Cálculo - III

Samuel Fortunato

18 de janeiro de 2026

Conteúdo

1 Integração múltipla

1.1 Integrais em $\mathbb{R}^2$

Com $\mathbb{D} \in \mathbb{R}^2$ sendo o domínio de integração:

$$\iint_{\mathbb{D}} f(x,y)\,dx\,dy$$

1.1.1 Tipos de domínio:

- **Tipo 1**:

$$\boxed{a < x < b} \quad \wedge \quad \boxed{f_1(x) < y < f_2(x)}$$

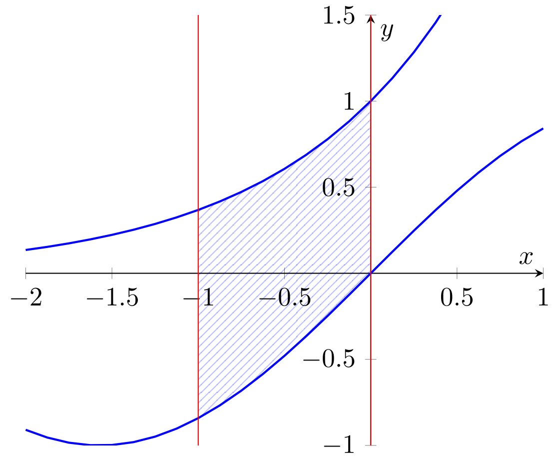

Figura 1: Domínio de **tipo 1**

- **Tipo 2**:

$$\boxed{g_1(y) < x < g_2(y)} \quad \wedge \quad \boxed{c < y < d}$$

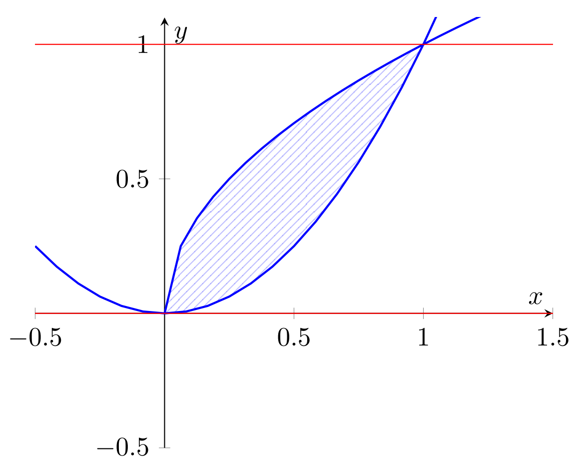

Figura 2: Domínio de **tipo 2**

1.1.2 Cálculo do integral

Seja $\mathbb{D}$ um domínio de **tipo 1**:

$$\iint_{\mathbb{D}} f(x,y)\,dx\,dy \quad = \quad \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Seja $\mathbb{D}$ um domínio de **tipo 2**:

$$\iint_{\mathbb{D}} f(x,y)\,dx\,dy \quad = \quad \int_c^d \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Se o domínio for de tipo 1 e tipo 2, os dois integrais **são iguais**.

1.2 Integrais em $\mathbb{R}^3$

Com domínio de integração $\mathbb{V} \in \mathbb{R}^3$:

$$\iint \int_{\mathbb{V}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

1.2.1 Tipos de domínio:

- **Tipo 1**:

  $f_1(x,y) < z < f_2(x,y) \quad , \quad$ para todo$(x,y) \in \mathbb{B}$

  Onde $\mathbb{B}$ é um domínio de tipo 1 ou 2 em $\mathbb{R}^2$.

- **Tipo 2** (relativamente a XoY):

  $a < z < b \quad \wedge \quad (x,y) \in A(z)$

  Sendo $A(z)$ uma secção paralela ao plano XoY.

1.2.2 Cálculo do integral

Se $\mathbb{V}$ for um domínio de **tipo 1**:

$$\iint \int_{\mathbb{V}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\mathbb{B}} \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

Se $\mathbb{V}$ for um domínio de **tipo 1**:

$$\iint \int_{\mathbb{V}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\iint_{A(z)} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz$$

1.3 Mudança de coordenadas

Dada uma mudança de coordenadas $(u, v) \to (x, y) = s(u, v)$, do domínio $\mathbb{D}^*_{u,v}$ para $\mathbb{D}_{x,y}$, o integral em (x, y) pode ser calculado como:

$$\iint_{\mathbb{D}_{x,y}} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\mathbb{D}^*_{u,v}} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \det \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] \right| du\, dv$$

1.3.1 Coordenadas polares

A mudança de variável para coordenadas polares é dada por:

$$s(r, \theta) = \begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

Ao mudar para coordenadas polares, o Jacobiano dá a mudança:

$$dx\, dy = \boxed{r}\, dr\, d\theta$$

1.3.2 Coordenadas cilíndricas

A mudança de variável para coordenadas cilíndricas é dada por:

$$s(r, \theta, z) = \begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

Ao mudar para coordenadas cilindricas, o Jacobiano dá a mudança:

$$dx\, dy\, dz = \boxed{r}\, dr\, d\theta\, dz$$

1.3.3 Coordenadas esféricas

A mudança de variável para coordenadas esféricas é dada por:

$$s(R, \theta, \varphi) = \begin{cases} x = R\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y = R\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = R\cos(\varphi) \end{cases}$$

Ao mudar para coordenadas esféricas, o Jacobiano dá a mudança:

$$dx\,dy\,dz = \boxed{R^2 \sin(\varphi)}\, dR\, d\theta\, d\varphi$$

2 Integrais de Linha e Superfície

2.1 Integrais de linha

2.1.1 Comprimento de uma curva

Dada uma curva regular $\mathcal{C}$ em $\mathbb{R}^2$, esta pode ser parametrizda por:

$$r(t) = (x(t), y(t)),\ t \in [a, b]$$

se $r' \neq 0$ então podemos definir o **comprimento da curva** $\mathcal{C}$ como o integral:

$$\boxed{\mu(\mathcal{C}) = \oint_{\mathcal{C}} ds = \int_a^b ||r'(t)||\, dt}$$

2.1.2 Integral de linha de 1ª espécie

i.e. integral de um campo escalar f ao longo de uma curva $\mathcal{C}$:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} f\, ds = \int_a^b f(r(t))\ ||r'(t)||\, dt}$$

2.1.3 Integral de linha de 2ª espécie

i.e. integral de um campo vetorial $F = (P, Q, R)$ ao longo de uma curva $\mathcal{C}$:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt = \oint_{\mathcal{C}} P\, dx + Q\, dy + R\, dz}$$

Este integral denomina-se de **fluxo de F ao longo de $\mathcal{C}$**. Se $\mathcal{C}$ é fechada, então o integral diz-se a **circulação de F com respeito a $\mathcal{C}$**

Campos conservativos Um campo vetorial F diz-se conservativo se é o gradiente de uma função escalar f. Se um o campo é conservativo: $F = \nabla f$, então o integral de linha de F não depende da forma do caminho.

Para uma função $F = (P, Q)$ ser conservativa, tem que obdecer à equação:

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}}$$

Em 3D uma função $F = (P, Q, R)$ é conservativa se:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \wedge \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad \wedge \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

mas isto pode ser expressado através do rotacional:

$$\boxed{\text{rot } F = \nabla \times F = 0}$$

2.2 Integrais de superfície

Uma superfície pode ser descrita por dois parâmetros, normalmente chamados u e v, e definidos num domínio $\mathbb{D}$. Uma superfície defíne-se como os pontos (x, y, z) que são imagem da função s que define a superfície: $s(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

2.2.1 Integais de superfície de 1ª espécie

Define-se o integral de superfície de f sobre $\mathcal{S}$ como:

$$\boxed{\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z)\, dS = \iint_{\mathbb{D}_{u,v}} f(s(u, v))\ ||\partial_u s \times \partial_v s||\, du\, dv}$$

2.2.2 Integais de superfície de 2ª espécie

Define-se o integral de superfície de $F = (P, Q, R)$ sobre $\mathcal{S}$ como:

$$\boxed{\iint_{\mathcal{S}} F \cdot \hat{n}_{\text{ext}}\, dS = \iint_{\mathbb{D}_{u,v}} F(s(u, v)) \cdot (\partial_u s \times \partial_v s)_{\text{ext}}\, du\, dv}$$

A este integral, chama-se o **fluxo de F através de $\mathcal{S}$**
Podemos representar este integral de forma altenativa:

$$\iint_{\mathcal{S}} F \cdot \hat{n}_{\text{ext}}\, dS = \iint_{\mathcal{S}} P\, dy\, dz - Q\, dx\, dz + R\, dx\, dy$$

2.3 Teoremas Integrais

Teorema	**trnasforma**	**em**
Green	Int. linha em 2D	Int. duplo em 2D
Stokes	Int. linha em 3D	Int. superfície do rot
Gauss	Int. superficie (fluxo)	Int. triplo da div em 3D

Tabela 1: Resumo dos Teoremas Integrais

2.3.1 Teorema de Green

Dado um domínio (região) $\mathbb{D} \in \mathbb{R}^2$ cujo **bordo** é uma curva, $\mathcal{C} = \partial\mathbb{D}$, fechada parameterizável (em sentido **direto**, ou seja, sentido **anti-horário**), o teorema de Green garante que:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} F \cdot\, dr = \iint_{\mathbb{D}} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy}$$

Teorema de Green ≈ Teorema de Stokes, restrito a 2D

2.3.2 Teorema de Stokes

Teorema de Stokes ≈ Teorema de Green, mas em 3D
Sendo $\mathcal{S}$ uma qualquer superficie, tal que a sua **fronteira** é uma curva $\mathcal{C} = \partial\mathcal{S}$, orientada em sentido direto, o teorema de Stokes diz-nos que:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times F) \cdot \hat{n} \, dS}$$

Onde $\nabla \times F = \text{rot } F$ representa o rotacional do campo vetorial F.

2.3.3 Teorema de Gauss

ou Teorema da Divergência

Dado um domínio $\mathbb{D}$ fechado e limitado com uma superficie **fronteira**, $\mathcal{S} = \partial\mathbb{D}$, paramatrizável, o teorema de Gauss garante que:

$$\boxed{\iint_{\mathcal{S}} F \cdot \hat{n} \, dS = \iiint_{\mathbb{D}} (\nabla \cdot F) \, dx \, dy \, dz}$$

Onde $\nabla \cdot F = \text{div } F$ representa a divergência do campo vetorial F.

3 Complexos

3.1 Revisão

Definição de números complexos

$$\begin{aligned} i^2 &= -1 \\ z &= x + iy \qquad x \in \mathbb{R} = \text{parte real} \quad y \in \mathbb{R} = \text{parte imaginária} \\ \overline{z} &= x - iy \qquad \text{é o conjugado de } z \end{aligned}$$

Representa-se os numeros complexos no plano complexo onde cada ponto (x, y) corresponde ao complexo $z = x + iy$:

$$\begin{aligned} |z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} &\qquad \geq 0 \\ \arg z = \theta &\qquad \in [0, 2\pi[\text{ ou }] - \pi, \pi] \end{aligned}$$

Algumas identidades fundamentais:

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= |z|^2 \\ e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ z &= re^{i\theta} \\ e^{ixn} &= (\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx) \end{aligned}$$

3.2 Funções Complexas

Uma função em $\mathbb{C}$ é definida por:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \qquad z = x + iy$$

3.2.1 Derivadas Complexas

A definição de derivada em $\mathbb{C}$ é a mesma que em $\mathbb{R}$, mas usa se a terminologia **holomorfa** em vez de **diferenciável**.

Para que uma função seja holomorfa, tem que obedecer a ***ambas*** as equações de **Cauchy-Riemann**:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}}$$

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}}$$

Uma função é holomorfa quando:

- É um polinómio;
- É uma soma, produto, ou quociente de funções holomorfas;
- É uma função racional e não tem singularidades;
- É uma função elementar como sin, cos, exp, ln etc.

$$\boxed{\text{Se } \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \neq 0 \text{ então } f \text{ não é holomorfa.}}$$

3.2.2 Séries de potências

Algumas séries de potências importantes:

e^z	$1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots$	$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}$	$z\in\mathbb{C}$
$\sin z$	$z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\dots$	$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$z\in\mathbb{C}$
$\cos z$	$1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\dots$	$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$	$z\in\mathbb{C}$
$\frac{1}{1-z}$	$1+z+z^2+z^3+\dots$	$\sum_{k=0}^{+\infty}z^k$	$\lvert z\rvert<1$

3.2.3 Funções hiperbólicas

Definimos as funções sinh e cosh como:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$
$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

onde

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

e que expandindo em série de potências obtemos:

$\sinh z$	$z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}+\dots$	$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$z\in\mathbb{C}$
$\cosh z$	$1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\dots$	$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}$	$z\in\mathbb{C}$

A partir desta definição obtemos uma série de identidades:

$$\cos z = \cosh(iz)$$
$$\sin z = -i\sinh(iz)$$
$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$
$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

3.2.4 Logaritmo Complexo

Para definirmos o logaritmo complexo devemos restringir o argumento de z a $]-\pi,\pi]$, definindo assim:

$$\boxed{\ln z = \ln r + i\theta = \ln|z| + i\ \arg\ z}$$

O logaritmo fica definido no domínio $\mathbb{D} = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ e que admite a representação em série:

$$\ln z \qquad (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \frac{(z-1)^4}{4!} + \ldots \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(z-1)^k \qquad |z-1| < 1$$

3.3 Integrais Complexos

3.3.1 Teorema de Cauchy

Dada f uma função **holomorfa** num domínio (região) $\mathbb{D}$ simplesmente conexo, e uma curva $\mathcal{C}$ que delimita $\mathbb{D}$ então o teorema de Cauchy diz-nos que:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = 0}$$

3.3.2 Fórmula integral de Cauchy

$\mathcal{C}$ é uma curva fechada simples que faz uma volta em torno do ponto $a \in \mathbb{C}$ percorrida no **sentido positivo**, e f é uma função holomorfa, então:

$$\boxed{f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-a}\, dz}$$

e para as mesmas condições:

$$\boxed{f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz}$$

3.3.3 Séries de Laurent

Se uma função f tem uma singularidade isolada num ponto a podemos representar a função numa série de Laurent, que inclui potências de $\frac{1}{z}$:

$$f(z) = \overbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^k}^{\text{Parte regular}} + \overbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{(z-a)^k}}^{\text{Parte singular}}$$

que pode alternativamente ser escrita como uma série de potencias com duas "caudas", onde em vez de b_k escrevemos a_{-k}:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k (z-a)^k$$

Para calcular os coeficientes a_k usamos a formula:

$$\boxed{a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\, dz}$$

Esta fórmula é válida para todo o $k \in]-\infty, +\infty[$

3.3.4 Classificação de singularidades (isoladas)

Dada a função $g(z)$ que tem uma singularidade isolada em $a \in \mathbb{C}$:

- **a** é um **polo de ordem n**≥ 1 se $g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^n}$ **ou seja** se:

$$\boxed{\lim_{z \to a} g(z)(z-a)^n \quad \text{existe em } \mathbb{C}}$$

  ou se a **série de Laurent** tem até **n** termos de expoente negativo:

$$\boxed{g(z) = \sum_{k=-n}^{+\infty} a_k (z-a)^k}$$

- **a** é uma **singularidade removível** se:

$$\boxed{\lim_{z \to a} g(z) \quad \text{existe em } \mathbb{C}}$$

  ou se admite uma expansão em série de potências, que corresponde a **n=0** na definição anterior:

$$\boxed{g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^k}$$

- **a** é uma **singularidade essencial** se não é dos outros tipos, i.e., se para qualquer $n \geq 1$:

$$\boxed{\lim_{z \to a} g(z)(z-a)^n \quad \text{não existe para qualquer } n}$$

  ou se a **série de Laurent** tem infinitos termos de potência negativa:

$$\boxed{g(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k (z-a)^k}$$

3.3.5 Resíduos

O **resíduo de g em a**, $\text{Res}(g; a)$ é o valor do coeficiente a_{-1}, ou seja, o coeficiente do termo $\frac{1}{z-a}$ na série de Laurent.

- Se **a é isolada**, então:

$$\boxed{\text{Res}(g; a) = 0}$$

- Se **a é um polo de ordem 1** então:

$$\boxed{\mathrm{Res}(g;a) = \lim_{z\to a} g(z)(z-a)}$$

- Se **a é um polo de ordem n** então:

$$\boxed{\mathrm{Res}(g;a) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[g(z)(z-a)^n]}$$

3.3.6 Teorema dos Resíduos

Finalmente, para uma curva simples e fechada $\mathcal{C}$ em $\mathbb{C}$, e uma função g, holomorfa em toda a região delimitada por $\mathcal{C}$, exceto num número finito de singularidades $a_1, \ldots, a_m$, então:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} g(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}(g;a_k)}$$

3.4 Integrais Reais (através de resíduos)

Quer se calcular o integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

Este pode ser calculado através de resíduos usando:

$$I_R = \int_{C_R} f(z)\,dz$$

$$\lim_{R\to+\infty} I_R = \lim_{R\to+\infty} f(z)\,dz =$$
$$\lim_{R\to+\infty}\left(\int_{C_{1,R}} f(z)\,dz + \int_{C_{2,R}} f(z)\,dz\right) =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx + \cancelto{0}{\lim_{R\to+\infty}\int_{C_{2,R}} f(z)\,dz}$$

4 Séries de Fourier

4.1 Produto interno de funcões - revisão

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\overline{g(x)}\, dt$$

4.2 Séries de Fourier

4.2.1 Forma exponencial complexa

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \left\langle f, e^{in\omega t} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega t} dt$$

4.2.2 Forma trignométrica

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right]$$

$$\frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$a_k = c_k - c_{-k} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(k\omega t) dt$$

$$b_n = i(c_k - c_{-k}) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(k\omega t) dt$$

5 Equações derivadas parciais

5.1 Método de Características

5.1.1 Forma da equação

Equações (quase) lineares de primeira ordem:

$$\boxed{au_x + bu_y = c}$$

- **Função incógnita:** $u = u(x, y)$
- **Funções conhecidas:** $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$, $c = c(x, y, u)$

5.1.2 Solução

A solução é dada pela solução do sistema de EDOs:

$$\begin{aligned} x'(s) &= a(x, y) \\ y'(s) &= b(x, y) \\ u'(s) &= c(x, y, u(x, y)) \end{aligned}$$

ou equivalentemente:

$$\boxed{ds = \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} \\ \frac{dx}{a} = \frac{du}{c} \end{cases}}$$

Ao resolver o sistema, obtemos duas constantes de integração C_1 e C_2. Podemos obter a solução geral da EDP através da relação entre as constantes:

$$\boxed{C_2 = f(C_1)}$$

5.2 Classificação de equações lineares de segunda ordem

Forma geral da EDP linear de segunda ordem em 2D:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

Os termos de ordem superior são mais importantes para a natureza da equação, logo a classificação da EDP é feita através do discriminante:

$$\boxed{B(x, y)^2 - 4A(x, y)C(x, y)}$$

- $\boxed{B^2 - 4AC > 0}$ - equação **hiperbólica**
  ex: equação da onda
- $\boxed{B^2 - 4AC = 0}$ - equação **parabólica**
  ex: equação do calor
- $\boxed{B^2 - 4AC < 0}$ - equação **elíptica**
  ex: equação de Laplace

A, B e C são funções, logo o **tipo pode mudar em função de x e y.**

5.3 Método de Fourier (separação de variáveis)

Procuram se soluções da forma:

$$\boxed{u(x,y) = X(x)T(y)}$$

Estas soluções correspondem à ideia de ”ondas estacionárias”: soluções cujo perfil X é constante no tempo mas com intensidade variável T.

Tendo como exemplo a equação do calor: $u_t = u_{xx}$, temos:

$$u_t = X(x)T'(t) \quad , \quad u_{xx} = X''(x)T(t)$$
$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$$

ou seja:

$$\boxed{\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda}$$

Assim sendo, temos duas EDOs lineares das quais sabemos as soluções para $\lambda > 0$:

$$T'(t) = -\lambda T(t) \quad \Rightarrow \quad T(t) = Ce^{-\lambda t}$$
$$X''(x) = -\lambda X(x) \quad \Rightarrow \quad X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

logo obtemos duas soluções possíveis da equação:

$$\boxed{u(x,t) = Ce^{-\lambda t}\cos(\sqrt{\lambda}x)}$$

$$\boxed{u(x,t) = Ce^{-\lambda t}\sin(\sqrt{\lambda}x)}$$

Para escolhermos entre estas soluções, usamos as condições de fronteira.

5.3.1 Condições de fronteira e iniciais

Para obtermos soluções especificas precisamos de:

- Uma condição inicial: $u(x,0) = f(x)$
- Condições de fronteira: valores de u ou suas derivadas em 0 e L.

As condições de fronteira mais comuns são:

- **Condição de Dirichlet:** ”arrefecimento perfeito”, temperatura constante em 0 na fronteira

$$\boxed{u(0,t) = u(L,t) = 0}$$

Para verificar a condição nula nos extremos a função $f(x)$ deve ter apenas a componentente seno, com $\sqrt{\lambda}L = n\pi$, logo, se $f(x) = \sin(\frac{\pi n}{L}x)$, então:

$$\boxed{\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}}$$

$$\boxed{u(x,t) = e^{-(\frac{\pi n}{L})^2 t} \sin(\frac{\pi n}{L} x)}$$

- **Condição de Neumann:** "isolamento perfeito", fluxo de calor nulo na fronteira

$$\boxed{u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0}$$

Para verificar a condição de derivada nula nos extremos a função $f(x)$ deve ter apenas a componentente cosseno, com $\sqrt{\lambda}L = n\pi$, logo, se $f(x) = \cos(\frac{\pi n}{L} x)$, então:

$$\boxed{\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}_0}$$

$$\boxed{u(x,t) = e^{-(\frac{\pi n}{L})^2 t} \cos(\frac{\pi n}{L} x)}$$

5.3.2 Condição inicial com f(x) arbitrária

Condições de fronteira de Dirichlet ($u(0,t) = u(L,t) = 0$)

Para uma condição inicial $u(x,0) = f(x)$ onde $f(x)$ é contínua (por partes) e admite a decomposição:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \sin(\frac{n\pi}{L} x)$$

onde

$$\beta_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(\frac{n\pi}{L} x) dx$$

então a solução $u(x,t)$ é dada por:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t} \sin(\frac{n\pi}{L} x)}$$

Condições de fronteira de Neumann ($u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$) Para condições de fronteira de Neumann, a decomposição de $f(x)$ é feita em cossenos:

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos(\frac{n\pi}{L} x)$$

com

$$\alpha_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(\frac{n\pi}{L} x) dx$$

e a solução $u(x,t)$ é dada por:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t} \cos(\frac{n\pi}{L} x)}$$