

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA  
(FCEIA-UNR)

## MÉTODOS NUMÉRICOS

Prof. Alejandro G. Marchetti

### Unidad VI

## Aproximación de Autovalores



Julio de 2020



## 1. Autovalores y Autovectores

Comenzaremos repasando la definición de autovalor y autovector.

**Definición 1** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Si  $\lambda$  es un escalar, y  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  es un vector tales que

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

decimos que  $\lambda$  es un autovalor de  $A$  y  $\mathbf{v}$  es un autovector asociado.

Notar que si  $\mathbf{v}$  es un autovector, luego  $c\mathbf{v}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c \neq 0$ , también es un autovector asociado al mismo autovalor.

Reformulando  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$  como  $(A - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$  muestra que los autovectores son vectores distintos de cero que pertenecen al espacio nulo  $N(A - \lambda\mathbf{I})$ . Pero  $N(A - \lambda\mathbf{I})$  contiene vectores no nulos si y solo si  $(A - \lambda\mathbf{I})$  es singular. Por lo tanto, los autovalores son precisamente los valores de  $\lambda$  que hacen que la matriz  $(A - \lambda\mathbf{I})$  sea singular, o en forma equivalente, los valores de  $\lambda$  para los cuales  $\det(A - \lambda\mathbf{I}) = 0$ .

**Teorema 1 (Polinomio Característico y Ecuación Característica)** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

- El **polinomio característico** de  $A$  es  $p(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbf{I})$ . El grado de  $p(\lambda)$  es  $n$ .
- La **ecuación característica** de  $A$  es  $p(\lambda) = 0$ .
- Los autovalores de  $A$  son las soluciones de la ecuación característica o, en forma equivalente, las raíces del polinomio característico.
- $A$  tiene  $n$  autovalores, pero algunos pueden ser complejos (incluso si las entradas de  $A$  son reales), y algunos autovalores pueden repetirse.
- Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , luego sus autovalores complejos deben ocurrir en pares conjugados. Este no es el caso si  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .
- $A^T$  posee el mismo polinomio característico que  $A$ , y por lo tanto, los mismos autovalores. Es decir,  $\sigma(A) = \sigma(A^T)$  y  $\det(A) = \det(A^T)$ .

**Definición 2** Una matriz cuadrada  $A$  se dice que es **diagonalizable** si es semejante a una matriz diagonal. Es decir, si mediante un cambio de base puede reducirse a una forma diagonal. En este caso, la matriz podrá descomponerse de la forma  $A = PDP^{-1}$ , donde  $D$  es una matriz diagonal formada por los autovalores de  $A$  y  $P$  es una matriz invertible cuyos vectores columna son los autovectores de  $A$ .

Se dice que  $A$  es **diagonalizable ortogonalmente** si la matriz  $P$  es ortogonal, pudiendo descomponerse como  $A = PDP^T$ . Toda matriz simétrica con coeficientes reales es diagonalizable ortogonalmente.

**Teorema 2 (Teorema de la diagonalización)** Una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es diagonalizable si y sólo si  $A$  tiene  $n$  autovectores linealmente independientes, o en forma equivalente, los autovectores de  $A$  conforman una base de  $\mathbb{R}^n$ .

Si la matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es diagonalizable, luego cualquier vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  puede expresarse como una combinación lineal única de los autovectores de  $A$ ,

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{v}_i$$

Luego, la transformación  $A\mathbf{x}$  puede expresarse como

$$A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i \mathbf{v}_i \quad (1)$$

**Ejemplo 1** En el caso  $n = 2$  el polinomio característico está dado por

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{21}a_{12} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{aligned}$$

**Ejemplo 2** Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 13 & -16 \\ 13 & -10 & 13 \\ -16 & 13 & -7 \end{pmatrix}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda + 7 & -13 & 16 \\ -13 & \lambda + 10 & -13 \\ 16 & -13 & \lambda + 7 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 + 24\lambda^2 - 405\lambda + 972 \end{aligned}$$

Las raíces de este polinomio son

$$\lambda_1 = -36 \quad \lambda_2 = 9 \quad \lambda_3 = 3$$

Supongamos que queremos hallar un autovector asociado a  $\lambda_1$ :

$$\begin{aligned} &(-36\mathbf{I} - A)\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ &\begin{pmatrix} -29 & -13 & 16 \\ -13 & -26 & -13 \\ 16 & -13 & -29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si tomamos  $v_1 = 0$ , luego tenemos  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Por lo tanto,  $v_1 \neq 0$ . Elegimos arbitrariamente  $v_1 = 1$ , luego operando obtenemos  $\mathbf{v} = [1, -1, 1]^T$ .

**Ejemplo 3** Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1,25 & 0,75 \\ 0,75 & 1,25 \end{pmatrix}$$

cuyos autovalores y autovectores son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2,0 & \mathbf{v}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 &= 0,5 & \mathbf{v}_2 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Los autovectores conforman una base para  $\mathbb{R}^2$ . Luego, para  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2$$

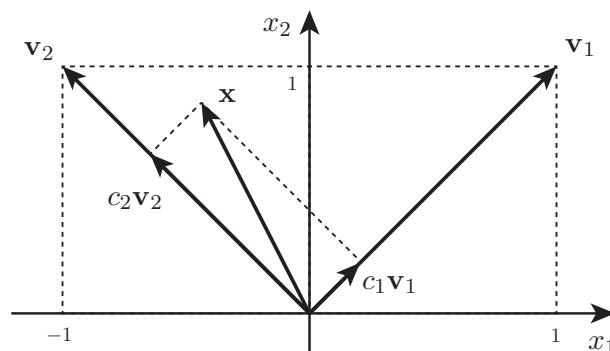
con

$$c_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad c_2 = \frac{x_2 - x_1}{2}$$

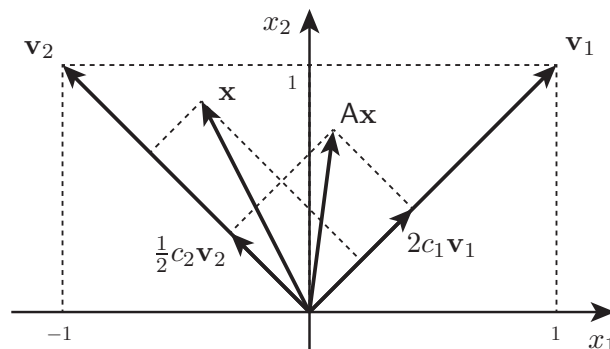
Aplicando la ecuación (1) tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \lambda_1 c_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 c_2 \mathbf{v}_2 \\ &= 2c_1 \mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}c_2 \mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

La interpretación gráfica de la descomposición de  $\mathbf{x}$  y de  $\mathbf{Ax}$  puede verse en la Figura 1.



Descomposición de  $\mathbf{x}$



Descomposición de  $\mathbf{Ax}$

Figura 1: Descomposición en autovectores usando la matriz del Ejemplo 3.

Consideremos ahora el proceso iterativo  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{Ax}^{(k)}$ . En la Figura 2 puede verse que cuando  $k \rightarrow \infty$ , la componente de  $\mathbf{x}^{(k)}$  en la dirección del autovector  $\mathbf{v}_2$  tiende a cero, mientras que la componente de  $\mathbf{x}^{(k)}$  en la dirección del autovector  $\mathbf{v}_1$  tiende a infinito. Debe cumplirse que el radio espectral de  $\mathbf{A}$  sea menor que 1 para que ambas componentes tiendan a cero, y por ende  $\mathbf{x}^{(k)}$  tienda a cero.

## 2. Teorema de Gershgorin

El teorema de Gershgorin permite determinar en qué rango se encuentran los autovalores de una matriz, y por lo tanto permite acotar el radio espectral de la matriz.

**Definición 3 (Círculos de Gershgorin)** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Se definen los círculos de Gershgorin

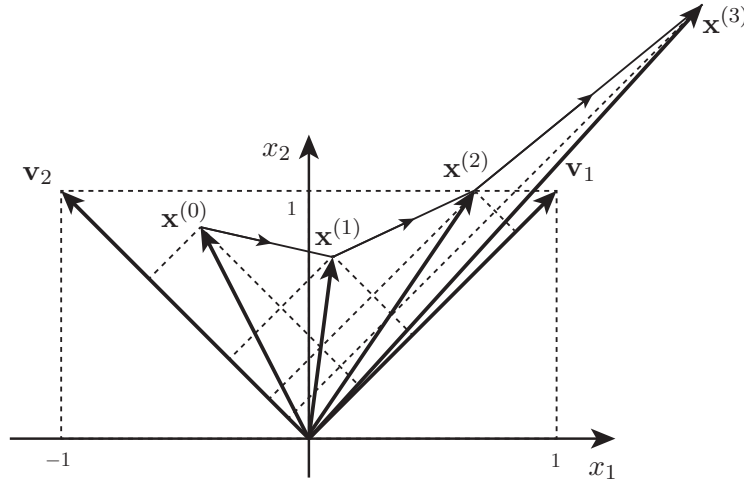


Figura 2: Iteración  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}$  usando la matriz del Ejemplo 3.

rin como:

$$C_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i\}, \quad \text{con } r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n$$

donde  $r_i$  es el radio del círculo  $C_i$ .

**Teorema 3 (Teorema de Gershgorin)** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y sea  $\lambda$  un autovalor de  $\mathbf{A}$ . Luego  $\lambda \in C_i$  para algún  $i = 1, \dots, n$ , donde  $C_i$  es un círculo de Gershgorin.

**Demostración.** Sea  $\lambda$  un autovalor de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{v}$  un autovector asociado. Sea  $k$  la componente de  $\mathbf{v}$  para la cual se tiene  $|v_k| = \|\mathbf{v}\|_\infty$ . Luego, de la igualdad  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$  se tiene para la  $k$ -ésima componente:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{kj}v_j &= \lambda v_k \\ (\lambda - a_{kk})v_k &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj}v_j \\ |\lambda - a_{kk}||v_k| &\leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}||v_j| \leq r_k \|\mathbf{v}\|_\infty \end{aligned}$$

de donde  $|\lambda - a_{kk}| \leq r_k$ . □

Si bien el Teorema de Gershgorin es aplicable a matrices de coeficientes complejos, en el curso trabajaremos solamente con matrices de coeficientes reales. Estas matrices, en caso de no ser simétricas, pueden presentar autovalores complejos en pares conjugados.

**Ejemplo 4** Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

cuyos autovalores son  $\lambda_1 = \sqrt{3}$  y  $\lambda_2 = -\sqrt{3}$ .

De las filas de  $A$  obtenemos un círculo de radio 2 centrado en  $(1, 0)$  y un círculo de radio 1 centrado en  $(-1, 0)$ , como se ilustra en la Figura 3. A partir de los círculos de Gershgorin

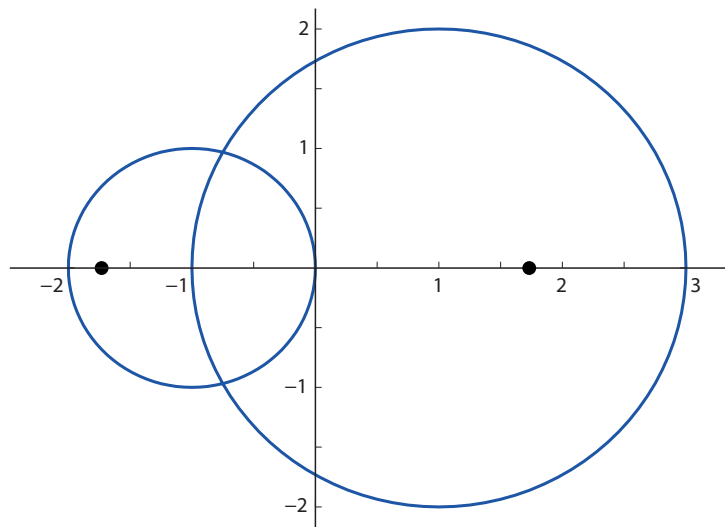


Figura 3: Círculos de Gershgorin de la matriz del Ejemplo 4.

podemos concluir que  $\rho(A) \leq 3$ .

El Teorema 3 nos dice que todo autovalor se encuentra en un círculo de Gershgorin. Sin embargo, el Teorema no dice que todo círculo contiene un autovalor.

**Ejemplo 5** Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

cuyos autovalores son  $\lambda_1 = i$  y  $\lambda_2 = -i$ .

De las filas de  $A$  obtenemos un círculo de radio 1 centrado en  $(1, 0)$  y un círculo de radio 2 centrado en  $(-1, 0)$ , como se ilustra en la Figura 4. Se puede ver claramente que ambos auto-

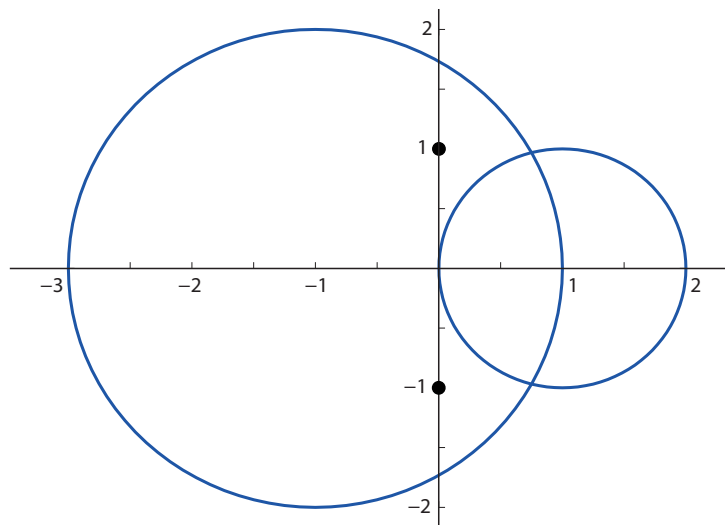


Figura 4: Círculos de Gershgorin de la matriz del Ejemplo 5.

valores se encuentran en el círculo definido por la segunda fila, mientras que ningún autovalor se encuentra en el círculo definido por la primera fila.

En el caso de matrices simétricas, sabemos que sus autovalores son reales, y por lo tanto para estas matrices el Teorema de Gershgorin nos da intervalos en el eje de los reales en los que se encuentran los autovalores.

**Ejemplo 6** Sea la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Según el Teorema 3, los autovalores deben estar contenidos en los intervalos (ver Figura 5):

$$C_1 : |\lambda - 4| \leq 1$$

$$C_2 : |\lambda| \leq 2$$

$$C_3 : |\lambda + 4| \leq 1$$

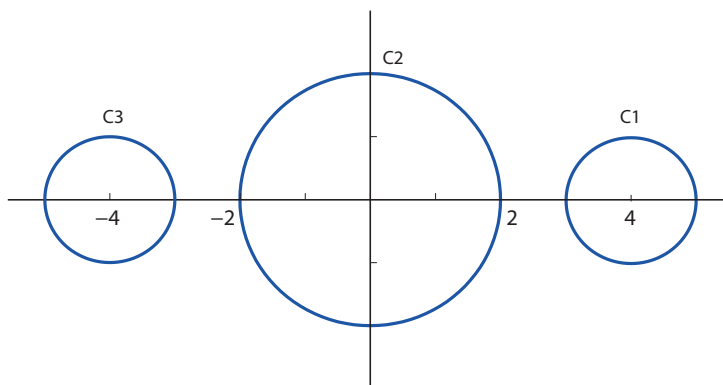


Figura 5: Círculos de Gershgorin de la matriz del Ejemplo 6.

**Ejemplo 7** Sea la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Siendo una matriz simétrica, sabemos que sus autovalores son reales. Todos los radios  $r_i$  son iguales a 1 o 2. Los centros de todos los círculos son  $a_{ii} = 4$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Luego, por el Teorema 3, los autovalores deben estar en el intervalo  $[2, 6]$ . Esta información nos dice que  $A$  es invertible y definida positiva.

En el ejemplo 7 pudimos verificar que una matriz es invertible usando el Teorema de Gershgorin. En forma general, una matriz es invertible si y solo si no posee ningún autovalor igual a cero. Por el Teorema de Gershgorin, podemos asegurar que ningún autovalor es igual a cero si el



punto  $(0, 0)$  en el plano complejo no pertenece a ningún círculo de Gershgorin. Es fácil verificar que esto se cumple si

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n$$

es decir, si la matriz  $A$  es diagonalmente dominante. Empleando el Teorema de Gershgorin, acabamos de demostrar que las matrices diagonalmente dominantes son invertibles.

El siguiente corolario es de utilidad en el caso de matrices no simétricas.

**Corolario 1** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y sea  $\lambda$  un autovalor de  $A$ . Luego  $\lambda \in C_i$  para algún  $i = 1, \dots, n$ , donde  $C_i$  es un círculo de Gershgorin de  $A^T$ .

**Demostración.** Por el Teorema 1 sabemos que  $A$  y  $A^T$  poseen los mismos autovalores. Luego, por el Teorema 3, los autovalores de  $A$  deben encontrarse en los círculos de Gershgorin de las filas de  $A^T$ , que son las columnas de  $A$ .  $\square$

El Corolario 1 permite acotar aún más la región en la que se encuentran los autovalores, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 8** Tanto para la matriz del Ejemplo 4 como para la matriz del Ejemplo 5, se puede acotar la región en la que se encuentran los autovalores considerando la intersección de los círculos obtenidos por filas y por columnas. Para ambas matrices, se puede asegurar que los autovalores se encuentran en la región sombreada de la Figura 6.

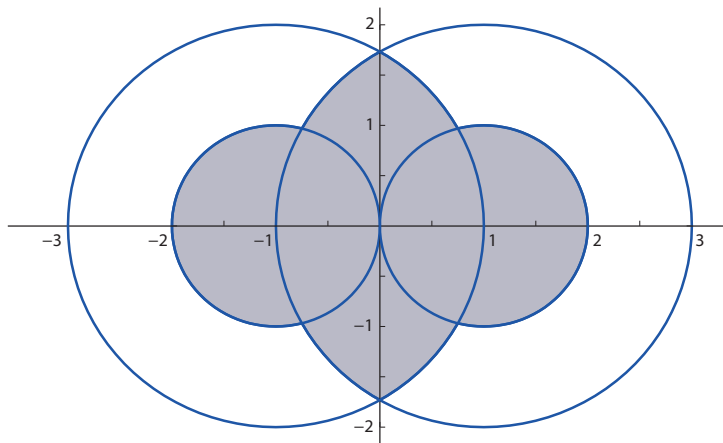


Figura 6: Intersección de los círculos obtenidos por filas y por columnas.

**Definición 4** Se dice que un subconjunto  $\mathcal{G}$  de círculos de Gershgorin es un grupo disjunto de círculos si ningún círculo en  $\mathcal{G}$  intersecta con un círculo que no pertenece a  $\mathcal{G}$ .

**Teorema 4** Si un grupo disjunto de círculos de Gershgorin  $\mathcal{G}$  contiene  $k$  círculos, luego  $\mathcal{G}$  contiene exactamente  $k$  autovalores (contando multiplicidades).

**Demostración.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , y sea  $\bar{A}(p)$  igual a la matriz  $A$  con sus elementos no diagonales multiplicados por la variable  $p$ , con  $p$  definida entre 0 y 1.

La matriz  $\bar{A}(0)$  tiene círculos de Gershgorin de radio 0 centrados en la ubicación de los elementos diagonales de  $A$ , y sus autovalores son los elementos diagonales de  $A$ . A medida que

se incrementa  $p$ , los radios aumentan en base a  $p$ , y los autovalores también se moverán. El polinomio característico de  $\bar{A}(p)$  será una función continua de la variable  $p$ , y sus raíces también serán continuas. Es decir que los autovalores seguirán una trayectoria continua a medida que se incrementa el valor de  $p$ . De esta continuidad se desprende que a medida que  $p$  se incrementa de 0 a 1 no es posible que un autovalor se desplace de un grupo disjunto de círculos a otro grupo disjunto de círculos sin hallarse en el exterior de cualquier círculo, lo cual violaría el Teorema 3.  $\square$

**Ejemplo 9** Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1,5 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

cuyos autovalores son  $\lambda_1 \approx 5,17$ ,  $\lambda_2 \approx -4,15$ ,  $\lambda_3 \approx -1,38$  y  $\lambda_4 \approx 0,35$ .

De  $A$  obtenemos un círculo de radio 1 centrado en  $(5,0)$ , un círculo de radio 3 centrado en  $(0,0)$ , un círculo de radio 3,5 centrado en  $(-2,0)$ , y un círculo de radio 5 centrado en  $(-3,0)$ . Los círculos y los autovalores se encuentran representados en la Figura 7.

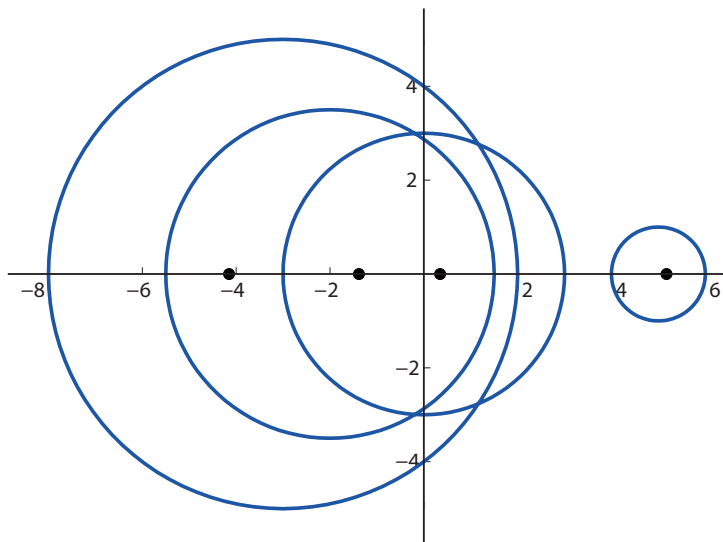


Figura 7: Grupos disjuntos de círculos de Gershgorín.

Como puede verse, tenemos dos grupos disjuntos de círculos. El grupo  $\mathcal{G}_1$  conformado por un círculo centrado en  $(5,0)$  posee 1 autovalor en su interior, y el grupo  $\mathcal{G}_2$ , de mayor tamaño, conformado por 3 círculos, posee 3 autovalores.

### 3. Método de la Potencia

El método de la potencia permite estimar el radio espectral de una matriz.

**Teorema 5 (Método de la Potencia)** Sea la matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sus autovalores, repetidos según su multiplicidad y ordenados según su módulo:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq 0$$

Suponemos que existe un único autovalor de módulo máximo.

Sea  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  la base de autovectores correspondiente. Sea  $\mathbf{z}^{(0)}$  una estimación inicial del autovector  $\mathbf{v}_1$  (elegida como sea, incluso de forma aleatoria).

Definimos

$$\begin{aligned}\mathbf{w}^{(n+1)} &= \mathbf{A}\mathbf{z}^{(n)} \\ \mathbf{z}^{(n+1)} &= \frac{\mathbf{w}^{(n+1)}}{\|\mathbf{w}^{(n+1)}\|_\infty}, \quad n \geq 0\end{aligned}$$

Entonces resulta

$$\mathbf{z}^{(n)} \rightarrow \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|_\infty} \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

y eligiendo una componente  $k$  no nula de  $\mathbf{w}^{(n-1)}$

$$\lambda^{(n)} = \frac{w_k^{(n)}}{z_k^{(n-1)}} \rightarrow \lambda_1 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

**Demostración.** Primero demostraremos por inducción que

$$\mathbf{z}^{(n)} = \frac{\mathbf{A}^n \mathbf{z}^{(0)}}{\|\mathbf{A}^n \mathbf{z}^{(0)}\|_\infty}, \quad n \geq 1 \quad (2)$$

Verificamos que (2) se cumple para  $n = 1$  y  $n = 2$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{z}^{(1)} &= \frac{\mathbf{w}^{(1)}}{\|\mathbf{w}^{(1)}\|_\infty} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{z}^{(0)}}{\|\mathbf{A}\mathbf{z}^{(0)}\|_\infty} \\ \mathbf{z}^{(2)} &= \frac{\mathbf{w}^{(2)}}{\|\mathbf{w}^{(2)}\|_\infty} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{z}^{(1)}}{\|\mathbf{A}\mathbf{z}^{(1)}\|_\infty} = \frac{\mathbf{A} \frac{\mathbf{A}\mathbf{z}^{(0)}}{\|\mathbf{A}\mathbf{z}^{(0)}\|_\infty}}{\left\| \mathbf{A} \frac{\mathbf{A}\mathbf{z}^{(0)}}{\|\mathbf{A}\mathbf{z}^{(0)}\|_\infty} \right\|_\infty} = \frac{\mathbf{A}^2 \mathbf{z}^{(0)}}{\|\mathbf{A}^2 \mathbf{z}^{(0)}\|_\infty}\end{aligned}$$

Por inducción se tiene

$$\mathbf{z}^{(n)} = \frac{\mathbf{w}^{(n)}}{\|\mathbf{w}^{(n)}\|_\infty} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{z}^{(n-1)}}{\|\mathbf{A}\mathbf{z}^{(n-1)}\|_\infty} = \frac{\mathbf{A} \frac{\mathbf{A}^{n-1} \mathbf{z}^{(0)}}{\|\mathbf{A}^{n-1} \mathbf{z}^{(0)}\|_\infty}}{\left\| \mathbf{A} \frac{\mathbf{A}^{n-1} \mathbf{z}^{(0)}}{\|\mathbf{A}^{n-1} \mathbf{z}^{(0)}\|_\infty} \right\|_\infty} = \frac{\mathbf{A}^n \mathbf{z}^{(0)}}{\|\mathbf{A}^n \mathbf{z}^{(0)}\|_\infty}$$

Siendo  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  una base de  $\mathbb{R}^n$ , podemos escribir:

$$\mathbf{z}^{(0)} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j$$

Supongamos que  $\alpha_1 \neq 0$  (esto siempre es posible pues  $\mathbf{z}^{(0)}$  es arbitrario). Luego

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{z}^{(0)} &= \alpha_1 \mathbf{A}\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{A}\mathbf{v}_n \\ &= \lambda_1 \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n \mathbf{v}_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^m \mathbf{z}^{(0)} &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{A}^m \mathbf{v}_j \\ &= \lambda_1^m \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n^m \alpha_n \mathbf{v}_n \\ &= \lambda_1^m \left( \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_j \left( \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^m \mathbf{v}_j \right)\end{aligned}$$

Como  $|\lambda_1| > |\lambda_j|$  para todo  $j = 2, \dots, n$ , luego  $\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^m \rightarrow 0$  cuándo  $m \rightarrow \infty$  para todo  $j = 2, \dots, n$ . Luego

$$\mathbf{z}^{(m)} = \frac{\mathbf{A}^m \mathbf{z}^{(0)}}{\|\mathbf{A}^m \mathbf{z}^{(0)}\|_\infty} = \frac{\lambda_1^m \left( \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_j \left( \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^m \mathbf{v}_j \right)}{|\lambda_1|^m \left\| \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_j \left( \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^m \mathbf{v}_j \right\|_\infty}$$

Tomando el límite cuando  $m \rightarrow \infty$  obtenemos

$$\mathbf{z}^{(m)} \rightarrow \beta \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|_\infty} \quad \text{cuando } m \rightarrow \infty$$

donde

$$\beta = \left( \frac{\lambda_1}{|\lambda_1|} \right)^m \frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}$$

es una constante de módulo igual a 1.

Eligiendo una componente  $k$  no nula de  $\mathbf{w}^{(m)}$ ,

$$\lambda^{(m)} = \frac{w_k^{(m)}}{z_k^{(m-1)}} = \frac{(\mathbf{A}\mathbf{z}^{(m-1)})_k}{(\mathbf{z}^{(m-1)})_k}$$

Luego

$$\lambda^{(m)} \rightarrow \frac{(\mathbf{A}\mathbf{v}_1)_k}{(\mathbf{v}_1)_k} = \lambda_1 \quad \text{cuando } m \rightarrow \infty$$

□

Cabe resaltar que si bien hemos presentado el método de la potencia y su demostración empleando la norma infinito, el método de la potencia es válido empleando cualquier norma vectorial.

El método de la potencia tiene la desventaja de que al inicio no se sabe si la matriz tiene o no un solo autovalor dominante. La convergencia del método puede ser lenta, pero con una implementación adecuada es efectivo para matrices dispersas de grandes dimensiones.

El método de la potencia tiene aplicaciones en métodos computacionales. Por ejemplo, la familia de algoritmos PageRank, desarrollados por Google, utilizan el método de la potencia para asignar de forma numérica la relevancia de los documentos (o páginas web) indexados por un motor de búsqueda.

## Bibliografía

1. Kendall E. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, Second edition, John Wiley & Sons, 1989.
2. Carl D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia PA, United States, 2000.
3. Sean Brakken-Thal, *Gershgorin's Theorem for Estimating Eigenvalues*, 2007.