



Práctica 1: Semántica de la Lógica Proposicional

1. Dé secuencias de formación para las siguientes fórmulas:

a) $\neg(p_1 \rightarrow p_2)$

d) $(\neg p_1 \rightarrow (p_3 \vee (p_5 \wedge p_4))) \vee \neg p_2$

b) $p_1 \vee (\neg p_2 \rightarrow p_3)$

e) $(p_1 \wedge ((p_3 \rightarrow p_5) \rightarrow p_4)) \rightarrow (\neg p_2 \wedge p_6)$

c) $((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_3) \rightarrow p_4$

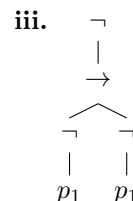
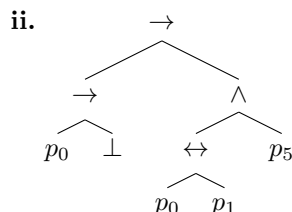
f) $(p_1 \vee (\neg p_2 \rightarrow p_3)) \wedge ((p_3 \rightarrow p_5) \rightarrow p_4)$

2. Enunciar el principio de inducción sobre PROP.

3. En clase de práctica veremos la definición de árbol sintáctico para una fórmula.

a) Determine los árboles sintácticos correspondientes a las fórmulas del ejercicio 1.

b) Determine las proposiciones correspondientes a los siguientes árboles:



4. Definir por recursión la función $\text{subs} : \text{PROP} \rightarrow \mathcal{P}(\text{PROP})$ tal que $\text{subs}(\phi)$ es el conjunto de todas las subfórmulas de ϕ .

5. Sea n el número de conectivos que aparecen en una fórmula ϕ . Demuestre que ϕ tiene a lo sumo $2n + 1$ subfórmulas.

6. Sea F el conjunto de todas las fórmulas proposicionales para las cuales existe una secuencia de formación. Demuestre que $F = \text{PROP}$.

7. Sea ϕ una fórmula y v, v' dos valuaciones. Demuestre que si para toda variable proposicional p_i que ocurre en ϕ se cumple $v(p_i) = v'(p_i)$, entonces $\llbracket \phi \rrbracket_v = \llbracket \phi \rrbracket_{v'}$.

8. Determinar $\phi[\neg p_0 \rightarrow p_3/p_0]$ para:

a) $\phi = p_1 \wedge p_0 \rightarrow (p_0 \rightarrow p_3)$

b) $\phi = (p_3 \leftrightarrow p_0) \vee (p_2 \rightarrow \neg p_0)$

9. Demuestre el Teorema de Sustitución enunciado en clase.

10. Muestre que:

- | | |
|--|--|
| a) $p \models p \vee q$ | e) $\neg p \vee \neg q \models \neg(p \wedge q)$ |
| b) si $p \models q$ y $q \models r$ entonces $p \models r$ | f) $p \vee (q \vee r) \models (p \vee q) \vee r$ |
| c) si $\models p \rightarrow q$ entonces $p \models q$ | g) $(p \rightarrow q) \rightarrow r \models p \rightarrow (q \rightarrow r)$ |
| d) $\neg(p \wedge q) \models \neg p \vee \neg q$ | h) $(p \wedge q) \rightarrow r \models (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$ |

11. Sean $\phi, \psi \in \text{PROP}$ y v una valuación. Demuestre que $\llbracket \phi \leftrightarrow \psi \rrbracket_v = T$ sii $\llbracket \phi \rrbracket_v = \llbracket \psi \rrbracket_v$.

12. Sean $\phi, \psi \in \text{PROP}$ tales que $\models \phi \rightarrow \psi$. Demuestre:

- | | |
|--|--|
| a) $\models (\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \phi$ | b) $\models (\phi \vee \psi) \leftrightarrow \psi$ |
|--|--|

13. El operador binario NOR (\downarrow) tiene la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \downarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	F

- a) Extender la definición de semántica para incluir al operador \downarrow
 b) Demostrar:

$$\neg(p \downarrow q), p \downarrow p \models q$$

14. Sea ϕ una fórmula proposicional. Decimos que ϕ es:

- **válida** (o una **tautología**) sii para toda valuación v , $\llbracket \phi \rrbracket_v = T$
- **contradictoria** sii para toda valuación v , $\llbracket \phi \rrbracket_v = F$
- **satisfactible** sii existe una valuación v tal que $\llbracket \phi \rrbracket_v = T$

Demuestre que:

- | | |
|--|--|
| a) ϕ es satisfactible sii $\neg\phi$ no es válida | b) $\phi \rightarrow \perp$ es válida sii ϕ es contradictoria |
|--|--|

15. Sea $\Gamma \subseteq \text{PROP}$. Mostrar que $\Gamma \models \phi$ sii $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es insatisfactible.

16.

- a) Demuestre que $\{\vee, \neg\}$ es un conjunto completo de conectivos.
 b) Defina un operador binario \oplus de modo que $\{\oplus\}$ sea un conjunto completo de conectivos, y demuéstrelo.

17. Demuestre que si $C \subseteq \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \perp\}$ es un conjunto completo de conectivos, entonces $\neg \in C$ o $\perp \in C$.