

Lógica de Predicados: **Deducción Natural**

Pablo Verdes

LCC

31 de Octubre de 2019

Reglas de DN para Lógica de Predicados

- Extenderemos el sistema de Deducción Natural (DN) para Lógica Proposicional al caso de Predicados.
- Toda deducción que usaba reglas ya vistas para Proposicional será también una deducción de nuestro sistema.
- Por ejemplo:

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi} i_{\wedge}$$

será una regla de DN para Predicados, donde $\phi, \psi \in \text{FORM}$.

La Regla de Secuente asociada será:

Si $\Gamma \vdash \phi$ y $\Gamma' \vdash \psi$ entonces $\Gamma \cup \Gamma' \vdash \phi \wedge \psi$,

donde $\Gamma, \Gamma' \subseteq \text{FORM}$, $\phi, \psi \in \text{FORM}$.

- Resta entonces dar reglas de DN para el símbolo de igualdad $=$ y los cuantificadores \forall, \exists . Serán también de dos tipos: *introducción* y *eliminación*.

Reglas para la igualdad

- **Introducción:**

$$\frac{}{t = t} i=$$

donde $t \in \text{TERM}$ (nuestro lenguaje no nos permite hablar de igualdad entre fórmulas).

- Nótese que es un *axioma*, dado que no tiene premisas. Obs. también que no se trata de una única regla sino de un *esquema* de reglas, una para cada término t .

- **Ejemplo:**

$$\frac{}{f(x, y) = f(x, y)} i=$$

- Esta regla es intuitivamente correcta, pero no es demasiado útil: lo que necesitamos es un principio que nos permita sustituir iguales por iguales repetidamente. Lo haremos a través de la regla de eliminación.

Reglas para la igualdad

- **Eliminación:**

$$\frac{t = t' \quad \phi[t/z]}{\phi[t'/z]} e_{=}$$

si t y t' están libres para z en ϕ .

La Regla de Secuente asociada será:

Si $\Gamma \vdash (t = t')$ y $\Gamma' \vdash \phi[t/z]$ entonces $\Gamma \cup \Gamma' \vdash \phi[t'/z]$,

donde $\Gamma, \Gamma' \subseteq \text{FORM}$, $\phi \in \text{FORM}$, $t, t' \in \text{TERM}$ libres para z en ϕ .

- **Ejemplo:**

Veamos que la reglas $i_{=}$ y $e_{=}$ hacen que la igualdad tenga las propiedades de ser reflexiva, simétrica y transitiva.

Reglas para la igualdad

- Reflexiva: $\vdash t = t$

$$1. \quad t = t \quad i_=$$

- Simétrica: $t_1 = t_2 \vdash t_2 = t_1$

$$1. \quad t_1 = t_2 \quad \text{premisa}$$

$$2. \quad t_1 = t_1 \quad i_=$$

$$3. \quad t_2 = t_1 \quad e_=(1)(2)[\phi \equiv z = t_1]$$

- Transitiva: $t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$

$$1. \quad t_1 = t_2 \quad \text{premisa}$$

$$2. \quad t_2 = t_3 \quad \text{premisa}$$

$$3. \quad t_1 = t_3 \quad e_=(1)(2)[\phi \equiv z = t_3]$$

Reglas para la cuantificación universal

- **Eliminación de \forall :**

$$\frac{\forall x \phi}{\phi[t/x]} e_{\forall}$$

donde t está libre para x en ϕ .

La Regla de Secuente asociada será:

Si $\Gamma \vdash \forall x \phi$ entonces $\Gamma \vdash \phi[t/x]$,

donde $\Gamma \subseteq \text{FORM}$, $\phi \in \text{FORM}$, $t \in \text{TERM}$ libre para x en ϕ .

- **Ejemplo:**

$$\frac{\forall x (P(x) \rightarrow P(s(x)))}{P(3) \rightarrow P(s(3))} e_{\forall}$$

Reglas para la cuantificación universal

- Ejemplo:

$$\frac{\forall x(\exists y(x < y))}{\exists y(y < y)} e_{\forall}$$

es **incorrecto** porque no cumple la condición de estar y libre para x en $\phi \equiv \exists y(x < y)$.

- Ejemplo: $P(f(c)), \forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \vdash \neg Q(f(c))$

- $P(f(c))$ premisa
- $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$ premisa
- $P(f(c)) \rightarrow \neg Q(f(c))$ $e_{\forall}(2)$
- $\neg Q(f(c))$ $e_{\rightarrow}(1)(3)$

Reglas para la cuantificación universal

- Introducción de \forall :

$$\frac{\begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} x_0 \\ \vdots \\ \phi[x_0/x] \end{array}} \quad i_{\forall} \\ \hline \forall x \phi \end{array}$$

donde x_0 no ocurre (libre) fuera de la caja.

La Regla de Secuente asociada será:

Si $\Gamma \vdash \phi[x_0/x]$ y x_0 no ocurre libre en Γ entonces $\Gamma \vdash \forall x \phi$.

- En otras palabras: si podemos demostrar que ϕ vale para un x_0 que no es especial en ningún sentido, entonces habremos probado que ϕ vale para cualquier x , es decir, para todo x .

Reglas para la cuantificación universal

- Ejemplo:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall xP(x) \vdash \forall xQ(x)$$

1. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ premisa

2. $\forall xP(x)$ premisa

3. $P(x_0)$ $e_{\forall}(2)$ x_0

4. $P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$ $e_{\forall}(1)$

5. $Q(x_0)$ $e_{\rightarrow}(3)(4)$

6. $\forall xQ(x)$ $i_{\forall}(3-5)$

Reglas para la cuantificación existencial

- Introducción de \exists :

$$\frac{\phi[t/x]}{\exists x\phi} i_{\exists}$$

donde t está libre para x en ϕ .

La Regla de Secuente asociada será:

Si $\Gamma \vdash \phi[t/x]$ y t está libre para x en ϕ entonces $\Gamma \vdash \exists x\phi$.

- Ejemplo:

$$\forall xP(x) \vdash \exists xP(x)$$

$$\frac{\frac{\forall xP(x)}{P(x_1)} e_{\forall}}{\exists xP(x)} i_{\exists}$$

Reglas para la cuantificación existencial

- Eliminación de \exists :

$$\frac{\exists x\phi \quad \boxed{\begin{array}{c} x_0 \\ [\phi [x_0/x]]^{(1)} \\ \vdots \\ \psi \end{array}}}{\psi} e_{\exists}^{(1)}$$

donde x_0 no ocurre libre fuera de la caja y por lo tanto no puede aparecer en ψ .

La Regla de Secuente asociada será:

Si $\Gamma \cup \{\phi[x_0/x]\} \vdash \psi$ donde x_0 no ocurre libre en Γ
entonces $\Gamma \cup \{\exists x\phi\} \vdash \psi$.

Reglas para la cuantificación existencial

- Ejemplo:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \exists xP(x) \vdash \exists xQ(x)$$

- | | | |
|----|------------------------------------|-------------------------|
| 1. | $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ | premisa |
| 2. | $\exists xP(x)$ | premisa |
| 3. | $P(x_0)$ | hipótesis x_0 |
| 4. | $P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$ | $e_{\forall}(1)$ |
| 5. | $Q(x_0)$ | $e_{\rightarrow}(3)(4)$ |
| 6. | $\exists xQ(x)$ | $i_{\exists}(5)$ |
| 7. | $\exists xQ(x)$ | $e_{\exists}(2)(3 - 6)$ |

Equivalencias entre cuantificadores

- $\neg \forall x \phi \dashv\vdash \exists x \neg \phi$
- $\neg \exists x \phi \dashv\vdash \forall x \neg \phi$

Equivalencias entre cuantificadores

$$\neg \forall x \phi \vdash \exists x \neg \phi$$

1.	$\neg \forall x \phi$	premisa
2.	$\neg \exists x \neg \phi$	hipótesis
3.	x_0	
4.	$(\neg \phi)[x_0/x]$	hipótesis
5.	$\exists x \neg \phi$	$i_{\exists}(4)$
6.	\perp	$i_{\perp}(5)(2)$
7.	$\phi[x_0/x]$	$RAA(4 - 6)$
8.	$\forall x \phi$	$i_{\forall}(3 - 7)$
9.	\perp	$i_{\perp}(8)(1)$
10.	$\exists x \neg \phi$	$RAA(2 - 9)$

Equivalencias entre cuantificadores

$$\neg \forall x \phi \vdash \exists x \neg \phi$$

1.	$\exists x \neg \phi$	premisa												
2.	$\forall x \phi$	hipótesis												
3.	<div style="text-align: right; margin-bottom: 10px;">x_0</div> <div><table><tr><td>4.</td><td>$(\neg \phi)[x_0/x]$</td><td>hipótesis</td></tr><tr><td>5.</td><td>$\neg(\phi[x_0/x])$</td><td>trivial (4)</td></tr><tr><td>6.</td><td>$\phi[x_0/x]$</td><td>$e_{\forall}(2)$</td></tr><tr><td>7.</td><td>\perp</td><td>$i_{\perp}(6)(5)$</td></tr></table></div>		4.	$(\neg \phi)[x_0/x]$	hipótesis	5.	$\neg(\phi[x_0/x])$	trivial (4)	6.	$\phi[x_0/x]$	$e_{\forall}(2)$	7.	\perp	$i_{\perp}(6)(5)$
4.	$(\neg \phi)[x_0/x]$	hipótesis												
5.	$\neg(\phi[x_0/x])$	trivial (4)												
6.	$\phi[x_0/x]$	$e_{\forall}(2)$												
7.	\perp	$i_{\perp}(6)(5)$												
8.	\perp	$e_{\exists}(1)(3-8)$												
9.	$\neg \forall x \phi$	$i_{\neg}(2-9)$												

Equivalencias entre cuantificadores

$$\neg \exists x \phi \vdash \forall x \neg \phi$$

1.	$\neg \exists x \phi$	premisa
2.	x_0	
3.	$\phi[x_0/x]$	hipótesis
4.	$\exists x \phi$	$i_{\exists}(3)$
5.	\perp	$i_{\perp}(4)(1)$
6.	$\neg(\phi[x_0/x])$	$i_{\neg}(3 - 5)$
7.	$(\neg \phi)[x_0/x]$	trivial (6)
8.	$\forall x \neg \phi$	$i_{\forall}(2 - 7)$

Equivalencias entre cuantificadores

$$\neg \exists x \phi \vdash \forall x \neg \phi$$

1.	$\forall x \neg \phi$	premisa															
2.	$\exists x \phi$	hipótesis															
3.	<div style="border-bottom: 1px dashed black; margin-bottom: 5px; text-align: right;">x_0</div> <table><tr><td>4.</td><td>$\phi[x_0/x]$</td><td>hipótesis</td></tr><tr><td>5.</td><td>$(\neg \phi)[x_0/x]$</td><td>$e_{\forall}(1)$</td></tr><tr><td>6.</td><td>$\neg \phi[x_0/x]$</td><td>trivial(5)</td></tr><tr><td>7.</td><td>\perp</td><td>$i_{\perp}(4)(6)$</td></tr><tr><td>8.</td><td>\perp</td><td>$e_{\exists}(2)(3-8)$</td></tr></table>		4.	$\phi[x_0/x]$	hipótesis	5.	$(\neg \phi)[x_0/x]$	$e_{\forall}(1)$	6.	$\neg \phi[x_0/x]$	trivial(5)	7.	\perp	$i_{\perp}(4)(6)$	8.	\perp	$e_{\exists}(2)(3-8)$
4.	$\phi[x_0/x]$	hipótesis															
5.	$(\neg \phi)[x_0/x]$	$e_{\forall}(1)$															
6.	$\neg \phi[x_0/x]$	trivial(5)															
7.	\perp	$i_{\perp}(4)(6)$															
8.	\perp	$e_{\exists}(2)(3-8)$															
9.	$\neg \exists x \phi$	$i_{\neg}(2-9)$															

Propiedades

Teorema:

La lógica de predicados es correcta y completa.

D/

No la hacemos.