

Cálculo - III

Samuel Fortunato

18 de janeiro de 2026

Conteúdo

1	Integração múltipla	2
1.1	Integrais em \mathbb{R}^2	2
1.1.1	Tipos de domínio:	2
1.1.2	Cálculo do integral	3
1.2	Integrais em \mathbb{R}^3	3
1.2.1	Tipos de domínio:	3
1.2.2	Cálculo do integral	3
1.3	Mudança de coordenadas	4
1.3.1	Coordenadas polares	4
1.3.2	Coordenadas cilíndricas	4
1.3.3	Coordenadas esféricas	4
2	Integrais de Linha e Superfície	6
2.1	Integrais de linha	6
2.1.1	Comprimento de uma curva	6
2.1.2	Integral de linha de 1 ^a espécie	6
2.1.3	Integral de linha de 2 ^a espécie	6
2.2	Integrais de superfície	7
2.2.1	Integrais de superfície de 1 ^a espécie	7
2.2.2	Integrais de superfície de 2 ^a espécie	7
2.3	Teoremas Integrais	7
2.3.1	Teorema de Green	7
2.3.2	Teorema de Stokes	7
2.3.3	Teorema de Gauss	8
3	Complexos	9
4	Séries de Fourier	10
4.1	Produto interno de funções - revisão	10
4.2	Séries de Fourier	10
4.2.1	Forma exponencial complexa	10
4.2.2	Forma trigonométrica	10
5	Equações derivadas parciais	11
5.1	Método de Características	11
5.1.1	Forma da equação	11
5.1.2	Solução	11
5.2	Classificação de equações lineares de segunda ordem	11
5.3	Método de Fourier (separação de variáveis)	12
5.3.1	Condições de fronteira e iniciais	12
5.3.2	Condição inicial com $f(x)$ arbitrária	13

1 Integração múltipla

1.1 Integrais em \mathbb{R}^2

Com $\mathbb{D} \in \mathbb{R}^2$ sendo o domínio de integração:

$$\iint_{\mathbb{D}} f(x, y) dx dy$$

1.1.1 Tipos de domínio:

- Tipo 1:

$$a < x < b \quad \wedge \quad f_1(x) < y < f_2(x)$$

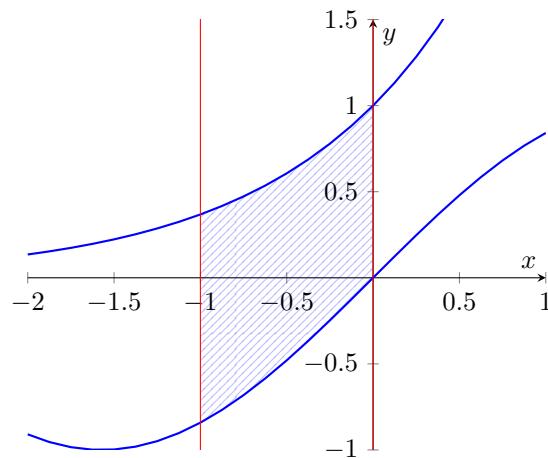


Figura 1: Domínio de tipo 1

- Tipo 2:

$$g_1(y) < x < g_2(y) \quad \wedge \quad c < y < d$$

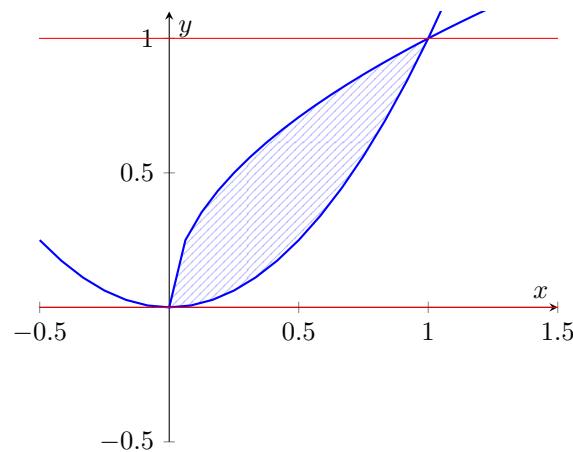


Figura 2: Domínio de tipo 2

1.1.2 Cálculo do integral

Seja \mathbb{D} um domínio de **tipo 1**:

$$\iint_{\mathbb{D}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Seja \mathbb{D} um domínio de **tipo 2**:

$$\iint_{\mathbb{D}} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dx \right) dy$$

Se o domínio for de tipo 1 e tipo 2, os dois integrais são iguais.

1.2 Integrais em \mathbb{R}^3

Com domínio de integração $\mathbb{V} \in \mathbb{R}^3$:

$$\iint \int_{\mathbb{V}} f(x, y, z) dx dy dz$$

1.2.1 Tipos de domínio:

- **Tipo 1:**

$$f_1(x, y) < z < f_2(x, y), \quad \text{para todo } (x, y) \in \mathbb{B}$$

Onde \mathbb{B} é um domínio de tipo 1 ou 2 em \mathbb{R}^2 .

- **Tipo 2** (relativamente a XoY):

$$a < z < b \quad \wedge \quad (x, y) \in A(z)$$

Sendo $A(z)$ uma secção paralela ao plano XoY .

1.2.2 Cálculo do integral

Se \mathbb{V} for um domínio de **tipo 1**:

$$\iint \int_{\mathbb{V}} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\mathbb{B}} \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

Se \mathbb{V} for um domínio de **tipo 1**:

$$\iint \int_{\mathbb{V}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{A(z)} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

1.3 Mudança de coordenadas

Dada uma mudança de coordenadas $(u, v) \rightarrow (x, y) = s(u, v)$, do domínio $\mathbb{D}_{u,v}^*$ para $\mathbb{D}_{x,y}$, o integral em (x, y) pode ser calculado como:

$$\iint_{\mathbb{D}_{x,y}} f(x, y) dx dy = \iint_{\mathbb{D}_{u,v}^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \end{bmatrix} \right| du dv$$

1.3.1 Coordenadas polares

A mudança de variável para coordenadas polares é dada por:

$$s(r, \theta) = \begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$

Ao mudar para coordenadas polares, o Jacobiano dá a mudança:

$$dx dy = r dr d\theta$$

1.3.2 Coordenadas cilíndricas

A mudança de variável para coordenadas cilíndricas é dada por:

$$s(r, \theta, z) = \begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

Ao mudar para coordenadas cilíndricas, o Jacobiano dá a mudança:

$$dx dy dz = r dr d\theta dz$$

1.3.3 Coordenadas esféricas

A mudança de variável para coordenadas esféricas é dada por:

$$s(R, \theta, \varphi) = \begin{cases} x = R \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ y = R \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z = R \cos(\varphi) \end{cases}$$

Ao mudar para coordenadas esféricas, o Jacobiano dá a mudança:

$$dx\,dy\,dz = R^2 \sin(\varphi) \, dR\,d\theta\,d\varphi$$

2 Integrais de Linha e Superfície

2.1 Integrais de linha

2.1.1 Comprimento de uma curva

Dada uma curva regular \mathcal{C} em \mathbb{R}^2 , esta pode ser parametrizada por:

$$r(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [a, b]$$

se $r' \neq 0$ então podemos definir o **comprimento da curva** \mathcal{C} como o integral:

$$\mu(\mathcal{C}) = \oint_{\mathcal{C}} ds = \int_a^b \|r'(t)\| dt$$

2.1.2 Integral de linha de 1ª espécie

i.e. integral de um campo escalar f ao longo de uma curva \mathcal{C} :

$$\oint_{\mathcal{C}} f ds = \int_a^b f(r(t)) \|r'(t)\| dt$$

2.1.3 Integral de linha de 2ª espécie

i.e. integral de um campo vetorial $F = (P, Q, R)$ ao longo de uma curva \mathcal{C} :

$$\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \oint_{\mathcal{C}} P dx + Q dy + R dz$$

Este integral denomina-se de **fluxo de F ao longo de \mathcal{C}** . Se \mathcal{C} é fechada, então o integral diz-se a **circulação de F com respeito a \mathcal{C}**

Campos conservativos Um campo vetorial F diz-se conservativo se é o gradiente de uma função escalar f . Se um o campo é conservativo: $F = \nabla f$, então o integral de linha de F não depende da forma do caminho.

Para uma função $F = (P, Q)$ ser conservativa, tem que obdecer à equação:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Em 3D uma função $F = (P, Q, R)$ é conservativa se:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \wedge \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad \wedge \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

mas isto pode ser expressado através do rotacional:

$$\text{rot } F = \nabla \times F = 0$$

2.2 Integrais de superfície

Uma superfície pode ser descrita por dois parâmetros, normalmente chamados u e v , e definidos num domínio \mathbb{D} . Uma superfície define-se como os pontos (x, y, z) que são imagem da função s que define a superfície: $s(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

2.2.1 Integrais de superfície de 1ª espécie

Define-se o integral de superfície de f sobre \mathcal{S} como:

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) \, dS = \iint_{\mathbb{D}_{u,v}} f(s(u, v)) \, \|\partial_u s \times \partial_v s\| \, du \, dv$$

2.2.2 Integrais de superfície de 2ª espécie

Define-se o integral de superfície de $F = (P, Q, R)$ sobre \mathcal{S} como:

$$\iint_{\mathcal{S}} F \cdot \hat{n}_{\text{ext}} \, dS = \iint_{\mathbb{D}_{u,v}} F(s(u, v)) \cdot (\partial_u s \times \partial_v s)_{\text{ext}} \, du \, dv$$

A este integral, chama-se o **fluxo de F através de \mathcal{S}**

Podemos representar este integral de forma alternativa:

$$\iint_{\mathcal{S}} F \cdot \hat{n}_{\text{ext}} \, dS = \iint_{\mathcal{S}} P \, dy \, dz - Q \, dx \, dz + R \, dx \, dy$$

2.3 Teoremas Integrais

Teorema	transforma	em
Green	Int. linha em 2D	Int. duplo em 2D
Stokes	Int. linha em 3D	Int. superfície do rot
Gauss	Int. superfície (fluxo)	Int. triplo da div em 3D

Tabela 1: Resumo dos Teoremas Integrais

2.3.1 Teorema de Green

Dado um domínio (região) $\mathbb{D} \in \mathbb{R}^2$ cujo **bordo** é uma curva, $\mathcal{C} = \partial\mathbb{D}$, fechada parameterizável (em sentido **direto**, ou seja, sentido **anti-horário**), o teorema de Green garante que:

$$\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \iint_{\mathbb{D}} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \, dx \, dy$$

Teorema de Green \approx Teorema de Stokes, restrito a 2D

2.3.2 Teorema de Stokes

Teorema de Stokes \approx Teorema de Green, mas em 3D

Sendo \mathcal{S} uma qualquer superfície, tal que a sua **fronteira** é uma curva $\mathcal{C} = \partial\mathcal{S}$, orientada em sentido direto, o teorema de Stokes diz-nos que:

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_S (\nabla \times F) \cdot \hat{n} dS$$

Onde $\nabla \times F = \text{rot } F$ representa o rotacional do campo vetorial F .

2.3.3 Teorema de Gauss

ou Teorema da Divergência

Dado um domínio \mathbb{D} fechado e limitado com uma superfície **fronteira**, $S = \partial\mathbb{D}$, parametrizável, o teorema de Gauss garante que:

$$\iint_S F \cdot \hat{n} dS = \iiint_{\mathbb{D}} (\nabla \cdot F) dx dy dz$$

Onde $\nabla \cdot F = \text{div } F$ representa a divergência do campo vetorial F .

3 Complexos

4 Séries de Fourier

4.1 Produto interno de funções - revisão

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \overline{g(x)} dt$$

4.2 Séries de Fourier

4.2.1 Forma exponencial complexa

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \langle f, e^{in\omega t} \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega t} dt$$

4.2.2 Forma trigonométrica

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

$$\frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$a_k = c_k - c_{-k} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(k\omega t) dt$$

$$b_n = i(c_k - c_{-k}) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(k\omega t) dt$$

5 Equações derivadas parciais

5.1 Método de Características

5.1.1 Forma da equação

Equações (quase) lineares de primeira ordem:

$$au_x + bu_y = c$$

- **Função incógnita:** $u = u(x, y)$
- **Funções conhecidas:** $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$, $c = c(x, y, u)$

5.1.2 Solução

A solução é dada pela solução do sistema de EDOs:

$$\begin{aligned}x'(s) &= a(x, y) \\y'(s) &= b(x, y) \\u'(s) &= c(x, y, u(x, y))\end{aligned}$$

ou equivalentemente:

$$ds = \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} \\ \frac{dx}{a} = \frac{du}{c} \end{cases}$$

Ao resolver o sistema, obtemos duas constantes de integração C_1 e C_2 . Podemos obter a solução geral da EDP através da relação entre as constantes:

$$C_2 = f(C_1)$$

5.2 Classificação de equações lineares de segunda ordem

Forma geral da EDP linear de segunda ordem em 2D:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

Os termos de ordem superior são mais importantes para a natureza da equação, logo a classificação da EDP é feita através do discriminante:

$$B(x, y)^2 - 4A(x, y)C(x, y)$$

- $B^2 - 4AC > 0$ - equação **hiperbólica**
ex: equação da onda
- $B^2 - 4AC = 0$ - equação **parabólica**
ex: equação do calor
- $B^2 - 4AC < 0$ - equação **elíptica**
ex: equação de Laplace

A , B e C são funções, logo o **tipo pode mudar em função de x e y .**

5.3 Método de Fourier (separação de variáveis)

Procuram-se soluções da forma:

$$u(x, y) = X(x)T(y)$$

Estas soluções correspondem à ideia de "ondas estacionárias": soluções cujo perfil X é constante no tempo mas com intensidade variável T.

Tendo como exemplo a equação do calor: $u_t = u_{xx}$, temos:

$$\begin{aligned} u_t &= X(x)T'(t), \quad u_{xx} = X''(x)T(t) \\ X(x)T'(t) &= X''(x)T(t) \end{aligned}$$

ou seja:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

Assim sendo, temos duas EDOs lineares das quais sabemos as soluções para $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} T'(t) &= -\lambda T(t) \Rightarrow T(t) = Ce^{-\lambda t} \\ X''(x) &= -\lambda X(x) \Rightarrow X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x) \end{aligned}$$

logo obtemos duas soluções possíveis da equação:

$$u(x, t) = Ce^{-\lambda t} \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

$$u(x, t) = Ce^{-\lambda t} \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

Para escolhermos entre estas soluções, usamos as condições de fronteira.

5.3.1 Condições de fronteira e iniciais

Para obtermos soluções específicas precisamos de:

- Uma condição inicial: $u(x, 0) = f(x)$
- Condições de fronteira: valores de u ou suas derivadas em 0 e L .

As condições de fronteira mais comuns são:

- **Condição de Dirichlet:** "arrefecimento perfeito", temperatura constante em 0 na fronteira

$$u(0, t) = u(L, t) = 0$$

Para verificar a condição nula nos extremos a função $f(x)$ deve ter apenas a componente seno, com $\sqrt{\lambda}L = n\pi$, logo, se $f(x) = \sin(\frac{n\pi}{L}x)$, então:

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$u(x, t) = e^{-(\frac{\pi n}{L})^2 t} \sin(\frac{\pi n}{L} x)$$

- **Condição de Neumann:** "isolamento perfeito", fluxo de calor nulo na fronteira

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$$

Para verificar a condição de derivada nula nos extremos a função $f(x)$ deve ter apenas a componente cosseno, com $\sqrt{\lambda}L = n\pi$, logo, se $f(x) = \cos(\frac{\pi n}{L}x)$, então:

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$u(x, t) = e^{-(\frac{\pi n}{L})^2 t} \cos(\frac{\pi n}{L} x)$$

5.3.2 Condição inicial com $f(x)$ arbitrária

Condições de fronteira de Dirichlet ($u(0, t) = u(L, t) = 0$)

Para uma condição inicial $u(x, 0) = f(x)$ onde $f(x)$ é contínua (por partes) e admite a decomposição:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \sin(\frac{n\pi}{L} x)$$

onde

$$\beta_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(\frac{n\pi}{L} x) dx$$

então a solução $u(x, t)$ é dada por:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t} \sin(\frac{n\pi}{L} x)$$

Condições de fronteira de Neumann ($u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$) Para condições de fronteira de Neumann, a decomposição de $f(x)$ é feita em cossenos:

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos(\frac{n\pi}{L} x)$$

com

$$\alpha_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(\frac{n\pi}{L} x) dx$$

e a solução $u(x, t)$ é dada por:

$$u(x, t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t} \cos(\frac{n\pi}{L} x)$$