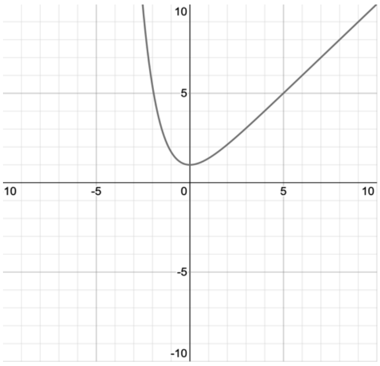
Практическое задание к Уроку 7. Производная функции одной переменной. Часть 2

1. Найти интервалы возрастания и убывания функций:

1) $f(x) = x + e^{-x}$



$f'(x) = (x + e^{-x})' = 1 + e^{-x} \cdot (-x)' = 1 + e^{-x} \cdot (-1 \cdot x^{1-1}) = 1 - e^{-x}$

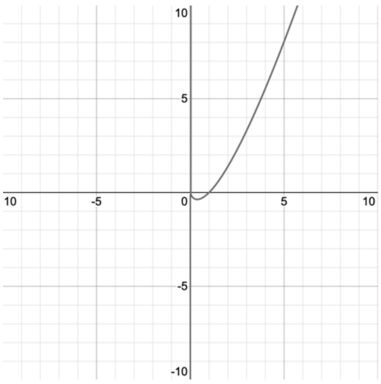
$1 - e^{-x} = 0$

$\frac{e^x - 1}{e^x} = 0$

$e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$ – нуль функции

$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
Функция убывает	Функция возрастает

2) $f(x) = x \ln x$

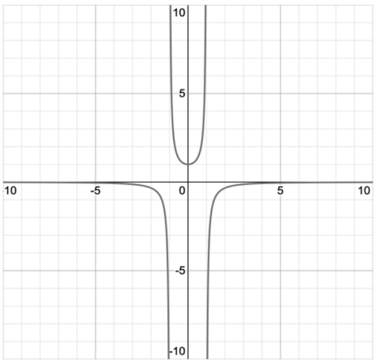


$f'(x) = x' \ln x + x \ln x' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$\ln x + 1 = 0 \Longrightarrow x = 0.36788$ – нуль функции

$(-\infty; 0.36788)$	$(0.36788; +\infty)$
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
Функция убывает	Функция возрастает

3) $y = \frac{1}{1-x^2}$



$x = \pm 1$ – точки разрыва функции

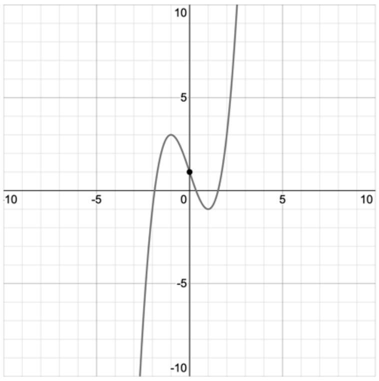
$$y' = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)' = \frac{1' \cdot (1-x^2) - 1 \cdot (1-x^2)'}{(1-x^2)^2} = \frac{-1 \cdot (0-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

$\frac{2x}{(1-x^2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$ – нуль функции

$(-\infty; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$
$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$
Функция убывает	Функция убывает	Функция возрастает	Функция возрастает

2. Найти экстремумы функций:

1) $f(x) = x^3 - 3x + 1$



$f'(x) = (x^3 - 3x + 1)' = 3x^2 - 3$

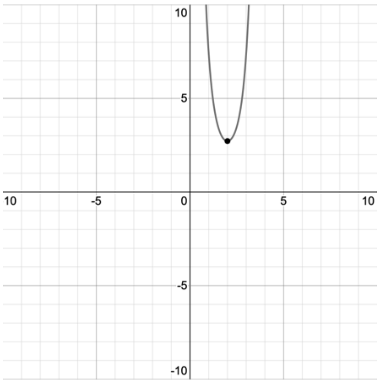
$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ – нули функции

$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
Функция возрастает	Функция убывает	Функция возрастает

$x = -1$ является локальным максимумом, поскольку в его окрестностях производная функции меняет знак с $+$ на $-$

$x = 1$ является локальным минимумом, поскольку в его окрестностях производная функции меняет знак с $-$ на $+$

$2) y = e^{x^2-4x+5}$



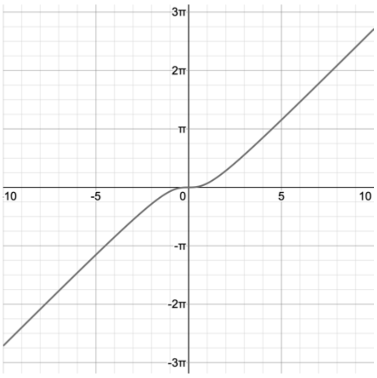
$y' = \left(e^{x^2-4x+5}\right)' = e^{x^2-4x+5} \cdot (x^2 - 4x + 5)' = e^{x^2-4x+5} \cdot (2x - 4) = 2(x - 2) \cdot e^{x^2-4x+5}$

$(x - 2) \cdot e^{x^2-4x+5} = 0 \Longrightarrow x - 2 = 0 \Longrightarrow x_1 = 2, x_2 = 5.428766$ – нули функции

$(-\infty;\ 2)$	$(2;\ 5.428766)$	$(5.428766;\ +\infty)$
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$
Функция убывает	Функция возрастает	Функция возрастает

$x = 2$ является локальным минимумом, поскольку в его окрестностях производная функции меняет знак с $-$ на $+$

$3) y = x - arctg\ x$



$y' = (x - arctg\ x)' = 1 - \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1 + x^2 - 1}{1 + x^2} = \frac{x^2}{1 + x^2}$

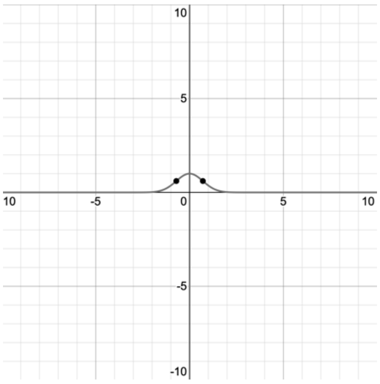
$\frac{x^2}{1+x^2} = 0 \Longrightarrow x^2 = 0$ – нуль функции

$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$
Функция возрастает	Функция возрастает

Локальные максимум и/или минимум отсутствуют.

3. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функций:

1)$f(x) = e^{-x^2}$



$f'(x) = \left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2} \cdot (-x^2)' = -2x \cdot e^{-x^2}$

$f''(x) = \left(-2x \cdot e^{-x^2}\right)' = (-2x)' \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot \left(e^{-x^2}\right)' = -2e^{-x^2} - 2x \cdot \left(-2x \cdot e^{-x^2}\right) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$

$-2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 0$

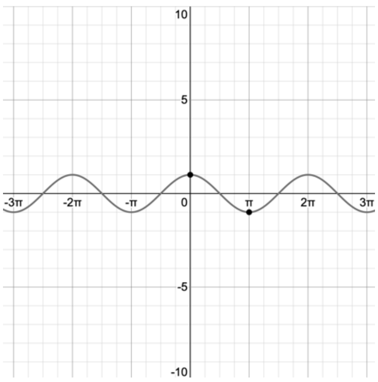
$2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0$

$2e^{-x^2} = 0 \Longrightarrow e^{-x^2} = 0 \Longrightarrow \ln e^{-x^2} = \ln 0 \Longrightarrow$ содержит неопределенность

$2x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ – точки перегиба функции

$\left(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
Функция вогнута	Функция выпукла	Функция вогнута

2)$\mathrm{y} = \cos \mathrm{x}$



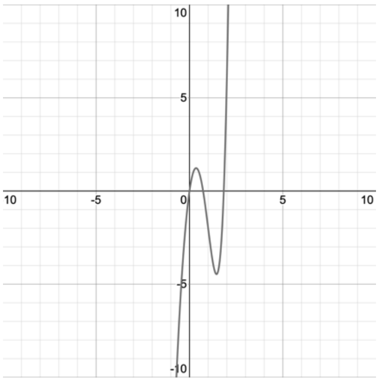
$\mathrm{y}' = \cos x' = -\sin x$

$\mathrm{y}'' = -\sin x' = -\cos x$

$-\cos x = 0 \Longrightarrow x_1 = 7.8539816, x_2 = 10.995574$ – точки перегиба функции

$(-\infty;\ 7.8539816)$	$(7.8539816; 10.995574)$	$(10.995574; +\infty)$
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
Функция выпукла	Функция вогнута	Функция выпукла

$3) y = x^5 - 10x^2 + 7x$



$y' = (x^5 - 10x^2 + 7x)' = 5x^4 - 20x + 7$

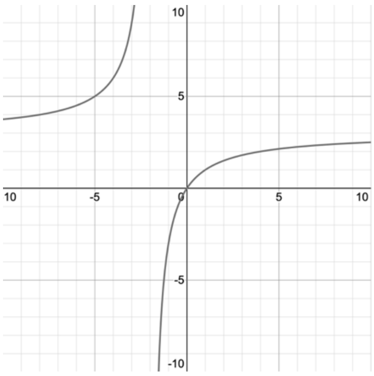
$y'' = (5x^4 - 20x + 7)' = 20x^3 - 20$

$20x^3 - 20 = 0 \Rightarrow x = 1$ – точка перегиба функции

$(-\infty;\ 1)$	$(1; +\infty)$
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
Функция выпукла	Функция вогнута

4. Найти асимптоты графиков функции:

$1) y = \frac{3x}{x+2}$



$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(kx + b - f(x)\right)$ – определение асимптоты

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{3x}{x+2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{3x}{x+2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x+2} = 0$$

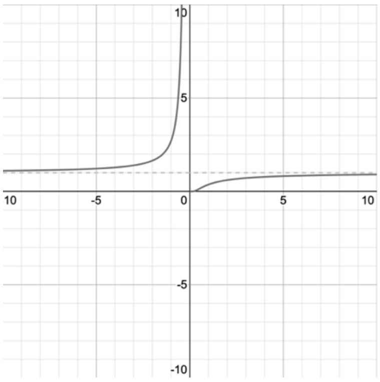
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x+2} - 0\cdot x = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x+2} = 3$$

$y = 3$ – горизонтальная асимптота

$x_1 = -2$ – вертикальная асимптота

$\lim\limits_{x\to -2\pm 0}\frac{3x}{x+2} = \mp\infty$ – пределы в точке $x_1 = -2$ (точка разрыва 2-го рода)

$2) y = e^{-\frac{1}{x}}$



При $x = 0$ данная функция не определена.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(kx + b - f(x)\big)$ – определение асимптоты

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x\cdot e^{\frac{1}{x}}} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{1}{x}} - 0\cdot x = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = 1$$

$y = 1$ – горизонтальная асимптота

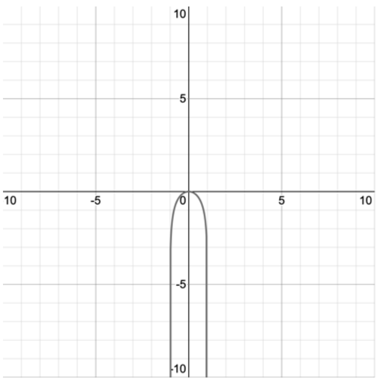
Вертикальные асимптоты находятся в точках бесконечных разрывов.

Вертикальные асимптота отсутствуют.

5. Провести полное исследование и построить графики функций:

$1) y = ln(1 - x^2)$

a)График функции



b)Область определения функции
$1 - x^2 > 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow \{x| -1 < x < 1\}$

c)Четность, нечетность и периодичность

$y(-x) = ln(1 - x^2)$

$y(-x) = y(x) \Rightarrow$ четная функция

d)Участки непрерывности функции, точки разрыва и вид разрыва

$x = \pm 1$ – точки устранимого разрыва функции

$y = ln(1 - x^2)$ – функция непрерывна

e)Точки пересечения графика с осями координат

$x = 0, y = 0$ – пересечение с осью y

$y = 0;\ ln(1 - x^2) = 0 \Longrightarrow x = 0,$ – пересечение с осью x

f)Интервалы знакопостоянства функции

$f(x) < 0 \Leftrightarrow \{x | -1 < x < 1\}$

g)Асимптоты

$\lim_{x \to \pm\infty} \left(kx + b - f(x)\right)$ – определение асимптоты

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{ln(1 - x^2)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{ln(1 - x^2)}{x} = 0$$

$b = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - kx = \lim_{x \to \pm\infty} ln(1 - x^2) - 0 \cdot x = \infty$ – наклонные асимптоты функции отсутствуют

h)Интервалы возрастания и убывания, экстремумы

$$y' = ln(1 - x^2)' = ln(1 - x^2) = \frac{1}{1 - x^2} \cdot (1 - x^2)' = \frac{-2x}{1 - x^2}$$

$x = 0$ – нуль функции

$(0; +\infty)$ – интервал возрастания

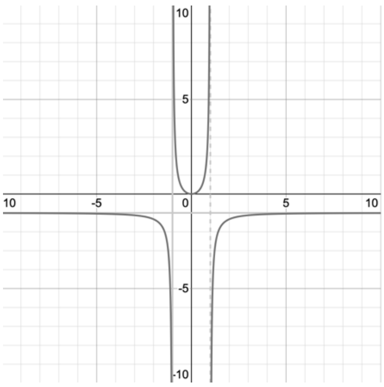
i)Интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба

$$y'' = \left(\frac{-2x}{1 - x^2}\right)' = \frac{(-2x)' \cdot (1 - x^2) - (-2x) \cdot (1 - x^2)'}{(1 - x^2)^2} = \frac{-2 + 2x^2 - 4x^2}{(1 - x^2)^2} = \frac{-2 - 2x^2}{(1 - x^2)^2}$$

$\frac{-2-2x^2}{(1-x^2)^2} = 0 \Longrightarrow -2 - 2x^2 = 0 \Longrightarrow x = \sqrt{-1}$ – точки перегиба отсутствуют

2)$y = \frac{x^2}{1-x^2}$

a)График функции



b)Область определения функции
$1 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1 \Longrightarrow \{x | x \neq \pm 1\}$

c)Четность, нечетность и периодичность

$$y(-x) = \frac{x^2}{1 - x^2}$$

$y(-x) = y(x) \Longrightarrow$ четная функция

d)Участки непрерывности функции, точки разрыва и вид разрыва

$x = \pm 1$ – точки разрыва функции 2-го рода

$f(x) \to \infty \Leftrightarrow \{x|x \neq \pm 1\}$ – участки непрерывности функции

e)Точки пересечения графика с осями координат

$x = 0, y = 0$ – пересечение с осью y

$y = 0;\ \frac{x^2}{1-x^2} = 0 \Longrightarrow x = 0,$ – пересечение с осью x

f)Интервалы знакопостоянства функции

$f(x) < 0 \Leftrightarrow \{x| -1 > x > 1\}$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow \{x| -1 < x < 1\}$

g)Асимптоты

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(kx + b - f(x)\right)$ – определение асимптоты

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2}{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1-x^2} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{1-x^2} - 0\cdot x = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 = -1$$

$y = -1$ – горизонтальная асимптота

$x = \pm 1$ – точки разрыва функции 2-го рода и являются вертикальными асимптотами

h)Интервалы возрастания и убывания, экстремумы

$$y' = \left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)' = \frac{x^{2\prime}(1-x^2) - x^2(1-x^2)'}{(1-x^2)^2} = \frac{2x - 2x^3 + 2x^3}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

$2x = 0 \Longrightarrow x = 0$ – нуль функции

$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$
Функция убывает	Функция убывает	Функция возрастает	Функция возрастает

$x = 0$ является локальным минимумом, поскольку в его окрестностях производная функции меняет знак с $-$ на $+$

i)Интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба

$$y'' = \left(\frac{2x}{(1-x^2)^2}\right)' = \frac{(2x)'\cdot(1-x^2)^2 - (2x)\cdot(1-x^2)^{2\prime}}{(1-x^2)^4} = \frac{2\cdot(1-x^2)^2 - 2x\cdot 2\cdot(1-x^2)\cdot(1-x^2)'}{(1-x^2)^4} =$$

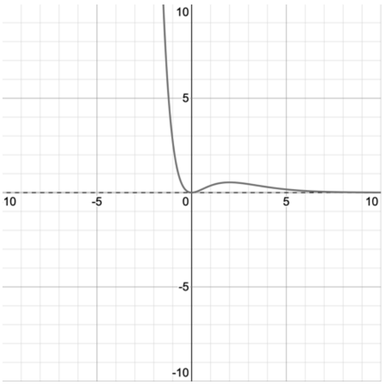
$$= \frac{2\cdot(1-x^2)^2 - 4x\cdot(1-x^2)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{2(1-x^2)(1-x^2+4x^2)}{(1-x^2)^4} = \frac{2-2x^2+8x^2}{(1-x^2)^3} = \frac{2+6x^2}{(1-x^2)^3}$$

$\frac{2+6x^2}{(1-x^2)^3} = 0 \Longrightarrow 2 + 6x^2 = 0 \Longrightarrow x = \sqrt{-\frac{1}{3}}$ – точки перегиба отсутствуют, как и корни уравнения

$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$
Функция выпукла	Функция вогнута	Функция выпукла

3)$y = x^2 \cdot e^{-x}$

a)График функции



b)Область определения функции

$x^2 \cdot e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \{x | x \in R\} \Leftrightarrow (-\infty, \infty)$

c)Четность, нечетность и периодичность

$y(-x) = x^2 \cdot e^{x} \Rightarrow$ функция общего вида

d)Участки непрерывности функции, точки разрыва и вид разрыва

$x = 0$ – точка устранимого разрыва функции

$y = x^2 \cdot e^{-x}$ – функция непрерывна

e)Точки пересечения графика с осями координат

$x = 0, y = 0$ – пересечение с осью y

$y = 0;\ x^2 \cdot e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0,$ – пересечение с осью x

f)Интервалы знакопостоянства функции

$f(x) > 0 \Leftrightarrow \{x | x \in R\}$

g)Асимптоты

$\lim\limits_{x \to \infty}\left(kx + b - f(x)\right)$ – определение асимптоты

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 \cdot e^{-x}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$b = \lim_{x \to \infty} f(x) - kx = \lim_{x \to \infty} x^2 \cdot e^{-x} - 0 \cdot x = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

$y = 0$ – горизонтальная асимптота

$k = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 \cdot e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$ – наклонных асимптот не существует, поскольку коэффициент k равен бесконечности.

h)Интервалы возрастания и убывания, экстремумы

$$y' = (x^2 \cdot e^{-x})' = x^{2'} \cdot e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x'} = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x} \cdot (-x)' = \frac{x(2 - x)}{e^x}$$

$x(2 + x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 2$ – нули функции

$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
Функция убывает	Функция возрастает	Функция убывает

$x = 0$ является локальным минимумом, поскольку в его окрестностях производная функции меняет знак с $-$ на $+$

$x = 2$ является локальным максимумом, поскольку в его окрестностях производная функции меняет знак с $+$ на $-$

i)Интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба

$$y'' = \left((2x - x^2)e^{-x}\right)' = (2x - x^2)'e^{-x} + (2x - x^2)(e^{-x})' = (2 - 2x)e^{-x} + (2x - x^2)e^{-x} \cdot (-x)' =$$

$$= (2 - 2x)e^{-x} - (2x - x^2)e^{-x} = e^{-x}(2 - 2x - 2x + x^2) = \frac{x^2 - 4x + 2}{e^x}$$

$$\frac{x^2 - 4x + 2}{e^x} = 0$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 4 - 4 + 2 = 0$$

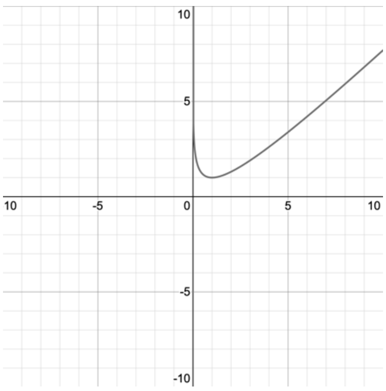
$$(x - 2)^2 = 2$$

$x = \sqrt{2} \pm 2 \Longrightarrow x_1 = 3.4142;\ x_2 = 0.58559$ – точки перегиба

$(-\infty, 0.58559)$	$(0.58559, 3.4142)$	$(3.4142, +\infty)$
$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$
Функция вогнута	Функция выпукла	Функция вогнута

4)$y = x - \ln x$

a)График функции



b)Область определения функции

$\ln x > 0 \Longrightarrow x > 0 \Longrightarrow \{x | x > 0\}$

c)Четность, нечетность и периодичность

$y(-x) = -x - \ln(-x) \Longrightarrow$ функция общего вида

d)Участки непрерывности функции, точки разрыва и вид разрыва

$x = 1$ – точки устранимого разрыва функции

$y = x - \ln x$ – функция непрерывна

e)Точки пересечения графика с осями координат

Пересечения с осями координат отсутствуют

f)Интервалы знакопостоянства функции

$f(x) > 0 \Leftrightarrow \{x | x > 0\}$

g)Асимптоты

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(kx + b - f(x)\big)$ – определение асимптоты

$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x - \ln x}{x} = 1$

$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - kx = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x - \ln x - 0 \cdot x = -\infty$ – наклонные асимптоты функции отсутствуют

h)Интервалы возрастания и убывания, экстремумы

$y' = (x - \ln x)' = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$

$x = 1$ – нуль функции

$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
Функция убывает	Функция возрастает

$x = 1$ является локальным минимумом, поскольку в его окрестностях производная функции меняет знак с $-$ на $+$

i)Интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба

$y'' = \left(\dfrac{x-1}{x}\right)' = \dfrac{(x-1)'x - (x-1)x'}{x^2} = \dfrac{x - x + 1}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$

$\frac{1}{x^2} = 0 \Longrightarrow$ корни уравнения отсутствуют

$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f''(x) > 0$	$f''(x) > 0$
Функция вогнута	Функция вогнута