Lógica de Predicados: **Deducción Natural**

Pablo Verdes

LCC

31 de Octubre de 2019

Reglas de DN para Lógica de Predicados

- Extenderemos el sistema de Deducción Natural (DN) para Lógica Proposicional al caso de Predicados.

- Toda deducción que usaba reglas ya vistas para Proposicional será también una deducción de nuestro sistema.

- Por ejemplo:

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi}\, i_{\wedge}$$

  será una regla de DN para Predicados, donde $\phi, \psi \in \mathsf{FORM}$.

  La Regla de Secuente asociada será:

$$\text{Si } \; \Gamma \vdash \phi \text{ y } \Gamma' \vdash \psi \; \text{ entonces } \; \Gamma \cup \Gamma' \vdash \phi \wedge \psi,$$

  donde $\Gamma, \Gamma' \subseteq \mathsf{FORM}$, $\phi, \psi \in \mathsf{FORM}$.

- Resta entonces dar reglas de DN para el símbolo de igualdad $=$ y los cuantificadores $\forall$, $\exists$. Serán también de dos tipos: *introducción* y *eliminación*.

Reglas para la igualdad

- **Introducción:**

$$\frac{}{t = t}\ i_{=}$$

donde $t \in$ TERM (nuestro lenguaje no nos permite hablar de igualdad entre fórmulas).

- Nótese que es un *axioma*, dado que no tiene premisas. Obs. también que no se trata de una única regla sino de un *esquema* de reglas, una para cada término t.

- Ejemplo:

$$\frac{}{f(x, y) = f(x, y)}\ i_{=}$$

- Esta regla es intuitivamente correcta, pero no es demasiado útil: lo que necesitamos es un principio que nos permita sustituir iguales por iguales repetidamente. Lo haremos a través de la regla de eliminación.

Reglas para la igualdad

- **Eliminación:**

$$\frac{t = t' \qquad \phi[t/z]}{\phi[t'/z]} \; e_=$$

si t y t' están libres para z en ϕ.

La Regla de Secuente asociada será:

Si $\Gamma \vdash (t = t')$ y $\Gamma' \vdash \phi[t/z]$ entonces $\Gamma \cup \Gamma' \vdash \phi[t'/z]$,

donde $\Gamma, \Gamma' \subseteq$ FORM, $\phi \in$ FORM, $t, t' \in$ TERM libres para z en ϕ.

- Ejemplo:

Veamos que la reglas $i_=$ y $e_=$ hacen que la igualdad tenga las propiedades de ser reflexiva, simétrica y transitiva.

Reglas para la igualdad

- Reflexiva: $\vdash\ t = t$

$$\begin{array}{lll} 1. & t = t & i_= \end{array}$$

- Simétrica: $t_1 = t_2 \ \vdash\ t_2 = t_1$

$$\begin{array}{lll} 1. & t_1 = t_2 & \text{premisa} \\ 2. & t_1 = t_1 & i_= \\ 3. & t_2 = t_1 & e_=(1)(2)[\phi \equiv z = t_1] \end{array}$$

- Transitiva: $t_1 = t_2,\ t_2 = t_3 \ \vdash\ t_1 = t_3$

$$\begin{array}{lll} 1. & t_1 = t_2 & \text{premisa} \\ 2. & t_2 = t_3 & \text{premisa} \\ 3. & t_1 = t_3 & e_=(1)(2)[\phi \equiv z = t_3] \end{array}$$

Reglas para la cuantificación universal

- **Eliminación de $\forall$:**

$$\frac{\forall x \phi}{\phi[t/x]}\ e_\forall$$

donde t está libre para x en ϕ.

La Regla de Secuente asociada será:

$$\text{Si} \quad \Gamma \vdash \forall x \phi \quad \text{entonces} \quad \Gamma \vdash \phi[t/x],$$

donde $\Gamma \subseteq \text{FORM}$, $\phi \in \text{FORM}$, $t \in \text{TERM}$ libre para x en ϕ.

- Ejemplo:

$$\frac{\forall x (P(x) \to P(s(x)))}{P(3) \to P(s(3))}\ e_\forall$$

Reglas para la cuantificación universal

- Ejemplo:

$$\frac{\forall x(\exists y(x < y))}{\exists y(y < y)}\ e_\forall$$

es **incorrecto** porque no cumple la condición de estar y libre para x en $\phi \equiv \exists y(x < y)$.

- Ejemplo: $P(f(c)),\ \forall x(P(x) \to \neg Q(x)) \vdash \neg Q(f(c))$

1.	$P(f(c))$	premisa
2.	$\forall x(P(x) \to \neg Q(x))$	premisa
3.	$P(f(c)) \to \neg Q(f(c))$	$e_\forall(2)$
4.	$\neg Q(f(c))$	$e_\to(1)(3)$

Reglas para la cuantificación universal

- **Introducción de $\forall$:**

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \hfill x_0 \\ \vdots \\ \phi[x_0/x] \end{array}}}{\forall x \phi}\; i\forall$$

  donde x_0 no ocurre (libre) fuera de la caja.

  La Regla de Secuente asociada será:

  Si $\Gamma \vdash \phi[x_0/x]$ y x_0 no ocurre libre en Γ entonces $\Gamma \vdash \forall x \phi$.

- En otras palabras: si podemos demostrar que ϕ vale para un x_0 que no es especial en ningún sentido, entonces habremos probado que ϕ vale para cualquier x, es decir, para todo x.

Reglas para la cuantificación universal

- Ejemplo:

$$\forall x(P(x) \to Q(x)),\ \forall x P(x) \vdash \forall x Q(x)$$

1.	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	premisa	
2.	$\forall x P(x)$	premisa	
3.	$P(x_0)$	$e_\forall(2)$	x_0
4.	$P(x_0) \to Q(x_0)$	$e_\forall(1)$	
5.	$Q(x_0)$	$e_\to(3)(4)$	
6.	$\forall x Q(x)$	$i_\forall(3-5)$	

Reglas para la cuantificación existencial

- **Introducción de $\exists$:**

$$\frac{\phi[t/x]}{\exists x \phi}\ i_\exists$$

donde t está libre para x en ϕ.

La Regla de Secuente asociada será:

Si $\Gamma \vdash \phi[t/x]$ y t está libre para x en ϕ entonces $\Gamma \vdash \exists x \phi$.

- Ejemplo: $\forall x P(x) \vdash \exists x P(x)$

$$\cfrac{\cfrac{\forall x P(x)}{P(x_1)}\ e_\forall}{\exists x P(x)}\ i_\exists$$

Reglas para la cuantificación existencial

- **Eliminación de $\exists$:**

$$\dfrac{\exists x\phi \qquad \boxed{\begin{array}{c} \qquad\qquad x_0 \\ [\phi\,[x_0/x]]^{(1)} \\ \vdots \\ \psi \end{array}}}{\psi}\; e_{\exists}^{(1)}$$

donde x_0 no ocurre libre fuera de la caja y por lo tanto no puede aparecer en ψ.

La Regla de Secuente asociada será:

Si $\Gamma \cup \{\phi[x_0/x]\} \vdash \psi$ donde x_0 no ocurre libre en Γ
entonces $\Gamma \cup \{\exists x\phi\} \vdash \psi$.

Reglas para la cuantificación existencial

- Ejemplo:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)),\ \exists x P(x) \vdash \exists x Q(x)$$

1.	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	premisa	
2.	$\exists x P(x)$	premisa	
3.	$P(x_0)$	hipótesis	x_0
4.	$P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$	$e_{\forall}(1)$	
5.	$Q(x_0)$	$e_{\rightarrow}(3)(4)$	
6.	$\exists x Q(x)$	$i_{\exists}(5)$	
7.	$\exists x Q(x)$	$e_{\exists}(2)(3-6)$	

Equivalencias entre cuantificadores

- $\neg\forall x\phi \;\dashv\vdash\; \exists x\neg\phi$

- $\neg\exists x\phi \;\dashv\vdash\; \forall x\neg\phi$

Equivalencias entre cuantificadores

$\neg\forall x\phi \vdash \exists x\neg\phi$

1.	$\neg\forall x\phi$	premisa	
2.	$\neg\exists x\neg\phi$	hipótesis	
3.			x_0
4.	$(\neg\phi)[x_0/x]$	hipótesis	
5.	$\exists x\neg\phi$	$i_\exists(4)$	
6.	$\perp$	$i_\perp(5)(2)$	
7.	$\phi[x_0/x]$	$RAA(4-6)$	
8.	$\forall x\phi$	$i_\forall(3-7)$	
9.	$\perp$	$i_\perp(8)(1)$	
10.	$\exists x\neg\phi$	$RAA(2-9)$	

Equivalencias entre cuantificadores

$\neg\forall x\phi \dashv \exists x\neg\phi$

1.	$\exists x\neg\phi$	premisa
2.	$\forall x\phi$	hipótesis
3.		x_0
4.	$(\neg\phi)[x_0/x]$	hipótesis
5.	$\neg(\phi[x_0/x])$	trivial (4)
6.	$\phi[x_0/x]$	$e_\forall(2)$
7.	$\bot$	$i_\bot(6)(5)$
8.	$\bot$	$e_\exists(1)(3-8)$
9.	$\neg\forall x\phi$	$i_\neg(2-9)$

Equivalencias entre cuantificadores

$\neg\exists x\phi \vdash \forall x\neg\phi$

1.	$\neg\exists x\phi$	premisa
2.		x_0
3.	$\phi[x_0/x]$	hipótesis
4.	$\exists x\phi$	$i_\exists(3)$
5.	$\perp$	$i_\perp(4)(1)$
6.	$\neg(\phi[x_0/x])$	$i_\neg(3-5)$
7.	$(\neg\phi)[x_0/x]$	trivial (6)
8.	$\forall x\neg\phi$	$i_\forall(2-7)$

Equivalencias entre cuantificadores

$\neg\exists x\phi \;\dashv\; \forall x\neg\phi$

1.	$\forall x\neg\phi$	premisa
2.	$\exists x\phi$	hipótesis
3.		x_0
4.	$\phi[x_0/x]$	hipótesis
5.	$(\neg\phi)[x_0/x]$	$e_\forall(1)$
6.	$\neg\phi[x_0/x]$	trivial(5)
7.	$\bot$	$i_\bot(4)(6)$
8.	$\bot$	$e_\exists(2)(3-8)$
9.	$\neg\exists x\phi$	$i_\neg(2-9)$

Propiedades

Teorema:

La lógica de predicados es correcta y completa.

D/

No la hacemos.