

# Cálculo - III

Samuel Fortunato

17 de janeiro de 2026

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Integrais</b>	<b>2</b>
1.1	Tipos de domínio: . . . . .	2
1.2	Cálculo do limite . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Complexos</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Séries de Fourier</b>	<b>5</b>
3.1	Produto interno de funções - revisão . . . . .	5
3.2	Séries de Fourier . . . . .	5
3.2.1	Forma exponencial complexa . . . . .	5
3.2.2	Forma trigonométrica . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Equações derivadas parciais</b>	<b>6</b>
4.1	Método de Características . . . . .	6
4.1.1	Forma da equação . . . . .	6
4.1.2	Solução . . . . .	6
4.2	Classificação de equações lineares de segunda ordem . . . . .	6
4.3	Método de Fourier (separação de variáveis) . . . . .	7
4.3.1	Condições de fronteira e iniciais . . . . .	7
4.3.2	Condição inicial com $f(x)$ arbitrária . . . . .	8

# 1 Integrais

Integrais em  $\mathbb{R}^2$ , com  $\mathbb{D} \in \mathbb{R}^2$ :

$$\int \int_{\mathbb{D}} f(x, y) dx dy$$

## 1.1 Tipos de domínio:

- **Tipo 1:**

$$\boxed{a < x < b} \quad \wedge \quad \boxed{f_1(x) < y < f_2(x)}$$

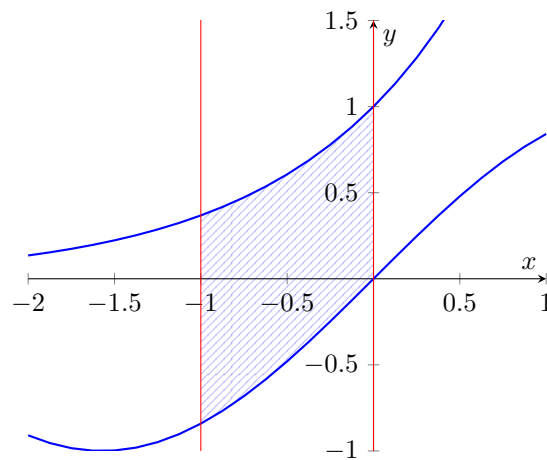


Figura 1: Domínio de **tipo 1**

- **Tipo 2:**

$$\boxed{g_1(y) < x < g_2(y)} \quad \wedge \quad \boxed{c < y < d}$$

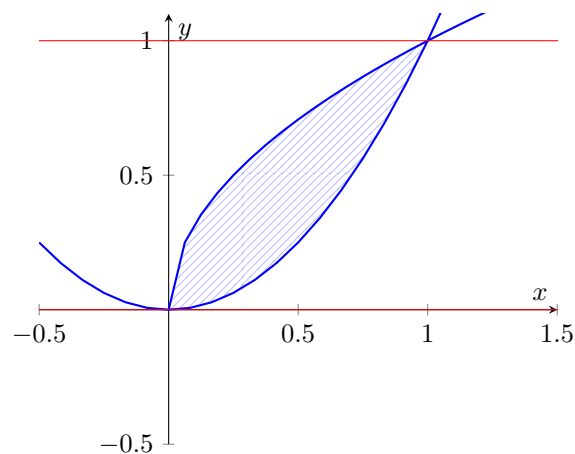


Figura 2: Domínio de **tipo 2**

## 1.2 Cálculo do limite

Seja  $\mathbb{D}$  um domínio de **tipo 1**:

$$\int \int_{\mathbb{D}} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left( \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx$$

Seja  $\mathbb{D}$  um domínio de **tipo 2**:

$$\int \int_{\mathbb{D}} f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left( \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy$$

Se o domínio for de tipo 1 e tipo 2, os dois integrais **são iguais**.

## 2 Complexos

### 3 Séries de Fourier

#### 3.1 Produto interno de funções - revisão

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \overline{g(x)} dt$$

#### 3.2 Séries de Fourier

##### 3.2.1 Forma exponencial complexa

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \langle f, e^{in\omega t} \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega t} dt$$

##### 3.2.2 Forma trigonométrica

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

$$\frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$a_k = c_k - c_{-k} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(k\omega t) dt$$

$$b_n = i(c_k - c_{-k}) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(k\omega t) dt$$

## 4 Equações derivadas parciais

### 4.1 Método de Características

#### 4.1.1 Forma da equação

Equações (quase) lineares de primeira ordem:

$$au_x + bu_y = c$$

- **Função incógnita:**  $u = u(x, y)$
- **Funções conhecidas:**  $a = a(x, y)$ ,  $b = b(x, y)$ ,  $c = c(x, y, u)$

#### 4.1.2 Solução

A solução é dada pela solução do sistema de EDOs:

$$\begin{aligned}x'(s) &= a(x, y) \\ y'(s) &= b(x, y) \\ u'(s) &= c(x, y, u(x, y))\end{aligned}$$

ou equivalentemente:

$$ds = \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} \\ \frac{dx}{a} = \frac{du}{c} \end{cases}$$

Ao resolver o sistema, obtemos duas constantes de integração  $C_1$  e  $C_2$ . Podemos obter a solução geral da EDP através da relação entre as constantes:

$$C_2 = f(C_1)$$

### 4.2 Classificação de equações lineares de segunda ordem

Forma geral da EDP linear de segunda ordem em 2D:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

Os termos de ordem superior são mais importantes para a natureza da equação, logo a classificação da EDP é feita através do discriminante:

$$B(x, y)^2 - 4A(x, y)C(x, y)$$

- $B^2 - 4AC > 0$  - equação **hiperbólica**  
ex: equação da onda
- $B^2 - 4AC = 0$  - equação **parabólica**  
ex: equação do calor
- $B^2 - 4AC < 0$  - equação **elíptica**  
ex: equação de Laplace

$A$ ,  $B$  e  $C$  são funções, logo o **tipo pode mudar em função de  $x$  e  $y$** .

### 4.3 Método de Fourier (separação de variáveis)

Procuram se soluções da forma:

$$u(x, y) = X(x)T(y)$$

Estas soluções correspondem à ideia de "ondas estacionárias": soluções cujo perfil  $X$  é constante no tempo mas com intensidade variável  $T$ .

Tendo como exemplo a equação do calor:  $u_t = u_{xx}$ , temos:

$$u_t = X(x)T'(t) \quad , \quad u_{xx} = X''(x)T(t) \\ X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$$

ou seja:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

Assim sendo, temos duas EDOs lineares das quais sabemos as soluções para  $\lambda > 0$ :

$$T'(t) = -\lambda T(t) \quad \Rightarrow \quad T(t) = Ce^{-\lambda t} \\ X''(x) = -\lambda X(x) \quad \Rightarrow \quad X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

logo obtemos duas soluções possíveis da equação:

$$u(x, t) = Ce^{-\lambda t} \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

$$u(x, t) = Ce^{-\lambda t} \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

Para escolhermos entre estas soluções, usamos as condições de fronteira.

#### 4.3.1 Condições de fronteira e iniciais

Para obtermos soluções específicas precisamos de:

- Uma condição inicial:  $u(x, 0) = f(x)$
- Condições de fronteira: valores de  $u$  ou suas derivadas em 0 e  $L$ .

As condições de fronteira mais comuns são:

- **Condição de Dirichlet:** "arrefecimento perfeito", temperatura constante em 0 na fronteira

$$u(0, t) = u(L, t) = 0$$

Para verificar a condição nula nos extremos a função  $f(x)$  deve ter apenas a componentente seno, com  $\sqrt{\lambda}L = n\pi$ , logo, se  $f(x) = \sin(\frac{n\pi}{L}x)$ , então:

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$u(x, t) = e^{-(\frac{\pi n}{L})^2 t} \sin(\frac{\pi n}{L} x)$$

- **Condição de Neumann:** "isolamento perfeito", fluxo de calor nulo na fronteira

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$$

Para verificar a condição de derivada nula nos extremos a função  $f(x)$  deve ter apenas a componente cosseno, com  $\sqrt{\lambda}L = n\pi$ , logo, se  $f(x) = \cos(\frac{\pi n}{L}x)$ , então:

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$u(x, t) = e^{-(\frac{\pi n}{L})^2 t} \cos(\frac{\pi n}{L} x)$$

#### 4.3.2 Condição inicial com $f(x)$ arbitrária

**Condições de fronteira de Dirichlet** ( $u(0, t) = u(L, t) = 0$ )

Para uma condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$  onde  $f(x)$  é contínua (por partes) e admite a decomposição:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \sin(\frac{n\pi}{L} x)$$

onde

$$\beta_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(\frac{n\pi}{L} x) dx$$

então a solução  $u(x, t)$  é dada por:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t} \sin(\frac{n\pi}{L} x)$$

**Condições de fronteira de Neumann** ( $u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$ ) Para condições de fronteira de Neumann, a decomposição de  $f(x)$  é feita em cossenos:

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos(\frac{n\pi}{L} x)$$

com

$$\alpha_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(\frac{n\pi}{L} x) dx$$

e a solução  $u(x, t)$  é dada por:

$$u(x, t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t} \cos(\frac{n\pi}{L} x)$$