Departamento de Ciencias de la Computación
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
(FCEIA-UNR)

Métodos Numéricos

Prof. Alejandro G. Marchetti

Unidad I

Sucesiones y Series Numéricas

Agosto de 2022

1. Sucesiones Numéricas

1.1. Definición

Definición. Una sucesión es una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$.

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

Una sucesión genera una lista ilimitada de números:

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots,\ f(n),\ \ldots$$

donde $f(n)$ es el término n-ésimo de la sucesión. También se escribe la lista como

$$f_1,\ f_2,\ f_3,\ \ldots,\ f_n,\ \ldots$$

Es frecuente utilizar notaciones del tipo $\{f(n)\}$, $\{f_n\}$, o $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, para denotar una sucesión.

Ejemplos de sucesiones

- $f_n = a, \qquad a,\ a,\ a,\ \ldots$
- $f_n = n, \qquad 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$
- $f_n = \frac{1}{n}, \qquad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots$
- $f_n = (-1)^n, \qquad -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \ldots\ (-1)^n,\ \ldots$

1.2. Convergencia de Sucesiones

Definición. Una sucesión $\{f_n\}$ es **convergente** si existe un número real L tal que para cada $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un número natural $N(\varepsilon)$ tal que $\forall n \geq N$ se verifique $|f_n - L| < \varepsilon$. Se dice entonces que L es el **límite** de la sucesión $\{f_n\}$, y se escribe $L = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, o también $f_n \to L$, si $n \to \infty$. También decimos que la sucesión $\{f_n\}$ converge a L. Una sucesión que no converge se dice que es **divergente**.

Ejemplos

- la sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ converge a 0.
- la sucesión $\{n!\}$ es divergente.
- la sucesión $\{(-1)^n\}$ no es convergente.

Teorema 1 (Unicidad del límite) *Una sucesión convergente tiene uno y sólo un límite.*

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Supongamos que $a \neq b$, por ejemplo $a < b$. Elijase z tal que $a < z < b$. Puesto que $z < b$ y b es límite de f_n, ha de existir un N' tal que para todo $n > N'$ sea $f_n > z$. Igualmente, puesto que $a < z$ y a es límite de f_n, ha de existir un N'' tal que para todo $n > N''$ sea $f_n < z$. Tomando $N = \text{máx}\{N', N''\}$, llegamos a una contradicción, ya que se tendría que cumplir $z < f_n < z$ para todo $n > N$. $\square$

Definición. Una sucesión $\{f_n\}$ se dice que está **acotada superiormente** si existe algún número $c \in \mathbb{R}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \leq c$. Se dice que está **acotada inferiormente** si existe algún número $k \in \mathbb{R}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $k \leq f_n$. Se dice que está **acotada** si lo está superior e inferiormente. Esto equivale a que exista algún número $M > 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq M$.

Definición.

a) Una sucesión $\{f_n\}$ es **monótona creciente** si $f_n \leq f_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Una sucesión $\{f_n\}$ es **monótona decreciente** si $f_{n+1} \leq f_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) Una sucesión $\{f_n\}$ es **monótona** cuando es creciente o decreciente.

d) Una sucesión $\{f_n\}$ es **estrictamente creciente** si $f_n < f_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

e) Una sucesión $\{f_n\}$ es **estrictamente decreciente** si $f_{n+1} < f_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2 *(i) Toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente es convergente. (ii) Toda sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente es convergente. Esto equivale a decir que una sucesión monótona converge si y sólo si es acotada.*

Demostración. Ver la demostración en Tom M. Apostol, 1982. □

Teorema 3 (Operaciones con sucesiones) *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones convergentes con límites*

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n, \qquad b = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Las siguientes reglas se cumplen:

1. *Regla de la suma:* $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
2. *Regla de la diferencia:* $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$
3. *Regla del producto:* $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$
4. *Regla de la multiplicación por una constante:* $\lim_{n\to\infty} (cb_n) = cb$, *donde* $c \in \mathbb{R}$
5. *Regla del cociente:* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, *si* $b \neq 0$

Teorema 4 (Teorema del sandwich para sucesiones) *Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, y $\{c_n\}$ sucesiones de números reales. Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ para toda n mayor que algún índice N, y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, entonces también $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.*

Demostración. El teorema es intuitivo. La demostración se obtiene a partir de la definición de límite. □

Repaso de la regla de L'Hôpital

La regla de L'Hôpital permite calcular límites indeterminados para funciones de variable real.

I) Indeterminaciones de la forma $0/0$, ∞/∞, $0.\infty$

Teorema 5 (Regla de L'Hôpital) *Sean f y g funciones diferenciables en un intervalo de la forma $(a-r, a+r)$, con $a, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Supongamos que*

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0,$

b) $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a-r, a+r),\ x \neq a,$

c) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$

Entonces, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$

Justificación: Como f y g son diferenciables en a, entonces f y g son continuas en a. Luego $f(a) = 0$ y $g(a) = 0$. Por lo tanto podemos escribir

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

Si $x \to a$ la expresión de la derecha tiende a

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Luego

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Observación: El teorema es válido también para límites laterales: $x \to a^+$ o $x \to a^-$ y límites infinitos: $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$.

Ejemplos

$$\underbrace{\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{4x^3-x-3}}_{\frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2}{12x^2-1} = \frac{3}{11}$$

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^+} x\,ln\,x}_{0.(-\infty)} = \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{ln\,x}{\frac{1}{x}}}_{-\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \underbrace{\lim_{x\to 0^+} (-x)}_{\text{no es una indeterminación}} = 0$$

II) Indeterminaciones de la forma $\infty - \infty$, $-\infty + \infty$
Se pasan primero a la forma $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$

Ejemplo

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{4x+1}{x} - \frac{1}{\text{sen } x}}_{\infty-\infty} = \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{(4x+1)\text{sen } x - x}{x \text{ sen } x}}_{\frac{0}{0}}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{4 \text{ sen } x + (4x+1)(\cos x) - 1}{\text{sen } x + x \cos x}}_{\frac{0}{0}}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{4 \cos x + 4 \cos x - (4x+1)\text{sen } x}{\cos x + \cos x - x \text{ sen } x}}_{\substack{\text{no es una} \\ \text{indeterminación}}} = \frac{4+4}{2} = 4$$

III) Indeterminaciones de la forma ∞^0

Proposición 1 *Si* $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ *existe, entonces*

$$\lim_{x\to a} e^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

Si $f(x)$ es de la forma ∞^0 utilizar la Proposición 1:

$$f(x) = e^{\ln f(x)}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \ln f(x)}$$

Cálculo de límite de sucesiones usando la regla de L'Hôpital

Teorema 6 *Suponga que $f(x)$ es una función definida para todo $x \geq N$, $x \in \mathbb{R}$ y que $\{f_n\}$ es una sucesión de números reales tal que $f_n = f(n)$ para $n \geq N$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f_n = L.$$

Demostración. Ver demostración en Thomas y George, 2006. □

El Teorema 6 nos dice que el límite de la sucesión $\{f_n\}$ cuando $n \to \infty$ es igual al límite de la función $f(x)$ cuando $x \to \infty$. En particular, si al evaluar el límite de $f(x)$ se dá una indeterminación de alguna de las formas vistas anteriormente, se puede aplicar la regla de L'Hôpital para calcular el límite de la sucesión.

Subsucesiones

Definición. Una sucesión $\{b_n\}$ es una *subsucesión* de una sucesión $\{a_n\}$ si existe una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $b_n = a_{\sigma(n)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplos de subsucesiones

La subsucesión de los números pares se obtiene tomando $\sigma(n) = 2n$,

$$\{a_{2n}\} = a_2,\ a_4,\ a_6,\ a_8,\ \ldots\ ,\ a_{2n},\ \ldots$$

La subsucesión de los números impares se obtiene tomando $\sigma(n) = 2n - 1$,

$$\{a_{2n}\} = a_1,\ a_3,\ a_5,\ a_7,\ \dots\ ,\ a_{2n-1},\ \dots$$

Proposición 2 *Una sucesión $\{a_n\}$ es convergente si y sólo si todas sus subsucesiones son convergentes y convergen a un mismo límite.*

Demostración. ($\Rightarrow$). Supongamos primero que $\{a_n\}$ es convergente. Sea $\{b_n\}$ una subsucesión de $\{a_n\}$. Luego, $b_n = a_{\sigma(n)}$ para alguna función $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente. Vamos a probar que $\{b_n\}$ es convergente.

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

para todo $n > N$.

Como σ es una función creciente, existe M número natural tal que $\sigma(k) > N$ para todo $k > M$. Entonces,

$$|a_{\sigma(k)} - L| < \varepsilon$$

para todo $k > M$. Llamando $\sigma(M) = N'$, tenemos que

$$|L - b_n| < \varepsilon$$

para todo $n > N'$.

Por lo tanto, la subsucesión $b_n = a_{\sigma(n)}$ es convergente. Más aún, probamos que todas las subsucesiones convergen a L.

($\Leftarrow$). Supongamos ahora que todas las subsucesiones de $\{a_n\}$ son convergentes y convergen a un límite L. Tomando $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\sigma(n) = n$, tenemos que la subsucesión $b_n = a_{\sigma(n)} = a_n$ es la sucesión original. Luego, por hipótesis, la sucesión $\{a_n\}$ es convergente y converge a L. $\square$

2. Series Numéricas

2.1. Definición

Definición. Dada una sucesión de números reales $\{a_n\}$, se puede formar otra sucesión $\{s_n\}$ para la cual

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

La sucesión de las sumas parciales $\{s_n\}$ se llama **serie infinita** o simplemente **serie**. Para representar una serie se utiliza la notación $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definición.

- Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una **serie de términos positivos** cuando $a_n > 0$ para cada n.
- Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una **serie alternada** cuando $a_n = (-1)^n c_n$, para alguna sucesión $\{c_n\}$ tal que $c_n > 0$ para cada n.

Ejemplo. La **serie armónica** es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Para esta serie tenemos

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad \text{y} \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

A continuación obtendremos una desigualdad que se cumple para la serie armónica, y que será utilizada mas adelante.

$$\begin{aligned} s_{2n} - s_n &= \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow s_{2n} - s_n \geq \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Ejemplo. Para la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, tenemos $a_n = (-1)^n$, por lo cual es una serie alternada. Además

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k = -1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Ejemplo. La **serie geométrica** de razón r es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n, \qquad \text{con } a_n = r^n.$$

Si $r > 0$ se trata de una serie de términos positivos.
Si $r < 0$ se trata de una serie alternada.
Para la serie geométrica se puede obtener una expresión analítica de las sumas parciales

$$\begin{aligned} rs_n &= r + r^2 + \cdots + r^{n+1} \quad \Rightarrow \\ (1-r)s_n &= s_n - rs_n \\ &= (1 + r + \cdots + r^n) - (r + r^2 + \cdots + r^{n+1}) \\ &= 1 - r^{n+1} \end{aligned}$$

Luego, si $r \neq 1$ tenemos

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \tag{2}$$

2.2. Convergencia y Divergencia de Series

Definición. Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge** o es una **serie convergente** cuando la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ tiene límite finito.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = s$$

El límite s es la **suma** de la serie. Una serie que no tiene límite finito se dice que es **divergente**.

Ejemplo. En (1) vimos que para la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ se cumple

$$\frac{1}{2} \leq s_{2n} - s_n.$$

Supongamos que existe s tal que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Luego

$$\frac{1}{2} \leq \lim_{n\to\infty} s_{2n} - \lim_{n\to\infty} s_n = s - s = 0.$$

Llegamos a una contradicción. Por lo tanto la serie armónica no converge.

Teorema 7 (Condición necesaria para la convergencia de una serie)

- *Si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
- *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

Demostración. Supongamos que la serie converge y su suma es s. Luego

$$\begin{aligned} a_n &= s_n - s_{n-1}, \\ \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0, \end{aligned}$$

con lo cual el teorema queda demostrado. □

Nota:

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ es condición necesaria pero no suficiente para la convergencia.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ es condición suficiente para la divergencia.

Ejemplo. Consideremos la serie geométrica (de razón r)

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$$

Si $|r| \geq 1$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} r^n \neq 0 \Rightarrow$ la serie geométrica diverge.
En (2) se probó que si $r \neq 1$ entonces $s_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.
Luego, si $|r| < 1$ tenemos

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}. \tag{3}$$

Notar que es posible obtener una expresión analítica para la suma de una serie geométrica de razón $|r| < 1$.

Reindexar términos

Mientras se preserve el orden de sus términos, podemos reindexar cualquier serie sin alterar su convergencia ni su suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1+h}^{\infty} a_{n-h} = \sum_{n=1-h}^{\infty} a_{n+h} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

Adición o supresión de términos

En una serie, siempre podemos agregar o suprimir un número finito de términos sin alterar su convergencia o divergencia. En el caso de la convergencia, esto suele modificar la suma.

Ejemplo. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ converge para cualquier $k > 1$ y se cumple:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} a_n$$

Ejemplo. Considere la serie geométrica (de razón r):

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n, \qquad s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \qquad r \neq 1.$$

Vimos que si $|r| < 1$ luego $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-r}$. Si se suprime el primer término, tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n, \qquad s_n = \frac{r(1 - r^n)}{1 - r}, \qquad r \neq 1.$$

En este caso, si $|r| < 1$ luego $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{r}{1-r}$.

Teorema 8 (Propiedad de linealidad) *Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ series convergentes con sumas s' y s'', respectivamente. Si α, β son constantes, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ es convergente con suma $s = \alpha s' + \beta s''$.*

Demostración. Ver la demostración en Tom M. Apostol, 1982. □

Corolario 1 *Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ diverge.*

Demostración. Si $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ fuera convergente, también lo sería $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ puesto que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) + \sum_{n=1}^{\infty}(-a_n),$$

y por lo tanto, debiera valer el Teorema 8. □

Propiedad telescópica

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es telescópica cuando la representamos en la forma $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$, es decir cuando para una sucesión $\{b_n\}$ se cumple $a_n = b_n - b_{n+1}$. En tal caso tenemos:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}$$

Teorema 9 (Suma de series telescópicas) *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que $a_n = b_n - b_{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si la sucesión $\{b_n\}$ converge, en cuyo caso*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - L, \qquad \text{donde } L = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Ejemplo. Si $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, entonces

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

con lo que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$. Es decir, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge y su suma es 1.

Nota: Toda serie se puede ver trivialmente como una serie telescópica, puesto que siempre se puede elegir un b_1 arbitrario y hacer $b_{n+1} = b_1 - s_n$, $n \geq 1$.

$$\begin{array}{rrcll} & b_{n+1} & = & b_1 - s_n & \\ & b_n & = & b_1 - s_{n-1} & \\ a_n = & b_n - b_{n+1} & = & s_n - s_{n-1} & = a_n \end{array}$$

2.3. Criterios de Convergencia para Series de Términos No Negativos

Si los términos de la serie son no negativos, las sumas parciales también lo son.

$$a_n \geq 0, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \quad \Rightarrow \quad s_n \geq 0, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Teorema 10 (Criterio de acotación) *Si $a_n \geq 0$ para cada $n \geq 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si la sucesión de sus sumas parciales $\{s_n\}$ está acotada superiormente.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0,$$

por lo que la sucesión $\{s_n\}$ es monótona creciente. Luego, por el Teorema 2, la sucesión $\{s_n\}$ converge si y solo si está acotada superiormente. □

Teorema 11 (Criterio de comparación) *Si $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, y existe una constante $c > 0$ tal que $a_n \leq cb_n$, si $n \geq N$, entonces:*

- *Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*
- *Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.*

Demostración. Sean las sumas parciales $s_n = a_1 + \ldots + a_n$, $t_n = b_1 + \ldots + b_n$. Entonces $a_n \leq cb_n$ implica $s_n \leq ct_n$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, sus sumas parciales están acotadas. Si M es una cota, se tiene $s_n \leq cM$ y, por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es también convergente puesto que sus sumas parciales están acotadas por cM. □

Ejemplo. Considerar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos(n^3)}{2^n+n}$. Podemos escribir la siguiente desigualdad:

$$0 \leq \frac{2+\cos(n^3)}{2^n+n} \leq \frac{3}{2^n} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Sean

$$a_n = \frac{2+\cos(n^3)}{2^n+n}, \qquad b_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Luego se cumple $0 \leq a_n \leq b_n$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 3\sum_{n=1}^{\infty} 0,5^n$ converge (serie geométrica de razón $0,5 < 1$), entonces, por el criterio de comparación $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.

Teorema 12 (Criterio del límite) *Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que $a_n \geq 0$, $b_n > 0$, y sea*

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

Si λ es finito y $\lambda \neq 0$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Es decir, las dos series tienen el mismo carácter: ambas convergen o ambas divergen. (Notar que $0 < \lambda < \infty$).

Demostración. Sea $c \in (\lambda, \infty)$. Entonces existe algún $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n/b_n \leq c$ para todo $n \geq N$, es decir, $0 \leq a_n \leq cb_n$ para todo $n \geq N$. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge por el criterio de comparación (ver Teorema 11). Por otra parte, sea $d \in (0, \lambda)$. Existe algún $N' \in \mathbb{N}$ tal que $a_n/b_n \geq d$ para todo $n \geq N'$, es decir, $a_n \geq db_n \geq 0$ para todo $n \geq N'$. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también diverge por el criterio de comparación. $\square$

Teorema 13 (Criterio de la raíz) *Sea $\{a_n\}$ una sucesión tal que $a_n \geq 0$ y sea*

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Entonces

(a) Si $\alpha < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(b) Si $\alpha > 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

(c) Si $\alpha = 1$, el criterio no decide.

Demostración. Si $\alpha < 1$, elíjase L tal que $\alpha < L < 1$. Entonces $0 \leq (a_n)^{\frac{1}{n}} \leq L$ para todo $n \geq N$. Por lo tanto, $a_n \leq L^n$ para todo $n \geq N$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} L^n$ es convergente (serie geométrica de razón $L < 1$). Luego, por el criterio de comparación (ver Teorema 11) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
Para demostrar *(b)* se observa que $\alpha > 1$ implica $a_n > 1$ para una infinidad de valores de n y por lo tanto a_n no puede tender a 0. Por lo cual, no se cumple la condición necesaria de convergencia del Teorema 7, y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
Para demostrar *(c)*, consideremos dos ejemplos en los que $a_n = 1/n$, y $a_n = 1/n^2$. En ambos casos $\alpha = 1$. Sin embargo, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge mientras que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge. $\square$

Teorema 14 (Criterio del cociente) *Sea $\{a_n\}$ una sucesión tal que $a_n > 0$ y sea*

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Entonces

(a) Si $L < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(b) Si $L > 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

(c) Si $L = 1$, el criterio no decide.

Demostración. Si $L < 1$, elíjase z de manera que $L < z < 1$. Entonces ha de existir un N tal que $\frac{a_{n+1}}{a_n} < z$ para todo $n \geq N$. Luego

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < z = \frac{z^{n+1}}{z^n} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{z^{n+1}} < \frac{a_n}{z^n}, \quad \forall n \geq N.$$

Es decir, la sucesión $\{a_n/z^n\}$ es decreciente para $n \geq N$. En particular, $a_n/z^n \leq a_N/z^N$ para $n \geq N$, o de otro modo, $a_n \leq cz^n$, donde $c = a_N/z^N$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ converge (serie geométrica, razón $z < 1$), luego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge por el criterio de comparación.
Para demostrar *(b)*, basta observar que $L > 1$ implica $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \geq N$, y por lo tanto a_n no tiende a 0.
Para demostrar *(c)* se pueden tomar los mismos ejemplos que en la demostración del item *(c)* del Teorema 13. □

Teorema 15 (Criterio de la Integral) *Sea f una función positiva y estrictamente decreciente definida en $[1, +\infty)$ tal que $f(n) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si la integral $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.*

Demostración. Ver la demostración en Tom M. Apostol, 1982. □

Ejemplo. Consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Sea $f(x) = \frac{1}{x^2}$.
f es positiva para todo x.
$f'(x) = -2x^{-3} < 0$ si $x > 0 \;\Rightarrow\; f$ es estrictamente decreciente en $[1, +\infty)$.
Estudiaremos la integral:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b \to \infty} \left[\frac{-1}{x}\right]_1^b = \lim_{b \to \infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1.$$

Entonces $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

2.4. Criterios de Convergencia para Series Alternadas

Las series alternadas son de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots$$

donde cada $a_n > 0$.

Ejemplo. La **serie logarítmica** es una serie alternada:

$$\ln\,(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots .$$

Teorema 16 (Criterio de Leibniz) *Si $\{a_n\}$ es una sucesión monótona decreciente con límite 0, la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ converge.*

Demostración. La sucesión se sumas parciales $\{s_{2n}\}$ es creciente puesto que

$$s_{2(n+1)} - s_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0.$$

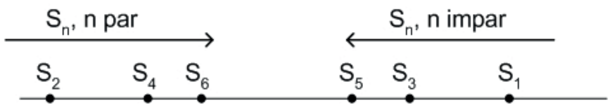

Figura 1: Demostración del criterio de Leibniz.

En forma similar, se puede demostrar que $\{s_{2n-1}\}$ es decreciente. Además, se cumple

$$s_{2n} < s_1 \text{ y } s_{2n-1} > s_2 \ \ \forall n.$$

Se tiene entonces que las sucesiones de sumas parciales son monótonas (crecientes las pares y decrecientes las impares) y acotadas (ver la representación en la Figura 1). Luego, ambas sucesiones son convergentes. Sea

$$s' = \lim_{n\to\infty} s_{2n}, \qquad s'' = \lim_{n\to\infty} s_{2n-1}.$$

Tenemos que

$$s' - s'' = \lim_{n\to\infty} (s_{2n} - s_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} (-a_{2n}) = 0.$$

Es decir, $s' = s''$ y la serie alternada es convergente. □

Ejemplo. Considerar la serie armónica alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$. La sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ es decreciente con límite 0. Por lo tanto la serie armónica alternada converge. Recordar que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ no converge.

2.5. Convergencia Condicional y Absoluta

Teorema 17 *Si $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge, también converge $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ y tenemos*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|. \tag{4}$$

Demostración. Definamos $b_n = a_n + |a_n|$. Resulta $b_n = 0$ o $b_n = 2|a_n|$. Luego siempre vale $0 \leq b_n \leq 2|a_n|$. Notar que $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ es una serie de términos no negativos. Como $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge y $2\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ domina a $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, luego $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ converge. Ahora $\sum_{n=1}^{\infty}a_n = \sum_{n=1}^{\infty}b_n - \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ y por el teorema de la propiedad de linealidad (ver Teorema 8), $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge. En cuanto a la desigualdad (4), es una propiedad conocida del valor absoluto. □

Definición.

- Una serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es **absolutamente convergente** si $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge.
- Una serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es **condicionalmente convergente** si $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge y en cambio $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ diverge.

3. Sucesiones y Series de Funciones

3.1. Definición

Definición. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Supongamos que para cada número natural n está dada una función $f_n : A \to \mathbb{R}$; la aplicación $n \to f_n$ recibe el nombre de **sucesión de funciones** (definidas en A).

Notación: $\{f_n\} = f_1,\ f_2,\ f_3\ \ldots,\ f_n,\ \ldots$

f_n es el término n-ésimo de la sucesión.

Para cada $x \in A$, podemos considerar la sucesión numérica que tiene por término n-ésimo el número real $f_n(x)$.

3.2. Convergencia Puntual y Uniforme

Definición. El **campo de convergencia** de una sucesión de funciones es el conjunto C de todos los puntos $x \in A$ para los que $\{f_n(x)\}$ converge.

Definición (Convergencia puntual). Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto A, S un subconjunto de A y f una función definida en S. Si $\forall x \in S$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, se dice que la sucesión $\{f_n\}$ **converge puntualmente** a f en S.

En este caso, a f se la llama la **función límite** de $\{f_n\}$ en S.

Cuando existe tal función f, decimos que $\{f_n\}$ es **convergente puntualmente** en S.

Ejemplo (Sucesión de funciones continuas con función límite discontinua).
La sucesión $\{x^n\}$ converge puntualmente en $[0,1]$ a la función f definida en dicho intervalo por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Ejemplo (Sucesión para la que el límite de la integral no es igual a la integral del límite). Sea $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$ para $0 \leq x \leq 1$. La sucesión $\{f_n(x)\}$ converge puntualmente a $f(x) = 0$, para todo $x \in [0,1]$. Luego, $\int_0^1 f(x)\ dx = 0$. Sin embargo,

$$\int_0^1 f_n(x)\ dx = n \int_0^1 x(1-x^2)^n\ dx = -\frac{n}{2}\frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1 = \frac{n}{2(n+1)}$$

Por consiguiente,

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\ dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ dx = 0.$$

Definición (Otra definición equivalente de convergencia puntual).
Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en A, S un subconjunto de A. La sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en S si y solo si para todo $x \in S$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N(\varepsilon, x)$ tal que siempre que $n > N(\varepsilon, x)$ se verifica $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

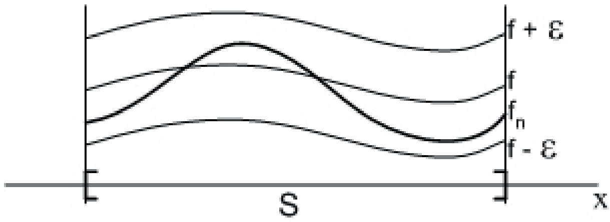

Figura 2: Interpretación gráfica de la convergencia uniforme. Se cumple que $f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$, si $n > N(\varepsilon)$, $\forall x \in S$.

Definición. Una **serie de funciones** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es un par ordenado de sucesiones de funciones $\{f_n, s_n\}$ relacionadas por la condición:

$$s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$,
f_n es el **término n-ésimo** de la serie
s_n es la **suma parcial n-ésima** de la serie

Una serie de funciones **converge puntualmente** a una función s en S si para todo $x \in S$, $s(x) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Definición (Convergencia uniforme). Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en A, S un subconjunto de A, f una función definida en S. Se dice que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en S si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N(\varepsilon)$ tal que siempre que $n > N(\varepsilon)$ se verifica $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in S$. (Ver interpretación en la Figura 2).

Toda sucesión $\{f_n\}$ que converge uniformemente a f en S, también converge puntualmente a f en S.

Convergencia uniforme y continuidad

A diferencia de la convergencia puntual, la convergencia uniforme conserva la continuidad.

Teorema 18 *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones que converge uniformemente en un conjunto S a una función f, y sea x un punto de S. Si cada función f_n es continua en x, entonces f también es continua en x.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Según la definición de convergencia uniforme, existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $t \in S$

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

de hecho, vale para todo $n > N(\frac{\varepsilon}{3})$.
f_n es continua en x, luego existe algún $\delta > 0$ tal que

$$|f_n(y) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

siempre que $|y - x| < \delta$. Entonces, si $|y - x| < \delta$ se tiene

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |f(y) - f_n(y) + f_n(y) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)| \\ &\leq |f(y) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \end{aligned}$$

Es decir, f es continua en x. □

Ejemplo. La sucesión $f_n(x) = x^n$ no converge uniformemente a

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \ \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \ = \ 1 \end{cases}$$

en $[0,\ 1]$. Pues si convergiera uniformemente, la función límite sería continua, ya que cada f_n es continua.

Definición. Una serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ se dice que converge uniformemente a una función s en S cuando la sucesión $\{s_n\}$ de sus sumas parciales,

$$s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n,$$

converge uniformemente a s en S.

Corolario 2 *Si una serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente a la función suma s en S y cada término f_n es una función continua en un punto $x \in S$, entonces f es continua en x.*

Convergencia uniforme e integración

La convergencia uniforme permite intercambiar el símbolo de integración con el paso al límite.

Teorema 19 *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas en un intervalo $[a, b]$ que convergen uniformemente en $[a, b]$ a una función f. Entonces f es integrable en $[a, b]$ y se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx.$$

Demostración. f es integrable porque es continua según el Teorema de convergencia uniforme y continuidad. Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int_a^b f_n(x)\ dx - \int_a^b f(x)\ dx \right| = \left| \int_a^b \big(f_n(x) - f(x)\big)\ dx \right|$$
$$\leq \int_a^b \big|f_n(x) - f(x)\big|\ dx \leq (b-a) \sup\left\{ \big|f_n(x) - f(x)\big| : x \in [a, b] \right\}.$$

Que $\{f_n\}$ converja uniformemente a f en $[a, b]$ implica que

$$\lim_{n\to\infty} \sup\left\{ \big|f_n(x) - f(x)\big| : x \in [a, b] \right\} = 0,$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_a^b f_n(x)\ dx - \int_a^b f(x)\ dx \right| = 0.$$

con lo cual el teorema queda demostrado. □

Condición suficiente para la convergencia uniforme de series de funciones

Teorema 20 (Criterio M de Weierstrass) *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *una serie de funciones que converge puntualmente hacia una función* s *en un conjunto* S*. Si existe una serie numérica de términos no negativos, convergente,* $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$*, tal que*

$$0 \leq |f_n(x)| \leq M_n, \quad \forall\ n \geq 1 \ y \ \forall\ x \in S,$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente en* S*.*

Demostración. Para cualquier $x \in S$ tenemos

$$\left|s(x) - s_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como la serie $\sum_{k=n+1}^{\infty} M_n$ converge, existe algún $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N(\varepsilon)$ se cumple $\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon$ (condición de Cauchy para una serie convergente). Por lo tanto

$$\sup\{|s(x) - s_n(x)| : x \in S\} < \varepsilon, \qquad n > N(\varepsilon),$$

con lo cual $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente a s en S. □

4. Series de Potencias

4.1. Definición

Definición. Una serie de potencias alrededor de $x = 0$ es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Una serie de potencias alrededor de $x = c$ es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots$$

en la cual el **centro** c y los coeficientes $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ son constantes.

Nota: En general x, c, a_0, a_1, $\cdots$ son números complejos pero consideraremos solamente el caso en que son números reales.

4.2. Intervalo de Convergencia

Cada serie de potencias está asociada a un intervalo, llamado **intervalo de convergencia** (círculo de convergencia en el plano complejo) tal que:

- la serie converge absolutamente para todo x interior al mismo.
- la serie diverge para todo x exterior al mismo.
- el comportamiento de la serie en los puntos frontera del intervalo no puede predecirse.

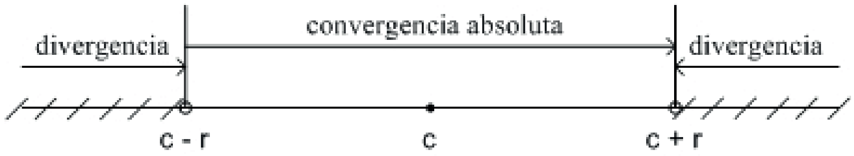

Figura 3: Intervalo de convergencia de una serie de potencias.

El intervalo de convergencia posee un **radio de convergencia** r alrededor del centro c (ver Figura 3). La demostración de la existencia del círculo de convergencia puede hallarse en Tom M. Apostol, 1982.
En general, el intervalo de convergencia puede determinarse mediante el criterio del cociente o de la raíz.

Ejemplo. Considerar la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Apliquemos el criterio del cociente. Si $x \neq 0$:

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1}$$

Se cumple $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$. Luego, la serie converge absolutamente para todo $x \neq 0$.
Si $x = 0$ la serie también converge y el radio de convergencia es $+\infty$.

Ejemplo. Considerar la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 3^n x^n$. Apliquemos el criterio de la raíz:

$$(n^2 3^n |x|^n)^{\frac{1}{n}} = 3|x| n^{\frac{2}{n}} \to 3|x|, \text{cuando } n \to \infty.$$

Por lo tanto la serie converge absolutamente si $|x| < 1/3$ y diverge si $|x| > 1/3$. Es decir, el radio de convergencia es $1/3$.
Esta serie diverge si $|x| = 1/3$, ya que $\left|n^2 3^n x^n\right| = n^2$.

Bibliografía

1. Tom M. Apostol, *CALCULUS*, Volumen 1, Editorial Reverté, 1982.

2. Thomas, Jr., and George B., *Cálculo. Varias variables*, Undécima edición, Pearson Education, México, 2006.