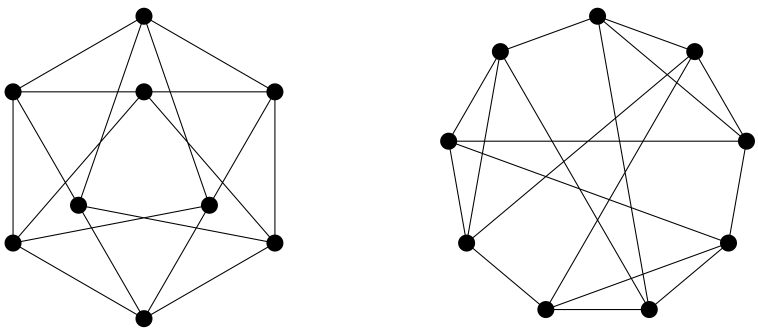
    - $g_1 = g_2$ y $h_1 h_2 \in E(H)$,
    - $h_1 = h_2$ y $g_1 g_2 \in E(G)$.

    a) Trace los grafos $K_2 \square K_2$, $P_2 \square P_3$ y $P_3 \square C_4$.

    b) Determine $|E(G \square H)|$ en función de $|E(G)|$ y $|E(H)|$.

    c) Determine $\omega(G \square H)$ en función de $\omega(G)$ y $\omega(H)$.

17. a) Pruebe que cada uno de los siguientes grafos es isomorfo a $K_3 \square K_3$.



    b) Pruebe que $K_3 \square K_3$ es autocomplementario.

18. Pruebe que para $n \geqslant 2$, el n-cubo Q_n es isomorfo al grafo $Q_{n-1} \square K_2$.