

Lógica de Predicados, Semántica

Dante Zanarini

LCC

09/11/2020

¿Qué queremos?

- La clase pasada definimos la sintaxis de la lógica de predicados
- Vimos que el conjunto FORM está parametrizado por una **signatura** $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$
- Ahora estamos interesados en darle **significado** a una fórmula en $\text{FORM}_{(\mathcal{F}, \mathcal{P})}$
- Es decir, buscamos una relación $\mathcal{M} \models \phi$, donde \mathcal{M} es una estructura que nos permite darle significado a términos y fórmulas

Algunos ejemplos de firmas

Ejemplo (Aritmética)

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \{\overline{Z}, \overline{S}, \overline{+}, \overline{\times}\} && \text{con } \text{ar}(\overline{Z}) = 0, \text{ar}(\overline{S}) = 1, \text{ar}(\overline{+}) = \text{ar}(\overline{\times}) = 2 \\ \mathcal{P} &= \{=, \overline{<}\} && \text{con } \text{ar}(=) = \text{ar}(\overline{<}) = 2\end{aligned}$$

Algunas fórmulas

- La constante es neutro para $\overline{+}$:

$$\forall x (x \overline{+} \overline{Z} = x)$$

- La constante es absorbente para $\overline{\times}$

$$\forall x (x \overline{\times} \overline{Z} = \overline{Z})$$

- Hay un elemento mínimo:

$$\exists x (\forall y \neg (x = y) \rightarrow x \overline{<} y)$$

Algunos ejemplos de firmas

Ejemplo (Teoría de Conjuntos)

$$\begin{array}{ll} \mathcal{F} = \{\bar{\emptyset}\} & \text{con } \text{ar}(\bar{\emptyset}) = 0 \\ \mathcal{P} = \{\overline{\text{Set}}, \bar{\epsilon}, =\} & \text{con } \text{ar}(\overline{\text{Set}}) = 1, \text{ar}(\bar{\epsilon}) = \text{ar}(=) = 2 \end{array}$$

Algunas fórmulas:

- *Extensionalidad*

$$\forall x \forall y (\overline{\text{Set}}(x) \wedge \overline{\text{Set}}(y) \wedge (\forall z \ z \bar{\epsilon} x \leftrightarrow z \bar{\epsilon} y) \rightarrow x = y)$$

- *Conjunto vacío*

$$\overline{\text{Set}}(\bar{\emptyset}) \wedge \forall x \neg (x \in \bar{\emptyset})$$

- *Axioma de emparejamiento*

$$\forall x \forall y \exists z (\overline{\text{Set}}(z) \wedge (\forall w \ w \in z \leftrightarrow w = x \vee w = y))$$

Interpretación de Fórmulas

- En proposicional, la interpretación (semántica) de una fórmula dependía de una **valuación**
- Esta valuación nos decía cómo interpretar los elementos atómicos de una fórmula
- En predicados, usaremos una **interpretación** o **modelo** para darle semántica a una fórmula
- Un modelo debe proveer significado tanto a los términos como a las fórmulas

Modelos, definición formal

Definición (Modelo)

Sea $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ una *signatura*. Un **modelo** o **interpretación** \mathcal{M} para $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ consiste en:

- Un conjunto no vacío A , llamado **universo**
- Para cada constante $c \in \mathcal{F}$, un elemento $c^{\mathcal{M}} \in A$
- Para cada símbolo $f \in \mathcal{F}$ con $\text{ar}(f) = n > 0$, una función $f^{\mathcal{M}} : A^n \rightarrow A$
- Para cada símbolo de predicados $P \in \mathcal{P}$, un conjunto $P^{\mathcal{M}} \subseteq A^n$. Es decir, una relación n -aria sobre A .

Ejemplos

- Sea la signatura $(\emptyset, \{E\})$ con $\text{ar}(E) = 2$
- Un modelo viene dado por un conjunto A junto con una relación binaria $E^{\mathcal{M}}$ sobre A .
- Es decir, un modelo es un **grafo dirigido**
- Por ejemplo, $A = \{a, b, c\}$, $E^{\mathcal{M}} = \{(a, b), (b, a), (c, a), (c, c)\}$
- En este modelo, nos gustaría que la fórmula

$$\phi \equiv \forall x \exists y E(x, y)$$

sea válida.

- Observemos que si $E^{\mathcal{M}} = \{(a, b), (b, a), (a, c)\}$, entonces ϕ no es válida

Ejemplos - Aritmética

- Un modelo \mathcal{M} para la aritmética:

- ▶ $A = \mathbb{N}$,
- ▶ $\bar{Z}^{\mathcal{M}} = 0$
- ▶ $\bar{S}^{\mathcal{M}}$ es tal que $S^{\mathcal{M}}(n) = n + 1$,
- ▶ $\bar{+}^{\mathcal{M}} = +$, $\bar{\times}^{\mathcal{M}} = \times$
- ▶ $=^{\mathcal{M}} = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a = b\}$
- ▶ $\bar{<}^{\mathcal{M}} = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a < b\}$

- En este modelo, nos gustaría que

$$\exists x, \bar{S}(x) < x$$

no sea válida ($\mathcal{M} \not\models \exists x, \bar{S}(x) < x$).

Ejemplos - Aritmética

- Consideremos ahora el modelo \mathcal{M}' para la aritmética:

- ▶ $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,
- ▶ $\bar{Z}^{\mathcal{M}'} = 0$
- ▶ $\bar{S}^{\mathcal{M}'}$ es tal que $\bar{S}^{\mathcal{M}'}(n) = (n + 1) \bmod 5$,
- ▶ $a \bar{+}^{\mathcal{M}'} b = (a + b) \bmod 5$, $a \bar{\times}^{\mathcal{M}'} b = (a \times b) \bmod 5$
- ▶ $=^{\mathcal{M}'} = \{(a, b) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2 \mid a = b\}$
- ▶ $\bar{<}^{\mathcal{M}'} = \{(a, b) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2 \mid a < b\}$

- En este modelo, nos gustaría que

$$\exists x, \bar{S}(x) < x$$

sea válida $(\mathcal{M}' \models \exists x, \bar{S}(x) < x)$.

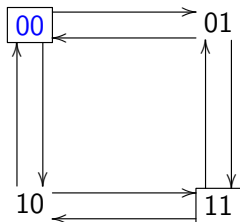
Igualdad

- Hasta ahora hemos tratado a la igualdad como un símbolo de predicados de aridad 2
- Sin embargo, es usual tratarla de un modo especial, dado que siempre tendrá la misma semántica en todos los modelos
- Por lo tanto, agregaremos explícitamente la siguiente regla de formación de fórmulas:
 - ▶ Si $t, t' \in \text{TERM}$ entonces $t = t' \in \text{FORM}$
- Además, para un modelos \mathcal{M} con universo A , definimos
 - ▶ $=^{\mathcal{M}} = \{(a, b) \in A^2 \mid a = b\}$
- Esto nos ahorra tener que incorporar el símbolo $=$ en las signaturas, además de luego dar su interpretación $=^{\mathcal{M}}$ en cada modelo.

Más ejemplos - autómatas

- Sea la signatura $(\mathcal{F}, \mathcal{P}) = (\{i\}, \{R, F\})$, con $\text{ar}(i) = 0$, $\text{ar}(R) = 2$, $\text{ar}(F) = 1$.
- Un modelo \mathcal{M} para esta signatura viene dado por
 - ▶ Un conjunto S (que llamaremos estados)
 - ▶ Un elemento $i^{\mathcal{M}}$ (estado inicial)
 - ▶ Una relación binaria $R^{\mathcal{M}}$ (relación de transición)
 - ▶ Un subconjunto de S , $F^{\mathcal{M}}$ (estados finales).

Por ejemplo, un posible modelo con $S = \{00, 01, 10, 11\}$, $i^{\mathcal{M}} = 00$:



- Valen las siguientes fórmulas en el modelo?
 - ▶ $\forall x(R(i, x) \rightarrow \neg F(x))$
 - ▶ $\exists x R(x, x)$
 - ▶ $\exists x(R(i, x) \wedge R(x, i) \wedge \neg(i = x))$

Validez en un modelo

- En los ejemplos, vimos que una sentencia puede ser cierta o falsa de acuerdo al modelo que consideremos para interpretarla
- Ahora intentaremos definir la idea de ϕ es válida en \mathcal{M}
- Para lograrlo, deberemos definir una relación más general. Sean:
 - ▶ $\phi \in \text{FORM}_{(\mathcal{F}, \mathcal{P})}$
 - ▶ \mathcal{M} un modelo para $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ con universo $|\mathcal{M}|$
 - ▶ $s : \text{Var} \rightarrow |\mathcal{M}|$, que mapea variables en valores del universo
- Definiremos la semántica de ϕ en \mathcal{M} , s :

$$\llbracket \phi \rrbracket_{\mathcal{M}, s} \in \{F, T\}$$

- ¿De dónde salió s ? ¿Es necesaria? ¿Por qué?

Interpretación de los términos

- Para darle un significado a las *fórmulas*, debemos primero *interpretar los términos*
- Observemos que, a partir de s y \mathcal{M} , podemos asignarle un valor en $|\mathcal{M}|$ a cada término t

Definición (Interpretación de términos)

Sea \mathcal{M} un modelo para $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$, y $s : \text{Var} \rightarrow |\mathcal{M}|$. Definimos $\llbracket t \rrbracket_{\mathcal{M}, s}$ por recursión en t :

$$\llbracket x_i \rrbracket_{\mathcal{M}, s} = s(x_i)$$

$$\llbracket c \rrbracket_{\mathcal{M}, s} = c^{\mathcal{M}} \quad \text{si } \text{ar}(c) = 0$$

$$\llbracket f(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_{\mathcal{M}, s} = f^{\mathcal{M}}(\llbracket t_1 \rrbracket_{\mathcal{M}, s}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{\mathcal{M}, s}) \quad \text{si } \text{ar}(f) = n > 0$$

Interpretación de términos, ejemplos

- Consideremos la signatura para la aritmética, y el modelo visto antes con $|\mathcal{M}| = \mathbb{N}$.
- Sean $t_1 = (x_1 \bar{+} \bar{S}(\bar{Z})) \bar{\times} x_2$ y $t_2 = (\bar{S}\bar{S}(\bar{Z}) \bar{\times} \bar{S}(\bar{S}(\bar{Z})))$
- Y definimos $s : \text{Var} \rightarrow |\mathcal{M}|$ tal que $s(x_1) = 5$, $s(x_2) = 7$, $s(x_{n+2}) = 1$
- Entonces

$$\llbracket t_1 \rrbracket_{\mathcal{M},s} = 42 \text{ y } \llbracket t_2 \rrbracket_{\mathcal{M},s} = 4$$

- Observemos que, para todas s, s' , $\llbracket t_2 \rrbracket_{\mathcal{M},s} = \llbracket t_2 \rrbracket_{\mathcal{M},s'}$, pues t_2 no tiene variables.

Semántica de fórmulas atómicas

Ahora sí podemos definir $\llbracket \phi \rrbracket_{\mathcal{M},s}$.

(1) Igualdad:

$$\llbracket t_1 = t_2 \rrbracket_{\mathcal{M},s} = T \quad \text{sii} \quad \llbracket t_1 \rrbracket_{\mathcal{M},s} = \llbracket t_2 \rrbracket_{\mathcal{M},s}$$

(2) Predicados: Si P es un símbolo de predicados de aridad n ,

$$\llbracket P(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_{\mathcal{M},s} = T \quad \text{sii} \quad (\llbracket t_1 \rrbracket_{\mathcal{M},s}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{\mathcal{M},s}) \in P^{\mathcal{M}}$$

(3) Bottom:

$$\llbracket \perp \rrbracket_{\mathcal{M},s} = F$$

(4) Predicados de aridad 0: Más adelante

Conectivos

(5) Conjunción

$$\llbracket \phi_1 \wedge \phi_2 \rrbracket_{\mathcal{M},s} = \min \left\{ \llbracket \phi_1 \rrbracket_{\mathcal{M},s}, \llbracket \phi_2 \rrbracket_{\mathcal{M},s} \right\}$$

(6) Disyunción

$$\llbracket \phi_1 \vee \phi_2 \rrbracket_{\mathcal{M},s} = \max \left\{ \llbracket \phi_1 \rrbracket_{\mathcal{M},s}, \llbracket \phi_2 \rrbracket_{\mathcal{M},s} \right\}$$

(7) Negación

$$\llbracket \neg \phi_1 \rrbracket_{\mathcal{M},s} = T \quad \text{sii} \quad \llbracket \phi_1 \rrbracket_{\mathcal{M},s} = F$$

(8) Implicancia

$$\llbracket \phi_1 \rightarrow \phi_2 \rrbracket_{\mathcal{M},s} = T \quad \text{sii} \quad \llbracket \phi_1 \rrbracket_{\mathcal{M},s} \leq \llbracket \phi_2 \rrbracket_{\mathcal{M},s}$$

Cuantificadores

(9) Cuantificador universal:

$$\llbracket \forall x_i \phi \rrbracket_{\mathcal{M},s} = \min \left\{ \llbracket \phi \rrbracket_{\mathcal{M},s[x_i \mapsto a]} \mid a \in |\mathcal{M}| \right\}$$

- Donde $s[x_i \mapsto a] : \text{Var} \rightarrow |\mathcal{M}|$ se define como:

$$s[x_i \mapsto a](x_j) = \begin{cases} a & \text{si } i = j \\ s(x_j) & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

- Es decir, $s[x_i \mapsto a]$ es un nuevo entorno, que coincide con s en todas las variables, salvo (quizás) en x_i , donde vale a .

(10) Cuantificador existencial

$$\llbracket \exists x_i \phi \rrbracket_{\mathcal{M},s} = \max \left\{ \llbracket \phi \rrbracket_{\mathcal{M},s[x_i \mapsto a]} \mid a \in |\mathcal{M}| \right\}$$

- Ejemplos!

Limitando la dependencia con los entornos

Teorema

Sean $s, s' : \text{Var} \rightarrow |\mathcal{M}|$. Si s y s' coinciden en todas las variables libres de ϕ , entonces

$$\llbracket \phi \rrbracket_{\mathcal{M},s} = \llbracket \phi \rrbracket_{\mathcal{M},s'}$$

Demostración: Por inducción en ϕ (necesitaremos un resultado similar para términos también).

Corolario

Sea \mathcal{M} un modelo. Si ϕ es una sentencia, entonces:

- Ⓐ Para toda s , $\llbracket \phi \rrbracket_{\mathcal{M},s} = T$, o
- Ⓑ Para toda s , $\llbracket \phi \rrbracket_{\mathcal{M},s} = F$

Es decir, la semántica de una sentencia no depende de los entornos, sólo del modelo.

Validez en un modelo

Definición

Sea $\Sigma = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$ una *signatura*, $\phi \in \text{FORM}_\Sigma$, y \mathcal{M} un *modelo* para Σ .
Decimos que \mathcal{M} es un *modelo* para ϕ (equivalentemente, ϕ es *válida* en \mathcal{M}), y lo notamos $\mathcal{M} \models \phi$ sii

$$\text{Para toda } s, \llbracket \phi \rrbracket_{\mathcal{M}, s} = T$$

- Si Δ es un conjunto de sentencias, decimos que \mathcal{M} es un *modelo* de Δ ($\mathcal{M} \models \Delta$) sii \mathcal{M} es un modelo de ψ , para cada $\psi \in \Delta$.

Consecuencia semántica

Definición

Sea $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq \text{FORM}$. Decimos que ϕ es **consecuencia semántica** de Γ ($\Gamma \models \phi$) sii para todo modelo \mathcal{M} y entorno s ,

$$\text{Si } \llbracket \Gamma \rrbracket_{\mathcal{M},s} = T \text{ entonces } \llbracket \phi \rrbracket_{\mathcal{M},s} = T$$

.