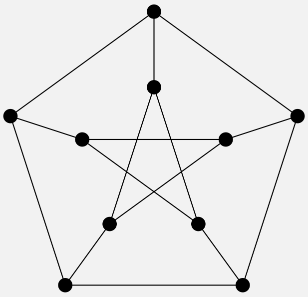
CICLOS HAMILTONIANOS

Ejercicio 4

El siguiente grafo recibe el nombre de *grafo de Petersen*.

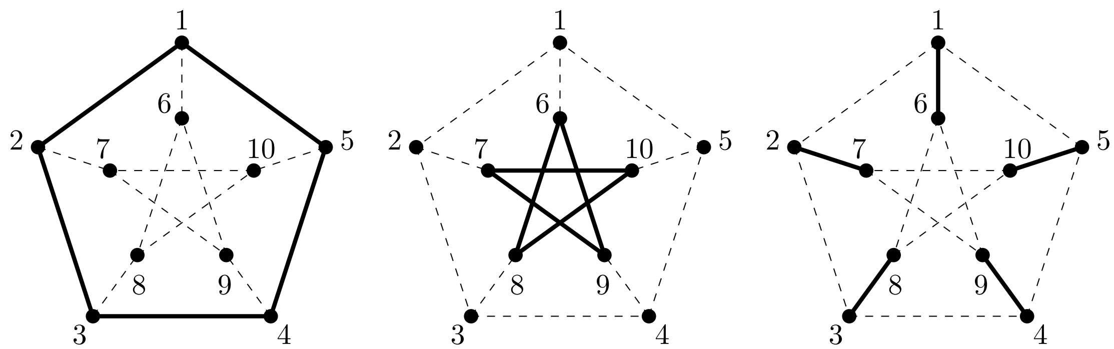


a) Muestre que el grafo de Petersen no tiene ciclos hamiltonianos pero si tiene un camino hamiltoniano.

b) Muestre que si se elimina cualquier vértice (y las aristas incidentes en él) del grafo de Petersen, entonces el subgrafo resultante tiene un ciclo hamiltoniano.

a) Queremos ver que el grafo de Petersen, que llamaremos $P = (V, E)$, no tiene un ciclo hamiltoniano. Supongamos, por el contrario, que sí lo tiene. Es decir, que existe un ciclo C que pasa por todos los vértices de P. Observemos que la longitud de C es igual a la cantidad de vértices de P, $|V| = 10$. Es decir, de las 15 aristas de E, solo 10 pertenecen al ciclo C.

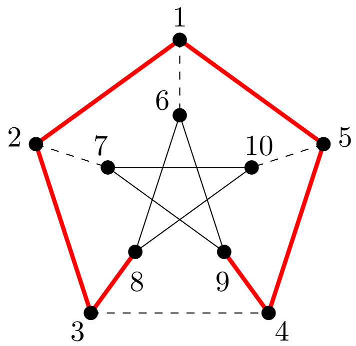
Observemos que las arista de E pueden particionarse en 3 conjuntos de 5 aristas. Las que están en el *ciclo exterior*, las que están en el *ciclo interior*, y las que conectan vértices en ambos ciclos, que llamaremos *aristas puente*.



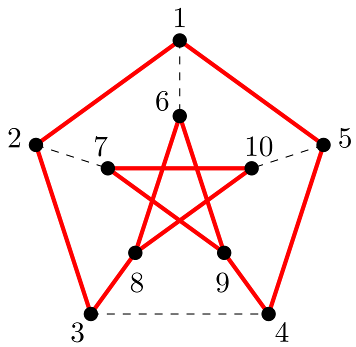
El ciclo C utiliza al menos una de las aristas puente, ya que de lo contrario, C consistiría de las 10 aristas restantes, pero éstas forman dos ciclos disjuntos y no forman un ciclo hamiltoniano.

Además, si comenzamos a recorrer el ciclo C en un vértice del ciclo exterior, como C pasa por todos los vértices de P, en algún momento pasa a los vértices del ciclo interior utilizando una arista puente. Y luego, al volver a los vértices del ciclo exterior utiliza nuevamente una arista puente. Así, cada vez que *cambia* del ciclo exterior al interior o viceversa, se utiliza una arista puente. Y como el ciclo debe finalizar en el ciclo exterior, la cantidad de aristas puente utilizadas es par. Es decir, C utiliza 2 o 4 aristas puente.

- Si las aristas puente utilizadas son 2, las 8 aristas restantes de C están en los ciclos exterior e interior. Como no es posible que estén las 5 aristas de cualquiera de ambos ciclos pues los vértices extremos de las aristas puente utilizadas tendrían 3 aristas incidentes en C, resulta que C usa exactamente 4 aristas en cada uno de ellos. Sin perder generalidad, por la simetría del grafo, podemos suponer que la arista del ciclo exterior no utilizada es la arista $(3,4)$. Luego, las aristas puente en C son $(3,8)$ y $(4,9)$.

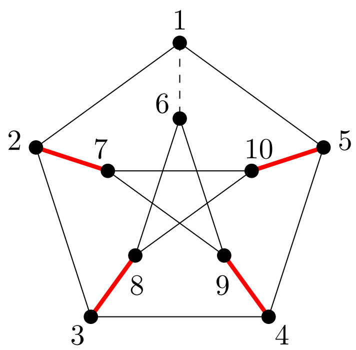


Como el ciclo C tiene exactamente dos aristas incidentes en cada vértice, las otras dos aristas de P incidentes en 6, 7 y 10 respectivamente deben pertenecer a C.

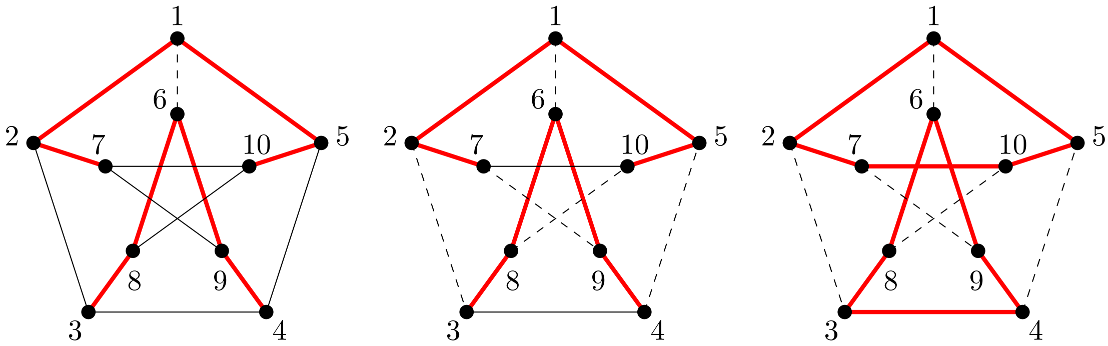


Pero podemos observar que las aristas en C no forman un ciclo hamiltoniano.

- Si las aristas puente utilizadas son 4, entonces sin pérdida de generalidad podemos pensar que la arista no utilizada es la arista $(1,6)$.



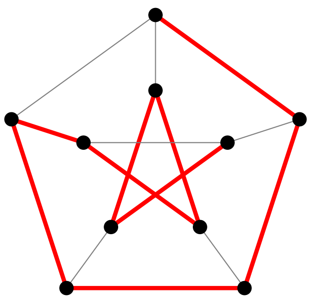
Como el ciclo C tiene exactamente dos aristas incidentes en cada vértice, las otras dos aristas de P incidentes en 1 y en 6 respectivamente deben pertenecer a C. Luego, como los vértices 2, 3, 8 y 9 ya tienen dos aristas incidentes en C, las aristas $(2,3)$, $(4,5)$, $(7,9)$ y $(8,10)$ no están en el ciclo C. Finalmente, las aristas $(7,10)$ y $(3,4)$ deben estar en C.



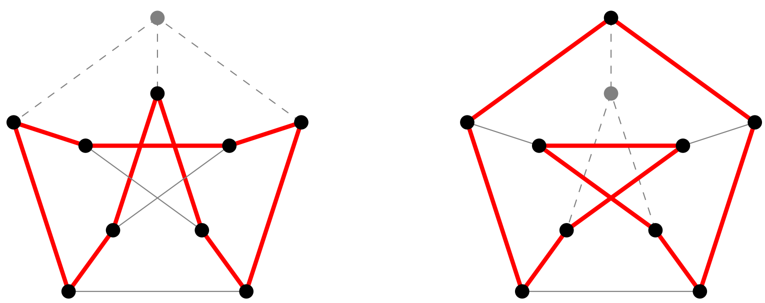
Obtenemos 10 aristas pero que no forman un ciclo hamiltoniano, ya que forman dos ciclos disjuntos.

En los dos casos llegamos a una contradicción, que surge de suponer que P admite un ciclo hamiltoniano. Luego, P no tiene ciclos hamiltonianos.

Por otro lado, P sí tiene caminos hamiltonianos. Por ejemplo



b) Por la simetría del grafo de Petersen, es suficiente analizar qué sucede al eliminar un vértice cualquiera del ciclo exterior o del ciclo interior. En cualquiera de estos casos, podemos encontrar un ciclo hamiltoniano. Por ejemplo:



■

Ejercicio 5

a) Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y bipartito, con $V = V_1 \cup V_2$, y V_1 y V_2 no vacíos. Demuestre que si $|V_1| \neq |V_2|$, entonces G no tiene un ciclo hamiltoniano.

b) Demuestre que si el grafo G del ítem anterior tiene un camino hamiltoniano, entonces se tiene $|V_1| - |V_2| = \pm 1$.

c) De un ejemplo de un grafo conexo y bipartito $G = (V, E)$ con $V = V_1 \cup V_2$, V_1 y V_2 no vacíos y $|V_1| = |V_2| + 1$, pero tal que G no tenga un camino hamiltoniano.

a) Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y bipartito, con $V = V_1 \cup V_2$, y V_1 y V_2 no vacíos. Vamos a probar que si G tiene un ciclo hamiltoniano, entonces $|V_1| = |V_2|$, con lo que habremos probado el enunciado.

Supongamos que G tiene un ciclo hamiltoniano

$$C : \quad (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$$

es decir, un ciclo simple que pasa por todos los vértices de G. Sin perder generalidad, podemos suponer que $v_1 \in V_1$. Luego, como v_2 es adyacente a v_1 y G es bipartito, es decir cada arista tiene un extremo en V_1 y otro en V_2, resulta que $v_2 \in V_2$. Como v_3 es adyacente a v_2. entonces $v_3 \in V_1$. Siguiendo con este razonamiento, tenemos que $v_i \in V_1$ si i es impar y $v_i \in V_2$ si i es par. Como v_n es adyacente a v_1, entonces v_n debe pertenecer a V_2 con lo cual n es necesariamente par.

Como el ciclo C pasa por todos los vértices de G, entonces tenemos que

$$|V_1| = |\{v_i : 1 \leq i \leq n, \text{ con } i \text{ impar}, \}| = \frac{n}{2}$$

$$|V_2| = |\{v_i : 1 \leq i \leq n, \text{ con } i \text{ par}, \}| = \frac{n}{2}$$

Luego, resulta $|V_1| = |V_2|$, como queríamos ver.

b) Sea ahora $G = (V, E)$ un grafo conexo y bipartito, con $V = V_1 \cup V_2$, y V_1 y V_2 no vacíos, y $|V_1| \neq |V_2|$, que admite un camino hamiltoniano dado por

$$P : \quad (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

P es un camino simple que pasa por todos los vértices de G. Supongamos que $v_1 \in V_1$ (el caso $v_2 \in V_2$ es análogo). Luego, como v_2 es adyacente a v_1 y G es bipartito, es decir cada arista tiene un extremo en V_1 y otro en V_2, resulta que $v_2 \in V_2$. Como v_3 es adyacente a v_2. entonces $v_3 \in V_1$. Siguiendo con el mismo razonamiento del ítem anterior, tenemos que $v_i \in V_1$ si i es impar y $v_i \in V_2$ si i es par.

Como el camino P pasa por todos los vértices de G, entonces tenemos que

$$|V_1| = |\{v_i : 1 \leq i \leq n, \text{ con } i \text{ impar}, \}|, \qquad |V_2| = |\{v_i : 1 \leq i \leq n, \text{ con } i \text{ par}, \}|$$

Si $v_n \in V_2$, entonces resulta n par, y como en el ítem anterior, tendríamos $|V_1| = |V_2| = \frac{n}{2}$, lo que contradice la hipótesis. Luego, $v_n \in V_1$, con lo cual n es impar.

Luego, $|V_1|$ que es igual a la cantidad de números impares entre 1 y n nos queda

$$|V_1| = |\{v_i : 1 \leq i \leq n, \text{ con } i \text{ impar}\}| = \frac{n+1}{2}$$

y $|V_2|$ que es igual a la cantidad de números pares entre 1 y n nos queda

$$|V_2| = |\{v_i : 1 \leq i \leq n, \text{ con } i \text{ par}\}| = \frac{n-1}{2}$$

Luego, tenemos

$$|V_1| - |V_2| = \frac{n+1}{2} - \frac{n-1}{2} = 1$$

De manera similar, si suponemos que $v_1 \in V_2$, obtenemos

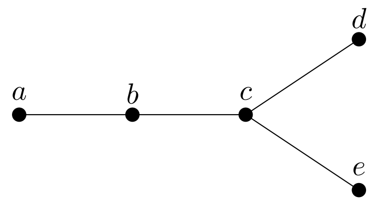
$$|V_2| - |V_1| = \frac{n+1}{2} - \frac{n-1}{2} = 1$$

es decir,

$$|V_1| - |V_2| = -1$$

Luego, si G tiene un camino hamiltoniano, resulta $|V_1| - |V_2| = \pm 1$

c) El grafo G de la figura es bipartito con $V_1 = \{b, d, e\}$ y $V_2 = \{a, c\}$ pero no tiene un camino hamiltoniano.



En efecto, observemos que como la longitud de un camino hamiltoniano en $G = (V, E)$ es igual a $|V| - 1$, en este caso un camino hamiltoniano debe tener longitud 4. Como $|E| = 4$, todas las aristas deben pertenecer al camino. Pero entonces el vértice c tiene 3 aristas incidentes que están en el camino, y esto no puede suceder.

Luego, G no tiene caminos hamiltonianos.

■

Ejercicio 7

a) Para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, muestre que la cantidad de ciclos hamiltonianos distintos en el grafo bipartito completo $K_{n,n}$ es

$$\frac{1}{2}(n-1)!n!$$

b) ¿Cuántos caminos hamiltonianos distintos tiene $K_{n,n}$ con $n \geq 1$?

a) Queremos *contar* la cantidad de ciclos hamiltonianos distintos en el grafo bipartito completo $K_{n,n}$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Consideremos $V(K_{n,n})$ con bipartición $U \cup W$, $|U| = |W| = n$.

Fijamos un vértice $u_1 \in U$ desde el cual comenzamos el ciclo (esto lo podemos hacer sin perder generalidad, ya que el ciclo lo podemos pensar iniciando en cualquier vértice). El siguiente vértice del ciclo debe pertenecer a W, pues el grafo es bipartito y cada arista tiene un extremo en U y el otro en W. Como además el grafo es bipartito completo, todos los vértices de W son adyacentes a u_1. Luego, para elegir el siguiente vértice del ciclo, w_1, tenemos n opciones. El tercer vértice del ciclo debe pertenecer a U (pues es adyacente a $w_1 \in W$). Para elegir este tercer vértice u_2, tenemos $n-1$ opciones, ya que podemos elegir cualquier vértice en U salvo u_1. Continuando este razonamiento, vamos armando un ciclo de la forma

$$C: \qquad (u_1, w_1, u_2, w_2, \ldots, u_n, w_n, u_1)$$

Al momento de elegir el vértice u_k para $k > 1$ (pues u_1 está fijo), lo hacemos entre $n-(k-1)$ opciones, ya que podemos elegir cualquier vértice de U salvo los que ya están en el ciclo, es decir, salvo $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$. De manera similar, al momento de elegir el vértice w_k para todo k, lo hacemos entre $n-(k-1)$ opciones, ya que podemos elegir cualquier vértice de W salvo los que ya están en el ciclo, es decir, salvo $w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}$.

Luego, para contar todas las posibles formas de armar un ciclo hamiltoniano de esta manera, por el principio del producto en combinatoria, tenemos

$$\prod_{k=1}^{n}(n-k+1)\prod_{k=2}^{n}(n-k+1) = n!(n-1)!$$

Por último, observemos que de esta manera estamos contando exactamente dos veces cada ciclo pues estamos contando los ciclos

$$C: \qquad (u_1, w_1, u_2, w_2, \ldots, u_n, w_n, u_1)$$

y

$$C': \qquad (u_1, w_n, u_n, w_{n-1}, u_{n-1} \ldots, u_2, w_1, u_1)$$

que son el mismo ciclo recorrido en sentido opuesto.

Luego, la cantidad de ciclos hamiltonianos distintos en $K_{n,n}$ es exactamente

$$\frac{1}{2}n!(n-1)!$$

b) Queremos *contar* ahora la cantidad de caminos hamiltonianos distintos en el grafo bipartito completo $K_{n,n}$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Consideremos nuevamente $V(K_{n,n})$ con bipartición $U \cup W$, $|U| = |W| = n$.

Observemos en primer lugar, que cualquier camino en $K_{n,n}$ alterna vértices en U y V. Luego, como $|U| = |V| = n$, tenemos que todo camino hamiltoniano tiene un extremo en U y otro en V.

Elegimos un vértice $u_1 \in U$ desde el cual comenzamos el camino. Para esta elección tenemos n posibilidades. El siguiente vértice del camino debe pertenecer a W, pues el grafo es bipartito y cada arista tiene un extremo en U y el otro en W. Como además el grafo es bipartito completo, todos los vértices de W son adyacentes a u_1. Luego, para elegir el siguiente vértice del camino, w_1, tenemos n opciones. El tercer vértice del camino debe pertenecer a U (pues es adyacente a $w_1 \in W$). Para elegir este tercer vértice u_2, tenemos $n-1$ opciones, ya que podemos elegir cualquier vértice en U salvo u_1. Continuando este razonamiento, vamos armando un camino de la forma

$$P: \qquad (u_1, w_1, u_2, w_2, \ldots, u_n, w_n)$$

Al momento de elegir el vértice u_k, lo hacemos entre $n-(k-1)$ opciones, ya que podemos elegir cualquier vértice de U salvo los que ya están en el camino, es decir, salvo $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$. De manera similar, al momento de elegir el vértice w_k para todo k, lo hacemos entre $n-(k-1)$ opciones, ya que podemos elegir cualquier vértice de W salvo los que ya están en el camino, es decir, salvo $w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}$.

Luego, para contar todas las posibles formas de armar un camino hamiltoniano de esta manera, por el principio del producto en combinatoria, tenemos

$$\prod_{k=1}^{n}(n-k+1)\prod_{k=1}^{n}(n-k+1) = (n!)^2$$

Luego, la cantidad de caminos hamiltonianos distintos en $K_{n,n}$ es

$$(n!)^2$$

■

Ejercicio 12

a) Modele el siguiente problema utilizado teoría de grafos.

¿Pueden arreglarse las permutaciones de los primeros n números naturales en una sucesión de manera que las permutaciones adyacentes

$$p:\ p_1,\dots,p_n \qquad \text{y} \qquad q:\ q_1,\dots,q_n$$

satisfagan $p_i \neq q_i$ para todo $i = 1,\dots,n$?

b) Resuelva el problema del ítem anterior para $n = 1, 2, 3, 4$.

a) Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos un grafo $G_n = (V_n, E_n)$ de la siguiente manera.

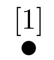
El conjunto de vértices V_n consiste de todas las permutaciones de los primeros n naturales. Es decir $p \in V_n$ es de la forma

$$p:\ [p_1,\dots,p_n]$$

con $1 \leq p_i \leq n$ para cada i y $p_i \neq p_j$ para todo $i \neq j$. Y dos permutaciones $p, q \in V_n$ son adyacentes, es decir $(p, q) \in E_n$ si $p_i \neq q_i$ para todo $i = 1,\dots,n$.

La pregunta del enunciado es equivalente a determinar si en el grafo G_n podemos encontrar un *camino hamiltoniano*.

b)
- $n = 1$



G_1

G_1 admite el camino hamiltoniano:

$$P: \quad ([1])$$

Es decir, la respuesta para $n = 1$ es SI.

- $n = 2$

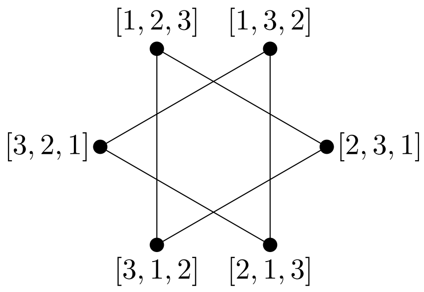
G_2

G_2 admite el camino hamiltoniano:

$$P: \quad ([1, 2], [2, 1])$$

Es decir, la respuesta para $n = 2$ es SI.

- $n = 3$



G_3

G_3 no es conexo. Luego, no admite camino hamiltoniano. Es decir, la respuesta para $n = 3$ es NO.

- $n = 4$

G_4 admite el camino hamiltoniano:

$$\begin{aligned} P: \quad &([1,2,3,4],[3,4,1,2],[1,2,4,3],[4,3,1,2],[2,1,4,3],[4,3,2,1],[2,1,3,4],[3,4,2,1],\\ &[1,3,4,2],[4,2,1,3],[1,3,2,4],[2,4,1,3],[3,1,2,4],[2,4,3,1],[3,1,4,2],[4,2,3,1],\\ &[1,4,2,3],[2,3,1,4],[1,4,3,2],[3,2,1,4],[4,1,3,2],[3,2,4,1],[4,1,2,3],[2,3,4,1])\end{aligned}$$

Es decir, la respuesta para $n = 4$ es SI.

■