Lógica de Predicados:

Deducción Natural

Pablo Verdes

LCC

31 de Octubre de 2019

Reglas de DN para Lógica de Predicados

- Extenderemos el sistema de Deducción Natural (DN) para Lógica Proposicional al caso de Predicados.
- Toda deducción que usaba reglas ya vistas para Proposicional será también una deducción de nuestro sistema.
- Por ejemplo:

$$\frac{\phi}{\phi \wedge \psi} i_{\wedge}$$

será una regla de DN para Predicados, donde $\phi, \psi \in \mathsf{FORM}$.

La Regla de Secuente asociada será:

$$\mbox{Si }\Gamma\vdash\phi\mbox{ y }\Gamma'\vdash\psi\mbox{ entonces }\Gamma\cup\Gamma'\vdash\phi\wedge\psi,$$
 donde $\Gamma,\Gamma'\subseteq\mbox{FORM},\mbox{ }\phi,\psi\in\mbox{FORM}.$

Resta entonces dar reglas de DN para el símbolo de igualdad =
y los cuantificadores ∀, ∃. Serán también de dos tipos: introducción
y eliminación.

Reglas para la igualdad

Introducción:

$$\overline{t=t}^{i}$$

donde $t \in TERM$ (nuestro lenguaje no nos permite hablar de igualdad entre fórmulas).

- Nótese que es un axioma, dado que no tiene premisas. Obs. también que no se trata de una única regla sino de un esquema de reglas, una para cada término t.
- Ejemplo:

$$f(x,y) = f(x,y)^{-i}$$

• Esta regla es intuitivamente correcta, pero no es demasiado útil: lo que necesitamos es un principio que nos permita sustituir iguales por iguales repetidamente. Lo haremos a través de la regla de eliminación.

Reglas para la igualdad

Eliminación:

$$rac{t=t' \quad \phi[t/z]}{\phi[t'/z]} e_=$$

si t y t' están libres para z en ϕ .

La Regla de Secuente asociada será:

Si
$$\Gamma \vdash (t = t')$$
 y $\Gamma' \vdash \phi[t/z]$ entonces $\Gamma \cup \Gamma' \vdash \phi[t'/z]$, donde $\Gamma, \Gamma' \subseteq \mathsf{FORM}$, $\phi \in \mathsf{FORM}$, $t, t' \in \mathsf{TERM}$ libres para z en ϕ .

Ejemplo:

Veamos que la reglas i_{-} y e_{-} hacen que la igualdad tenga las propiedades de ser reflexiva, simétrica y transitiva.

Reglas para la igualdad

• Reflexiva: $\vdash t = t$

1.
$$t = t$$
 $i_=$

- Simétrica: $t_1 = t_2 \vdash t_2 = t_1$
 - 1. $t_1 = t_2$ premisa
 - 2. $t_1 = t_1 i_=$
 - 3. $t_2 = t_1$ $e_{=}(1)(2)[\phi \equiv z = t_1]$
- Transitiva: $t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$
 - 1. $t_1 = t_2$ premisa
 - 2. $t_2 = t_3$ premisa
 - 3. $t_1 = t_3$ $e_{=}(1)(2)[\phi \equiv z = t_3]$

■ Eliminación de ∀:

$$\frac{\forall x \phi}{\phi[t/x]} e_{\forall}$$

donde t está libre para x en ϕ .

La Regla de Secuente asociada será:

Si
$$\Gamma \vdash \forall x \phi$$
 entonces $\Gamma \vdash \phi[t/x]$,

donde $\Gamma \subseteq \mathsf{FORM}, \ \phi \in \mathsf{FORM}, \ t \in \mathsf{TERM}$ libre para x en ϕ .

$$rac{orall x(P(x)
ightarrow P(s(x)))}{P(3)
ightarrow P(s(3))} e_orall$$

• Ejemplo:

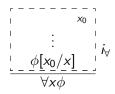
$$\frac{\forall x (\exists y (x < y))}{\exists y (y < y)} e_{\forall}$$

es **incorrecto** porque no cumple la condición de estar y libre para x en $\phi \equiv \exists y (x < y)$.

• Ejemplo: $P(f(c)), \forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \vdash \neg Q(f(c))$

- 1. P(f(c))premisa
- 2. $\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$ premisa
- 3. $P(f(c)) \rightarrow \neg Q(f(c))$ $e_{\forall}(2)$
- 4. $\neg Q(f(c))$ $e_{\rightarrow}(1)(3)$

• Introducción de ∀:



donde x_0 no ocurre (libre) fuera de la caja.

La Regla de Secuente asociada será:

Si $\Gamma \vdash \phi[x_0/x]$ y x_0 no ocurre libre en Γ entonces $\Gamma \vdash \forall x \phi$.

• En otras palabras: si podemos demostrar que ϕ vale para un x_0 que no es especial en ningún sentido, entonces habremos probado que ϕ vale para cualquier x, es decir, para todo x.

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \ \forall x P(x) \vdash \ \forall x Q(x)$$

1.	$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$	premisa
2.	$\forall x P(x)$	premisa
3.	$P(x_0)$	$e_{\forall}(2)$ x_0
4.	$P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$	$e_{orall}(1)$
5.	$Q(x_0)$	$e_{\rightarrow}(3)(4)$
6.	$\forall x Q(x)$	$i_{\forall}(3-5)$

Reglas para la cuantificación existencial

• Introducción de ∃:

$$\frac{\phi[t/x]}{\exists x \phi} i_{\exists}$$

donde t está libre para x en ϕ .

La Regla de Secuente asociada será:

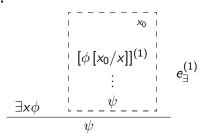
Si $\Gamma \vdash \phi[t/x]$ y t está libre para x en ϕ entonces $\Gamma \vdash \exists x \phi$.

$$\forall x P(x) \vdash \exists x P(x)$$

$$\frac{\forall x P(x)}{P(x_1)} \stackrel{e_{\forall}}{=} i_{\exists}$$

Reglas para la cuantificación existencial

■ Eliminación de ∃:



donde x_0 no ocurre libre fuera de la caja y por lo tanto no puede aparecer en ψ .

La Regla de Secuente asociada será:

Si
$$\Gamma \cup \{\phi[x_0/x]\} \vdash \psi$$
 donde x_0 no ocurre libre en Γ entonces $\Gamma \cup \{\exists x \phi\} \vdash \psi$.



Reglas para la cuantificación existencial

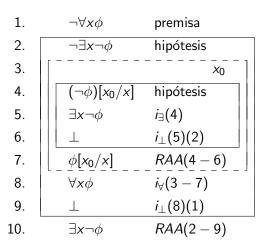
$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \ \exists x P(x) \vdash \ \exists x Q(x)$$

1.
$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$
 premisa
2. $\exists xP(x)$ premisa
3. $P(x_0)$ hipótesis $\xrightarrow{x_0}$
4. $P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$ $e_{\forall}(1)$
5. $Q(x_0)$ $e_{\rightarrow}(3)(4)$
6. $\exists xQ(x)$ $i_{\exists}(5)$
7. $\exists xQ(x)$ $e_{\exists}(2)(3-6)$

$$\bullet \neg \forall x \phi \dashv \vdash \exists x \neg \phi$$

$$\bullet \ \neg \exists x \phi \ \dashv \vdash \ \forall x \neg \phi$$

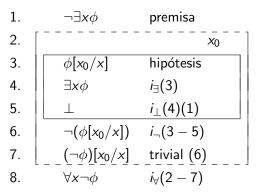
$$\neg \forall x \phi \vdash \exists x \neg \phi$$



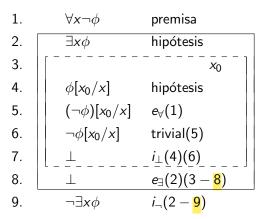
$$\neg \forall x \phi \dashv \exists x \neg \phi$$

1.	$\exists x \neg \phi$	premisa
2.	$\forall x \phi$	hipótesis
3.		$\begin{bmatrix} - & - & - & - & - & - & - & - & - & - $
4.	$(\neg \phi)[x_0/x]$	hipótesis
5.	$\neg(\phi[x_0/x])$	trivial (4)
6.	$\phi[x_0/x]$	$e_{\forall}(2)$
7.		$i_{\perp}(6)(5)$
8.		$e_{\exists}(1)(3-8)$
9.	$\neg \forall x \phi$	$i_{\neg}(2-\frac{9}{9})$

$$\neg \exists x \phi \vdash \forall x \neg \phi$$



$$\neg \exists x \phi \dashv \forall x \neg \phi$$



Propiedades

Teorema:

La lógica de predicados es correcta y completa.

No la hacemos.