Cálculo - III

Samuel Fortunato

17 de janeiro de 2026

Conteúdo

1 Integração múltipla

1.1 Integrais em $\mathbb{R}^2$

Com $\mathbb{D} \in \mathbb{R}^2$ sendo o domínio de integração:

$$\int\int_{\mathbb{D}} f(x,y)\,dx\,dy$$

1.1.1 Tipos de domínio:

- **Tipo 1**:

$$\boxed{a < x < b} \quad \wedge \quad \boxed{f_1(x) < y < f_2(x)}$$

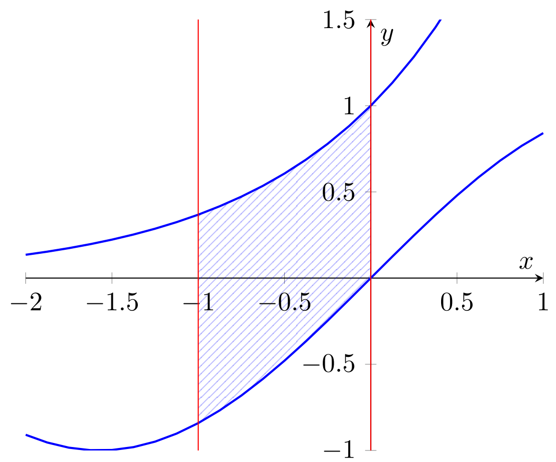

Figura 1: Domínio de **tipo 1**

- **Tipo 2**:

$$\boxed{g_1(y) < x < g_2(y)} \quad \wedge \quad \boxed{c < y < d}$$

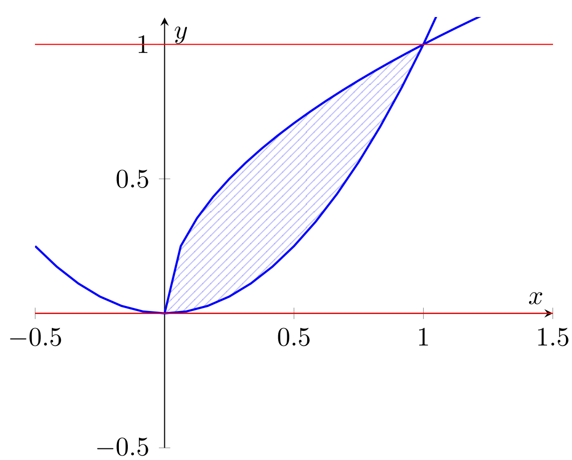

Figura 2: Domínio de **tipo 2**

1.1.2 Cálculo do integral

Seja $\mathbb{D}$ um domínio de **tipo 1**:

$$\int\int_{\mathbb{D}} f(x,y)\,dx\,dy \quad = \quad \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy\right)\,dx$$

Seja $\mathbb{D}$ um domínio de **tipo 2**:

$$\int\int_{\mathbb{D}} f(x,y)\,dx\,dy \quad = \quad \int_c^d \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dx\right)\,dy$$

Se o domínio for de tipo 1 e tipo 2, os dois integrais **são iguais**.

1.2 Integrais em $\mathbb{R}^3$

Com domínio de integração $\mathbb{V} \in \mathbb{R}^3$:

$$\int\int\int_{\mathbb{V}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

1.2.1 Tipos de domínio:

- **Tipo 1**:

  $f_1(x,y) < z < f_2(x,y) \qquad , \qquad \text{para todo}(x,y) \in \mathbb{B}$

  Onde $\mathbb{B}$ é um domínio de tipo 1 ou 2 em $\mathbb{R}^2$.

- **Tipo 2** (relativamente a XoY):

  $a < z < b \qquad \wedge \qquad (x,y) \in A(z)$

  Sendo $A(z)$ uma secção paralela ao plano XoY.

1.2.2 Cálculo do integral

Se $\mathbb{V}$ for um domínio de **tipo 1**:

$$\int\int\int_{\mathbb{V}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\int_{\mathbb{B}} \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)\,dx\,dy$$

Se $\mathbb{V}$ for um domínio de **tipo 1**:

$$\int\int\int_{\mathbb{V}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int\int_{A(z)} f(x,y,z)\,dx\,dy\right)\,dz$$

1.3 Mudança de coordenadas

Dada uma mudança de coordenadas $(u, v) \to (x, y) = s(u, v)$, do domínio $\mathbb{D}^*_{u,v}$ para $\mathbb{D}_{x,y}$, o integral em (x, y) pode ser calculado como:

$$\boxed{\int\int_{\mathbb{D}_{x,y}} f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_{\mathbb{D}^*_{u,v}} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \det\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right] \right| du\,dv}$$

1.3.1 Coordenadas polares

A mudança de variável para coordenadas polares é dada por:

$$\boxed{s(r,\theta) = \begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}}$$

Ao mudar para coordenadas polares, o Jacobiano dá a mudança:

$$\boxed{dx\,dy = \boxed{r}\,dr\,d\theta}$$

1.3.2 Coordenadas cilíndricas

A mudança de variável para coordenadas cilíndricas é dada por:

$$\boxed{s(r,\theta,z) = \begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}}$$

Ao mudar para coordenadas cilindricas, o Jacobiano dá a mudança:

$$\boxed{dx\,dy\,dz = \boxed{r}\,dr\,d\theta\,dz}$$

1.3.3 Coordenadas esféricas

A mudança de variável para coordenadas esféricas é dada por:

$$\boxed{s(R,\theta,\varphi) = \begin{cases} x = R\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y = R\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = R\cos(\varphi) \end{cases}}$$

Ao mudar para coordenadas esféricas, o Jacobiano dá a mudança:

$$dx\,dy\,dz = \boxed{R^2 \sin(\varphi)}\, dR\, d\theta\, d\varphi$$

2 Complexos

3 Séries de Fourier

3.1 Produto interno de funcões - revisão

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\overline{g(x)}\, dt$$

3.2 Séries de Fourier

3.2.1 Forma exponencial complexa

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\left\langle f, e^{in\omega t}\right\rangle = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-in\omega t}dt$$

3.2.2 Forma trignométrica

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

$$\frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$$

$$a_k = c_k - c_{-k} = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(k\omega t)dt$$

$$b_n = i(c_k - c_{-k}) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(k\omega t)dt$$

4 Equações derivadas parciais

4.1 Método de Características

4.1.1 Forma da equação

Equações (quase) lineares de primeira ordem:

$$\boxed{au_x + bu_y = c}$$

- **Função incógnita:** $u = u(x, y)$
- **Funções conhecidas:** $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$, $c = c(x, y, u)$

4.1.2 Solução

A solução é dada pela solução do sistema de EDOs:

$$\begin{aligned} x'(s) &= a(x, y) \\ y'(s) &= b(x, y) \\ u'(s) &= c(x, y, u(x, y)) \end{aligned}$$

ou equivalentemente:

$$\boxed{ds = \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} \\ \frac{dx}{a} = \frac{du}{c} \end{cases}}$$

Ao resolver o sistema, obtemos duas constantes de integração C_1 e C_2. Podemos obter a solução geral da EDP através da relação entre as constantes:

$$\boxed{C_2 = f(C_1)}$$

4.2 Classificação de equações lineares de segunda ordem

Forma geral da EDP linear de segunda ordem em 2D:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

Os termos de ordem superior são mais importantes para a natureza da equação, logo a classificação da EDP é feita através do discriminante:

$$\boxed{B(x, y)^2 - 4A(x, y)C(x, y)}$$

- $\boxed{B^2 - 4AC > 0}$ - equação **hiperbólica**
  ex: equação da onda
- $\boxed{B^2 - 4AC = 0}$ - equação **parabólica**
  ex: equação do calor
- $\boxed{B^2 - 4AC < 0}$ - equação **elíptica**
  ex: equação de Laplace

A, B e C são funções, logo o **tipo pode mudar em função de x e y.**

4.3 Método de Fourier (separação de variáveis)

Procuram se soluções da forma:

$$\boxed{u(x,y) = X(x)T(y)}$$

Estas soluções correspondem à ideia de "ondas estacionárias": soluções cujo perfil X é constante no tempo mas com intensidade variável T.

Tendo como exemplo a equação do calor: $u_t = u_{xx}$, temos:

$$u_t = X(x)T'(t) \quad , \quad u_{xx} = X''(x)T(t)$$
$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$$

ou seja:

$$\boxed{\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda}$$

Assim sendo, temos duas EDOs lineares das quais sabemos as soluções para $\lambda > 0$:

$$T'(t) = -\lambda T(t) \quad \Rightarrow \quad T(t) = Ce^{-\lambda t}$$
$$X''(x) = -\lambda X(x) \quad \Rightarrow \quad X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

logo obtemos duas soluções possíveis da equação:

$$\boxed{u(x,t) = Ce^{-\lambda t}\cos(\sqrt{\lambda}x)}$$

$$\boxed{u(x,t) = Ce^{-\lambda t}\sin(\sqrt{\lambda}x)}$$

Para escolhermos entre estas soluções, usamos as condições de fronteira.

4.3.1 Condições de fronteira e iniciais

Para obtermos soluções especificas precisamos de:

- Uma condição inicial: $u(x,0) = f(x)$
- Condições de fronteira: valores de u ou suas derivadas em 0 e L.

As condições de fronteira mais comuns são:

- **Condição de Dirichlet:** "arrefecimento perfeito", temperatura constante em 0 na fronteira

$$\boxed{u(0,t) = u(L,t) = 0}$$

Para verificar a condição nula nos extremos a função $f(x)$ deve ter apenas a componentente seno, com $\sqrt{\lambda}L = n\pi$, logo, se $f(x) = \sin(\frac{\pi n}{L}x)$, então:

$$\boxed{\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}}$$

$$\boxed{u(x,t) = e^{-(\frac{\pi n}{L})^2 t}\sin(\frac{\pi n}{L}x)}$$

- **Condição de Neumann:** "isolamento perfeito", fluxo de calor nulo na fronteira

$$\boxed{u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0}$$

Para verificar a condição de derivada nula nos extremos a função $f(x)$ deve ter apenas a componentente cosseno, com $\sqrt{\lambda}L = n\pi$, logo, se $f(x) = \cos(\frac{\pi n}{L}x)$, então:

$$\boxed{\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}_0}$$

$$\boxed{u(x,t) = e^{-(\frac{\pi n}{L})^2 t}\cos(\frac{\pi n}{L}x)}$$

4.3.2 Condição inicial com f(x) arbitrária

Condições de fronteira de Dirichlet ($u(0,t) = u(L,t) = 0$)
Para uma condição inicial $u(x,0) = f(x)$ onde $f(x)$ é contínua (por partes) e admite a decomposição:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

onde

$$\beta_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx$$

então a solução $u(x,t)$ é dada por:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t}\sin(\frac{n\pi}{L}x)}$$

Condições de fronteira de Neumann ($u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$) Para condições de fronteira de Neumann, a decomposição de $f(x)$ é feita em cossenos:

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos(\frac{n\pi}{L}x)$$

com

$$\alpha_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)dx$$

e a solução $u(x,t)$ é dada por:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t}\cos(\frac{n\pi}{L}x)}$$