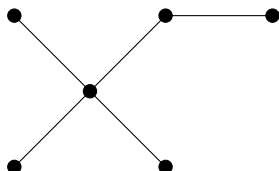


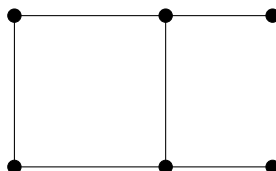
## Práctica 6 - Árboles (parte 1)

1. ¿Cuáles de los siguientes grafos son árboles? Explique.

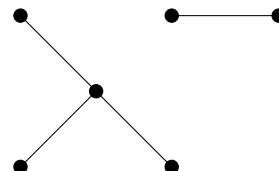
a)



b)



c)



2. Determine para qué valores de  $m$  y  $n$  los siguientes grafos son árboles.

- El grafo completo  $K_n$ .
- El camino  $P_n$ .
- El ciclo  $C_n$ .
- El grafo bipartito completo  $K_{m,n}$ .
- El  $n$ -cubo  $Q_n$ .

3. Pruebe que todo árbol es bipartito.

4. Describa todos los árboles  $T$  que tienen exactamente dos hojas.

5. Pruebe que  $T$  es un árbol si y sólo si  $T$  no tiene bucles y para cada par de vértices  $u, v \in V(T)$  existe un único  $(u, v)$ -camino simple en  $T$ .

6. Pruebe que  $T$  es un árbol si y sólo si  $T$  no tiene bucles, es conexo y cuando se agrega una arista entre dos vértices cualesquiera, se crea exactamente un ciclo.

7. Sea  $G = (V, E)$  un grafo con  $|V| = n$  y  $|E| < n - 1$ . Demuestre que  $G$  no es conexo.

8. En cada caso, de un grafo  $G = (V, E)$  que tenga las propiedades indicadas o explique por qué no existe tal grafo.

- $G$  acíclico,  $|E| = 4$  y  $|V| = 6$ .
- $G$  árbol y todos sus vértices tienen grado 2.
- $G$  árbol,  $|V| = 6$  y los vértices de  $G$  tienen grados 1, 1, 1, 1, 3 y 3.
- $G$  árbol con 10 vértices, de los cuales exactamente 6 son hojas.

9. Sean  $T_1 = (V_1, E_1)$  y  $T_2 = (V_2, E_2)$  dos árboles tales que  $|E_1| = 17$  y  $|V_2| = 2|V_1|$ . Determine  $|V_1|$ ,  $|V_2|$  y  $|E_2|$ .

10. a) Muestre que cada componente conexa de un bosque es un árbol.

b) Sea  $F = (V, E)$  un bosque que consiste de  $k$  árboles. Si  $|V| = n$ , determine  $|E|$ .

11. a) Sea  $F = (V, E)$  un bosque de siete árboles con  $|E| = 40$ . Determine  $|V|$ .

b) Si  $F = (V, E)$  es un bosque con  $|V| = 62$  y  $|E| = 51$ , ¿cuántos árboles determina  $F$ ?

12. Sea  $T$  un árbol.

- a) Pruebe que toda arista  $e \in E(T)$  es una arista de corte.
- b) Pruebe que todo vértice  $v \in V(T)$  con  $\text{gr}(v) \geq 2$  es un vértice de corte.
- c) ¿Es cierto el ítem anterior si  $\text{gr}(v) = 1$ ?

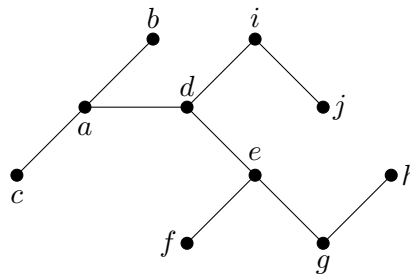
13. Pruebe que todo grafo conexo  $G$  tiene un árbol recubridor.

14. ¿En qué condiciones una arista en un grafo conexo  $G$  está contenida en todo árbol recubridor de  $G$ ?

15. a) Sea  $T$  un árbol recubridor para un grafo  $G$ . Demuestre que si una arista  $e$  está en  $G$  pero no en  $T$ , entonces si se agrega  $e$  a  $T$  se produce un único ciclo.

- b) Sean  $T$  y  $T'$  dos árboles recubridores de un grafo conexo  $G$ . Suponga que existe una arista  $e$  que está en  $T$  pero no en  $T'$ . Demuestre que existe una arista  $e'$  en  $T'$  que no está en  $T$  tal que  $(T - \{e\}) \cup \{e'\}$  y  $(T' - \{e'\}) \cup \{e\}$  son árboles recubridores de  $G$ .

16. Considere el siguiente árbol, donde el vértice  $a$  es la raíz.



- a) Encuentre el nivel de cada vértice.
- b) Determine la altura del árbol.
- c) ¿Se trata de un árbol binario?
- d) Repita los ítems anteriores pero considerando al vértice  $g$  como raíz.

17. En cada caso, dibuje un grafo que tenga las propiedades indicadas o explique por qué no existe.

- a) Árbol binario completo; 4 vértices internos; 5 hojas.
- b) Árbol binario completo; altura 3; 9 hojas.
- c) Árbol binario completo; altura 4; 9 hojas.

18. Un árbol enraizado es  $m$ -ario (con  $m \in \mathbb{N}$ ) si todo vértice tiene a lo sumo  $m$  hijos. Si en particular todo vértice tiene 0 o  $m$  hijos, se dice  $m$ -ario completo. Sea  $T$  un árbol  $m$ -ario completo con  $i$  vértices internos.

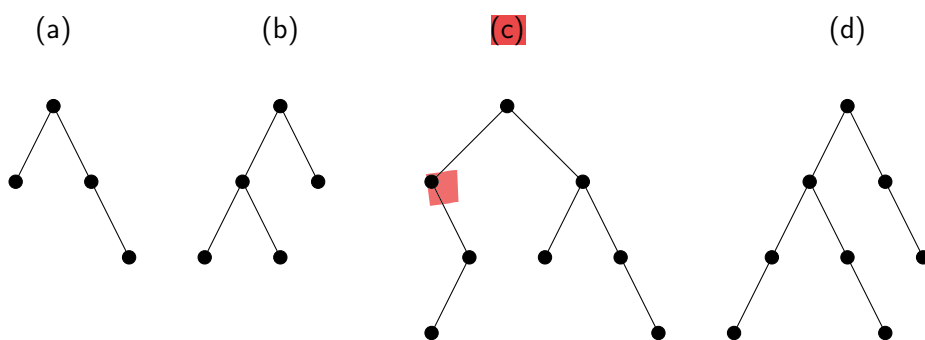
- a) Determine la cantidad de hojas de  $T$ .
- b) Determine la cantidad de vértices de  $T$ .

19. a) Sea  $T = (V, E)$  un árbol binario. Si  $|V| = n$ , ¿cuál es la máxima altura posible de  $T$ ?

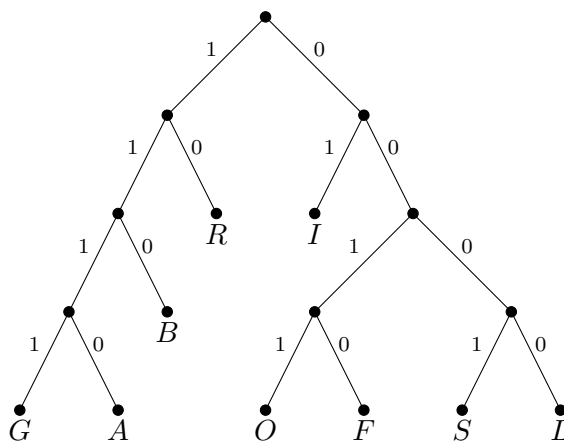
- b) Sea  $T = (V, E)$  un árbol binario completo. Si  $|V| = n$ , ¿cuál es la máxima altura posible de  $T$  en este caso?

- c) Repita los ítems anteriores para un árbol  $m$ -ario y  $m$ -ario completo respectivamente.

20. a) Un árbol 3-ario (o *ternario*) completo  $T = (V, E)$  tiene 34 vértices internos. ¿Cuántas aristas tiene  $T$ ? ¿Cuántas hojas?  
b) ¿Cuántos vértices internos tiene un árbol 5-ario completo con 817 hojas?
21. a) ¿Cuál es el número máximo de vértices internos que puede tener un árbol cuaternario completo de altura 8?  
b) ¿Cuál es el número máximo de vértices internos que puede tener un árbol  $m$ -ario completo de altura  $h$ ?
22. Un árbol binario  $T = (V, E)$  está *balanceado* si para cada vértice  $v \in V$  las alturas de los subárboles izquierdo y derecho de  $v$  difieren en a lo sumo 1 (la altura de un árbol vacío se define como  $-1$ ).  
Establezca si cada uno de los siguientes árboles está o no balanceado.



23. Sea  $N_h$  el número mínimo de vértices en un árbol binario balanceado de altura  $h$ , y sea  $f_1, f_2, \dots$  la sucesión de Fibonacci.
- a) Demuestre que  $N_0 = 1$ ,  $N_1 = 2$  y  $N_2 = 4$ .
  - b) Demuestre que  $N_h = 1 + N_{h-1} + N_{h-2}$ , para  $h \geq 2$ .
  - c) Demuestre que  $N_h = f_{h+3} - 1$ , para  $h \geq 0$ .
24. Considere el siguiente código de Huffman.



a) Decodifique cada cadena de bits utilizando el código dado.

I. 11101011000110000

II. 1111101110001000110011

III. 1100111000000100111111011100010011110

b) Codifique cada palabra utilizando el código dado.

I. BFS

II. FIFO

III. ROSARIO