1. Considere la siguiente signatura: $\mathcal{P} = \emptyset$ [1] y $\mathcal{F} = \{\cdot,\ ^{-1},\ e\}$, con $\mathrm{ar}(\cdot) = 2$, $\mathrm{ar}(^{-1}) = 1$ y $\mathrm{ar}(e) = 0$. Utilizaremos las notaciones $t \cdot t'$ para $\cdot(t, t')$ y t^{-1} para $^{-1}(t)$.

a) Un modelo para esta signatura se denomina *grupo* si la operación binaria es asociativa, la constante es elemento neutro de la operación binaria y el producto de un elemento x con el resultado de aplicar la operación unaria a x da como resultado la constante.

   Podemos pensar entonces en un grupo como un modelo de la signatura que satisface determinadas fórmulas en FORM. Exprese estas fórmulas en lógica de predicados.

b) Demuestre que $\Gamma \vdash e = e^{-1}$

c) Exprese, mediante una fórmula ϕ, la siguiente propiedad:

   "Existe un único elemento neutro para la operación binaria"

   Demuestre que $\Gamma \vdash \phi$

1. Considere la siguiente signatura: $\mathcal{P} = \emptyset$ [1] y $\mathcal{F} = \{\cdot,\ ^{-1},\ e\}$, con $\text{ar}(\cdot) = 2$, $\text{ar}(^{-1}) = 1$ y $\text{ar}(e) = 0$. Utilizaremos las notaciones $t \cdot t'$ para $\cdot(t, t')$ y t^{-1} para $^{-1}(t)$.

a) Un modelo para esta signatura se denomina *grupo* si la operación binaria es asociativa, la constante es elemento neutro de la operación binaria y el producto de un elemento x con el resultado de aplicar la operación unaria a x da como resultado la constante.

Podemos pensar entonces en un grupo como un modelo de la signatura que satisface determinadas fórmulas en FORM. Exprese estas fórmulas en lógica de predicados.

- Operación · es asociativa:

  $\phi_1 \equiv \forall x \forall y \forall z\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

- e es el elemento neutro de ·

  $\phi_{2a} \equiv \forall x\ (x \cdot e = x)$ $\qquad$ $\phi_{2b} \equiv \forall x\ (e \cdot x = x)$

- El producto de un elemento x con el resultado de aplicar la operación unaria a x da como resultado la constante

  $\phi_{3a} \equiv \forall x\ (x \cdot x^{-1} = e)$ $\qquad$ $\phi_{3b} \equiv \forall x\ (x^{-1} \cdot x = e)$

$\Gamma = \{\phi_1, \phi_{2a}, \phi_{2b}, \phi_{3a}, \phi_{3b}\}$

b) Demuestre que $\Gamma \vdash e = e^{-1}$

1)	$\forall x\,(x \cdot e = x)$	premisa
2)	$\forall x\,(e \cdot x = x)$	premisa
3)	$\forall x\,(x \cdot x^{-1} = e)$	premisa
4)	$\forall x\,(x^{-1} \cdot x = e)$	premisa
5)	$\underbrace{\forall x \forall y}_{t} \forall z\ {}_{t'}(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	premisa
6)	$e \cdot e^{-1} = e$	$e_{\forall}$ (3)
7)	$e \cdot e^{-1} = e^{-1}$	$e_{\forall}$ (2)
8)	$e = e^{-1}$	$e_{=}$ (6)(7) $[\phi \equiv z = e^{-1}]$

c) Exprese, mediante una fórmula ϕ, la siguiente propiedad:

"Existe un único elemento neutro para la operación binaria"

Demuestre que $\Gamma \vdash \phi$

sabemos que...

$\Gamma = \{\phi_1 , \phi_{2a} , \phi_{2b} , \phi_{3a} , \phi_{3b}\}$

ϕ ?

$\phi \equiv \forall x\, (\forall y\, (x \cdot y = x \wedge y \cdot x = x)\,) \rightarrow y = e)$

Demostrar $\Gamma \vdash \forall x\, (\forall y\, (x \cdot y = x \wedge y \cdot x = x) \rightarrow y = e)$

1)	$\forall x\, (x \cdot e = x)$	premisa
2)	$\forall x\, (e \cdot x = x)$	premisa
3)	$\forall x\, (x \cdot x^{-1} = e)$	premisa
4)	$\forall x\, (x^{-1} \cdot x = e)$	premisa
5)	$\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	premisa
	x_0	
	y_0	
6)	$x_0 \cdot y_0 = x_0 \;\wedge\; y_0 \cdot x_0 = x_0$	Hipótesis
7)	$x_0 \cdot y_0 = x_0$	$e_{\wedge 1}$ (6)
8)	$y_0 \cdot x_0 = x_0$	$e_{\wedge 2}$ (6)
9)	$y_0 \cdot e = y_0$	$e_{\forall}$ (1)
10)	$\overset{t}{x_0} \cdot \overset{t'}{x_0^{-1}} = e$	$e_{\forall}$ (3)
11)	$x_0 = y_0 \cdot x_0$	$RC_{\,t = t' \vdash t' = t}$ (8) (simetría =)
12)	$(y_0 \cdot x_0) \cdot x_0^{-1} = e$	$e_{=}$ (11)(10) $\phi \equiv z \cdot x_0^{-1} = e$

Demostrar $\Gamma \vdash \forall x\,(\forall y\,(x \cdot y = x \land y \cdot x = x) \rightarrow y = e)$

1) $\forall x\,(x \cdot e = x)$	premisa
2) $\forall x\,(e \cdot x = x)$	premisa
3) $\forall x\,(x \cdot x^{-1} = e)$	premisa
4) $\forall x\,(x^{-1} \cdot x = e)$	premisa
5) $\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ premisa	
6) $x_0 \cdot y_0 = x_0 \;\land\; y_0 \cdot x_0 = x_0$	Hipótesis
7) $x_0 \cdot y_0 = x_0$	$e_{\land 1}$ (6)
8) $\underbrace{y_0 \cdot x_0}_{t} = \underbrace{x_0}_{t'}$	$e_{\land 2}$ (6)
9) $\underbrace{y_0 \cdot e}_{t} = \underbrace{y_0}_{t'}$	$e_{\forall}$ (1)
10) $x_0 \cdot x_0^{-1} = e$	$e_{\forall}$ (3)
11) $x_0 = y_0 \cdot x_0$	$RC_{t = t' \vdash t' = t}$ (8)
12) $(y_0 \cdot x_0) \cdot x_0^{-1} = e$	$e_{=}$ (11)(10) $\phi \equiv z \cdot x_0^{-1} = e$

…

13) $\forall y\,\forall z\,(y_0 \cdot y) \cdot z = y_0 \cdot (y \cdot z)$	$e_{\forall}$ (5)
14) $\forall z\,\underbrace{(y_0 \cdot x_0)}_{t} \cdot z = \underbrace{y_0 \cdot (x_0 \cdot z)}_{t'}$	$e_{\forall}$ (13)
15) $(y_0 \cdot x_0) \cdot x_0^{-1} = y_0 \cdot (x_0 \cdot x_0^{-1})$	$e_{\forall}$ (14)
16) $y_0 \cdot (x_0 \cdot x_0^{-1}) = e$	$e_{=}$ (15)(12) $\phi \equiv z = e$
17) $y_0 \cdot e = e$	$e_{=}$ (10)(16) $\phi \equiv y_0 \cdot z = e$
18) $y_0 = e$	$e_{=}$ (9)(17) $\phi \equiv z = e$
19) $(x_0 \cdot y_0 = x_0 \;\land\; y_0 \cdot x_0 = x_0) \rightarrow y_0 = e$	$i_{\rightarrow}$ (6-18)
20) $\forall y\,(x_0 \cdot y = x_0 \land y \cdot x_0 = x_0) \rightarrow y = e$	$i_{\forall}$ (6-19)
21) $\forall x\,(\forall y\,(x \cdot y = x \land y \cdot x = x) \rightarrow y = e)$	$i_{\forall}$ (6-20)