COLOREO DE GRAFOS

Ejercicio 5

Sea G un grafo sin lazos con al menos una arista. Probar que G es bipartito si y solo si $\chi(G) = 2$.

$\Rightarrow$) Supongamos que G es bipartito. Entonces, existen dos conjuntos disjuntos X e Y tales que $V(G) = X \cup Y$ y toda arista $e \in E(G)$ tiene un extremo en X y otro en Y.

Consideremos $f : V(G) \to [2]$, dada por

$$f(v) = \begin{cases} 1, & \text{si } v \in X, \\ 2, & \text{si } v \in Y. \end{cases}$$

Veamos que f es un coloreo válido de G. En efecto, si $e = vw \in E(G)$, entonces $v \in X$ y $w \in Y$, o bien $v \in Y$ y $w \in X$. En cualquier caso, tenemos que las imágenes de v y w por f son distintas, i.e., $f(v) \neq f(w)$. Por lo tanto, f es un 2-coloreo de G y $\chi(G) \leq 2$.

Por otro lado, como G tiene al menos una arista, resulta que $\omega(G) \geq 2$. Luego, como $\chi(G) \geq \omega(G)$, resulta $\chi(G) \geq 2$.

Concluimos entonces que $\chi(G) = 2$.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que $\chi(G) = 2$ Entonces existe un 2-coloreo de G. Es decir, existe $f : V(G) \to [2]$ tal que si u y v son vértices adyacentes, entonces $f(u) \neq f(v)$.

Consideremos los siguientes conjuntos:

$$X = \{v \in V(G) : f(v) = 1\}, \qquad Y = \{v \in V(G) : f(v) = 2\}$$

Claramente, X e Y son disjuntos y $X \cup Y = V(G)$. Además, si $uv \in E(G)$, entonces f asigna colores distintos a u y v con lo cual $f(u) = 1$ y $f(v) = 2$, o bien $f(u) = 2$ y $f(v) = 1$. Equivalentemente $u \in X$ y $v \in Y$, o bien $u \in Y$ y $v \in X$.

Por lo tanto, hemos probado que G es bipartito con bipartición $G[X, Y]$.

■

Ejercicio 10

Sea G un grafo k-color crítico. Probar que:

a) G es conexo.

b) $d(v) \geq k - 1$ para todo $v \in V(G)$.

c) G no tiene vértices de corte.

Consideremos un grafo G k-crítico. Es decir, para todo vértice $v \in V(G)$, $\chi(G - v) < \chi(G) = k$. O, equivalentemente, para todo G' subgrafo inducido propio de G, $\chi(G') < \chi(G) = k$.

a) Queremos ver que G es conexo. Supongamos que no lo es. Sean $C_1, C_2, \ldots, C_k$ las componentes conexas de G. Luego, si $G_i = G[C_i]$, por el ejercicio 8 sabemos que

$$\chi(G) = \max_{1\leq i\leq k}^{k} \chi(G_i).$$

Sea j tal que $\chi(G_j) = \max\limits_{1\leq i\leq k} \chi(G_i)$. G_j es un subgrafo inducido propio de G con $\chi(G_j) = \chi(G)$. Esto contradice que G es k-crítico. Concluimos entonces que G es conexo.

b) Supongamos que existe un vértice v tal que $d(v) \leq k-2$. Consideremos el grafo $G' = G - v$. Como G es k-crítico, entonces $\chi(G') < k$. Sea f' un coloreo mínimo de G'. f' usa a lo sumo $k-1$ colores. Observemos que como v tiene a lo sumo $k-2$ vecinos, existe al menos un $x \in [k-1]$ tal que $f'(w) \neq x$ para cada $w \in N(v)$.

Consideremos $f : V(G) \to [k-1]$ dada por

$$f(u) = \begin{cases} f'(u), & \text{si } u \neq v, \\ x, & \text{si } u = v. \end{cases}$$

Notemos que f es un coloreo válido de G. En efecto, sean u y w dos vértices adyacentes en G. Si $u \neq v$ y $w \neq v$, entonces $f(u) = f'(u)$ y $f(w) = f'(w)$. Como u y w son adyacentes en G' y f' es un coloreo de G', tenemos que $f'(u) \neq f'(w)$ por lo que $f(u) \neq f(w)$. Finalmente, si $u = v$, entonces $f(v) = x$. Además como $w \neq v$, $f(w) = f'(w)$ y como w es vecino de v, por la elección de x tenemos que $f'(w) \neq x$. Por lo tanto $f(u) \neq f(w)$. Por lo tanto, f es un coloreo de G que usa a lo sumo $k-1$ colores. Esto no es posible ya que $\chi(G) = k$. Por lo tanto, no existe ningún vértice v con $d(v) \leq k-2$. O, equivalentemente, $d(v) \geq k-1$ para todo $v \in V(G)$.

c) Supongamos que v es un vértice de corte de G. Sean $C_1, C_2, \ldots, C_t$ las componentes conexas de $G - v$. Consideremos $G_i = G[C_i \cup \{v\}]$. Observemos que para cada i, G_i es un subgrafo inducido propio de G. Luego, $\chi(G_i) \leq \chi(G) - 1 = k - 1$ para cada $i = 1, 2, \ldots, t$.

Para cada $i = 1, 2, \ldots, t$, sea f_i un coloreo mínimo de G_i. Observemos que podemos considerar, permutando los colores si es necesario, que $f_i(v) = 1$. Notemos que cada vértice distinto de v está en uno y solo uno de los G_i, y que si $u \in C_i$ y $w \in C_j$ con $i \neq j$, entonces $uw \notin E(G)$. Definimos $f : V(G) \to [\max_{1\leq i\leq t} \chi(G_i)]$, dada por

$$f(u) = \begin{cases} f_i(u), & \text{si } u \neq v \text{ y } u \in C_i, \\ 1, & \text{si } u = v. \end{cases}$$

Veamos que f es un coloreo válido de G. Sean u y w tales que $uw \in E(G)$. Por lo dicho anteriormente, si $v \notin \{u, w\}$, entonces u y w pertenecen a la misma componente conexa C_i de $G - v$. Luego, $f(u) = f_i(u)$ y $f(w) = f_i(w)$. Como f_i es un coloreo válido de G_i, resulta

$$f(u) = f_i(u) \neq f_i(w) = f(w).$$

Por otro lado, si $u = v$ y $w \neq v$, w pertenece a alguna componente conexa C_i de $G - v$. Tenemos que $f(w) = f_i(w)$. Pero además, $f(v) = 1 = f_i(v)$. Nuevamente como f_i es un coloreo válido de G_i, resulta

$$f(v) = 1 = f_i(v) \neq f_i(w) = f(w).$$

Por lo tanto, f es un coloreo válido de G que usa $\max_{1\leq i\leq t} \chi(G_i) \leq k - 1$ colores. Esto no es posible ya que $\chi(G) = k$. Por lo tanto, no existe ningún vértice de corte en G.

■

Ejercicio 14

Sea G un grafo con $|V(G)| = n$ y $|E(G)| = m$. Probar que

a) $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$

b) $\chi(G)\chi(\overline{G}) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$

c) $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$

d) $\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(G') : G' \text{ subgrafo inducido de } G\}$

(Consideramos G simple)

a) Queremos probar que $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$. Lo haremos por inducción sobre n.

Caso base. Si $n = 1$ entonces tanto G como $\bar{G}$ son isomorfos a K_1. Luego, tenemos que $\chi(G) = \chi(\bar{G}) = 1$ con lo cual es inmediato el resultado.

Hipótesis Inductiva. Supongamos que la desigualdad es válida para grafos con $n \leq k$

Paso inductivo. Veamos que vale para grafos con $n = k + 1$ vértices

Sea G un grafo con $|V(G)| = k + 1$, y sea $v \in V$. Consideremos el grafo $H = G - v$. Como este grafo tiene k vértices, por hipótesis inductiva, tenemos que vale la desigualdad $\chi(H) + \chi(\bar{H}) \leq k + 1$.

Observemos además que dado un coloreo mínimo de H, podemos obtener un coloreo de G agregando un color nuevo a v. Luego $\chi(G) \leq \chi(H) + 1$. De manera similar, $\chi(\bar{G}) \leq \chi(\bar{H}) + 1$.

Si $\chi(G) \leq \chi(H)$ o bien $\chi(\bar{G}) \leq \chi(\bar{H})$, entonces

$$\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq \chi(H) + \chi(\bar{H}) + 1 \leq k + 2$$

Si $\chi(G) = \chi(H) + 1$ y $\chi(\bar{G}) = \chi(\bar{H}) + 1$, entonces observemos que v tiene al menos $\chi(H)$ vecinos en G. Pues de lo contrario, a partir de un coloreo mínimo f de H, existe algún color x tal que $f(w) \neq x$ para todo $w \in N(v)$. Luego, podemos asignarle a v este color x y conseguimos un coloreo de G de $\chi(H)$ colores. Pero esto no es posible ya que $\chi(G) = \chi(H) + 1$. Con un razonamiento similar, v tiene al menos $\chi(\bar{H})$ vecinos en $\bar{G}$.

Es decir, $d_G(v) \geq \chi(H)$ y $d_{\bar{G}}(v) \geq \chi(\bar{H})$. Por otro lado, sabemos que

$$d_G(v) + d_{\bar{G}} = |V(G)| - 1 = k$$

Luego, tenemos que

$$\chi(H) + \chi(\bar{H}) \leq d_G(v) + d_{\bar{G}} = k$$

Y obtenemos

$$\chi(G) + \chi(\bar{G}) = \chi(H) + \chi(\bar{H}) + 2 \leq k + 2$$

En cualquier caso, resulta

$$\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq k + 2 = |V(G)| + 1$$

Lo que prueba la desigualdad.

Ergo, $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$.

b) Observemos primero que para cualquier par de números positivos a y b vale $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. En efecto, tenemos que

$$a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

con lo cual

$$\begin{aligned} a + b &\geq 2\sqrt{ab} \\ \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab} \\ \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 &\geq ab \end{aligned}$$

En particular, tenemos que $\chi(G)\chi(\bar{G}) \leq \left(\frac{\chi(G)+\chi(\bar{G})}{2}\right)^2$.

Por el item anterior sabemos que $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$. Entonces resulta

$$\chi(G)\chi(\bar{G}) \leq \left(\frac{\chi(G)+\chi(\bar{G})}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

Ergo, $\chi(G)\chi(\bar{G}) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$.

c) Sea $f : V(G) \to [\chi(G)]$ un coloreo mínimo de G.

Consideremos la $\chi(G)$-partición de los vértices de G que induce f. Es decir, consideremos los conjuntos $V_i = \{v \in V(G) : f(v) = i\}$ para $i \in [\chi(G)]$. (V_i es la clase de color de i)

Si $i \neq j$, entonces existen vértices $u \in V_i$ y $v \in V_j$ tales que $uv \in E(G)$. Pues de lo contrario, podríamos colorear todos los vértices de V_j con el color i obteniendo un $(\chi(G) - 1)$ coloreo de G, lo cual es absurdo.

Entonces por cada par de colores tenemos al menos una arista. Y resulta

$$m \geq \binom{\chi(G)}{2} = \frac{\chi(G)!}{2!(\chi(G)-2)!} = \frac{\chi(G)(\chi(G)-1)}{2}$$

Esto es lo mismo que

$$\begin{aligned} 2m &\geq \chi(G)(\chi(G) - 1) \\ 2m &\geq \chi(G)^2 - \chi(G) \\ 2m + \frac{1}{4} &\geq \chi(G)^2 - \chi(G) + \frac{1}{4} \\ 2m + \frac{1}{4} &\geq \left(\chi(G) - \frac{1}{2}\right)^2 \\ \sqrt{2m + \frac{1}{4}} &\geq \chi(G) - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}} &\geq \chi(G) \end{aligned}$$

como queríamos.

d) Finalmente, queremos probar que $\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(G') : G' \text{ subgrafo inducido de } G\}$. Sea $k = \chi(G)$. Sea H un subgrafo inducido de G que es k-crítico. Por el ejercicio (10b), tenemos que $d_H(v) \geq k - 1$ para todo $v \in V(H)$. Es decir, $\delta(H) \geq k - 1 = \chi(G) - 1$. Entonces,

$$\chi(G) \leq 1 + \delta(H) \leq 1 + \max\{\delta(G') : G' \text{ subgrafo inducido de } G\}$$

como queríamos.

■

Ejercicio 17

Sean G y H grafos simples con $|V(G)| = n$. Probar que:

a) $\chi(G) = k$ si y solo si $\alpha(G\square K_k) \geq n$.

b) $\chi(G\square H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$.

a) Consideremos $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $V(K_k) = \{1, \ldots, k\}$. Luego, $V(G\square K_k) = \{(v_i, r) : i = 1, \ldots, n;\ r = 1, \ldots, k\}$.

Veamos primero que si $\chi(G) = k$ entonces $\alpha(G\square K_k) \geq n$. Sea $f : V(G) \mapsto \{1, \ldots, k\}$ un coloreo óptimo de G. Veamos que el conjunto de vértices $S = \{(v_i, f(v_i)) : i = 1, \ldots, n\}$ es un conjunto estable en $V(G\square K_k)$.

Consideremos $(v_i, f(v_i))$, $(v_j, f(v_j))$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$, dos vértices cualesquiera de S. Notemos que si $f(v_i) \neq f(v_j)$, como $v_i \neq v_j$, entonces $(v_i, f(v_i))$, $(v_j, f(v_j))$ no son adyacentes en $G\square K_k$.

Si $f(v_i) = f(v_j)$, entonces v_i y v_j no son adyacentes en G ya que f es un coloreo de G. Entonces, por definición de grafo producto cartesiano, $(v_i, f(v_i))$, $(v_j, f(v_j))$ no son adyacentes en $G\square K_k$.

Veamos ahora que si $\alpha(G\square H) \geq n$ entonces $\chi(G) = k$.

Sea S un conjunto estable de $G\square K_k$ de cardinal n. Observemos que los vértices (v, r) y (v, j) son adyacentes en $G\square K_k$ para todo $r, j = 1, \ldots, n$, $r \neq j$. Por lo tanto, cualquier par de vértices del conjunto estable S difieren en la primera componente. Como $|S| = n$, para cada $v_i \in V(G)$ existe exactamente un vértice de S cuya primera componente es v_i $(i = 1, \ldots, n)$. Es decir,

$$S = \{(v_i, s_i) : i = 1, \ldots, n; s_i = 1, \ldots, k\}.$$

Consideremos la función $f : V(G) \mapsto \{1, \ldots, k\}$ tal que para cada $i = 1, \ldots, n$, $f(v_i) = s_i$. Veamos que f es un coloreo de G. Sean v_i, v_j $i, j \in [n]$, $i \neq j$, tales que $f(v_i) = f(v_j)$ y probemos que v_i y v_j no son adyacentes en G.

Por definición de f resulta $s_i = s_j$. Notemos $s = s_i (= s_j)$. En consecuencia, $(v_i, s) = (v_i, s_i)$ y $(v_j, s) = (v_j, s_j)$ son dos vértices de S. Como S es un conjunto estable, entonces (v_i, s) y (v_j, s) no son adyacentes en $G\square K_k$. Ergo, por definición de grafo producto cartesiano, v_i y v_j no son adyacentes en G.

b) Veamos que $\chi(G\square H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$.

Como hemos visto, G y H son subgrafos de $G\square H$, $H \subseteq G\square H$ y por lo tanto $\chi(G\square H) \geq \chi(G)$ y $\chi(G\square H) \geq \chi(H)$. Es decir,

$$\chi(G\square H) \geq \max\{\chi(G), \chi(H)\}.$$

Veamos ahora que $\chi(G\square H) \leq \max\{\chi(G), \chi(H)\}$. Supongamos s.p.d.g. que $\chi(G) \geq \chi(H)$. Queremos hallar un $\chi(G)$-coloreo de $G\square H$.

Sean $g : V(G) \mapsto \{0, \ldots, \chi(G) - 1\}$ un coloreo (óptimo)de G y $h : V(G) \mapsto \{0, \ldots, \chi(H) - 1\}$ un coloreo (óptimo) de H.

Consideremos $f : V(G\square H) \mapsto \{0, \ldots, \chi(G) - 1\}$ tal que

$$f(v, u) = g(v) + h(u) \quad mod \chi(G).$$

Sean (v, u) y (v', u') tales que $f(v, u) = f(v', u')$. Veamos que (v, u) y (v', u') no son adyacentes en $G \square H$ y por lo tanto f es un $\chi(G)$-coloreo de $G \square H$.

Si $v \neq v'$ **y** $u \neq u'$, entonces (v, u) y (v', u') no son adyacentes en $G \square H$.

Si $v = v'$ entonces $h(u) = h(u')$ $mod \chi(G)$. Como $0 \leq h(u) \leq \chi(H) - 1 \leq \chi(G) - 1$ y $0 \leq h(u') \leq \chi(H) - 1 \leq \chi(G) - 1$, resulta $h(u) = h(u')$.

En consecuencia, como h es un coloreo de H, $uu' \notin E(H)$ y por lo tanto (v, u) y (v', u') no son adyacentes en $G \square H$.

Si $u = u'$, con un razonamiento análogo se obtiene que $vv' \notin E(G)$ y por lo tanto (v, u) y (v', u') no son adyacentes en $G \square H$.

■

Ejercicio 23

Como presidenta de los comités estudiantiles, Antonela debe programar los horarios para la reunión de 15 comités. Cada comité se reúne durante una hora a la semana. Las reuniones de dos comités con un miembro en común deben programarse a horas distintas.

Modelar como un problema de coloreo de grafos y describir cómo determinar el menor número de horas que Antonela tiene que considerar para programar las reuniones de los 15 comités.

Definimos un grafo G que tiene como conjunto de vértices $\{C_1, C_2, \dots, C_{15}\}$, cada vértice representando cada uno de los 15 comités, y $C_iC_j \in E(G)$ si los comités C_i y C_j comparten al menos un miembro.
Observemos que un subconjunto $\mathcal{C} \subseteq \{C_1, C_2, \dots, C_{15}\}$ de comités puede programar sus reuniones en el mismo horario si y solo si cada par de comités en $\mathcal{C}$ no comparten miembros, es decir, no están conectados por una arista en G. Esto es, si y solo si $\mathcal{C}$ es un conjunto independiente de G. Luego, encontrar una posible programación de las reuniones de los comités es encontrar una partición de los vértices de G en conjuntos estables. O, equivalentemente, hallar un coloreo de G. Por lo tanto, para determinar el menos número de horas que Antonela tiene que considerar para programar las reuniones de los comités, debemos hallar $\chi(G)$, el menor k tal que existe un k-coloreo de G.

■

Ejercicio 25

Se quiere organizar en Rosario un torneo de tenis donde n participantes jueguen todos contra todos. Cada tenista puede disputar a lo sumo un partido por día. Los encuentros se disputarán en canchas techadas, por lo que no se suspenderá ningún encuentro por mal tiempo.

¿Cuántos días como mínimo son necesarios para desarrollar el torneo? Modelar el problema como un problema en grafos y resolverlo para $n = 5$.

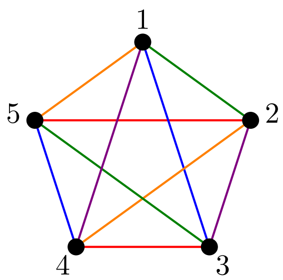
Consideremos un grafo G_n que tiene como vértices $p_1, p_2, \dots, p_n$, los n participantes del torneo, y una arista p_ip_j por cada partido a disputar entre los participantes p_i y p_j. Observemos que

como en el torneo juegan los participantes todos contra todos, G_n es isomorfo al grafo completo de n vértices.
Observemos que dos partidos pueden tener lugar en la misma fecha del torneo si y solo si no hay ningún participante que juegue en ambos partidos, es decir, las aristas correspondientes a dichos partidos no tienen extremos en común.
Luego, para organizar el torneo, debemos encontrar un coloreo por aristas f del grafo G_n. Para determinar la mínima cantidad de días necesarios para el torneo, debemos hallar $\chi'(G_n)$ o, equivalentemente, $\chi'(K_n)$.

Consideremos $n = 5$. Queremos hallar $\chi'(K_5)$.
Observemos que cada clase de color de un coloreo por aristas no puede tener más de 2 aristas. Ya que si 3 aristas no tienen extremos en común, el grafo debe tener al menos 6 vértices. Pero K_5 tiene 5 vértices. Luego, para todo k-coloreo por aristas f se verifica

$$10 = |E(G)| = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{|\{e : f(e) = i\}|}_{\leq 2} \leq 2k.$$

Y resulta $k \geq 5$. Es decir, $\chi'(K_5) \geq 5$. Veamos que es posible dar un 5-coloreo por aristas de K_5. En efecto, es suficiente considerar:



$$f(25) = f(34) = 1, \qquad f(13) = f(45) = 2, \qquad f(15) = f(24) = 3,$$
$$f(12) = f(35) = 4, \qquad f(14) = f(23) = 5.$$

Luego, $\chi'(K_5) = 5$. Es decir, la mínima cantidad de días necesarios para desarrollar el torneo si hay 5 participantes, es 5.

■