



## Práctica 6: Lógica de predicados - Deducción natural

**1.** Probar la validez de los siguientes secuentes usando, entre otras, las reglas de introducción y eliminación de la igualdad. El símbolo  $+$  es un símbolo de función de aridad 2, mientras que  $<$  es un símbolo de predicado también de aridad 2.

- a)  $(y = 0) \wedge (y = x) \vdash 0 = x$
- b)  $t_1 = t_2 \vdash (t + t_2) = (t + t_1)$
- c)  $(x = 0) \vee ((x + x) > 0) \vdash (y = (x + x)) \rightarrow ((y > 0) \vee (y = (0 + x)))$

**2.** Las pruebas de los secuentes que hay a continuación combinan las reglas para la igualdad y los cuantificadores. Escribimos  $\phi \leftrightarrow \psi$  como abreviación de  $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$ . Encuentre pruebas para:

- a)  $P(b) \vdash \forall x(x = b \rightarrow P(x))$
- b)  $P(b), \forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y) \vdash \forall x(P(x) \leftrightarrow x = b)$
- c)  $\exists x \exists y(H(x, y) \vee H(y, x)), \neg \exists x H(x, x) \vdash \exists x \exists y \neg(x = y)$
- d)  $\forall x(P(x) \leftrightarrow x = b) \vdash P(b) \wedge \forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y)$

**3.** Pruebe los siguientes secuentes:

- a)  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash (\forall x \neg Q(x)) \rightarrow (\forall x \neg P(x))$
- b)  $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \vdash \neg(\exists x(P(x) \wedge Q(x)))$
- c)  $\neg \exists x \phi \vdash \forall x \neg \phi$
- d)  $(\forall x \phi) \wedge (\forall x \psi) \vdash \forall x(\phi \wedge \psi)$

**4.** Demostrar la validez de los siguientes secuentes, donde  $ar(f) = 2$ ,  $ar(F) = ar(G) = ar(P) = ar(Q) = 1$  y  $ar(S) = 0$ :

- a)  $\exists x(S \rightarrow Q(x)) \vdash S \rightarrow \exists x Q(x)$
- b)  $\forall x P(x) \rightarrow S \vdash \exists x(P(x) \rightarrow S)$
- c)  $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \vdash \forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$
- d)  $\forall x(\neg P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
- e)  $\exists x(\neg P(x) \vee Q(x)) \vdash \exists x(\neg(P(x) \wedge \neg Q(x)))$
- f)  $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
- g)  $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
- h)  $\forall x \forall y(G(y) \rightarrow F(x)) \vdash \exists y G(y) \rightarrow \forall x F(x)$

i)  $\forall x \neg P(x) \vdash \neg \exists x P(x)$

j)  $\forall x(f(x, c) = x), \forall x(f(c, x) = x) \vdash \forall y(\forall x(f(x, y) = x) \rightarrow y = c)$

**5.** Sean  $\phi$  y  $\psi$  fórmulas de la lógica de predicados. Demostrar las siguientes equivalencias deductivas, asumiendo que  $x \notin FV(\psi)$ :

a)  $\forall x \phi \vee \psi \dashv\vdash \forall x(\phi \vee \psi)$

b)  $\exists x(\phi \rightarrow \psi) \dashv\vdash \forall x \phi \rightarrow \psi$

c)  $\forall x(\phi \rightarrow \psi) \dashv\vdash \exists x \phi \rightarrow \psi$

**6.** Pruebe la validez de los siguientes secuentes:

a)  $\forall x \forall y P(x, y) \vdash \forall u \forall v P(u, v)$

b)  $\exists x \exists y F(x, y) \vdash \exists u \exists v F(u, v)$

**7.** En la Práctica 5 se pedía dar un conjunto de fórmulas  $\Gamma$  que caracterice la estructura de grupo.

a) Demuestre que  $\Gamma \vdash e = e^{-1}$

b) Exprese, mediante una fórmula  $\phi$ , la siguiente propiedad:

*“Existe un único elemento neutro para la operación binaria”*

c) Demuestre que  $\Gamma \vdash \phi$

**8.** En el ejercicio 6 de la Práctica 5 se pedía caracterizar a los grafos simples bipartitos mediante un conjunto  $\Gamma$  de fórmulas de la lógica de predicados. Utilizando dicha formalización, demuestre:

a)  $\Gamma \vdash \forall x \forall y \forall z (U(x) \wedge R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow U(z))$

b)  $\Gamma \vdash \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(x, z) \wedge W(y) \rightarrow W(z))$