Práctica 5: Lógica de Predicados, Semántica

1. Considere la sentencia ϕ definida como $\forall x \exists y(\neg(x = y) \wedge (R(x, y) \to R(y, x)))$, donde R es un símbolo de predicado de aridad 2.

a) Sea $A = \{a, b, c\}$ y $R^M = \{(b, c), (b, b), (b, a)\}$. Decida si $\mathcal{M} \models \phi$.

b) Sea $A' = \{a, b, c\}$ y $R^{M'} = \{(b, c), (a, b), (c, b)\}$. Decida si $\mathcal{M}' \models \phi$.

2. Considere la fórmula

$$\phi \equiv \forall x(P(g(x), y) \vee Q(x))$$

donde P es un predicado de aridad 2, Q un predicado de aridad 1 y g una función de aridad 1.

a) Defina un modelo $\mathcal{M}$ y dos entornos s y s' tales que $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s} = T$ y $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s'} = F$. Demuéstrelo.

b) Encuentre, si es posible, un modelo $\mathcal{M}'$ tal que $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M}',s} = T$ para cualquier s. Demuéstrelo.

3. Considere la siguiente signatura: $\mathcal{P} = \emptyset$ [1] y $\mathcal{F} = \{\cdot,\ ^{-1},\ e\}$, con $\mathrm{ar}(\cdot) = 2$, $\mathrm{ar}(^{-1}) = 1$ y $\mathrm{ar}(e) = 0$. Utilizaremos las notaciones $t \cdot t'$ para $\cdot(t, t')$ y t^{-1} para $^{-1}(t)$.

a) Un modelo para esta signatura se denomina *grupo* si la operación binaria es asociativa, la constante es elemento neutro de la operación binaria y el producto de un elemento x con el resultado de aplicar la operación unaria a x da como resultado la constante.

Podemos pensar entonces en un grupo como un modelo de la signatura que satisface determinadas fórmulas en Form. Exprese estas fórmulas en lógica de predicados.

b) ¿Es el conjunto de los números enteros un grupo, tomando la suma como la operación binaria, al 0 como la constante y la función opuesto como la operación unaria?

c) ¿Es el conjunto de los racionales un grupo, tomando al producto como la operación binaria, al 1 como la constante y el recíproco como la operación unaria?

d) Dé un modelo finito que satisfaga las propiedades de grupo.

e) Un grupo se dice *abeliano* si la operación binaria es conmutativa. Exprese en lógica de predicados esta propiedad.

4. En este ejercicio trabajaremos con la estructura algebraica conocida como *anillo*.

Sea $\mathcal{F} = \{\bar{+},\ \bar{\cdot},\ \bar{e},\ \bar{u}\}$, con $ar(\bar{+}) = ar(\bar{\cdot}) = 2$, $ar(\bar{e}) = ar(\bar{u}) = 0$ y $\mathcal{P} = \emptyset$. Un modelo $\mathcal{M} = \langle A,\ +,\ \cdot,\ e,\ u\rangle$ de $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ es un *anillo* sii

- $(A, +, e)$ es un grupo abeliano. Es decir, $+$ es asociativa y conmutativa, tiene a e como elemento neutro, y cada elemento tiene su inverso aditivo.
- $(A, \cdot, u)$ es un monoide. Es decir, $\cdot$ es asociativa y u es elemento neutro de $\cdot$
- La operación $\cdot$ distribuye a izquierda y derecha respecto de $+$

[1] recordemos que a la igualdad siempre la usamos como predicado

a) Exprese como fórmulas de la lógica de predicados sobre $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ el conjunto de propiedades Γ que un modelo de la signatura debe cumplir para ser un anillo.

b) Exprese la propiedad *"e es absorvente para ·"* como una fórmula ψ

c) Demuestre que $\Gamma \cup \{\psi,\ \bar{e} = \bar{u}\} \vdash \forall x \forall y (x = y)$

d) Demuestre que $\Gamma \vdash \psi$

5. Normalmente, los problemas de formalización en lógica de predicados se nos presentan de una forma diferente a la planteada en el ejercicio anterior. En general uno tiene un problema concreto, que puede representar mediante un modelo $\mathcal{M}$ sobre una determinada signatura $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$.
A partir de esta signatura, expresa determinadas propiedades que su modelo cumple como fórmulas sobre $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$. Llamemos Γ a este conjunto de propiedades. Luego, usando estos hechos, intenta deducir nuevas propiedades que necesariamente tienen que cumplirse a partir de Γ. Es decir, busca fórmulas ϕ tales que $\Gamma \models \phi$.
Consideremos el caso de la aritmética de los números naturales tal como la describió Peano. En este caso, el modelo $\mathcal{M}$ tiene como universo a $\mathbb{N}$ y como funciones a $\{s, +, \times, 0\}$. No utilizaremos relaciones aparte de la igualdad.

a) Defina una signatura $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ tal que el modelo anterior sea un modelo para esta signatura.

b) Exprese en $\textsc{Form}_{(\mathcal{F},\mathcal{P})}$ los axiomas de Peano (si no los conoce, pregunte). A este conjunto de axiomas lo llamamos $\Gamma_{\mathbb{N}}$.

c) Exprese en $\textsc{Form}_{(\mathcal{F},\mathcal{P})}$ la siguiente propiedad ϕ: *"cero es distinto de dos"*.

d) Demuestre que $\Gamma_{\mathbb{N}} \models \phi$. Observe que su demostración es independiente de los números naturales. Es decir, cualquier otro conjunto que cumpla con los axiomas de Peano cumplirá esta propiedad, no sólo $\mathbb{N}$.

e) Exprese las siguientes propiedades: *"la suma es conmutativa"*, *"el producto distribuye a derecha respecto a la suma"*.

Una forma de definir predicados unarios sobre los números naturales sin alterar la signatura, es dar una fórmula ϕ que tenga una única variable libre (digamos x). A esta fórmula convenimos en llamarla $P(x)$. Por ejemplo,

$$P(x) := \exists y (x = y \bar{+} y)$$

Observemos que esta fórmula es cierta para un entorno s si y sólo si $s(x)$ es par.
Esta idea puede generalizarse a relaciones R de cualquier aridad n, expresando fórmulas con n variables libres que sean verdaderas en un determinado modelo sólo cuando la propiedad se cumple. Usando esta idea, defina fórmulas para las siguientes relaciones sobre $\mathcal{M}$:

- $x \leq y$
- $x < y$
- $Primo(x)$, que representa que x es un número primo

6. Considere una signatura sin símbolos de función y con un único símbolo de predicado R de aridad 2. En clase vimos que un grafo dirigido $G = (V, E)$ era un modelo de esta signatura, donde

V es el universo del modelo y $R^{\mathcal{M}} = E$. Decíamos que un modelo de esta signatura es un grafo simple si $R^{\mathcal{M}}$ es una relación simétrica y antireflexiva.
En este ejercicio estamos interesados en representar grafos simples **bipartitos**. Es decir, grafos en donde se puede particionar el conjunto de vértices en dos conjuntos no vacíos U y W tales que cada arista del grafo une un vértice de U con uno de W o viceversa. Para esto, agregamos a nuestra signatura dos símbolos de predicados U y W de aridad 1, con la intención de representar los dos conjuntos de vértices. Por lo tanto, definimos la siguiente signatura:

$$\mathcal{F} = \emptyset, \mathcal{P} = \{R, U, W\}$$

con $ar(R) = 2$, $ar(U) = ar(W) = 1$.
Observe que no cualquier modelo de esta signatura es un grafo simple bipartito.

a) Dé un modelo $\mathcal{M}$ de $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ que no sea un grafo simple.

b) Dé un modelo $\mathcal{M}'$ de $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ que sea un grafo simple pero no bipartito.

c) Dé un modelo $\mathcal{M}''$ de $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ que sea un grafo simple bipartito.

Para que un modelo $\mathcal{M} = \left\langle V, R^{\mathcal{M}}, U^{\mathcal{M}}, W^{\mathcal{M}} \right\rangle$ de $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ sea un grafo simple bipartito, debe cumplir algunas propiedades, las cuales expresaremos como fórmulas de la lógica de predicados. Por ejemplo, sabemos que $R^{\mathcal{M}}$ debe ser antireflexiva, es decir, nuestra primera restricción es:

$$\forall x \neg R(x, x)$$

d) Exprese en lenguaje natural y como fórmulas de Form las otras propiedades que debe cumplir un modelo $\mathcal{M}$ para ser un grafo bipartito.

7. Demuestre:

a) $\exists x \forall y \phi \models \forall y \exists x \phi$

b) $\forall x \exists y \phi \not\models \exists y \forall x \phi$

c) Si $\models \phi$ entonces $\models \forall x \phi$ y $\models \exists x \phi$

d) $\not\models \exists x \phi \to \forall x \phi$

e) $\not\models \exists x \phi \land \exists x \psi \to \exists x (\phi \land \psi)$

8. Sea ϕ una fórmula tal que $FV(\phi) = \{x\}$. Demuestre que para cualquier modelo $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} \models \phi \text{ sii } \mathcal{M} \models Cl(\phi).$$

9. Demuestre el teorema de sustitución para términos: $\models t_1 = t_2 \to s[t_1/x] = s[t_2/x]$.