Resolución Ejercicios Práctica 10

Ejercicio 7:

Sea G un grafo plano con n vértices, m aristas, f caras y k componentes conexas. Probar que $n-m+f=k+1$.

Resolución :

Sea G un grafo plano, es decir un grafo planar dado con cierta inmersión plana particular. Sean $n=|V(G)|$, $m=|E(G)|$, f la cantidad de caras determinada por dicha inmersión, y k la cantidad de componentes conexas de G.

Si G es conexo, es decir $k=1$, entonces, vale la fórmula de Euler y tenemos

$$n-m+f=2=k+1.$$

En caso contrario, sean $C_1, C_2, \ldots, C_k$ las componentes conexas de G, y $G_i=G[C_i]$ con $n_i=|V(G_i)|$, y $m_i=|E(G_i)|$, para cada $i=1,\ldots,k$. Observemos que cada G_i es un grafo planar. Basta considerar la inmersión plana que surge de restringir el dibujo de G a los vértices y aristas del subgrafo G_i. Sea f_i la cantidad de caras de G_i para cada $i=1,\ldots,k$.

Luego, por la Fórmula de Euler aplicada a cada G_i que es un grafo plano conexo con n_i vértices, m_i aristas y f_i caras, se tiene que $n_i-m_i+f_i=2$, para cada $i=1,\ldots,k$.

Observemos, por otro lado, que

$$\underbrace{|V(G)|}_{n}=\sum_{i=1}^{k}\underbrace{|V(G_i)|}_{n_i}, \qquad \underbrace{|E(G)|}_{m}=\sum_{i=1}^{k}\underbrace{|E(G_i)|}_{m_i}, \qquad f=\left(\sum_{i=1}^{k} f_i\right)-(k-1),$$

donde la última igualdad se debe a que al sumar la cantidad de caras de cada G_i, estamos sumando la cara exterior k veces.

Luego, obtenemos

$$n-m+f=\sum_{i=1}^{k} n_i-\sum_{i=1}^{k} m_i+\sum_{i=1}^{k} f_i-(k-1)=\sum_{i=1}^{k}(n_i-m_i+f_i)-(k-1)=\sum_{i=1}^{k} 2-(k-1)=2k-k+1=k+1$$

Por lo tanto,

$$n-m+f=k+1,$$

como queríamos probar.