

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA  
(FCEIA-UNR)

## MÉTODOS NUMÉRICOS

Prof. Alejandro G. Marchetti

### Unidad III

## Resolución de Ecuaciones No Lineales



Junio de 2020



## 1. Algoritmos y Convergencia

En el curso estaremos analizando procedimientos de aproximación matemática, llamados *algoritmos*, relacionados con series de cálculos. Un **algoritmo**, para resolver un problema matemático, es un proceso iterativo que genera una sucesión de números (o puntos) de acuerdo a un conjunto de instrucciones precisas, junto con un criterio de parada.

Dado un vector  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$  y aplicando las instrucciones del algoritmo, obtenemos un nuevo punto  $\mathbf{x}_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ . Este proceso se puede describir mediante un *mapa algorítmico*  $\mathcal{A}$ . Dado un punto inicial  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , el mapa algorítmico genera la sucesión  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots$ , donde

$$\mathbf{x}_{k+1} \in \mathcal{A}(\mathbf{x}_k), \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

La transformación de  $\mathbf{x}_k$  a  $\mathbf{x}_{k+1}$  constituye una *iteración* del algoritmo. En el caso general,  $\mathcal{A}$  es un *mapa punto a conjunto* que asigna a cada punto en el dominio  $\mathcal{X}$  un subconjunto de  $\mathcal{X}$ . Si  $\mathcal{A}$  es un *mapa punto a punto*, escribiremos  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathcal{A}(\mathbf{x}_k)$ .

### 1.1. Criterios de Parada

A continuación se describen algunos criterios de parada que pueden aplicarse en algún paso de un algoritmo. Se elige una tolerancia  $\varepsilon > 0$  y se realizan nuevas iteraciones del algoritmo hasta que se cumpla una de las siguientes condiciones:

- Distancia luego de una iteración.

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\| < \varepsilon$$

- Distancia luego de  $N$  iteraciones.

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-N}\| < \varepsilon$$

- Distancia relativa en una iteración.

$$\frac{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|}{\|\mathbf{x}_{k-1}\|} < \varepsilon$$

- Diferencia en el valor de una función luego de  $N$  iteraciones.

$$|f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}_{k-N})| < \varepsilon$$

- Proximidad a cero de una función.

$$|f(\mathbf{x}_k)| < \varepsilon$$

Al usar cualquiera de estos criterios de parada pueden surgir problemas. Por ejemplo, existen sucesiones  $\{x_k\}$  con la propiedad de que las diferencias  $x_k - x_{k-1}$  convergen a cero, mientras que la sucesión diverge. Este es el caso de la sucesión de sumas parciales de la serie armónica, dada por  $x_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n}$ . Es conocido que la serie armónica diverge, aún cuando se tiene que  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k - x_{k-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$ . También es posible que  $f(x_k)$  sea cercano a cero, mientras que  $x_k$  difiere significativamente de la raíz  $\alpha$  de la función  $f$ .

Al programar un algoritmo iterativo, además de incluir como criterio de parada una de las tolerancias del error vistas, se debe parar el programa cuando se supere un máximo número de iteraciones. Esto es así debido a que el algoritmo puede no converger.

## 1.2. Orden de Convergencia

**Definición. (Orden de convergencia)** El orden de convergencia de una sucesión  $\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$  es el mayor número  $p \geq 1$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{x}_{k+1} - \bar{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}\|^p} = \beta < \infty$$

La velocidad de convergencia es mayor cuanto mayor sea  $p$  y menor sea  $\beta$ . Podemos distinguir los siguientes casos particulares:

- Si  $p = 1$  y  $\beta \in (0, 1)$  la convergencia es *lineal*, y  $\beta$  es la *tasa de convergencia*.
- Si  $p > 1$  o si  $p = 1$  y  $\beta = 0$ , la convergencia es *superlineal*.
- En particular, si  $p = 2$  y  $0 < \beta < \infty$ , la convergencia es *cuadrática* o de segundo orden.

**Ejemplo 1** Considere la convergencia de las siguientes sucesiones:

- *Convergencia lineal:*  $a_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n \rightarrow L = 0$

$$\{a_n\} = 0,1, 0,01, 0,001, \dots$$

$$\frac{|a_{n+1} - L|}{|a_n - L|} = 0,1$$

- *Convergencia superlineal:*  $a_n = \frac{1}{n!} \rightarrow L = 0$

$$\{a_n\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \dots$$

$$\frac{|a_{n+1} - L|}{|a_n - L|} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

- *Convergencia cuadrática:*  $a_n = \frac{1}{2^{2^n}} \rightarrow L = 0$

$$\frac{|a_{n+1} - L|}{|a_n - L|^2} = \frac{(2^{2^n})^2}{2^{2^{n+1}}} = \frac{2^{2^{n+1}}}{2^{2^{n+1}}} = 1$$

Supongamos que la sucesión  $\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$  tiene orden de convergencia  $p$ . Sea  $\alpha > 0$ , luego

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{x}_{k+1} - \bar{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}\|^{p+\alpha}} = \frac{\beta}{\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}\|^\alpha} = \infty$$

De esto se concluye que si una sucesión tiene convergencia de orden  $p$ , luego no tiene convergencia de orden  $p + \alpha$ , con  $\alpha > 0$ . Por otra parte, si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{x}_{k+1} - \bar{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}\|^p} = 0,$$

entonces es posible que el orden de convergencia sea mayor a  $p$ .

**Definición. (Convergencia superlineal)** La convergencia es superlineal si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{x}_{k+1} - \bar{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}\|} = 0.$$

A partir de esta definición se puede demostrar que la convergencia de orden  $p > 1$  es superlineal.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{x}_{k+1} - \bar{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}\|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{x}_{k+1} - \bar{\mathbf{x}}\| \|\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}\|^{p-1}}{\|\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}\|^p} = \beta \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}\|^{p-1} = 0$$

En particular, la convergencia cuadrática es superlineal.

## 2. Solución de Ecuaciones No Lineales de Una Variable

Hallar una o más raíces de la ecuación

$$f(x) = 0$$

es uno de los problemas más comunes de la matemática aplicada. En la mayoría de los casos estas ecuaciones no pueden resolverse de manera analítica, y por ello se recurre a la resolución numérica a través de *métodos iterativos*.

**Definición.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función no lineal. Se llama *raíz* o *cero* de la ecuación no lineal  $f(x) = 0$  a todo número  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $f(\alpha) = 0$ .

El siguiente teorema provee condiciones suficientes para la existencia de al menos una raíz en un intervalo  $[a, b]$  dado.

**Teorema 1 (Teorema de Bolzano)** Sea  $f$  continua en  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  tal que  $f(a)f(b) < 0$ , entonces  $\exists c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ .

Intuitivamente, el resultado afirma que, si una función es continua en un intervalo, entonces toma todos los valores intermedios comprendidos entre los extremos del intervalo. El teorema no especifica el número de raíces, solo afirma que como mínimo existe una.

### 2.1. Método de la Bisección

Este método se basa en el Teorema de Bolzano. Suponemos que  $f(x)$  es continua en  $[a, b]$  y que  $f(a)f(b) < 0$ . Luego  $f(x) = 0$  tiene al menos una raíz en dicho intervalo.

Dada una tolerancia del error  $\varepsilon > 0$ , el método de la bisección consiste en los siguientes pasos:

- 1) Definir  $c = (a + b)/2$
- 2) Si  $b - c \leq \varepsilon$ , aceptar  $c$  como la raíz y detenerse.
- 3) Si  $b - c > \varepsilon$ , comparar el signo de  $f(c)$  con el de  $f(a)$  y  $f(b)$ . Si  $f(b)f(c) \leq 0$ , reemplazar  $a$  con  $c$ . En caso contrario reemplazar  $b$  con  $c$ . Regresar al paso 1.

En general, partiendo de  $a_1 = a$  y  $b_1 = b$ , en cada iteración evaluamos

$$\begin{aligned} f(a_k)f(c_k) < 0 &\implies a_{k+1} = a_k, \quad b_{k+1} = c_k, \quad c_{k+1} = \frac{b_{k+1} + a_{k+1}}{2} \\ f(b_k)f(c_k) < 0 &\implies a_{k+1} = c_k, \quad b_{k+1} = b_k, \quad c_{k+1} = \frac{b_{k+1} + a_{k+1}}{2} \\ f(c_k) = 0 &\implies \alpha = c_k, \end{aligned} \tag{1}$$

### Acotación del error

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}(b_k - a_k), \quad k \geq 1$$

luego por inducción se obtiene

$$b_k - a_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} (b_1 - a_1).$$

Además,

$$|\alpha - c_k| \leq b_k - c_k = c_k - a_k = \frac{1}{2}(b_k - a_k).$$

Luego,

$$|\alpha - c_k| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k (b_1 - a_1). \quad (2)$$

Esta última fórmula permite acotar el error de aproximación de la raíz. Puesto que  $(\frac{1}{2})^k$  tiende a cero cuando  $k$  tiende a infinito, la fórmula (2) demuestra que  $c_k$  converge a la raíz  $\alpha$  cuando  $k$  tiende a infinito. Supongamos que queremos obtener la raíz con un error no superior a  $\varepsilon > 0$ :

$$|\alpha - c_k| \leq \varepsilon.$$

Esto se cumple si

$$\frac{1}{2^k}(b - a) \leq \varepsilon.$$

Es decir, para

$$k \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}.$$

### Ventajas del método de la bisección

- Converge siempre.
- Acotación del error garantizada. El error disminuye en cada iteración.
- Velocidad de convergencia garantizada. La cota del error se reduce a la mitad en cada iteración.

### Desventaja del método de la bisección

- la convergencia es relativamente lenta en comparación con otros métodos.

## 2.2. Método de Newton (o Método de Newton-Raphson)

Sea  $\alpha$  una raíz de la ecuación  $f(x) = 0$ . Supongamos que  $f \in \mathbb{C}^2$  en  $[a, b]$ . Sea  $x_0 \in [a, b]$  una estimación de  $\alpha$  tal que  $f'(x_0) \neq 0$  y  $x_0$  es cercano a  $\alpha$ . Consideremos el polinomio de Taylor para  $f(x)$  expandido alrededor de  $x_0$ ,

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}f''(c_x),$$

donde  $c_x$  está entre  $x$  y  $x_0$ .

Obtenemos una nueva estimación de  $\alpha$  igual a  $x_1$  de la siguiente manera:

$$p_1(x_1) = 0 = f(x_0) + (x_1 - x_0)f'(x_0),$$

de donde

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Gráficamente,  $x_1$  corresponde a la intersección con el eje  $x$  de la recta tangente a la función  $f(x)$  en el punto  $(x_0, f(x_0))$ , como se ilustra en la Figura 1.

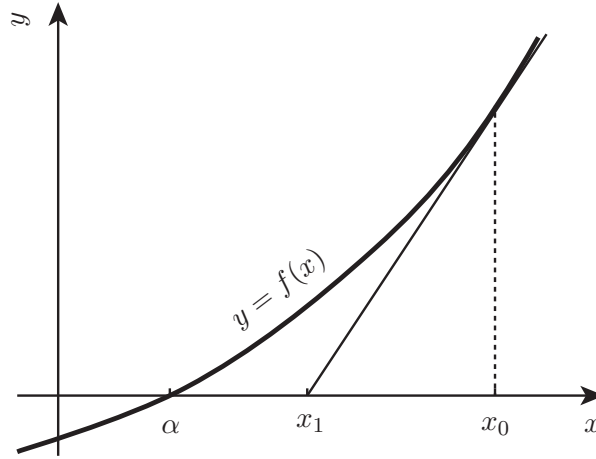


Figura 1: Método de Newton.

Repitiendo este procedimiento, obtenemos la fórmula general de la iteración de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

### Análisis del error

Usando el desarrollo de Taylor con resto se tiene

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + (\alpha - x_n)f'(x_n) + \frac{1}{2}(\alpha - x_n)^2 f''(c_n),$$

donde  $c_n$  está entre  $\alpha$  y  $x_n$ . Dividiendo por  $f'(x_n)$  tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \alpha - x_n + (\alpha - x_n)^2 \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)} \\ &= x_n - x_{n+1} + \alpha - x_n + (\alpha - x_n)^2 \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}, \end{aligned}$$

de donde

$$\alpha - x_{n+1} = \left[ \frac{-f''(c_n)}{2f'(x_n)} \right] (\alpha - x_n)^2.$$

Suponiendo que el método de Newton converge tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha - x_{n+1}|}{(\alpha - x_n)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{-f''(c_n)}{2f'(x_n)} \right] = \left| \frac{-f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \right|, \quad \text{si } f'(\alpha) \neq 0.$$

Es decir que cuándo el método de Newton converge, la convergencia es cuadrática.

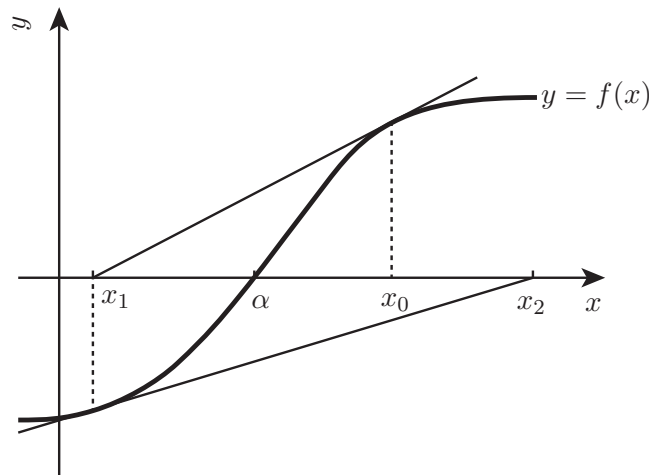


Figura 2: Ejemplo de divergencia del Método de Newton.

La convergencia del método de Newton no está garantizada a partir de cualquier valor inicial  $x_0$ , como se ilustra en la Figura 2.

Sin embargo, la convergencia está garantizada para  $x_0$  suficientemente cercano a la raíz  $\alpha$ . Veremos una demostración de esto más adelante, cuando estudiemos los métodos iterativos de punto fijo.

### Ventajas del método de Newton

- Converge rápidamente en la mayoría de los casos.
- Formulación sencilla.
- Comportamiento fácil de entender.

### Desventajas del método de Newton

- Puede no converger.
- Puede ocurrir que  $f'(\alpha) = 0$ .
- Se necesita conocer tanto  $f(x)$  como  $f'(x)$ .

## 2.3. Método de la Secante

Aproximamos la función  $f(x)$  mediante la línea secante que pasa por los dos puntos  $(x_0, f(x_0))$  y  $(x_1, f(x_1))$ . El punto  $x_2$  se obtiene como la raíz de la línea secante, y constituye una nueva aproximación de  $\alpha$ . Igualando las pendientes se tiene:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{0 - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

despejando obtenemos:

$$x_2 = x_1 - f(x_1) \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$



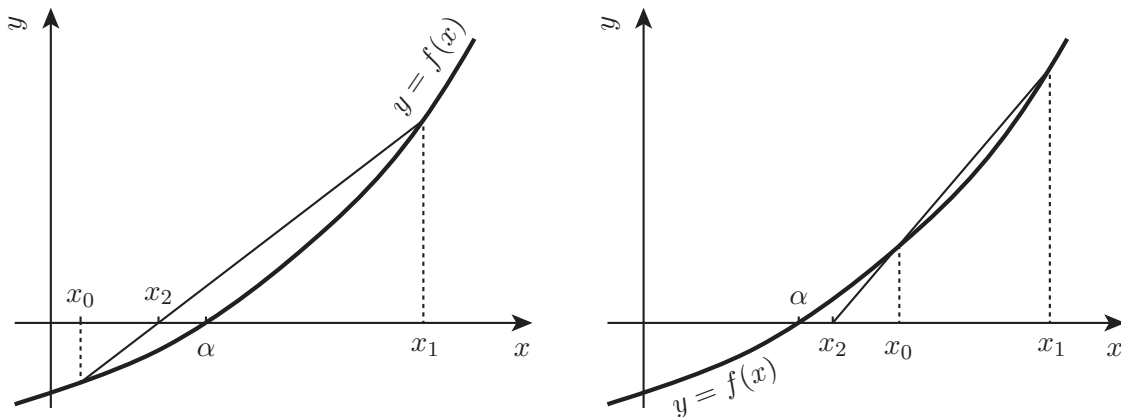


Figura 3: Método de la secante con distintos puntos iniciales.

### Fórmula general de la iteración:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n \geq 1$$

El método de la secante es una aproximación del método de Newton, donde la derivada de  $f$  se aproxima mediante una diferencia finita

$$f'(x) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Es un método de dos puntos, igual que el método de la bisección, pero casi siempre converge mas rápido que el método de la bisección.

### Análisis del error

Se puede demostrar que

$$\alpha - x_{n+1} = (\alpha - x_n)(\alpha - x_{n-1}) \left[ \frac{-f''(\xi_n)}{2f'(\rho_n)} \right]$$

donde  $\xi_n$  se encuentra entre el mínimo y el máximo de  $x_{n-1}$ ,  $x_n$  y  $\alpha$ , mientras que  $\rho_n$  se encuentra entre  $x_{n-1}$  y  $x_n$ .

Suponiendo que  $f \in \mathbb{C}^2$  y  $f'(\alpha) \neq 0$ , se puede demostrar que si  $x_n$  converge a  $\alpha$ , luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha - x_{n+1}|}{|\alpha - x_n|^p} = \left| \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \right|^{p-1} =: \beta,$$

con  $p = (\sqrt{5} + 1)/2 \approx 1,62$  (convergencia superlineal). Notar que el método de Newton converge mas rápido que el método de la secante.

### Ventajas del método de la secante

- Converge mas rápido que la convergencia lineal.
- No requiere conocer o estimar  $f'(x)$ .
- Requiere una sola evaluación de  $f(x)$  por iteración comparado con el método de Newton que requiere dos evaluaciones para estimar  $f'(x)$ .

### Desventajas del método de la secante

- Puede no converger.
- Puede tener dificultades si  $f'(\alpha) = 0$ .
- El método de Newton se puede generalizar mas fácilmente a sistemas de ecuaciones no lineales.

### 2.4. Método de la Falsa Posición (o Regula Falsi)

Es una combinacion de los metodos de la secante y de la biseccion. Elegimos las aproximaciones iniciales  $a$  y  $b$  tales que  $f(a)f(b) < 0$ .

$$a_1 = a, \quad b_1 = b$$

Obtenemos  $c_1$  aplicando el método de la secante.

$$\text{Si } f(a_1)f(c_1) < 0 \Rightarrow a_2 = a_1, \quad b_2 = c_1$$

$$\text{Si } f(b_1)f(c_1) < 0 \Rightarrow a_2 = c_1, \quad b_2 = b_1$$

$$\text{Si } f(c_1) = 0 \Rightarrow \alpha = c_1$$

Obtenemos  $c_2$  aplicando el metodo de la secante a  $a_2$  y  $b_2$ .

### Ventajas del método de la falsa posición

- Convergencia garantizada.

### Desventajas del método de la falsa posición

- Es más lento que el método de la secante.

### 2.5. Métodos Iterativos de Punto Fijo

La fórmula general de los métodos iterativos de punto fijo es:

$$x_{n+1} = g(x_n),$$

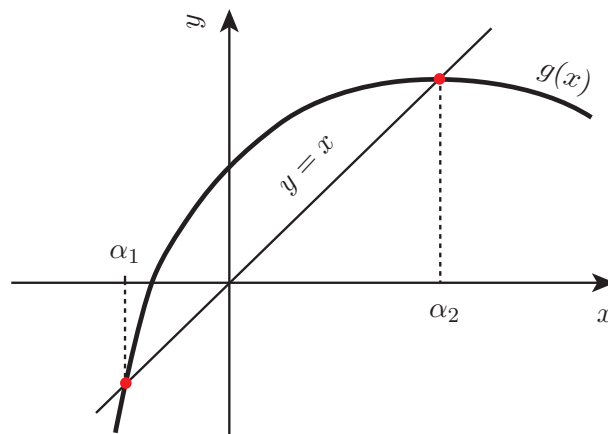
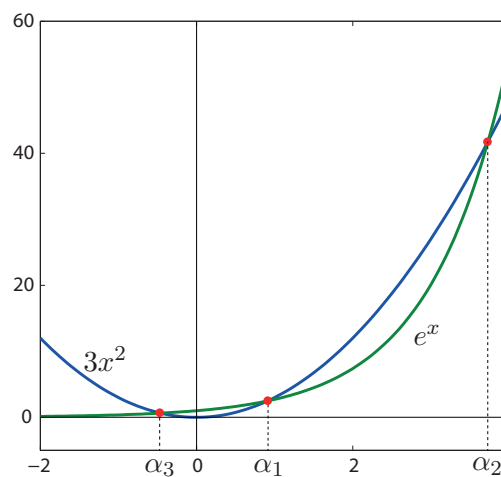
donde  $g(x)$  es una función continua apropiada.

**Definición.** Dada una función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua, decimos que  $\alpha$  es un punto fijo de  $g$  si

$$g(\alpha) = \alpha$$

Gráficamente, los puntos fijos son los puntos donde la función  $g(x)$  intersecta a la función  $y = x$ .

**Ejemplo 2** Se desea resolver la ecuación  $f(x) = 3x^2 - e^x = 0$ , hallando una raíz  $\alpha > 0$ . Esto es equivalente a resolver la ecuación  $3x^2 = e^x$ . En la Figura 5 vemos gráficamente que esta ecuación tiene 3 soluciones que corresponden a los puntos de intersección de las funciones  $3x^2$  y  $e^x$ . Si queremos hallar una raíz positiva de  $f(x)$  empleando un método de punto fijo, existen

Figura 4: Puntos fijos de una función  $g$ .Figura 5: Soluciones de la ecuación  $3x^2 - e^x = 0$ .

numerosas elecciones posibles de la función  $g$ . Consideraremos las siguientes tres alternativas:

$$x = g_1(x) = \log(3x^2)$$

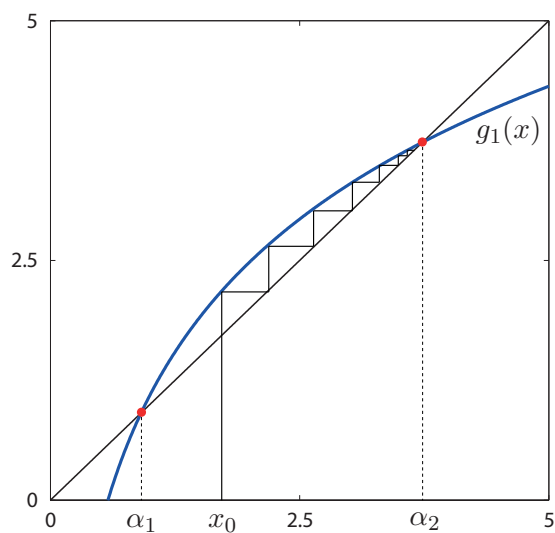
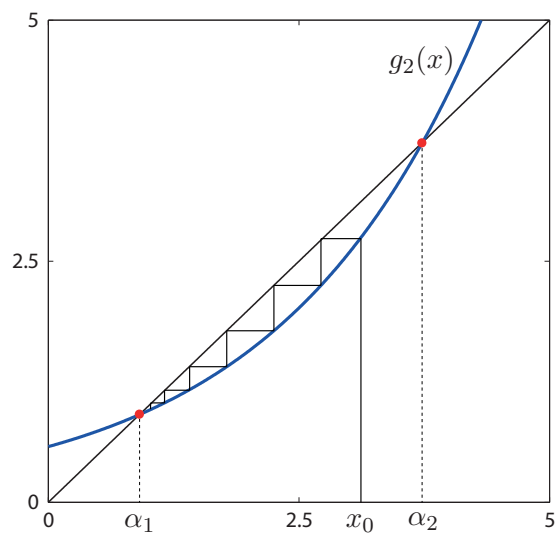
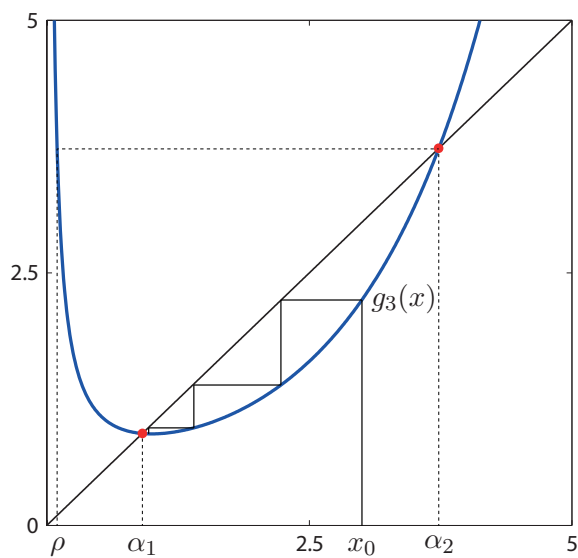
$$x = g_2(x) = \frac{e^{x/2}}{\sqrt{3}}$$

$$x = g_3(x) = \frac{e^x}{3x}$$

A partir de la gráfica de  $g_1(x)$  en la Figura 6 vemos que las iteraciones de  $x_{n+1} = g_1(x_n)$  convergen a  $\alpha_2$  para cualquier punto inicial  $x_0 > \alpha_1$ . En la Figura 7, vemos que las iteraciones de  $x_{n+1} = g_2(x_n)$  convergen a  $\alpha_1$  para cualquier punto inicial  $x_0 < \alpha_2$ . Por otra parte, en la Figura 8, vemos que las iteraciones de  $x_{n+1} = g_3(x_n)$  convergen a  $\alpha_1$  para cualquier punto inicial  $x_0 \in (\rho, \alpha_2)$ , y la velocidad de convergencia cerca de  $\alpha_1$  es mayor que en los casos anteriores.

En resumen, este ejemplo nos permite realizar las siguientes observaciones:

- El método puede converger o diverger dependiendo del valor inicial  $x_0$ .
- El método puede converger a una raíz u otra dependiendo de la elección de  $g(x)$ .
- La convergencia puede ser más rápida o más lenta dependiendo de la elección de  $g(x)$ .

Figura 6: Iteración de punto fijo con  $g_1(x)$ .Figura 7: Iteración de punto fijo con  $g_2(x)$ .Figura 8: Iteración de punto fijo con  $g_3(x)$ .

**Ejemplo 3 (El método de Newton)** El método de Newton, cuya fórmula general está dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

es un método iterativo de punto fijo con

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

**Existencia de soluciones de  $x = g(x)$**

**Lema 1 (Existencia de puntos fijos)** Sea  $g(x)$  una función continua en  $[a, b]$ , y suponga que  $g$  satisface la siguiente propiedad:

$$a \leq x \leq b \Rightarrow a \leq g(x) \leq b \quad (4)$$

Luego, la ecuación  $x = g(x)$  tiene al menos una solución  $\alpha$  en el intervalo  $[a, b]$ .

**Demostración.** Considerar la función  $f(x) = x - g(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ . Evaluando  $f(x)$  en los puntos extremos tenemos

$$f(a) \leq 0, \quad f(b) \geq 0$$

La función es continua en  $[a, b]$  y  $f(a)f(b) \leq 0$ , luego por el Teorema de Bolzano,  $\exists \alpha \in [a, b]$  tal que  $f(\alpha) = 0$ .  $\square$

En la Figura 9 vemos una interpretación grafica del Lema 1.

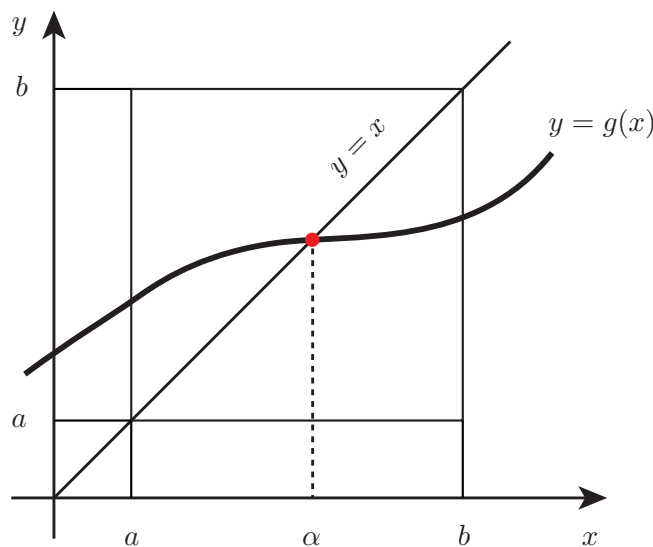


Figura 9: Interpretación gráfica del Lema 1.

**Teorema 2 (Condición suficiente de convergencia)** Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g \in \mathcal{C}^1$  en  $[a, b]$ . Suponga que  $g$  satisface

$$a \leq x \leq b \Rightarrow a \leq g(x) \leq b$$

Si

$$\lambda := \sup_{x \in [a, b]} |g'(x)| < 1$$

Luego:

I) Existe una solución única  $\alpha$  de la ecuación  $x = g(x)$  en  $[a, b]$ .

II) Para cualquier valor inicial  $x_0 \in [a, b]$ , la iteración  $x_{n+1} = g(x_n)$  converge a  $\alpha$ .

$$\text{III) } |\alpha - x_n| \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} |x_0 - x_1|, \quad n \geq 0.$$

$$\text{IV) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = g'(\alpha).$$

Por lo tanto, para  $x_n$  cercano a  $\alpha$ ,

$$\alpha - x_{n+1} \approx g'(\alpha)(\alpha - x_n)$$

**Demostración.** Las hipótesis sobre  $g$  permiten aplicar el Lema 1 para poder afirmar que existe al menos una solución de  $x = g(x)$  en  $[a, b]$ .

Por el teorema del valor medio, para  $w, z \in [a, b]$  se cumple:

$$g(w) - g(z) = g'(c)(w - z)$$

para algún  $c$  entre  $w$  y  $z$ . Luego

$$\begin{aligned} |g(w) - g(z)| &= |g'(c)||w - z| \\ &\leq \lambda |w - z|, \quad a \leq w, z \leq b \end{aligned} \quad (5)$$

Demostración de (I): Suponga que existen 2 soluciones  $\alpha$  y  $\beta$  en el intervalo  $[a, b]$ . Luego  $\alpha = g(\alpha)$  y  $\beta = g(\beta)$ . Restando ambas igualdades

$$\alpha - \beta = g(\alpha) - g(\beta)$$

Tomando el valor absoluto y aplicando la desigualdad (5) tenemos

$$\begin{aligned} |\alpha - \beta| &\leq \lambda |\alpha - \beta| \\ (1 - \lambda) |\alpha - \beta| &\leq 0 \end{aligned}$$

Como  $\lambda < 1$ , debemos tener  $\alpha = \beta$ . Por lo tanto  $x = g(x)$  tiene una solución única en  $[a, b]$ .

Demostración de (II): La propiedad  $a \leq x \leq b \Rightarrow a \leq g(x) \leq b$  implica que dado un valor inicial  $x_0 \in [a, b]$ , las iteraciones  $x_k \in [a, b]$ , para  $k \geq 1$ . Por ejemplo, si  $a \leq x_0 \leq b$ , entonces  $a \leq g(x_0) \leq b$ . Como  $x_1 = g(x_0)$ , esto demuestra que  $x_1 \in [a, b]$ . Para demostrar que las iteraciones convergen, restar  $x_{n+1} = g(x_n)$  de  $\alpha = g(\alpha)$ ,

$$\begin{aligned} \alpha - x_{n+1} &= g(\alpha) - g(x_n) \\ &= g'(c_n)(\alpha - x_n) \end{aligned}$$

para algún  $c_n$  entre  $\alpha$  y  $x_n$ . Luego,

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq \lambda |\alpha - x_n|, \quad n \geq 0 \quad (6)$$

Por inducción, obtenemos:

$$|\alpha - x_n| \leq \lambda^n |\alpha - x_0|, \quad n \geq 0 \quad (7)$$

Como  $\lambda < 1$ , se sigue que  $\lambda^n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Luego  $x_n \rightarrow \alpha$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Demostración de (III): Por propiedad del valor absoluto

$$|\alpha - x_0| \leq |\alpha - x_1| + |x_1 - x_0|$$

Utilizando la ecuación (6) con  $n = 0$ , obtenemos

$$|\alpha - x_0| \leq \lambda |\alpha - x_0| + |x_1 - x_0|$$

de donde

$$\begin{aligned} (1 - \lambda) |\alpha - x_0| &\leq |x_1 - x_0| \\ |\alpha - x_0| &\leq \frac{1}{1 - \lambda} |x_1 - x_0| \end{aligned}$$

Combinando la última expresión con la ecuación (7), tenemos

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} |x_0 - x_1|, \quad n \geq 0$$

Demostración de (IV): Vimos que  $\alpha - x_{n+1} = g'(c_n)(\alpha - x_n)$  para algún  $c_n$  entre  $\alpha$  y  $x_n$ . Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} g'(c_n) = g'(\alpha) \quad (8)$$

Con lo cual se completa la demostración.  $\square$

**Corolario 1** *Suponga que  $x = g(x)$  tiene una solución  $\alpha$  y que  $g(x)$  y  $g'(x)$  son continuas en un intervalo alrededor de  $\alpha$ . Luego,*

- a) *Si  $|g'(\alpha)| < 1$ , la iteración  $x_{n+1} = g(x_n)$  converge a  $\alpha$  para  $x_0$  suficientemente cercano a  $\alpha$ .*
- b) *Si  $|g'(\alpha)| > 1$ , la iteración  $x_{n+1} = g(x_n)$  no converge a  $\alpha$ .*
- c) *Si  $|g'(\alpha)| = 1$ , no se pueden sacar conclusiones.*

**Demostración.**

Demostración de (a): Vimos que  $\alpha - x_{n+1} = g'(c_n)(\alpha - x_n)$  para algún  $c_n$  entre  $\alpha$  y  $x_n$ . Luego,

$$|\alpha - x_{n+1}| = |g'(c_n)| |\alpha - x_n|$$

Siendo  $g'(x)$  continua y  $|g'(\alpha)| < 1$ ,  $\exists \varepsilon > 0$  tal que

$$|g'(x)| < 1, \quad \forall x \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$$

Suponer que  $x_n \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ , luego  $c_n$  también pertenece a  $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$  y  $|g'(c_n)| < 1$ .

Por lo tanto,  $x_{n+1}$  está más próximo a  $\alpha$  que  $x_n$  y  $x_{n+1} \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ . Siendo  $x_{n+1} = g(x_n)$ , se verifica la condición

$$x_n \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon] \Rightarrow g(x_n) \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$$

Vemos que se cumplen las condiciones del Teorema 2 usando  $[a, b] = [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ , lo cual demuestra que las iteraciones convergen a  $\alpha$  para  $x_0$  suficientemente cercano a  $\alpha$ .

Demostración de (b): Del mismo modo, siendo  $g'(x)$  continua y  $|g'(\alpha)| > 1$ ,  $\exists \varepsilon > 0$  tal que

$$|g'(x)| > 1, \quad \forall x \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$$

Suponer que  $x_n \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ , luego  $c_n$  también pertenece a  $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$  y  $|g'(c_n)| > 1$ .

Por lo tanto,  $x_{n+1}$  está más alejado de  $\alpha$  que  $x_n$ , y las iteraciones no convergen a  $\alpha$ .

Demostración de (c): Depende de cada caso en particular. En caso de converger, el método sería impráctico ya que la convergencia sería demasiado lenta.  $\square$

**Ejemplo 4 (El método de Newton)** *Vimos que el método de Newton es un método iterativo de punto fijo con*

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

*Diferenciando obtenemos*

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'(x)} + \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

*Evaluando  $g'(\alpha)$ ,*

$$g'(\alpha) = 0$$

*ya que  $f(\alpha) = 0$ . Siendo  $|g'(\alpha)| = 0 < 1$ , queda demostrado que el método de Newton converge a la raíz  $\alpha$  para  $x_0$  suficientemente cercano a  $\alpha$ .*

### 3. Solución de Sistemas de Ecuaciones No Lineales

Consideraremos sistemas de  $p$  ecuaciones y  $p$  incógnitas:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0 \\ \vdots \\ f_p(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

En forma vectorial:  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ,

$$\text{con } \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

#### 3.1. Método Iterativo de Punto Fijo Multivariable

Reescribimos el sistema de ecuaciones (9) como

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_p) \\ x_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_p) \\ \vdots \\ x_p = g_p(x_1, x_2, \dots, x_p) \end{cases}$$



Con lo cual la iteración de punto fijo para  $n \geq 1$  queda

$$\begin{cases} x_{1,n+1} = g_1(x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{p,n}) \\ x_{2,n+1} = g_2(x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{p,n}) \\ \vdots \\ x_{p,n+1} = g_p(x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{p,n}) \end{cases}$$

### 3.2. Método de Newton Multivariable

Tomaremos como punto inicial el vector  $\mathbf{x}_0 = [x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{p,0}]^T$ . La aproximación de Taylor de primer grado del sistema de ecuaciones  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  está dado por:

$$\mathbf{p}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{J}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

donde  $\mathbf{J}$  es la matrix jacobiana de  $\mathbf{f}$ ,

$$\mathbf{J} := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \frac{\partial f_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p} \end{bmatrix}$$

El punto  $\mathbf{x}_1$  se obtiene igualando a cero  $\mathbf{p}_1(\mathbf{x})$ :

$$\mathbf{p}_1(\mathbf{x}_1) = \mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{J}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)$$

de donde

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - [\mathbf{J}(\mathbf{x}_0)]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0), \quad \text{si } \mathbf{J}(\mathbf{x}_0) \text{ es no singular.}$$

Esto nos lleva a la iteración general del método de Newton multivariable:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - [\mathbf{J}(\mathbf{x}_n)]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_n), \quad \text{si } \mathbf{J}(\mathbf{x}_n) \text{ es no singular.}$$

En general, para sistemas de muchas ecuaciones resulta poco práctico para realizar los cálculos, ya que se requiere calcular la inversa de la matrix jacobiana en cada iteración. Existen variantes del método de Newton, computacionalmente menos demandantes, que utilizan aproximaciones de la inversa de la matrix jacobiana.

## Bibliografía

1. Kendall E. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, Second edition, John Wiley & Sons, 1989.
2. Richard L. Burden y J. Douglas Faires, *Análisis Numérico*, Séptima edición, Cengage Learning, México D.F., 2009.
3. Sergio Plaza, *Métodos Numéricos*, Depto. de Matemática, Facultad de Ciencias, Universidad de Santiago de Chile, 2007.