

# Lógica Proposicional

Dante Zanarini

LCC

24/09/2020

# Lógica Proposicional como Lenguaje Formal

- Para definir un lenguaje formalmente necesitamos **un alfabeto:**
- Para nosotros, estará formado por:
  - ▶ *Variables proposicionales:*  $\{p_0, p_1, p_2, \dots\}$
  - ▶ *Conectivos:*  $\wedge, \vee, \rightarrow, \perp$
  - ▶ *Símbolos auxiliares:*  $:$   $(, )$

¿Es un alfabeto?

# Definición Formal

## Definición 1 (PROP)

*El conjunto PROP de proposiciones es el mínimo conjunto  $X$  con las siguientes propiedades:*

- i)  $p_i \in X, \forall i \in \mathbb{N}, \text{ y } \perp \in X$
- ii) Si  $\phi, \psi \in X$ , entonces  $(\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \rightarrow \psi) \in X$
- iii) Si  $\phi \in X$ , entonces  $(\neg \phi) \in X$

- Esta definición es equivalente a una definición inductiva, o a una gramática independiente del contexto
- **Ejercicio:** Definir el principio de inducción y el esquema de recursión para PROP

# ¿Qué significa **Mínimo Conjunto**?

## Ejemplo 1

- ❶  $(p_{14} \vee p_4) \in \text{PROP}$
- ❷  $((\perp \wedge (\neg p_3)) \rightarrow p_2) \in \text{PROP}$
- ❸  $p_1 \wedge p_8 \notin \text{PROP}$
- ❹  $\neg\neg\perp \notin \text{PROP}$

- ¿Cómo se prueba (1), (2)?
- ¿Y (3), (4)?

# Formación de Fórmulas

## Definición 2 (Secuencia de Formación)

Una secuencia  $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$  es una **secuencia de formación** para  $\phi \in \text{PROP}$  sii

- $\phi_n = \phi$ , y
- 

$\forall i \leq n$ ,  $\phi_i$  es atómica (cumple (i)), o

$\phi_i = (\phi_k \square \phi_j)$  para algún  $k, j < i$ , (con  $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ )

$\phi_i = (\neg \phi_j)$ , para algún  $j < i$

# Secuencias de Formación

## Ejemplo 2

$$p_1, p_2, (\neg p_1), ((\neg p_1) \wedge p_2)$$

*es una secuencia de formación para*

$$((\neg p_1) \wedge p_2)$$

- Observemos que

$$\perp, p_1, p_3, (p_1 \wedge p_3), p_2, (\neg p_1), (p_2 \rightarrow \perp), ((\neg p_1) \wedge p_2)$$

también es una secuencia de formación para la misma fórmula

## Teorema 1

*Una palabra tiene una secuencia de formación sii pertenece a  $\text{PROP}$*

- Las fórmulas de PROP son *elementos sintácticos*,
- Para darles significado, debemos *interpretarlas*,
- Es decir, asignarles un valor

## Definición 3 (Valores de verdad)

*El conjunto de valores de verdad tiene exactamente dos elementos:  $T$  (true, verdadero) y  $F$  (false, falso).*

- Asumiremos una relación de orden  $\leq$  sobre los valores de verdad tal que  $F \leq T$ .

- La tarea de darle significado a una fórmula puede encararse de forma **composicional**
- Por ejemplo, conociendo el valor de verdad de  $\phi, \psi$ , podemos dar el valor de verdad de  $\phi \vee \psi$ .
- ¿Qué significado le damos a las proposiciones atómicas?
  - ▶ *“En esta clase hay 32 personas”*
  - ▶ Entre dos números distintos  $a, b$ , siempre puedo encontrar un número  $c$  en el medio.
  - ▶ *“Algunos perros tienen cuatro patas”*



# Semántica, proposiciones atómicas

- Para interpretar una proposición atómica, debemos ir al mundo real, o al modelo que tengamos de él, y decidir si asignarle  $T$  o  $F$

## Definición 4 (Valuación)

Una **valuación** o **modelo proposicional** es una función

$$v : \{p_0, p_1, \dots\} \rightarrow \{T, F\}$$

Una *valuación* asigna un valor de verdad a cada proposición atómica

- La semántica de las fórmulas de PROP dependerá de una valuación

# Semántica para PROP, definición formal

## Definición 5

Sea  $v$  una valuación. Definimos la función

$$\llbracket \cdot \rrbracket_v : \text{PROP} \rightarrow \{T, F\}$$

por inducción en PROP:

$$\begin{aligned}\llbracket \perp \rrbracket_v &= F \\ \llbracket p_i \rrbracket_v &= v(p_i) \\ \llbracket \phi \wedge \psi \rrbracket_v &= \min(\llbracket \phi \rrbracket_v, \llbracket \psi \rrbracket_v) \\ \llbracket \phi \vee \psi \rrbracket_v &= \max(\llbracket \phi \rrbracket_v, \llbracket \psi \rrbracket_v) \\ \llbracket \phi \rightarrow \psi \rrbracket_v &= F \text{ si y sólo si } \llbracket \phi \rrbracket_v = T \text{ y } \llbracket \psi \rrbracket_v = F \\ \llbracket \neg \phi \rrbracket_v &= F \text{ si y sólo si } \llbracket \phi \rrbracket_v = T\end{aligned}$$

Observemos que esta definición es similar a las tablas de verdad vistas en primer año

# Definiciones adicionales

## Definición 6 (Tautología)

*Una fórmula  $\phi \in \text{PROP}$  es una tautología sii para cualquier valuación  $v$ ,  $\llbracket \phi \rrbracket_v = T$*

## Definición 7 (Contradicción)

*Una fórmula  $\phi \in \text{PROP}$  es una contradicción sii para cualquier valuación  $v$ ,  $\llbracket \phi \rrbracket_v = F$*

## Definición 8 (Fórmula Satisfactible)

*Una fórmula  $\phi \in \text{PROP}$  es satisfactible sii para alguna valuación  $v$ ,  $\llbracket \phi \rrbracket_v = T$*

# Convenciones sintácticas

Cuando no haya lugar a ambigüedades:

- Omitiremos los paréntesis más externos de una fórmula
- Usaremos el siguiente orden de precedencia:  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$

## Ejemplo 3

Escribiremos

$$p_1 \vee \neg p_2 \rightarrow p_3$$

en lugar de

$$((p_1 \vee (\neg p_2)) \rightarrow p_3)$$

- Sea  $v$  una valuación. Extendemos la definición de  $\llbracket \cdot \rrbracket_v$  a conjuntos:

$$\llbracket \Gamma \rrbracket_v = T \text{ si y solo si para toda } \phi \in \Gamma, \llbracket \phi \rrbracket_v = T$$

# Convenciones sintácticas

Definimos el operador  $\leftrightarrow$  de la siguiente forma:

$$(\phi \leftrightarrow \psi) \equiv (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$$

Ejercicio: Probar que  $\llbracket \phi \leftrightarrow \psi \rrbracket_v = T$  sii  $\llbracket \phi \rrbracket_v = \llbracket \psi \rrbracket_v$

# Consecuencia Semántica

## Definición 9

Definimos la relación  $\models \subseteq \mathcal{P}(\text{PROP}) \times \text{PROP}$ :

$\Gamma \models \phi$  sii para toda valuación  $v$ , si  $\llbracket \Gamma \rrbracket_v = T$  entonces  $\llbracket \phi \rrbracket_v = T$ .

Diremos que  $\phi$  es una consecuencia semántica de  $\Gamma$ .

## Ejemplo 4

- 1  $\phi, \psi \models \phi \wedge \psi$
- 2  $\phi, \phi \rightarrow \psi \models \psi$
- 3  $\neg\phi \vee \psi, \phi \models \psi$

# Sustitución

Definimos  $\phi[\psi/p_i]$  por inducción en  $\phi$ :

$$\perp[\psi/p_i] = \perp$$

$$p_j[\psi/p_i] = \begin{cases} \psi & \text{si } i = j \\ p_j & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$(\phi_1 \Box \phi_2)[\psi/p_i] = \phi_1[\psi/p_i] \Box \phi_2[\psi/p_i]$$

$$(\neg \phi)[\psi/p_i] = \neg(\phi[\psi/p_i])$$

## Teorema 2 (Teorema de Sustitución)

Sean  $\phi_1, \phi_2, \psi \in \text{PROP}$ ,  $p_i \in \text{AT}$ .

Si  $\models \phi_1 \leftrightarrow \phi_2$ , entonces  $\models \psi[\phi_1/p_i] \leftrightarrow \psi[\phi_2/p_i]$

# Lógica como álgebra

- Como consecuencia del teorema de sustitución, podemos usar nuestros modelos para **razonar algebraicamente** sobre PROP
- Definimos la relación  $\approx \subseteq \text{PROP} \times \text{PROP}$  tal que

$$\phi \approx \psi \quad \text{sii} \quad \models \phi \leftrightarrow \psi$$

- La relación  $\approx$  es de equivalencia, y nos permite trabajar algebraicamente con fórmulas proposicionales.



# Conjuntos Completos de Conectivos

- Un conjunto  $A$  de conectivos es **completo** si, para cada fórmula  $\phi$ , existe  $\psi$  tal que:
  - 1  $\psi$  utiliza únicamente conectivos de  $A$ , y
  - 2  $\models \psi \leftrightarrow \phi$
- Algunos conjuntos completos de conectivos:  $\{\neg, \vee\}$ ,  $\{\neg, \wedge\}$
- Algunos que no son completos:  $\{\vee, \wedge\}$  ,  $\{\perp, \wedge\}$