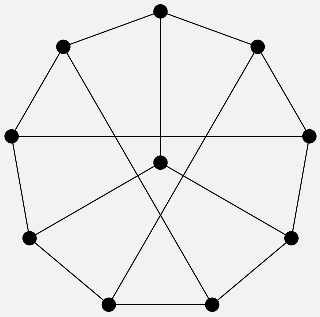
PARCIAL 1 - RESOLUCIÓN

Ejercicio 1

Recordemos que para $n, k \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2k$, el *grafo de Kneser* $K(n,k)$ es el grafo cuyos vértices son todos los subconjuntos de $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ con cardinal k, y dos vértices son adyacentes si su intersección es vacía.
Para $n \geq 4$, sea $G_n = K(n, 2)$.

a) Graficar G_4 y G_5.

b) ¿Es G_5 isomorfo al siguiente grafo?



c) Determinar la cantidad de aristas de G_n en función de n.

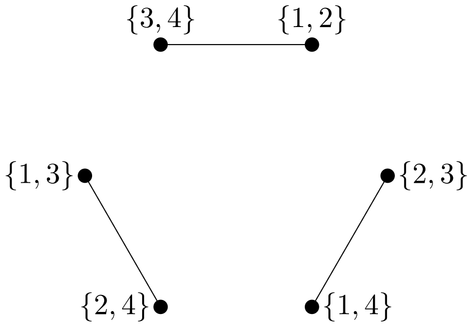
Sugerencia: G_n es un grafo regular. ¿Cuál es el grado de cada vértice?

d) Para $n \geq 5$, probar que G_n es conexo y determinar $diam(G_n)$.

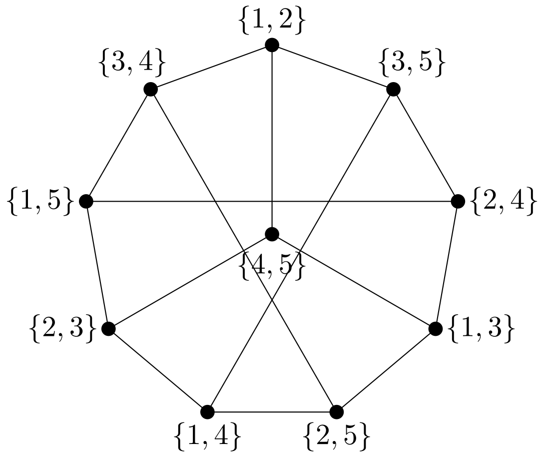
e) ¿Cuál es el menor valor de n para el cual G_n es un grafo euleriano?

f) Probar que si $n \geq 8$, entonces G_n es un grafo hamiltoniano.

a) Graficamos los grafos G_4 y G_5.



G_4



G_5

b) Basta con etiquetar los vértices del grafo de la figura con las etiquetas de los vértices del grafo G_5 dado en el ítem (a).

Observación: Este grafo es isomorfo al grafo de Petersen.

c) Observemos primero que G_n es un grafo regular.

En efecto, consideremos un vértice $u \in V(G_n)$. Tenemos que $u = \{a, b\}$ para algún par de elementos $a, b \in [n]$. Los vecinos de u son todos los vértices $w \in V(G_n)$ tales que $w \cap \{a, b\} = \emptyset$. Es decir, son todos los subconjuntos de $[n] \setminus \{a, b\}$ con cardinal 2. Luego, resulta que el grado de u es la cantidad de subconjuntos de $[n] \setminus \{a, b\}$ de cardinal 2.

$$d(u) = \binom{n-2}{2} = \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!}.$$

Y esto vale para cualquier vértice u de G_n.

Por otro lado, la cantidad de vértices de G_n es igual a la cantidad de subconjuntos de $[n]$ de cardinal 2. Es decir,

$$|V(G_n)| = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!}.$$

Para determinar la cantidad de aristas de G_n, basta con recordar que para todo grafo G se tiene

$$2|E(G)| = \sum_{u \in V(G)} d(u).$$

Luego, para G_n, nos queda

$$2|E(G_n)| = \sum_{u \in V(G_n)} d(u) = |V(G_n)| \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} = \frac{n!}{2!(n-2)!} \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} = \frac{n!}{4(n-4)!}$$

Por lo tanto

$$\boldsymbol{|E(G_n)| = \frac{n!}{8(n-4)!}}$$

d) Consideremos $n \geq 5$.

Para probar que G_n es conexo, es suficiente con encontrar, para cada par u y v de vértices distintos, un u, v-camino.

Sean entonces $u, v \in V(G_n)$.

Caso 1. $u \cap v = \emptyset$. Es decir, u y v son adyacentes.

En este caso, (u, v) es un u, v-camino.

Caso 2. $u \cap v \neq \emptyset$. Es decir, u y v no son adyacentes.

En este caso, tenemos que $u = \{a, b\}$ y $v = \{a, c\}$ para algunos elementos $a, b, c \in [n]$. Observemos que como $n \geq 5$, existen al menos dos elementos distintos $x, y \in [n] \setminus \{a, b, c\}$. Luego, si consideramos el vértice $w = \{x, y\}$, tenemos que como $u \cap w = \emptyset$ y $v \cap w = \emptyset$, w es adyacente a u y a v. Luego u, w, v es un u, v-camino.

Luego, hemos probado que para cada par de vértices de G_n pudimos encontrar un camino que los une. Por lo tanto, $\boldsymbol{G_n}$ **es conexo**.

Veamos ahora que el diámetro de G_n es 2. Recordemos que

$$diam(G) = \max\{dist(u, v) : u, v \in V(G)\}$$

Por lo hecho para probar la conexidad de G_n, hemos visto que si $u, v \in V(G_n)$ no son adyacentes, entonces existe un camino de longitud 2 que los une. Es decir

$$dist(u, v) \leq 2, \qquad \forall u, v \in V(G_n).$$

Esto implica que $diam(G_n) \leq 2$. Para ver que es exactamente 2, es suficiente encontrar un par de vértices que estén a distancia 2. Basta considerar $u = \{1, 2\}$ y $v = \{1, 3\}$, ambos son vértices en $V(G_n)$ y no son adyacentes. Para este par de vértices vale que $dist(u, v) = 2$.

Luego, tenemos que

$$\boldsymbol{diam(G_n)} = \max\{dist(u, v) : u, v \in V(G_n)\} = \mathbf{2}.$$

e) Sabemos que un grafo G es euleriano si y sólo si es conexo y todos sus vértices tienen grado par. Queremos determinar el menor valor de n para el cual el grafo G_n es euleriano. G_n está definido para $n \geq 4$. Por lo hecho en el ítem (a) podemos ver que G_4 no es conexo y por lo hecho en el ítem (d) tenemos que G_n es conexo para todo $n \geq 5$. Por otro lado, por lo hecho en el ítem (b) G_n es regular y el grado de cada vértice $u \in V(G_n)$ es

$$d(u) = \binom{n-2}{2} = \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} = \frac{(n-2)(n-3)}{2}.$$

Luego, nos basta con encontrar el menor valor de n para el cual se verifiquen al mismo tiempo que $n \geq 5$ y que $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ sea par. Para $n = 5$, tenemos que $\frac{(n-2)(n-3)}{2} = 3$ es impar. Para $n = 6$, tenemos que $\frac{(n-2)(n-3)}{2} = 6$ es par.

Por lo tanto, **el menor valor de $\boldsymbol{n}$ para el cual $\boldsymbol{G_n}$ es euleriano es 6**.

f) Queremos probar que si $n \geq 8$, entonces G_n tiene un ciclo hamiltoniano. Recordemos que una condición suficiente para la existencia de ciclos hamiltonianos en un grafo G es que para todo par de vértices no adyacentes u y v se verifique $d(u) + d(v) \geq |V(G)|$.

Por lo hecho en el ítem (c), sabemos que el grado de cada vértice de G_n es $\binom{n-2}{2}$, y que $|V(G_n)| = \binom{n}{2}$. Luego, nos alcanza con probar que para $n \geq 8$ vale

$$2\binom{n-2}{2} \geq \binom{n}{2}$$

Observemos que como

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}, \qquad \binom{n-2}{2} = \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} = \frac{(n-2)(n-3)}{2},$$

lo que queremos probar es que

$$(n-2)(n-3) \geq \frac{n(n-1)}{2}$$

O, equivalentemente

$$(n-2)(n-3) - \frac{n(n-1)}{2} \geq 0$$

En efecto, tenemos

$$(n-2)(n-3) - \frac{n(n-1)}{2} = n^2 - 5n + 6 - \frac{1}{2}(n^2 - n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{9}{2}n + 6 = \frac{1}{2}n(n-9) + 6$$

Para $n = 8$, tenemos que

$$\frac{1}{2}n(n-9)+6 = \frac{1}{2}8(8-9)+6 = 2 \geq 0$$

Para $n \geq 9$, tenemos que

$$\underbrace{\frac{1}{2}\underbrace{n}_{\geq 9}\underbrace{(n-9)}_{\geq 0}}_{\geq 0}+6 \geq 6 \geq 0$$

Por lo tanto **para $n \geq 8$, G_n es hamiltoniano**.

■

Ejercicio 2

Sea G un grafo bipartito.

a) Probar que todo subgrafo de G es bipartito.

b) Probar que si G tiene bipartición (X, Y), entonces

$$\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y} d(v) = |E(G)|.$$

c) Probar que si además G es k-regular con $k \geq 2$, entonces G no tiene ninguna arista de corte.

Sugerencia: Suponer que G tiene una arista de corte $e = ab$ y analizar la componente conexa de $G \setminus e$ que contiene al vértice a.

a) Como G es bipartito, por definición, existe una bipartición (X, Y) de $V(G)$ tal que $E(G) \subseteq X \times Y$.

Sea G' un subgrafo de G, i.e. $V(G') \subseteq V(G)$, $E(G') \subseteq E(G)$ y $E(G') \subseteq V(G') \times V(G')$.

Consideremos los conjuntos $X' = X \cap V(G')$ e $Y' = Y \cap V(G')$. Luego, $X' \cup Y' = (X \cap V(G')) \cup (Y \cap V(G')) = (X \cup Y) \cap V(G') = V(G) \cap V(G') = V(G')$ y $X' \cap Y' = (X \cap V(G')) \cap (Y \cap V(G')) = (X \cap Y) \cap V(G') = \emptyset$. En consecuencia, (X', Y') forman una partición de $V(G')$. Veamos que toda arista de G' tiene un extremo en X' y el otro en Y', i.e. $E(G') \subseteq X' \times Y'$.

Si e es una arista en G', i.e. $e \in E(G')$, tenemos entonces que $e \in V(G') \times V(G')$. Si e tiene ambos extremos en X', entonces e es una arista en G (ya que $E(G') \subseteq E(G)$) con ambos extremos en X, lo cual es una contradicción ya que $E(G) \subseteq X \times Y$. Por lo tanto, no existen aristas en G' con ambos extremos en X'. De manera análoga podemos ver que tampoco existen aristas en G' con ambos extremos en Y'. Ergo, toda arista de G' tiene un extremo en X' y el otro en Y', i.e. $E(G') \subseteq X' \times Y'$.

En conclusión, G' es bipartito.

Otra forma usando caracterización del ejercicio 7 de la Práctica 3: Sea G' un subgrafo de G. Veamos que G' es bipartito. Sabemos que un grafo es bipartito ssi no contiene ciclos impares como subgrafos. Luego, si G' no es bipartito, entonces tiene un ciclo impar como subgrafo. En consecuencia, este ciclo impar es también subgrafo de G, contradiciendo que G es bipartito. Ergo, G' debe ser bipartito.

b) Sea $e \in E(G)$. Luego, esta arista tiene un extremo en X y un extremo en Y. Es decir, cada arista en $E(G)$ suma exactamente una unidad al grado de exactamente un vértice en X y exactamente una unidad al grado de exactamente un vértice en Y.
En consecuencia,
$$\sum_{v \in X} d(v) = |E(G)| = \sum_{v \in Y} d(v).$$

Observación: Este es el ejercicio 12 de la Práctica 1.

c) Consideremos entonces un grafo G bipartito, conexo y k-regular con $k \geq 2$. Sea $e \in E(G)$ (arbitraria). **Supongamos que** $e = xy$ **es una arista de corte de** G, i.e. $G \setminus e$ es no conexo. Sea G_x la componente conexa a la cual pertenece x. Como $gr_G(x) \geq 2$, entonces $|V(G_x)| \geq 2$. Observemos que, por definición de componente conexa, toda arista de $G \setminus e$ que posea un extremo en $V(G_x)$ es también arista de G_x. En consecuencia, todas las aristas incidentes en un vértice de G_x son aristas de G_x, salvo la arista borrada $e = xy$. Por lo tanto, el grado de un vértice en G_x es el mismo que el grado en G, salvo para el vértice x, para el cual su grado se reduce en exactamente una unidad. Como G es k-regular, en G_x todos los vértices tienen grado k, salvo x que tiene grado $k-1$.

Por otro lado, como G_x es subgrafo de G y G es bipartito, por el primer ítem de este ejercicio tenemos que G_x es bipartito. Sea (X', Y') una bipartición de G_x tal que $E(G_x) \subseteq X' \times Y'$ y supongamos s.p.d.g. que $x \in X'$. Por el segundo ítem de este ejercicio resulta que
$$\sum_{v \in X'} d(v) = \sum_{v \in Y'} d(v).$$

Pero
$$\sum_{v \in X'} d(v) = k(|X'| - 1) + (k-1) = k|X'| - 1$$
y
$$\sum_{v \in Y'} d(v) = k|Y'|.$$

Luego, $k|X'| - 1 = k|Y'|$. Ergo, $(|X'| - |Y'|) = \dfrac{1}{k}$, lo cual no es posible ya que $k \geq 2$ y $(|X'| - |Y'|)$ es un número entero.

Por lo tanto, e no es de corte de G. En conclusión, de la arbitrariedad en la elección de e surge que G no tiene arista de corte.

$\blacksquare$

Ejercicio 3

Analizar la veracidad de los siguientes enunciados:

a) Si $diam(G) \leq 2$ entonces G es P_4-free (i.e. P_4 no es subgrafo inducido de G).

b) Un grafo G es bipartito si y solo si para todo subgrafo inducido H de G se tiene
$$\alpha(H) \geq \frac{1}{2}|V(H)|.$$

a) **FALSO**

Consideremos $G = C_5$. Sea $v \in V(G)$ arbitrario. No es difícil ver que $G - v$ es isomorfo a P_4, i.e. G no es P_4-free. Pero, $dist_G(v, u) = 1$ si $uv \in E(G)$ y $dist(u, v) = 2$ si $uv \notin E(G)$. Por lo tanto $diam(G) = 2$.

Otro ejemplo: Sea $G = P_4 \vee K_1$. Consideremos $V(P_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $V(K_1) = \{u\}$. Por definición de la operación join u es vértice universal en G y en consecuencia $dist(x, y) \leq 2$, $\forall x, y \in V(G)$. Además, $G - u$ es isomorfo a P_4, i.e. G no es P_4-free.

b) **VERDADERO**

Veamos primero que si G es bipartito entonces para todo subgrafo inducido H de G resulta $\alpha(H) \geq \frac{1}{2}|V(H)|$.

Sea H subgrafo inducido de un grafo bipartito G. Del ejercicio 2 ítem a, tenemos que H es bipartito. Sea (X, Y) una bipartición de $V(H)$ con $E(H) \subseteq X \times Y$. Observemos que X es un conjunto estable (independiente) de H ya que no existen aristas entre vértices de X. Análogamente, Y es un conjunto estable de H. En consecuencia, $\alpha(H) \geq \max\{|X|, |Y|\}$.

Por otro lado, como (X, Y) es una partición de $V(H)$ resulta $|X| + |Y| = |V(H)|$. Entonces, $\max\{|X|, |Y|\} \geq \frac{1}{2}|V(H)|$.

Por lo tanto, $\alpha(H) \geq \max\{|X|, |Y|\} \geq \frac{1}{2}|V(H)|$.

Probemos ahora que si para todo subgrafo inducido H de G resulta $\alpha(H) \geq \frac{1}{2}|V(H)|$ entonces G es bipartito.

Supongamos que G no es bipartito y probemos que existe un subgrafo inducido H de G tal que $\alpha(H) < \frac{1}{2}|V(H)|$.

Como G no es bipartito, por la caracterización del ejercicio 7 de la Práctica 3, tenemos que G posee un ciclo impar C_{2k+1} como subgrafo ($k \in \mathbb{N}$). Consideremos H' el subgrafo de G isomorfo a C_{2k+1}. Sea H el subgrafo inducido por $V(H')$.

Observemos que $H' \cong C_{2k+1}$ es subgrafo de H. Como $E(H') \subseteq E(H)$ y $V(H') = V(H)$, entonces todo conjunto estable de H también lo es de H' (ya que dos vértices no adyacentes en H tampoco son adyacentes en H'). Luego,

$$\alpha(H') = \max\{|S| : S \text{ es estable de } H'\} \geq \max\{|S| : S \text{ es estable de } H\} = \alpha(H).$$

Además, $\alpha(H') = \alpha(C_{2k+1}) = \lfloor \frac{2k+1}{2} \rfloor = k$ (Práctica 3, ejercicio 10, ítem a) y $|V(H')| = |V(H)| = 2k + 1$.

En conclusión,

$$\alpha(H) \leq \alpha(H') = k < k + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2k + 1) = \frac{1}{2}|V(H)|.$$

Es decir, $\alpha(H) < \frac{1}{2}|V(H)|$ como queríamos probar.

■