Práctica 2: Deducción Natural

i. Completar las siguientes demostraciones:

a. $(p \wedge q) \wedge s, s \wedge t \vdash q \wedge s$

1	$(p \wedge q) \wedge s$	premisa
2		premisa
3		$e\wedge_1, 1$
4		$e\wedge_2, 3$
5		$e\wedge_1, 2$
6	$q \wedge s$	$i\wedge, 4, 5$

b. $p \vdash q \rightarrow p \wedge q$

1		premisa
2		hipótesis
3		$i\wedge, 1, 2$
4		$i \rightarrow, 2–3$

c. $p \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow p$

1		premisa
2		hipótesis
3		trivial, 1
4		$i \rightarrow, 2–3$

d. $p \rightarrow q \vdash p \vee r \rightarrow q \vee r$

1				premisa
2				hipótesis
3		hipótesis		hipótesis
4		$e \rightarrow, 1, 3$		$i\vee_2, 3$
5		$i\vee_1, 4$		
6				$e\vee$
7				$i \rightarrow, 2–6$

ii. Escribir el árbol de prueba de cada una de las demostraciones del ejercicio anterior.

iii. Probar la validez de los siguientes secuentes, mediante árboles y mediante prueba lineal:

a. $p \vdash p \wedge p$

b. $p, q, r \vdash (p \wedge q) \wedge r$

c. $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$

d. $p \wedge q \vdash q \wedge p$

e. $(p \wedge q) \wedge r \vdash p \wedge (q \wedge r)$

f. $\neg\neg p \wedge (p \vee q) \vdash p \wedge \neg\neg(p \vee q)$

iv. Probar la validez de los siguientes secuentes, mediante árboles y mediante prueba lineal:

a. $p \dashv\vdash \neg\neg p$

b. $\vdash \neg(p \wedge \neg p)$

c. $p \rightarrow (p \rightarrow q), p \vdash q$

d. $q \rightarrow (p \rightarrow r), \neg r, q \vdash \neg p$

e. $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \vdash p \wedge q \rightarrow r$

f. $\vdash (p \wedge q) \rightarrow p$

g. $q \rightarrow r \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$

h. $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \vdash p \vee r \rightarrow q \vee s$

v. Algunos de los siguientes secuentes son válidos. Para ellos, construya una prueba de su validez. En caso que no sean válidos, dar una justificación intuitiva de este hecho.

a. $\vdash p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

b. $\neg p, p \vee q \vdash q$

c. $\neg p \rightarrow p \vdash p$

d. $p \vee q, \neg q \vee r \vdash p \vee r$

e. $p \rightarrow q, s \rightarrow t \vdash p \vee s \rightarrow q \wedge t$

f. $p \wedge \neg p \vdash \neg(r \rightarrow q) \wedge r \rightarrow q$

vi. Expresar en lógica proposicional y verificar la validez de los siguientes razonamientos.

a. Si hubo niebla, saldrá el sol. Si hizo frío y hubo viento norte, no estará soleado. Como hubo niebla y frío, no hubo viento norte.

b. Los animales pueden ser acuáticos o voladores. Los animales voladores tienen alas y los que no tienen branquias, no pueden ser acuáticos. Así, los animales pueden tener alas o branquias.

c. Si estoy cansado, no voy a nadar. Si no estoy cansado, iré a tu casa. Si voy a nadar, no iré a tu casa. Entonces, no voy a nadar.

d. Cuando el gremio tiene un reclamo, hay huelga. Si estás todo el día en casa, no alimentes al gato. Si hay huelga, estarás en casa todo el día. Entonces, si el gremio tiene un reclamo, no alimentes al gato.

vii. Probar la validez de los siguientes secuentes, mediante árboles y mediante prueba lineal:

a. $p \to q \dashv\vdash \neg q \to \neg p$ ($\vdash$ sin utilizar RAA, $\dashv$ utilizando RAA)
b. $\neg p \vdash p \to q$
c. $p \to q \vdash \neg p \vee q$
d. $p \to (q \vee r), \neg q, \neg r \vdash \neg p$
e. $(p \vee (q \to p)) \wedge q \vdash p$
f. $\vdash q \to (p \to (p \to (q \to p)))$
g. $p \vee q, \neg q \vdash p$
h. $\vdash \neg p \to (p \to (p \to q))$
i. $p \to q \dashv\vdash \neg p \vee q$
j. $\vdash p \wedge q \to \neg(p \to \neg q)$
k. $\vdash \neg(p \to q) \to \neg q$ (sin utilizar RAA)
l. $\neg(p \to q) \vdash q \to p$ (sin utilizar RAA)
m. $q \vdash (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$ (utilizando TND)
n. $\vdash (p \to q) \vee (q \to r)$
o. $p \wedge q \to r \vdash (p \to q) \vee (q \to r)$
p. $p \wedge q \vdash \neg(\neg p \vee \neg q)$
q. $(p \to q) \to r, s \to \neg p, t, \neg s \wedge t \to q \vdash r$
r. $\neg(p \to q) \vdash q \to \neg p$

viii. Probar que $\phi_1, \phi_2 \vdash \psi$ sii $\phi_1 \wedge \phi_2 \vdash \psi$.

ix. Demostrar que $\phi \vdash \psi$ sii $\vdash \phi \to \psi$.

x. En el ejercicio anterior se demuestra un caso particular de la siguiente metarregla:

$$\Gamma, \phi \vdash \psi \text{ sii } \Gamma \vdash \phi \to \psi$$

Utilizar dicho resultado, así como el obtenido en **(viii)**, para probar:

$$\vdash \phi_1 \to \phi_2 \to \ldots \to \phi_n \to \psi \text{ sii } \vdash (\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \to \psi$$

xi. Sea $x \rhd y \blacktriangleright z$ la notación para *if x then y else z*.
Formular reglas de introducción y eliminación para $\rhd\blacktriangleright$ ($i\rhd\blacktriangleright$ y $e\rhd\blacktriangleright$).
(La primera se basa en $i\wedge$ y $i\to$ y la segunda en $e\wedge$ y $e\to$.) Usarlas para mostrar:

a. $p \rhd q \blacktriangleright r \vdash \neg p \rhd r \blacktriangleright q$
b. $p \rhd (s \rhd q \blacktriangleright r) \blacktriangleright r \vdash s \rhd (p \rhd q \blacktriangleright r) \blacktriangleright r$

xii. Definir reglas de introducción y eliminación para $\leftrightarrow$. Usarlas para mostrar:

a. $\vdash p \wedge (q \to p) \leftrightarrow p$
b. $\vdash (p \to r) \wedge (q \to r) \leftrightarrow (p \vee q \to r)$
c. $\neg(p \leftrightarrow q) \vdash \neg p \leftrightarrow q$ (puede utilizar resultados obtenidos en **(vii)**)

xiii. Demostrar que $\phi \dashv\vdash \psi$ si y sólo si $\vdash \phi \leftrightarrow \psi$.

xiv. Hay una manera alternativa de introducir la noción de negación. Se descarta el operador $\neg$ y se reemplaza $\neg\phi$ con $\phi \to \bot$.

a. Pruebe que $\neg\phi \dashv\vdash \phi \to \bot$.
b. Reformule las reglas $i\neg, e\neg, e\neg\neg$ y $i\neg\neg$ para adecuarlas al nuevo enfoque.