Nombre y Apellido: Legajo:

Examen Parcial

1. Demuestre (no está permitido usar soundness/corrección y demostrar $\vdash$):

a) Si $\models (\phi_1 \wedge \phi_2)$ entonces $\models \forall x \exists y(\phi_1 \wedge \phi_2)$

b) $\not\models \forall x(\phi \vee \psi) \to \exists x(\phi \wedge \psi)$

2. En este ejercicio estamos interesados en formalizar, en lógica de predicados, la estructura de **orden parcial**. Para esto utilizaremos una signatura con $\mathcal{F} = \emptyset$ y $\mathcal{P} = \{\leq\}$, donde $ar(\leq) = 2$. Escribiremos $x \leq y$ en lugar de $\leq (x, y)$.

Un modelo $\mathcal{M}$ para esta signatura es un orden parcial sii la relación $\leq^{\mathcal{M}}$ es reflexiva, transitiva y antisimétrica.

a) Exprese estas propiedades como un conjunto Γ de fórmulas de la lógica de predicados sobre la signatura dada.

b) Demuestre que $\Gamma \cup \{\forall x \forall y(x \leq y \to y \leq x)\} \vdash \forall x \forall y(x \leq y \to x = y)$

3. Considere las fórmulas:

$$\phi_1 \equiv \forall x(P(x) \to \exists y Q(y, x))$$
$$\phi_2 \equiv \exists x \forall y(P(y) \to Q(y, x))$$

donde P y Q son símbolos de predicado tales que $\mathrm{ar}(P) = 1$ y $\mathrm{ar}(Q) = 2$. Encuentre, si es posible, un modelo $\mathcal{M}$ y entorno s tales que $[\![\phi_1 \wedge \phi_2]\!]_{\mathcal{M},s} = \mathsf{T}$. Demuestre.

4.

a) Demuestre por deducción natural:

$$\vdash \neg \exists x \forall y(P(y, x) \leftrightarrow \neg P(y, y))$$

b) Considere la siguiente sentencia:

Existe una persona tal que si dicha persona paga, entonces todas las personas pagan.

I. Formalice dicha sentencia usando el símbolo $P(x)$ para representar que x es una persona que paga.

II. Demuestre su validez por deducción natural.