Métodos Numéricos - LCC 2020
Docentes: Alejandro G. Marchetti, Juan Manuel Rabasedas, Lucas Venturato,
Agustín Gurvich
Práctica 6: Aproximación de autovalores.

1. (a) Usar el teorema de Gerschgorin para determinar cotas de los autovalores de las siguientes matrices:

$$a)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 2 \end{pmatrix} \quad c)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0.25 \\ -0.25 & -0.25 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d)\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad e)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad f)\begin{pmatrix} 4.75 & 2.25 & -0.25 \\ 2.25 & 4.75 & 1.25 \\ -0.25 & 1.25 & 4.75 \end{pmatrix}$$

   (b) Hallar los autovalores de las matrices anteriores usando el comando ya implementado en SCILAB.

2. (a) Aplicar el teorema de Gerschgorin para mostrar que las raíces r de $p(\lambda)$ verifican que

$$|r| \leq 1 \qquad o \qquad |r + a_{n-1}| \leq |a_0| + \cdots + |a_{n-2}|$$

   (b) Teniendo en cuenta que A y A^T tienen los mismos autovalores, usar el teorema de Gerschgorin sobre las columnas de A para obtener otras cotas para las raíces de $p(\lambda)$.

   (c) Acotar las raíces de los siguientes polinomios:

   $i)$ $\lambda^{10} + 8\lambda^9 + 1 = 0$ $\qquad$ $ii)$ $\lambda^6 - 4\lambda^5 + \lambda^4 - \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = 0.$

3. Dada la siguiente matriz $\mathsf{A}(\varepsilon)$, para $\varepsilon = 0.1k$ con $k = 0, 1, \dots, 10$:

$$\mathsf{A}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}$$

Utilizar los comandos adecuados de SCILAB para:
$i)$ encontrar el polinomio característico y aproximar sus raíces
$ii)$ hallar los autovalores de $\mathsf{A}(\varepsilon)$.

4. Realizar un programa en Scilab que dibuje los círculos de Gershgorin y marque gráficamente los autovalores, para lo cual se pide lo siguiente:

   (a) Usando el comando de Scilab `xarc` crear una función `circ` que dado un radio r y dos coordenadas x e y dibuje un circulo en la pantalla. Para esto se deberá utilizar adicionalmente el comando `plot2d` para definir una ventana con la opción `rect`.

   (b) Realizar una función `Gers` que tome una matriz $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y dibuje todos los círculos de Gershgorin.

   (c) Utilizando todas las funciones definidas anteriormente, definir una función `CircGersValor` que además marque gráficamente los autovalores sobre los círculos dibujados. Ver opciones de `plot2d`.

5. (a) Implementar un algoritmo para el método de la potencia y calcular el autovalor dominante y el autovector asociado para las matrices

$$\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & -2 \\ 4 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Construir un algoritmo que compare la diferencia entre el autovalor aproximado por el método de la potencia y el mayor autovalor, considerando el número de iteraciones realizadas.