# Práctica 1: Semántica de la Lógica Proposicional

**1.** Dé secuencias de formación para las siguientes fórmulas:

a) $\neg(p_1 \to p_2)$

b) $p_1 \vee (\neg p_2 \to p_3)$

c) $((p_1 \to p_2) \to p_3) \to p_4$

d) $(\neg p_1 \to (p_3 \vee (p_5 \wedge p_4))) \vee \neg p_2$

e) $(p_1 \wedge ((p_3 \to p_5) \to p_4)) \to (\neg p_2 \wedge p_6)$

f) $(p_1 \vee (\neg p_2 \to p_3)) \wedge ((p_3 \to p_5) \to p_4)$

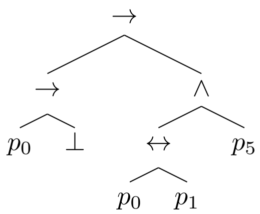
**2.** Enunciar el principio de inducción sobre Prop.

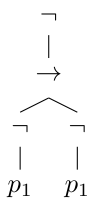
**3.** En clase de práctica veremos la definición de árbol sintáctico para una fórmula.

a) Determine los árboles sintácticos correspondientes a las fórmulas del ejercicio **1**.

b) Determine las proposiciones correspondientes a los siguientes árboles:

**i.**


**ii.**


**iii.**


**4.** Definir por recursión la función $\mathsf{subs} : \text{Prop} \to \mathcal{P}(\text{Prop})$ tal que $\mathsf{subs}(\phi)$ es el conjunto de todas las subfórmulas de $\phi$.

**5.** Sea $n$ el número de conectivos que aparecen en una fórmula $\phi$. Demuestre que $\phi$ tiene a lo sumo $2n+1$ subfórmulas.

**6.** Sea $F$ el conjunto de todas las fórmulas proposicionales para las cuales existe una secuencia de formación. Demuestre que $F = \text{Prop}$.

**7.** Sea $\phi$ una fórmula y $v, v'$ dos valuaciones. Demuestre que si para toda variable proposicional $p_i$ que ocurre en $\phi$ se cumple $v(p_i) = v'(p_i)$, entonces $[\![\phi]\!]_v = [\![\phi]\!]_{v'}$.

**8.** Determinar $\phi[\neg p_0 \to p_3/p_0]$ para:

a) $\phi = p_1 \wedge p_0 \to (p_0 \to p_3)$

b) $\phi = (p_3 \leftrightarrow p_0) \vee (p_2 \to \neg p_0)$

**9.** Demuestre el Teorema de Sustitución enunciado en clase.

**10.** Muestre que:

a) $p \models p \lor q$

b) si $p \models q$ y $q \models r$ entonces $p \models r$

c) si $\models p \to q$ entonces $p \models q$

d) $\neg(p \land q) \models \neg p \lor \neg q$

e) $\neg p \lor \neg q \models \neg(p \land q)$

f) $p \lor (q \lor r) \models (p \lor q) \lor r$

g) $(p \to q) \to r \models p \to (q \to r)$

h) $(p \land q) \to r \models (p \to r) \lor (q \to r)$

**11.** Sean $\phi, \psi \in \textsc{Prop}$ y $v$ una valuación. Demuestre que $[\![\phi \leftrightarrow \psi]\!]_v = T$ sii $[\![\phi]\!]_v = [\![\psi]\!]_v$.

**12.** Sean $\phi, \psi \in \textsc{Prop}$ tales que $\models \phi \to \psi$. Demuestre:

a) $\models (\phi \land \psi) \leftrightarrow \phi$

b) $\models (\phi \lor \psi) \leftrightarrow \psi$

**13.** El operador binario NOR ($\downarrow$) tiene la siguiente tabla de verdad:

| $p$ | $q$ | $p \downarrow q$ |
|---|---|---|
| F | F | T |
| F | T | F |
| T | F | F |
| T | T | F |

a) Extender la definición de semántica para incluir al operador $\downarrow$

b) Demostrar:

$$\neg(p \downarrow q),\ p \downarrow p \models q$$

**14.** Sea $\phi$ una fórmula proposicional. Decimos que $\phi$ es:

- **válida** (o una **tautología**) sii para toda valuación $v$, $[\![\phi]\!]_v = T$
- **contradictoria** sii para toda valuación $v$, $[\![\phi]\!]_v = F$
- **satisfactible** sii existe una valuación $v$ tal que $[\![\phi]\!]_v = T$

Demuestre que:

a) $\phi$ es satisfactible sii $\neg\phi$ no es válida

b) $\phi \to \bot$ es válida sii $\phi$ es contradictoria

**15.** Sea $\Gamma \subseteq \textsc{Prop}$. Mostrar que $\Gamma \models \phi$ sii $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es insatisfactible.

**16.**

a) Demuestre que $\{\lor, \neg\}$ es un conjunto completo de conectivos.

b) Defina un operador binario $\oplus$ de modo que $\{\oplus\}$ sea un conjunto completo de conectivos, y demuéstrelo.

**17.** Demuestre que si $C \subseteq \{\neg, \land, \lor, \to, \bot\}$ es un conjunto completo de conectivos, entonces $\neg \in C$ o $\bot \in C$.