Práctica 5: Lógica de Predicados. Semántica

1. Considere la sentencia ϕ definida como $\forall x \exists y(\neg(x = y) \wedge (R(x, y) \rightarrow R(y, x)))$, donde R es símbolo de predicado de aridad 2.

a) Sea $A = \{a, b, c\}$ y $R^M = \{(b, c), (b, b), (b, a)\}$. Decida si $\mathcal{M} \models \phi$.

1. Considere la sentencia ϕ definida como $\forall x \exists y (\neg(x = y) \wedge (R(x,y) \to R(y,x)))$, donde R es símbolo de predicado de aridad 2.

a) Sea $A = \{a, b, c\}$ y $R^M = \{(b,c), (b,b), (b,a)\}$. Decida si $\mathcal{M} \models \phi$.

Escribamos a ϕ como $\phi \equiv \forall x \exists y\,(\phi_1 \wedge \phi_2)$ donde $\phi_1 \equiv \neg\,(x \doteq y)$ y $\phi_2 \equiv R\,(x,y) \to R\,(y,x)$.

$[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s} = T$ sii para cada $e \in |\mathcal{M}|$ resulta $[\![\exists y\,(\phi_1 \wedge \phi_2)]\!]_{\mathcal{M},s[x\mapsto e]} = T$. En particular, para $e = b$
$[\![\exists y\,(\phi_1 \wedge \phi_2)]\!]_{\mathcal{M},s[x\mapsto b]} = T$ sii para algún $h \in |\mathcal{M}|$ resulta $[\![\phi_1 \wedge \phi_2]\!]_{\mathcal{M},s[x\mapsto b][y\mapsto h]} = T$.

Sea $s' = s\,[x \mapsto b]\,[y \mapsto h]$. Consideremos los tres casos posibles para h:

Caso $h = a$**:** $\quad \llbracket \phi_1 \wedge \phi_2 \rrbracket_{\mathcal{M},s'} = \text{mín}\left\{ \llbracket \phi_1 \rrbracket_{\mathcal{M},s'}, \llbracket \phi_2 \rrbracket_{\mathcal{M},s'} \right\}$

Luego:

$$
\begin{aligned}
& \llbracket \phi_2 \rrbracket_{\mathcal{M},s'} = F \\
\iff & \langle \text{definición de } \phi_2 \rangle \\
& \llbracket R(x,y) \to R(y,x) \rrbracket_{\mathcal{M},s'} = F \\
\iff & \langle \text{definición de } \llbracket\rrbracket \text{ para } \to \rangle \\
& \llbracket R(x,y) \rrbracket_{\mathcal{M},s'} = T \text{ y } \llbracket R(y,x) \rrbracket_{\mathcal{M},s'} = F \\
\iff & \langle \text{definición de } \llbracket\rrbracket \text{ para predicados} \rangle \\
& \left(\llbracket x \rrbracket_{\mathcal{M},s'}, \llbracket y \rrbracket_{\mathcal{M},s'} \right) \in R_{\mathcal{M}} \text{ y } \left(\llbracket y \rrbracket_{\mathcal{M},s'}, \llbracket x \rrbracket_{\mathcal{M},s'} \right) \notin R_{\mathcal{M}} \\
\iff & \langle \text{definición de } \llbracket\rrbracket \text{ para términos} \rangle \\
& (s'(x), s'(y)) \in R_{\mathcal{M}} \text{ y } (s'(y), s'(x)) \notin R_{\mathcal{M}} \\
\iff & \langle \text{definición de } s' \rangle \\
& (b,a) \in R_{\mathcal{M}} \text{ y } (a,b) \notin R_{\mathcal{M}}
\end{aligned}
$$

lo cual vale.

Por lo tanto $\quad \llbracket \phi_1 \wedge \phi_2 \rrbracket_{\mathcal{M},s'} = \text{mín}\left\{ \llbracket \phi_1 \rrbracket_{\mathcal{M},s'}, F \right\} = F$

Caso $h = c$**:** análogo.

Caso $h = b$: $$[\![\phi_1 \wedge \phi_2]\!]_{\mathcal{M},s'} = \text{mín}\left\{[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s'}, [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s'}\right\}$$

Luego:

$$
\begin{aligned}
& [\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s'} = F \\
\iff & \langle \text{definición de } \phi_1 \rangle \\
& [\![\neg (x \doteq y)]\!]_{\mathcal{M},s'} = F \\
\iff & \langle \text{definición de } [\![]\!] \text{ para } \neg \rangle \\
& [\![x \doteq y]\!]_{\mathcal{M},s'} = T \\
\iff & \langle \text{definición de } [\![]\!] \text{ para } \doteq \rangle \\
& [\![x]\!]_{\mathcal{M},s'} = [\![y]\!]_{\mathcal{M},s'} \\
\iff & \langle \text{definición de } [\![]\!] \text{ para términos} \rangle \\
& s'(x) = s'(y) \\
\iff & \langle \text{definición de } s' \rangle \\
& b = b \\
& \text{lo cual vale.}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto: $$[\![\phi_1 \wedge \phi_2]\!]_{\mathcal{M},s'} = min\left\{F, [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s'}\right\} = F$$

En conclusión, hemos visto que para ningún $h \in |\mathcal{M}|$ resulta $[\![\phi_1 \wedge \phi_2]\!]_{\mathcal{M},s'} = T$, por lo tanto $[\![\exists y\,(\phi_1 \wedge \phi_2)]\!]_{\mathcal{M},s[x\mapsto b]} = F$. Como dijimos que $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s} = T$ sii para cada $e \in |\mathcal{M}|$ resulta $[\![\exists y\,(\phi_1 \wedge \phi_2)]\!]_{\mathcal{M},s[x\mapsto e]} = T$ y vimos que para $e = b$ no vale, podemos concluir que $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s} = F$.

Para el ejercicio 5:

Axiomas de Peano: $\Gamma_{\mathbb{N}}$ es el siguiente conjunto de fórmulas:

1- $\phi_1 \equiv \forall x \neg(s(x) = 0)$

2- $\phi_2 \equiv \forall x \forall y (s(x) = s(y) \rightarrow x = y)$

3- $\phi_{3a} \equiv \forall x (x + 0 = x)$
$\phi_{3b} \equiv \forall x (0 + x = x)$

4- $\phi_4 \equiv \forall x \forall y (x + s(y) = s(x + y))$

5- $\phi_{5a} \equiv \forall x (x \times 0 = 0)$
$\phi_{5b} \equiv \forall x (0 \times x = 0)$

6- $\phi_{6a} \equiv \forall x (x \times s(0) = x)$
$\phi_{6b} \equiv \forall x (s(0) \times x = x)$

7- El producto entre un natural y el sucesor de otro es igual a la suma del último y el producto de dichos naturales
$\phi_7 \equiv \forall x \forall y (x \cdot s(y) = y + (x \cdot y))$