Práctica 5: Lógica de predicados - Semántica

7. Demuestre:

a) $\exists x \forall y \phi \models \forall y \exists x \phi$

Tenemos que probar que si $[|\exists x \forall y \phi|]_{M\,s} = T$ entonces se cumple $[|\forall y \exists x \phi|]_{M\,s} = T$

Podemos utilizar definiciones alternativas de la semántica de los cuantificadores :

$M \models \forall x \phi$ sii para todo $a \in |M|$, $[[\phi]]_{M,s[x\to a]} = T$ $M \models \exists x \phi$ sii para algún $a \in |M|$, $[[\phi]]_{M,s[x\to a]} = T$	$\mathfrak{A} \models \forall x \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}/x]$, *for all* $a \in |\mathfrak{A}|$, $\mathfrak{A} \models \exists x \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}/x]$, *for some* $a \in |\mathfrak{A}|$.

- $[[\exists x \forall y \phi]]_{M,s} = T$ sii *<def. [[ ]]>*

  para algún $c \in |M|$, $[[\forall y \phi]]_{M,s[x\to c]} = T$ sii *<def. [[ ]]>*

  para algún $c \in |M|$ y para todo $d \in |M|$, $[[\phi]]_{M,s[x\to c][y\to d]} = T$ (1)

7. a)

$$\boxed{\text{para algún } c \in |M| \text{ y para todo } d \in |M|,\ [[\phi]]_{M,s[x\to c][y\to d]} = T \quad (1)}$$

- Veamos qué pasa con $[|\forall y\ \exists x\ \phi|]_{M\,s}$ ...

$[|\forall y\ \exists x\ \phi|]_{M\,s} = T$ sii *<def. [[ ]]>*

para todo $a \in |M|$, $[[\ \exists x\ \phi]]_{M,s[y\to a]} = T$ sii *<def. [[ ]]>*

para todo $a \in |M|$ y para algún $b \in |M|$, $[[\phi]]_{M,s[y\to a][x\to b]} = T$

Sea entonces $a \in |M|$. Queremos verificar que para algún $b \in |M|$,

$[[\phi]]_{M,s[y\to a][x\to b]} = T$. Tomando $d = a$ resultará por (1) que existe un valor

b (en particular $b = c$) tal que: $[[\phi]]_{M,s[x\to b][y\to a]} = [[\phi]]_{M,s[x\to c][y\to d]} = T$.

Es decir: para cualquier $a \in |M|$ y para algún $b \in |M|$, $[[\phi]]_{M,s[y\to a][x\to b]} = T$

Luego $[|\forall y\ \exists x\ \phi|]_{M\,s} = T$

7. b) $\forall x \exists y \phi \not\models \exists y \forall x \phi$

No sucede que: Si $[| \forall x \exists y \phi |]_{M, s} = T$ entonces $[| \exists y \forall x \phi |]_{M, s} = T$

es decir: Existe M, s t. q. $[| \forall x \exists y \phi |]_{M, s} = T$ pero $[| \exists y \forall x \phi |]_{M, s} = F$

Sea:

- $(F, P) = (\varnothing, \{R\})$ con $ar(R) = 2$
- M tal que:
  - $|M| = A = \{a, b\}$
  - $R^M = \{(a,b); (b,a)\}$
- $\phi \equiv R(x,y)$

entonces $[| \forall x \exists y\, R(x,y) |]_{M, s}$ = ...COMPLETAR.... = T

pero $[| \exists y \forall x\, R(x,y) |]_{M, s}$ = ...COMPLETAR.... = F

8. Sea ϕ una fórmula tal que $FV(\phi) = \{x\}$. Demuestre que para cualquier modelo $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} \models \phi \ \text{ sii } \ \mathcal{M} \models Cl(\phi).$$

Definición: Sea $FV(\phi) = \{z_1, \ldots, z_k\}$, entonces $Cl(\phi) := \forall z_1 \ldots z_k\, \phi$ es el cierre universal (universal closure) de ϕ

Como $FV(\phi) = \{x\}$ tenemos que probar que:

$$M \models \phi \quad \text{sii} \quad M \models \forall x\, \phi$$

$M \models \phi$ sii *<def. Modelo válido>*

para todo s, $[[\phi]]_{M,s} = T$ sii *<dado que x es la única FV, s mapea sólo sobre x>*

para toda $a \in |M|$, $[[\phi]]_{M,s[x \to a]} = T$ sii *< $[[\phi]]_{M,s} \in \{T, F\}$ donde $F<T$; def. Min>*

$\text{Min}\{ [[\phi]]_{M,s[x \to a]} \mid a \in |M| \} = T$ sii *<def. [[ ]] del $\forall$>*

$[|\forall x\, \phi|]_{M,s} = T$

9. Demuestre el teorema de sustitución para términos: $\models t_1 = t_2 \rightarrow s[t_1/x] = s[t_2/x]$.

Sabemos que: $\models t_1 = t_2$ sii <*def.* $\models$ >

$[[t_1 = t_2]]_{M,s} = T$ para todo M y s sii <*def.* [[=]] >

$[[t_1]]_{M,s} = [[t_2]]_{M,s}$ para todo M y s sii

dado M t. q. $[[t_1]]_{M,s} = t_1^M$ y $[[t_2]]_{M,s} = t_2^M$ entonces $t_1^M = t_2^M$ (1)

Demostramos por inducción sobre s...

<u>casos base:</u>

- $s = c$ (ctte) : $s[t_1/x] = s[t_2/x] = c$
- $s = x_j$: $s[t_1/x] =$
  - Si $x_j = x \Rightarrow x_j[t_1/x] \overset{\text{<def. sust.>}}{=} t_1^M \overset{\text{<por (1)>}}{=} t_2^M \overset{\text{<def. sust.>}}{=} x_j[t_2/x]$
  - Si $x_j \neq x \Rightarrow x_j[t_1/x] \overset{\text{<def. sust.>}}{=} x_j = x_j[t_2/x]$

9. Demuestre el teorema de sustitución para términos: $\models t_1 = t_2 \rightarrow s[t_1/x] = s[t_2/x]$.

<u>caso inductivo :</u>

- $s = f(s_1 , S_2 , \ldots , S_n)$:

HI:
$s_i[t_1/x] = s_i[t_2/x]$ para todo i: 1 .. n

$s[t_1/x] = f(s_1 , S_2 , \ldots , S_n)[t_1/x] =$ *<por Def. sustitución >*

$= f(s_1[t_1/x], \ldots, s_n[t_1/x]) =$ *<por HI >*

$= f(s_1[t_2/x], \ldots, s_n[t_2/x]) =$ *<por Def. sustitución >*

$= s[t_2/x]$