Métodos Numéricos. Ejercicios

Alejandro G. Marchetti, Juan Manuel Rabasedas, Brian Luporini

October 10, 2023

Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales

1) Escribir un programa en Scilab que resuelva específicamente el siguiente sistema de ecuaciones lineales empleando el método de Gauss Seidel para cualquier valor de n.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se puede demostrar que la solución exacta es $x_i = -n/4 + i/2$, $i = 1, 2, \dots, n$.

a) Obtener la fórmula iterativa del método de Gauss-Seidel para el sistema dado. Resolver para $n = 20$ partiendo de $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Contar el número de iteraciones.

b) Obtener la matriz de iteración del método y determinar su radio espectral.

c) Repetir los dos items anteriores usando esta vez una matriz con elementos diagonales iguales a 4 en lugar de 2. Discutir los resultados.

2) Considerar el sistema disperso

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{a}^\mathsf{T} \\ \mathbf{a} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

donde $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n-1}$ con $\|\mathbf{a}\| < 1$. Se desea resolver el sistema disperso (1) para lo cual se considerarán dos posibles factorizaciones de Cholesky. La primera factorización es

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{a}^\mathsf{T} \\ \mathbf{a} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{a} & \mathsf{R}_{22}^\mathsf{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{a}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathsf{R}_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{donde } \mathbf{I} - \mathbf{a}\mathbf{a}^\mathsf{T} = \mathsf{R}_{22}^\mathsf{T}\mathsf{R}_{22}.$$

Reordenando las ecuaciones como

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^\mathsf{T} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ b \end{pmatrix},$$

obtenemos la segunda factorización de Cholesky,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^\mathsf{T} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}^\mathsf{T} & \sqrt{1 - \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{a} \\ \mathbf{0}^\mathsf{T} & \sqrt{1 - \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}} \end{pmatrix}$$

a) Verificar que ambas factorizaciones de Cholesky son correctas.

b) Seleccionar un vector pleno $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^5$ con $\|\mathbf{a}\| < 1$, y para dicho vector obtener ambas factorizaciones de Cholesky.

c) ¿Cuál de las dos factorizaciones permitiría resolver el sistema disperso (1) en forma más eficiente? Justificar.

3) Sea $\mathsf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se llaman menores principales de A a los números M_i que son los determinantes de las submatrices de A formadas por las primeras i filas y las primeras i columnas de A. Es claro que $M_1 = a_{11}$ y $M_n = |\mathsf{A}| = \det(\mathsf{A})$. Una matriz A es definida positiva si es simétrica y se cumple que sus menores principales son positivos.

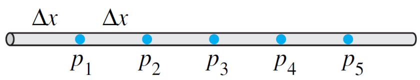
Considerar el sistema $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

a) Determinar la matriz de iteración del método de Jacobi

b) Hallar los autovalores de la matriz del ítem anterior y probar, en este caso particular, que si la matriz A es simétrica y definida positiva, entonces el método de Jacobi converge.

4) La matriz tridiagonal A que se muestra a continuación puede servir para calcular la conducción de calor no estacionaria en una barra para la cual las temperaturas en sus puntos $p_1, ..., p_5$ cambian con el tiempo.



La constante c de la matriz depende de la naturaleza física de la barra, de la distancia Δx entre los puntos de la barra, y del tiempo Δt que transcurra entre mediciones sucesivas de temperatura. Suponga que para $k = 0, 1, 2, ...$, un vector $\mathbf{x}^{(k)}$ en $\mathbb{R}^5$ enlista las temperaturas en el tiempo $t_k = k\Delta t$. Si ambos extremos de la barra se mantienen a 0 °C, entonces los vectores de temperatura satisfacen la ecuación

$$\mathsf{A}\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)}, \quad k = 0, 1, ...,$$

donde

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} (1+2c) & -c & & & \\ -c & (1+2c) & -c & & \\ & -c & (1+2c) & -c & \\ & & -c & (1+2c) & -c \\ & & & -c & (1+2c) \end{pmatrix}$$

a) Programe una función en Scilab que dado un escalar c devuelva la matriz A definida arriba.

b) Encuentre la factorización LU de A cuando $c = 1$.

c) Suponga que $c = 1$ y $\mathbf{x}^{(0)} = (10, 12, 12, 12, 10)^{\mathsf{T}}$. Use la factorización LU de A para encontrar las distribuciones de temperatura $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, $\mathbf{x}^{(3)}$ y $\mathbf{x}^{(4)}$.

5) Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x4 = -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15 \end{cases}$$

a) Pruebe que los métodos de Gauss-Seidel y Jacobi convergen para cualquier valor inicial $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^4$.

b) Programe un función en Scilab que dado un vector inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, resuelva el sistema anterior por el método de Jacobi y cuente la cantidad de iteraciones. Resuelva el sisitema con una tolencia de 10^{-5} y vector inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^{\mathsf{T}}$.

c) Repita el ítem anterior con el método de Gauss-Seidel. ¿Cuál método realiza menos iteraciones?