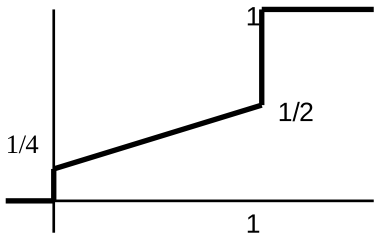
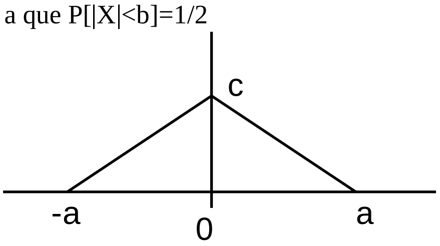
Alguns exercícios TP de MPEI (2022/10/28)

1- A função de distribuição da variável X está indicada na figura.
Determine as probabilidades dos acontecimentos
P[X <-1/2] , P[X < 0] , P[X ≤ 0] , P[1/4 ≤ X <1] , P[1/4 ≤ X ≤ 1], P[X > 1/2] e P[X > 5].



<u>Sugestão:</u> Note que esta variável aleatória é do tipo mista pelo que $F_X(x)$ e $f_X(x)$ são discretas em algumas partes do eixo real e contínuas noutras.

2. Uma variável aleatória tem uma densidade de probabilidade como se mostra na figura
   (a) Determine a constante *c*
   (b) Calcule a função de distribuição
   (c) Determine *b* de modo a que P[|X|<b]=1/2



<u>Sugestões:</u>
(a) Relembre as condições que $f_X(x)$ tem de verificar para que possa ser uma função densidade de probabilidade? $\rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1$
(b) A f.d.p. tira-se directamente do gráfico. É só relembrar como se calcula $F_X(x)$ a partir de $f_X(x)$, (*X* é uma variável aleatória contínua).

3. Numa turma 60% são génios, 70% gostam de chocolate e 40% estão em ambos os grupos.
Calcular a probabilidade de selecionar um aluno ao acaso e de não ser génio nem gostar de chocolate.

4. Um fabricante de material eletrónico utiliza chips de três fornecedores A, B e C. Sabe-se que a probabilidade de haver chips defeituosos é: 0.001 para o fornecedor A, 0.005 para o fornecedor B e 0.01 para o fornecedor C. Escolhendo aleatoriamente um chip e sendo este defeituoso calcule as probabilidades de ser fornecido pelo fabricante A, pelo fabricante B e pelo fabricante C:
   (a) Considerando que o fabricante tem igual número de chips de cada fornecedor.
   (b) Considerando que metade dos chips do fabricante são fornecidos por C.

5. Determine a probabilidade de uma variável aleatória normal diferir da média por um valor superior a 5 vezes o seu desvio padrão.

6. Considere-se uma fonte discreta sem memória que gera saídas pertencentes a um conjunto de 4 símbolos com as probabilidades assinalas na tabela seguinte, e considere-se que cada símbolo é codificado em palavras de comprimento variável de acordo com o mapeamento expresso na Tabela.

Símbolo	Prob.	Código
1	0.5	0
2	0.25	10
3	0.125	110
4	0.125	111

1)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/4, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Função Distribuição

$P(X < -1/2) = F_X(-\frac{1}{2}^-) = 0$

$P(X < 0) = F_X(0^-) = 0$

$P(X \leq 0) = F_X(0) = 1/4$

$P(1/4 \leq X < 1) = F_X(1^-) - F_X(1/4^-)$

$= 1/2 - (1/4 + 1/4 \times 1/4)$

$= 8/16 - 5/16 = 3/16$

$P(X > 1/2) = 1 - P(X \leq 1/2)$

$= 1 - F_X(1/2)$

$= 1 - (1/4 + 1/4 \times 1/2)$

$= 1 - 1/4 + 1/8$

$= 5/8$

$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5)$

$= 1 - F_X(5)$

$= 0$

2. a) A Soma das Probabilidades tem de ser 1:

$a \times \frac{c}{2} + a \cdot \frac{c}{2} = 1 \Leftrightarrow a \times c = 1$

$\Leftrightarrow c = \frac{1}{a}$

2. b) Integrar

2. C)

3)

A - Ser génio   B - gostar de chocolate

$P(A) - 0,6$

$P(B) - 0,7$ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$

$P(A|B) - 0,4$ $= 1 - 0,6 = 0,4$ $= 1 - 0,7 = 0,3$

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = 1 - P(A|B)$$
$$= 1 - 0,4 = 0,6$$

Dado que

$$\underbrace{P(\bar{A}|\bar{B})}_{\text{Regra de Bayes}} = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\bar{B}|\bar{A})\,P(\bar{A})}{P(\bar{B})} = \frac{0.6 \times 0.4}{0.3}$$

$$= \frac{0.024}{0.3} = 0.08 = 8\%$$

→ Probabilidade de não ser génio e não gostar de chocolate

4. a)

$P(D|A) = 0,001$

$P(D|B) = 0,005$

$P(D|C) = 0,01$

$$P(D) = P(D|A).P(A) + P(D|B) \times P(B) + P(D|C) \times P(C)$$
$$= 0,001 \times 1/3 + 0,005 \times 1/3 + 0,01 \times 1/3$$
$$= 0,00033 + 0,00167 + 0,00333 = 0,00533$$

$$P(A|D) = \frac{P(D|A).P(A)}{P(D)} = \frac{0.001 \times 0.33}{0,00533} \simeq 0,06 = 6\%$$

$$P(B|D) = \frac{P(D|B).P(B)}{P(D)} = \frac{0.005 \times 0.33}{0,00533} \simeq 0,31 = 31\%$$

$$P(C|D) = \frac{P(D|C) \cdot P(C)}{P(D)} = \frac{0.01 \times 0.33}{0,00533} \simeq 0,62 = 62\%$$

4.b)

$$P(D = P(D|A) . P(A) + P(D|B) \times P(B) + P(D|C) \times P(C)$$

$$= 0,001 \times 0.25 + 0,005 \times 0.25 + 0,01 \times 0.5$$

$$= 0,00025 + 0,00125 + 0,005 = 0,0065$$

$$P(A|D) = \frac{P(D|A) \cdot P(A)}{P(D)} = \frac{0.001 \times 0.25}{0,0065} \simeq 0,04 = 4\%$$

$$P(B|D) = \frac{P(D|B) \cdot P(B)}{P(D)} = \frac{0.005 \times 0.25}{0,0065} \simeq 0,20 = 20\%$$

$$P(C|D) = \frac{P(D|C) \cdot P(C)}{P(D)} = \frac{0.01 \times 0.50}{0,0065} \simeq 0,77 = 77\%$$

6)

$$E[X] = \mu = x_i \, P_i = 1 \times 0.5 + 2 \times 0.25 + 3 \times 0.125 + 4 \times 0.125$$

$$= 0.5 + 0.5 + 0.375 + 0.5 = 1,875 \simeq \boxed{2}$$

Comprimento médio do Código

Determine o comprimento médio do código.

7. Uma doença rara é diagnosticada com um teste que em 95% dos casos dá um resposta correcta: se a pessoa tem a doença o teste é positivo com probabilidade 0.95, e se a pessoa não tem a doença o teste é negativo com probabilidade 0.95. Uma pessoa escolhida aleatoriamente tem probabilidade 0.001 de ter a doença.
Se uma pessoa escolhida de forma aleatória fizer o teste e o resultado for positivo, qual é a probabilidade de ter a doença?

8. O João entra num torneio de xadrez com jogadores de três níveis: 50% dos jogadores são do nível 1, 25% dos jogadores são do nível 2, e os restantes jogadores são do nível 3. As probabilidades de o João vencer os jogadores de cada nível são: 0.3, 0.4 e 0.5, respetivamente.

(a) Escolhendo um jogador ao acaso, qual é probabilidade de o João vencer o jogo?
(b) Sabendo que o João venceu o jogo, qual é a probabilidade de ter sido com um jogador do nível 1?

9. Considere uma experiência aleatória cujo espaço de amostragem é S = {0, 1, 2} × {0, 1, 2}. Considerando todos os resultados equiprováveis:

(a) Determine dois acontecimentos independentes.
(b) Há três acontecimentos independentes? (Não considere o acontecimento certo, nem o acontecimento impossível).

10. Um símbolo binário é transmitido por um canal ruidoso, onde a probabilidade de um “0” ser recebido incorretamente é ε_0, e a probabilidade de um “1” ser recebido incorretamente é ε1.

(a) Supondo que são enviados “0”s e “1”s com probabilidades p e (1−p), respetivamente, calcule a probabilidade de receber os símbolos binários corretamente.
(b) Calcule a probabilidade de receber a sequência “1011” corretamente.
(c) Para aumentar a fiabilidade da informação recebida, cada símbolo é enviado 3 vezes e na receção a decisão é tomada por maioria. Supondo que se envia um “0” (i.e “000”), qual é a probabilidade de o recetor decidir pelo símbolo correto?
(d) Sabendo que o recetor recebeu “101”, qual é a probabilidade de ter sido enviado um “0”?

11. Considere uma variável aleatória, *X*, relativa ao valor obtido no lançamento de um dado não honesto em que P(*X* = 6)= 0.4 e as probabilidades dos outros resultados possíveis são iguais.
Calcule a média e variância de *X*.

12. Para uma variável aleatória com distribuição uniforme entre -1 e 3, calcule:

(a) A média e a variância de *X*.
(b) P(-0.5 < X < 2)

13. Os resultados de um exame, *X*, têm distribuição normal com média 9 e desvio padrão 2.
Sendo $Y = aX + b$, calcule as constantes a e b de forma a que Y tenha média 10 e variância 6.

14. Dada uma variável aleatória normal com média 1 e desvio padrão 2, calcule as seguintes probabilidades:

(a) $P\left[X < 1\right]$;

(b) $P\left[X < 1\right]$;

(c) $P\left[-\ 2 < X < 1\right]$

Sugestão:
Utilize uma tabela de Q(*x*).

7)

$P(+) = 0.95$

$P(+ \mid \text{doença}) = 0,95$

$P(\overline{\text{doença}} \mid \overline{+}) = 0,95$

$P(\text{doença}) = 0,001$

$$P(\text{doença} \mid +) = \frac{P(+ \mid \text{doença}) \times P(\text{doença})}{P(+)}$$

$$= \frac{0.95 \times 0.001}{0.95} = \frac{0.00095}{0.95} = 0.001$$

$$P(\text{doença} \mid +) = \frac{P(+ \mid \text{doença}) \times P(\text{doença})}{P(+ \mid \text{doença}) \times P(\text{doença}) + P(+ \mid \overline{\text{doença}}) P(\overline{\text{doença}})}$$

$$= \frac{0.95 \times 0.01}{0.95 \times 0.01 + (1 - P(\overline{+} \mid \overline{\text{doença}}))(1 - P(\text{doença}))}$$

$$= \frac{0.00095}{0.00095 + (1 - 0,95)(1 - 0,001)} = \frac{0.00095}{0.00095 + 0.05 \times 0.999}$$

$$= \frac{0.00095}{0.00095 + 0.04995} = \frac{0.00095}{0.0509} \simeq 0,02 = 2\ \%$$

15. Dada as probabilidades conjuntas das variáveis X e Y:

X/Y	**-1**	**0**	**1**
-1	1/8	1/8	1/24
0	1/8	1/4	1/8
1	1/24	1/8	1/24

(a) Calcule a média e a variância de X.
(b) Calcule a cov(X,Y),
(b) Diga se as variáveis X e Y são independentes.
(b) Calcule as probabilidades conjuntas das variáveis $W = X^2$ e $Z = Y^2$.
(c) Diga se W e Z são independentes?

16. Sabendo que X e Y são duas variáveis aleatórias, calcule $E[(X+Y)^2]$.