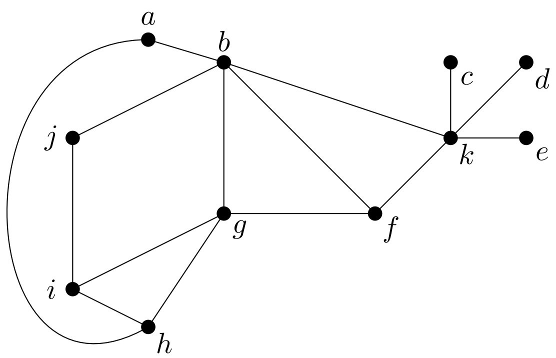
Práctica 1 - Introducción a la Teoría de Grafos

1. En un torneo de basquet, el Nieve venció a los Faisanes una vez, el Rascacielos venció al Tuna una vez, el Nieve venció al Rascacielos dos veces, los Faisanes vencieron al Tuna una vez y los Faisanes vencieron al Rascacielos una vez. En cada uno de los siguientes ítems, use un grafo para modelar el torneo. Los equipos son los vértices. Describa el tipo de grafo usado (dirigido, no dirigido, simple).

   a) Hay una arista entre los equipos si los equipos jugaron al menos una vez.
   b) Hay una arista entre los equipos por cada partido jugado.
   c) Hay una arista del equipo t_i al equipo t_j si t_i venció a t_j al menos una vez.
   d) Hay una arista del equipo t_i al equipo t_j por cada victoria de t_i sobre t_j.

2. Considere el siguiente grafo. Los vértices representan oficinas. Una arista conecta dos oficinas si hay un enlace de comunicación entre las dos. Observe que cualquier oficina se puede comunicar con cualquier otra con un enlace de comunicación directo o haciendo que otros pasen el mensaje.



   a) Muestre, dando un ejemplo, que la comunicación entre las oficinas es posible aún cuando se rompan algunos enlaces de comunicación.
   b) Muestre una configuración en la que se rompió el número máximo de enlaces de comunicación y todavía es posible la comunicación entre todas las oficinas.

3. En un grafo de precedencias, los vértices modelan ciertas acciones. Por ejemplo, un vértice puede modelar una instrucción en un programa de computadora. Hay una arista del vértice v al vértice w si la acción modelada por v debe ocurrir antes que la acción modelada por w. Dibuje un grafo de precedencia para cada programa de computadora en los siguientes ítems.

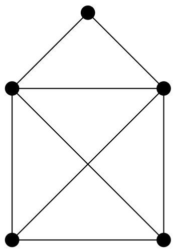
   a) $x = 1$
   $y = 2$
   $z = x + y$
   $z = z + 1$

   b) $x = 1$
   $y = 2$
   $z = y + 2$
   $w = x + 5$
   $x = z + w$

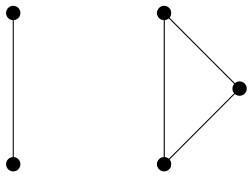
   c) $x = 1$
   $y = 2$
   $z = 3$
   $a = x + y$
   $b = y + z$
   $c = x + z$
   $c = c + 1$
   $x = a + b + c$

4. De una matriz de adyacencia y una matriz de incidencia para cada uno de los siguientes grafos.

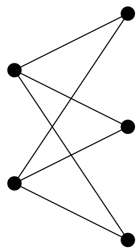
a)



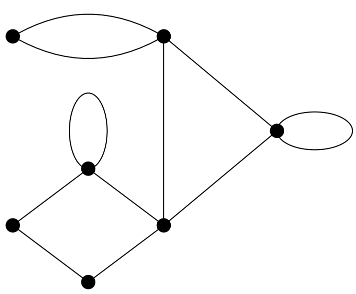
b)



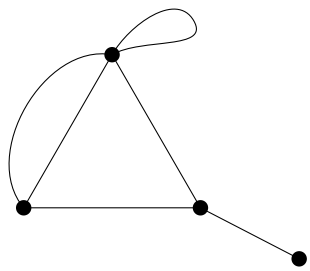
c)



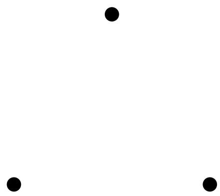
d)



e)



f)



5. a) Dibuje un grafo representado por cada matriz de incidencia.

(I)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(II)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

b) Dibuje un grafo representado por cada matriz de adyacencia.

(I)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(II)
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(III)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(IV)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Para cada grafo de los ejercicios 4 y 5:
   a) Determine si se trata de un grafo simple. En caso negativo, identificar los lazos y las aristas paralelas.
   b) Determine si el grafo es bipartito.
   c) Determine si el grafo es conexo.

7. Sea G un grafo simple con n vértices y m aristas.
   a) Pruebe que $m \leqslant \binom{n}{2}$.
   b) Describa los grafos simples G para los cuales $m = \binom{n}{2}$.

8. Sea $G[X, Y]$ un grafo simple bipartito con n vértices y m aristas, donde $|X| = r$ y $|Y| = s$.
   a) Pruebe que $m \leqslant rs$.
   b) Deduzca que $m \leqslant \frac{n^2}{4}$.
   c) Describa los grafos simples bipartitos G para los cuales $m = \frac{n^2}{4}$.

9. Pruebe que:
   a) Todo camino es bipartito.
   b) Un ciclo es bipartito si y solo si tiene longitud par.

10. Para $n \geqslant 1$, el n-cubo Q_n es el grafo cuyo conjunto de vértices es el conjunto de todas las n-uplas $(a_1, \ldots, a_n)$ con $a_i \in \{0, 1\}$ para cada i, donde dos n-uplas son adyacentes si difieren en exactamente una coordenada.
    a) Dibuje Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4.
    b) Muestre que Q_n es un grafo regular. ¿Cuántas aristas inciden en un vértice de Q_n?
    c) Determine la cantidad de vértices y aristas de Q_n.
    d) Pruebe que Q_n es bipartito para cada $n \geqslant 1$.

11. a) Muestre que, en todo grupo de dos o más personas, existen siempre dos personas que tienen exactamente el mismo número de conocidos en el grupo.
    b) Describa un grupo de cinco personas en el que dos personas cualesquiera tienen exactamente un conocido en común. ¿Existe un grupo de cuatro personas con esta misma propiedad?
12. Sea $G[X, Y]$ un grafo bipartito.
    a) Pruebe que $\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y} d(v)$.
    b) Usando el ítem anterior, pruebe que si G es k-regular con $k \geqslant 1$, entonces $|X| = |Y|$.
13. Un grafo k-*partito* es un grafo cuyo conjunto de vértices puede particionarse en k subconjuntos $X_1, \ldots, X_k$, de manera que ninguna arista tiene ambos extremos en el mismo conjunto X_i. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple k-partito con n vértices y m aristas, con $|X_i| = a_i$ para cada i. Pruebe que
$$m \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} a_i(n - a_i).$$
14. a) Halle el mínimo número de vértices de un grafo con 7 aristas si $d(v) \leqslant 3$ para todo $v \in V(G)$.
    b) Halle el máximo número de vértices de un grafo con 17 aristas si $d(v) \geqslant 3$ para todo $v \in V(G)$.
    c) Halle el máximo número de vértices de un grafo con 19 aristas si $d(v) \geqslant 4$ para todo $v \in V(G)$.
15. Si G tiene vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$, $(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n))$ se dice la *sucesión de grados* de G. Determine, en cada caso, si la sucesión dada es la sucesión de grados de algún grafo. ¿Es la sucesión de grados de algún grafo simple?
    a) $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$
    b) $(3, 3, 3, 3, 3)$
    c) $(1, 1, 1, 1)$
    d) $(1, 2, 3, 4)$
    e) $(1, 2, 3, 4, 5, 5)$
    f) $(2, 3, 3, 4, 4)$
16. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple y conexo, donde cada vértice tiene grado 3. Si además $|E| = 2|V| - 6$, ¿cuál es el valor de $|V|$ y $|E|$?
17. a) Pruebe que si G es un grafo simple de n vértices y m aristas, con $m > \binom{n-1}{2}$, entonces G es conexo.
    b) Encuentre un grafo simple G no conexo con $m = \binom{n-1}{2}$.
18. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple. El *complemento* $\overline{G}$ de G es el grafo simple cuyo conjunto de vértices es V y cuyas aristas son los pares de vértices no adyacentes de G.
    a) Exprese la sucesión de grados de $\overline{G}$ en términos de la sucesión de grados de G.
    b) Muestre que si G es no conexo, entonces $\overline{G}$ es conexo. ¿Es cierta la recíproca?

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119