Lógica Proposicional, Deducción Natural

Dante Zanarini

LCC

22 de agosto 2019

Demostraciones

Recordemos nuestra definición de *demostración*:

> *Una demostración (matemática) es una justificación de una sentencia (la* conclusión *de la demostración). La demostración puede usar algunas proposiciones que se asumen válidas (*las premisas*).*

Observación:

Una demostración de ϕ no garantiza que ϕ sea válida

¿Por qué?

¿Qué tenemos hasta ahora?

- Vimos una forma de realizar demostraciones: razonar semánticamente
- Si bien nos pueden servir, no es la forma *natural* de realizar pruebas
- Por ejemplo, ¿Cómo pruebo

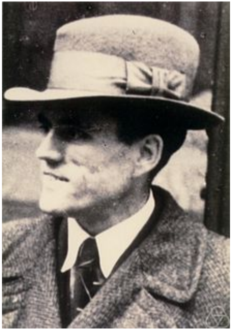
$$p_0 \wedge p_1 \to p_0$$

con lo que sabemos hasta ahora?

Cálculo de Secuentes - Deducción Natural

- Hoy veremos dos sistemas de reglas que nos permiten razonar de forma natural sobre proposiciones:
  - Cálculo de secuentes
  - Deducción Natural

- Ambos sistemas están estrechamente relacionados, y fueron definidos en 1935 por **Gerhard Gentzen** (1909-1945)



Secuentes

Definición (Secuente)

Un secuente es una expresión de la forma

$$\Gamma \vdash \phi$$

donde ϕ *es una proposición, y* Γ *un conjunto de proposiciones.*

- Intentaremos que un secuente tenga el siguiente significado:

  Hay una prueba (o derivación) de ϕ *cuyas hipótesis (no descartadas) pertenecen a* Γ

- Veremos más adelante qué quiere decir "no descartadas"
- Mediante reglas, iremos definiendo el conjunto de secuentes válidos

La regla trivial

DN (Regla Trivial)

Sea ϕ una proposición, entonces

$$\phi$$

es una derivación. Su conclusión es ϕ, y tiene una hipótesis (ϕ)

Regla de Secuente

Para todo par Γ, ϕ, el siguiente secuente es válido:

$$\Gamma, \phi \vdash \phi$$

Reglas para la conjunción

- ¿Cómo se prueba $\phi \wedge \psi$? (reglas de introducción)

DN (Introducción de la Conjunción)

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi}\ i_\wedge$$

Si tengo derivaciones de ϕ y ψ, entonces tengo una derivación de $\phi \wedge \psi$

- ¿Cuáles son las hipótesis de la derivación?

Regla de Secuente

Si $\Gamma \vdash \phi$ *y* $\Delta \vdash \psi$ *son secuentes válidos, entonces también lo es el secuente* $\Gamma \cup \Delta \vdash \phi \wedge \psi$.

Reglas para la conjunción

- ¿Qué puedo derivar si conozco $\phi \wedge \psi$? (reglas de eliminación)

DN (Eliminación de la Conjunción 1)

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi}\ e_{\wedge_1}$$

Si tengo una derivación de $\phi \wedge \psi$, entonces tengo una derivación de ϕ

- ¿Cuáles son las hipótesis de la derivación?

Regla de Secuente

Si $\Gamma \vdash \phi \wedge \psi$ es un secuente válido, entonces también lo es el secuente $\Gamma \vdash \phi$.

Reglas para la conjunción

- Simétricamente, tengo las siguientes reglas:

DN (Eliminación de la Conjunción 2)

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\psi}\ e_{\wedge_2}$$

Si tengo una derivación de $\phi \wedge \psi$, entonces tengo una derivación de ψ

Regla de Secuente

Si $\Gamma \vdash \phi \wedge \psi$ *es un secuente válido, entonces también lo es el secuente* $\Gamma \vdash \psi$.

Árboles de Derivación

Veamos algunos ejemplos

Otra forma de estructurar demostraciones

- A veces preferiremos una prueba lineal en lugar de un árbol de derivación
- por ejemplo, damos una prueba lineal de $\phi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \phi$:

1)	$\phi \wedge \psi$	premisa
2)	ϕ	$e_{\wedge_1}$ (1)
3)	ψ	$e_{\wedge_2}$ (1)
4)	$\psi \wedge \phi$	$i_{\wedge}$ $(3), (2)$

Reglas para la implicación (Eliminación)

- ¿Cómo uso la información que me provee $\to$ en una hipótesis?

DN (Eliminación de la Implicación)

$$\frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi}\ e_{\to}$$

- Regla de secuente asociada:

Regla de Secuente

Si $\Gamma \vdash \phi$ *y* $\Delta \vdash \phi \to \psi$ *son secuentes válidos, entonces también lo es el secuente* $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$.

- Veamos unos ejemplos

Reglas para la implicación (Introducción)

- ¿Cómo se prueba una implicación?
  - Pensemos en lo que sabemos de matemática, y programación

DN (Introducción de la implicancia)

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\phi \to \psi}\ i_{\to}$$

- En forma de secuente:

Regla de Secuente

Si el secuente $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$ *es válido, también lo es* $\Gamma \vdash \phi \to \psi$

- Veamos unos ejemplos

Disyunción

- **Introducción**, o ¿Cómo se prueba un $\vee$?

DN (Introducción de la disyunción, 1 y 2)

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}\ i_{\vee_1} \qquad\qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}\ i_{\vee_2}$$

- Reglas de secuente asociadas:

Regla de Secuente

1. *Si* $\Gamma \vdash \phi$ *es un secuente válido, también lo es* $\Gamma \vdash \phi \vee \psi$
2. *Si* $\Gamma \vdash \psi$ *es un secuente válido, también lo es* $\Gamma \vdash \phi \vee \psi$

- Veamos unos ejemplos

Disyunción

- **Eliminación**, o ¿Qué puedo derivar a partir de $\phi \vee \psi$?

DN (Eliminación de la disyunción)

$$\frac{\phi \vee \psi}{\chi}\ e_{\vee}$$

¿Cómo se completa esta regla?

$$\frac{\phi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\phi]^1\\ \vdots\\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]^2\\ \vdots\\ \chi\end{array}}{\chi}\ e_{\vee}(1)(2)$$

¿Cómo se completa esta regla?

Regla de Secuente

Si los secuentes $\Gamma \vdash \phi \vee \psi$, $\Gamma' \cup \{\phi\} \vdash \chi$ *y* $\Gamma'' \cup \{\psi\} \vdash \chi$ *son válidos,*

Reglas para $\perp$

- **Eliminación** ¿Qué pasa si conozco $\perp$?
  - ¡Puedo probar cualquier cosa!

DN (Eliminación de $\perp$)

$$\frac{\perp}{\phi}\ e_{\perp}$$

Regla de Secuente

Si el secuente $\Gamma \vdash \perp$ es válido, también lo es $\Gamma \vdash \phi$, para cualquier proposición ϕ

- Veamos unos ejemplos

Reglas para $\perp$

- **Introducción** ¿Cómo pruebo $\perp$?
- Si nuestras reglas intentan preservar el valor de verdad de las proposiones, **¿tiene sentido probar $\perp$?**
- Sí, siempre que nuestras premisas sean contradictorias!

DN (Introducción de $\perp$)

$$\frac{\phi \qquad \neg\phi}{\perp}\ i_{\perp}$$

Regla de Secuente

Si los secuentes $\Gamma \vdash \phi$ y $\Delta \vdash \neg\phi$ son válidos, entonces también lo es el secuente $\Gamma \cup \Delta \vdash \perp$

- Ejemplos!!

Reglas para la negación

- **Introducción** ¿Cómo pruebo $\neg\phi$?

DN (Introducción de la negación)

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg\phi}\ i_{\neg}$$

- En forma de secuente:

Regla de Secuente

Si el secuente $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \bot$ *es válido, también lo es el secuente* $\Gamma \vdash \neg\phi$.

Reglas para la negación

- No daremos una regla para eliminar $\neg\phi$
- Observemos que la regla $i_{\bot}$ puede pensarse como una forma de eliminar la negación
- La penúltima regla será fundamental para pruebas indirectas de proposiciones

DN (Eliminación de la doble negación)

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}\; e_{\neg\neg}$$

Regla de Secuente

Si el secuente $\Gamma \vdash \neg\neg\phi$ es válido, también lo es el secuente $\Gamma \vdash \phi$

Ayuda con lemas intermedios

- Es muy frecuente que para demostrar cierto resultado ϕ, nos ayudemos primero demostrando ψ, para luego utilizar esta prueba en la demostración de ϕ
- En los cursos de matemática a esto le solemos llamar *lema auxiliar*, *proposición*, etc.

DN (Regla de corte)

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ \phi\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c}\Delta \quad \phi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\psi}\ RC$$

Regla de Secuente

Si $\Gamma \vdash \phi$ *y* $\Delta \cup \{\phi\} \vdash \psi$ *son válidos, también lo es el secuente* $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$

Tenemos un cálculo para demostrar, ¿y ahora?

- Corresponde hacer algunas preguntas sobre nuestro sistema
- ¿Es consistente? (Sólo prueba cosas verdaderas)
- ¿Es completo? (Prueba todo lo verdadero)
- Antes que nada

  ¿Cómo se formulan, formalmente, estas preguntas?

Reglas derivadas

- Antes de responder las preguntas, veremos algunas reglas adicionales
- Estas reglas nos servirán para
  - Acortar las pruebas
  - Proveernos una forma nueva de encarar las pruebas cuando estemos trabados
- La primera regla es:

DN (Modus Tollens)

$$\frac{\phi \to \psi \qquad \neg\psi}{\neg\phi}\ MT$$

- Veamos que es una regla derivada

Reglas derivadas

- Las otras reglas derivadas son las siguientes:

DN (Reducción al Absurdo)

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg\phi] \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\phi}\ RAA$$

DN (Tercero Excluido)

$$\dfrac{}{\phi \vee \neg\phi}\ TND$$

- Veamos que son reglas derivadas