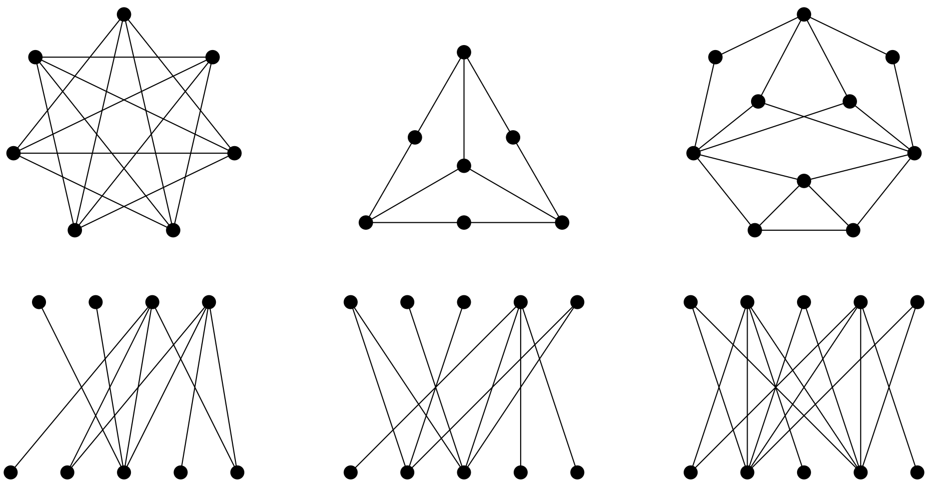
Práctica 8 - Matchings y Cubrimientos

1. Las personas A, B, C, D y E son integrantes de un grupo de investigación y presentarán 4 trabajos distintos en un congreso. A, C y D son autores del trabajo 1. C y E son autores del trabajo 2. A, D y E son autores del trabajo 3. Y A, B, C y E son autores del trabajo 4. Cada trabajo será expuesto por exactamente uno de sus autores y cada persona presentará a lo sumo un trabajo.

   Modelar esta situación como un problema de asignación y hallar la cantidad máxima de trabajos que podrá presentar este grupo de investigación.

2. Hallar un matching máximo en cada uno de los siguientes grafos:



3. Sea G un grafo con $\Delta(G) \leqslant 2$. Probar que cada componente conexa de G es un camino o un ciclo.

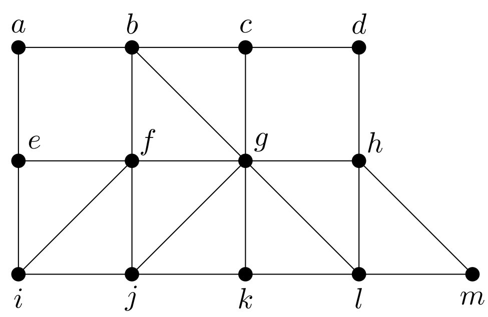
4. Sea G un grafo. Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones.

   a) Si $S \subseteq V(G)$ es saturado por un matching de G entonces existe algún matching máximo de G que satura a S.

   b) Si $S \subseteq V(G)$ es saturado por un matching de G entonces todo matching máximo de G satura a S.

5. Probar que si G es un grafo hamiltoniano, entonces G tiene un matching de tamaño $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

6. Sea $G = (V, E)$ el grafo de la figura y $M \subseteq E$ el matching definido por $M = \{\{a, e\}, \{c, d\}, \{h, m\}\}$. Hallar un camino M-aumentante y redefinir el matching a partir de dicho camino, aumentando su cardinal. Repetir el procedimiento hasta obtener un matching máximo.



7. Sean M_1 y M_2 dos matchings de un grafo simple G con $|M_1| > |M_2|$. Probar que existen matchings M_1' y M_2' tales que $|M_1'| = |M_1|-1$, $|M_2'| = |M_2|+1$, $M_1' \cup M_2' = M_1 \cup M_2$ y $M_1' \cap M_2' = M_1 \cap M_2$.

8. Sea G un grafo bipartito conexo con bipartición (V_1, V_2) tal que $gr(v) \neq gr(w)$ para todo par de vértices $v, w \in V_1$. Demostrar que existe un matching que satura a V_1.

9. Sea $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^m$ una colección de subconjuntos de un conjunto Y. Un *sistema de representantes (SDR)* de $\mathcal{A}$ es un conjunto finito de elementos $a_1, a_2, \dots, a_m$ en Y, todos distintos y tales que $a_i \in A_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, m$.

   a) Modelar el problema de encontrar un sistema de representantes de una colección $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^m$ de subconjuntos de un conjunto Y como un problema de matching.

   b) Decidir si las siguientes colecciones de conjuntos tienen un SDR.
      - $\mathcal{A}_1 = \big\{\{3,4,5\},\{2,5,6\},\{1,2,5\},\{1,2,3\},\{1,3,6\}\big\}$
      - $\mathcal{A}_2 = \big\{\{1,2,3,4,5,6\},\{1,3,4\},\{1,4,7\},\{2,3,5,6\},\{3,4,7\},\{1,3,4,7\},\{1,3,7\}\big\}$

   c) Demostrar que $\mathcal{A}$ tiene un SDR si y sólo si para todo $S \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ se verifica

$$\left|\bigcup_{i\in S} A_i\right| \geqslant |S|$$

10. Probar que todo árbol tiene a lo sumo un matching perfecto.

11. Sea G un grafo bipartito. Probar que $\alpha(G) = \frac{|V(G)|}{2}$ si y sólo si G tiene un matching perfecto.

12. Hallar un cubrimiento de aristas por vértices mínimo para cada grafo del ejercicio 2.

13. Sea G un grafo simple. Probar los siguientes enunciados:

   a) S es un conjunto independiente de G si y sólo si $\overline{S}$ es un cubrimiento por vértices de G.

   b) $\alpha(G) + \beta(G) = |V(G)|$, donde $\alpha(G)$ es el máximo cardinal de un conjunto independiente de G y $\beta(G)$ es el mínimo cardinal de un cubrimiento por vértices de G.

   c) Determinar $\alpha(G)$ y $\beta(G)$ para cada uno de los siguientes grafos.
      I. El grafo completo K_n, $n \in \mathbb{N}$.
      II. El grafo bipartito completo K_{n_m}, $n, m \in \mathbb{N}$.
      III. El ciclo C_n, $n \geqslant 3$.
      IV. El camino P_n, $n \in \mathbb{N}$.
      V. El grafo rueda W_n, $n \geqslant 3$.

14. Probar que el número de matching de un grafo G es igual al número de estabilidad del grafo de línea de G. Es decir, $\alpha'(G) = \alpha(L(G))$.

15. a) Para $k = 2, 3$, determinar si existe un grafo simple k-regular sin matching perfecto que tenga una cantidad par de vértices.

   b) Para cada $k \geqslant 4$, construir un grafo simple k-regular sin matching perfecto.

16. Sea G un grafo simple sin vértices aislados. Probar que G tiene un matching M tal que

$$|M| \geqslant \frac{|V(G)|}{\Delta(G)+1}$$

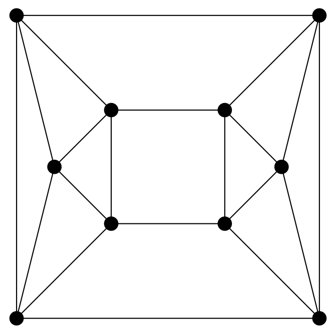
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

17. Un k-*factor* de un grafo G es un subgrafo k-regular recubridor de G. Así, las aristas de un 1-factor de un grafo G forman un matching perfecto de G.

    Además, se dice que G es k-factoreable si existen k-factores $H_1, \ldots, H_r$ con aristas disjuntas tales que

    $$E(G) = \bigcup_{i=1}^{r} E(H_i)$$

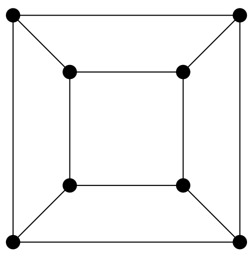
    a) Probar que el grafo de Petersen no es 1-factoreable.
    b) Probar que $K_{n,n}$ es 1-factoreable para todo $n \in \mathbb{N}$.
    c) Para el siguiente grafo, dar un k-factor para cada k en $\{1, 2, 3, 4\}$.

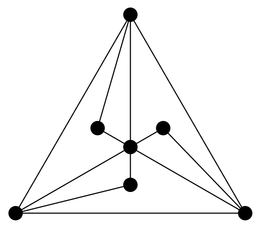


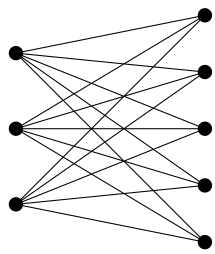
18. Se quiere diseñar un fixture para un torneo deportivo en el cual participan n equipos. Para ello, se deben organizar distintas fechas en las que se desarrollen los encuentros entre los equipos de manera que todos los equipos jueguen un partido en cada una de las fechas y cada par de equipos se enfrente exactamente una vez.

    Probar que si n es par, entonces es posible diseñar un fixture con estas características.

19. ¿Cuáles de los siguientes grafos admiten 1-factores? ¿Son 1-factoreables?







20. a) Sea G un grafo. Pruebe que si G es 1-factoreable, entonces G no tiene vértices de corte.
    b) Dibuje un grafo simple conexo y 3-regular que tenga un 1-factor y un vértice de corte.
    c) Explique por qué el grafo del ítem (b) no contradice lo probado en el ítem (a).