TDF

Samuel Fortunato

25 de janeiro de 2026

Conteúdo

1 Info

1.1 Professor

José M. Castanheira
e-mail: jcast@ua.pt
Gabinete: 13.3.31.2

1.2 Bibliografia

Fundamentals of Engineering Thermodynamics - Michael J. Moran, Howard N. Shapiro, Daisie D. Boettner, Margaret B. Bailey
Fluid Mechanics - Frank M. White. Henry Xue

Parte I

Termodinâmica

1 Sistemas e grandezas de estado. Pressão e temperatura.

1.1 Sistemas Termodinâmicos

Um **sistema termodinâmico** é uma porção do universo constituída por matéria e/ou radiação e separada da sua **vizinhança** por paredes reais ou imaginárias, nomeadas de **fronteira**.

1.1.1 Classificação de Sistemas

Os sistemas termodinâmicos podem ser classificados como:

- **Fechados -** Permitem a troca de energia com a vizinhança, mas não de matéria.
- **Abertos -** Permitem a troca de energia e massa com a vizinhança.
- **Isolados -** Não permitem a troca de energia nem massa com a vizinhança.

Sistemas fechados são comummente chamados de **massas de controlo** e sistemas abertos de **volumes de controlo**

1.2 Propriedades

Uma **propriedade** é uma caraterística de um sistema termodinâmico à qual se pode atribuir valores quantitativos em cada instante sem conhecer os processos pelos quais o sistema passou.

Isto é, uma **propriedade** é uma caraterística mensurável de um sistema, que é independente do que aconteceu antes no sistema.

Ao conjunto dos valores das propriedades de um sistema chama-se **estado do sistema**.

1.2.1 Propriedades intensivas e extensivas

As propriedades de um sistema dividem-se em:

- **Propriedades intensivas -** propriedades cuja magnitude é independente do tamanho do sistema.
  e.g.: Temperatura, T; Densidade, ρ; Temperatura de fusão, T_m,
- **Propriedade extensivas -** propriedades cuja magnitude é aditiva para subsistemas.
  e.g.: Massa, m; Volume, V; Rigidez da mola, k,

1.3 Equilíbrio

Diz-se que um sistema está num **estado de equilibrio termodinamico** quando as condições da vizinhança são fixas e o sistema evoluiu para um estado que não varia com o tempo e que é independente dos estados anteriores.

Este estado só se alterará se a vizinhança do sistema for sujeita a alterações.

1.4 Sistemas compressiveis simples

Quando analisamos **sistemas compressíveis simples** (sistemas macroscópicamente homogeneos, isotropicos e não carregados) aplica se o seguinte **postulado de estado**:

> O estado de um **sistema compressível simples** é completamente especificado por duas propriedades independentes e pela massa de cada substãncia que o constitui.

Um sistema compressível simples é geralmente caracterizado pela pressão, p, temperatura, T, volume, V, e pela sua composição (*e.g.* massa dos elementos). Logo, pelo *postulado de estado* uma das propriedades do sistema é determinadas pelas outras duas atraves de uma **equação de estado**:

$$X_3 = f(X_1, X_2)$$

onde X_i representa uma variável de estado.

1.5 Processos

Um processo é a mudança que um sistema sofre de um estado de equilibrio para outro. Se qualquer propriedade do sistema muda diz se que ocorre um processo.

Processo Adiabático Processo que ocorre sem transferência de energia por calor.

Processo Diabático O oposto de adiabático, processo em que ocorre tranferência de energia por calor.

Processo Isobárico Processo realizado a pressão constante.

Processo Isotérmico Processo ao longo do qual não há mudança de temperatura.

Processo Isocórico Processo que ocorre sem alteração de volume do sistema.

Processo Isopícnico Processo a densidade constante

Processo Politrópico Processo que obedece a relação: $PV^n = \text{constante}$

1.6 Volume Específico

O **Volume Específico** (v) é definido como o inverso da densidade:

$$v = \frac{1}{\rho}$$

sendo a densidade dada pela expressão já conhecida: $\rho = \frac{m}{V}$

1.7 Pressão

A **Pressão** (P **ou** p) é a força exercida perpendicularmente por unidade de área de uma superfície.

$$p = \lim_{A \to A'} \left(\frac{F_{normal}}{A} \right)$$

sendo A' a menor área para a qual existe um valor definido da expressão.[1]

1.7.1 Medições de Pressão

- **Pressão Absoluta -** obtida por aplicação direta da fórmula acima. É medida em referencia a um vácuo absoluto, onde a pressão é 0.

- **Pressão Atmosférica -** pressão (absoluta) do ar na atmosfera terrestre, que varia principalmente com a altitude, entre outros fatores. Tem o valor ao nível do mar tabelado de: 101.325 Pa, 1013.25 mbar, 760 mmHg, 29.9212 inHg ou 14.696 psi.

- **Pressão Manométrica -** pressão medida relativamente à pressão atmosférica local. Tem o valor zero quando a pressão do fluido é igual à pressão atmosférica.

$$p_{gauge} = p_{abs} - p_{atm}$$

- **Pressão de Vácuo -** módulo de uma pressão manométrica negativa. Usada quando a pressao a a ser medida é inferior à atmosférica, isto é, existe um vácuo.

[1] A' é suficientemente grande para efeitos de partículas individuais serem desprezáveis, mas suficientemente pequena para ser considerada um ponto

1.7.2 Equilibrio hidrostático

Quando um fluído se encontra num campo gravítico $\vec{g}$, a pressão cresce na direção do campo. A equação obtém-se aplicando a 2ª Lei de Newton a um volume infinitesimal.

$$d\vec{F}_{press} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k}\right) dxdydz$$

obtendo-se, de forma mais geral:

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{g}$$

1.8 Temperatura

1.8.1 Escalas de temperatura

Para a definição de uma escala de temperatura e necessário a escolha de dois estados de referência, chamados **pontos fixos**. O estado escolhido é normalmente o ponto triplo da àgua.

Escala Kelvin Baseia-se no ponto triplo da àgua, atribuindo o valor de 273.16 K à temperatura nesse estado. O valor de 0 K representa o zero absoluto, e temperaturas inferiores a esta não estão definidas.

Celcius Baseia-se no **ponto de fusão do gelo** e no **ponto de ebulição da água** atribuindo-lhes, respetivamente, os valores de 0 °C e 100 °C

Fahrenheit e Rankine Baseadas na escala Kelvin, e menos comuns. Relacionam-se através das equações:

$$^{\circ}R = 1.8 \cdot K$$
$$^{\circ}F = {}^{\circ}R - 459.67$$
$$^{\circ}F = 1.8 \cdot {}^{\circ}C + 32$$

A relação entre as 4 escalas nos pontos fixos é representada na tabela 1

	K	°C	°R	°F
Zero Absoluto	0.00	-273.15	0.00	-459.67
Ponto de fusão	273.15	0.00	491.67	32.0
Ponto triplo	273.16	0.01	491.69	32.02
Ponto de Ebulição	373.15	100.0	671.67	212

Tabela 1: Relações entre escalas de temperatura

2 Energia: Calor e Trabalho. 1ª lei da termodinâmica

2.1 Conhecimento prévio

Já conhecemos uma série de definições relacionadas com conceitos energéticos:

$$W_{\vec{F}} = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} \tag{1}$$

$$\Delta KE = \frac{1}{2} m \left(V_2^2 - V_1^2\right) \tag{2}$$

$$\Delta PE = -mg(z_2 - z_1) \tag{3}$$

$$\Delta E_m = \Delta KE + \Delta PE \tag{4}$$

sendo (1) a definição de trabalho de uma força, (2) a (variação de) energia cinética, (3) a (variação de) energia potencial, e (4) a (variação de) energia mecânica. A partir da equação 4 deduz-se o princípio da conservação da energia.

São também já conhecidas as relações entre as grandezas:

$$\Delta KE = W_{\vec{F_R}}$$
$$\Delta PE = W_{\vec{F_C}}$$
$$\Delta E_m = W_{\vec{F_{NC}}}$$

sendo $\vec{F_R}$ a resultante das forças, $\vec{F_C}$ o somatório das forças conservativas, e $\vec{F_{NC}}$ o somatório das forças não conservativas.

2.2 Trabalho

Em termodinâmica uma interação é caracterizada como trabalho se o efeito dessa interação na vizinhança do sistema puder ser substituida pela subida ou descida de um peso.

Trabalho é um processo de transferência de energia.

2.2.1 Convenção de sinais e notação

Trabalho feito ***pelo*** sistema: $W > 0$
Trabalho feito ***no*** sistema: $W < 0$

Diferencial do trabalho O trabalho não é uma propriedade do sistema. Ao contrário de outras grandezas, como o volume ou a pressão, o trabalho não tem um valor definido para cada estado, apenas sendo definido para um processo, ou seja, mudança de un estado para outro.

Assim sendo adota-se a notação δW para o diferencial do trabalho em vez do expectável $\cancel{dW}$.

2.2.2 Potência

A taxa de transferência de energia por trabalho é denominada por **Potência**:

$$\dot{W} = \frac{\delta W}{dt}$$

Quando o trabalho resulta de uma força macroscópica observável é válida a formula:

$$\dot{W} = \vec{F} \cdot \vec{V}$$

2.2.3 Trabalho de expansão ou compressão de um fluído

O trabalho realizado por um sistema que consiste num fluido dentro de um pistão quando este é deslocado é dado por:

$$\delta W = pA\,dx$$

sendo p a pressão do fluído e A a área da face do pistão.

O produto $A\,dx$ representa uma mudança de volume, dV. A equação pode ser integrada para uma mudança de volume de V_1 a V_2 obtendo-se a seguinte expressão, válida para todos os sistemas, em processos quase-estáticos:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV \tag{5}$$

Processos politrópicos Para avaliar o integral da equação (5) é necessário obter uma relação entre a pressão p e o volume V. Uma das relações que pode ser considerada é aquela que representa um processo politrópico:

$$pV^n = \text{constante}$$
$$\text{OU}$$
$$pv^n = \text{constante}$$

Outras relações entre p e V podem ser consideradas.

2.2.4 Outros exemplos de trabalho

Extensão de uma barra sólida Numa barra fixa em $x = 0$ à qual é aplicada uma tensão normal σ o trabalho é dado por:

$$W = -\int_{x_1}^{x_2} \sigma A\,dx$$

Extensão de um filme de líquido Para um líquido suspenso numa estrutura de arame, sustentado pela tensão superficial do mesmo. Sendo τ a tensão superficial exercida pelo filme num arame móvel, o trabalho é dado por:

$$W = -\int_{A_1}^{A_2} \tau\,dA$$

Potência transmitida por um eixo Num eixo a rodar com velocidade angular ω que exerce um torque τ na vizinhança, o trabalho realizado em n rotações é dado por:

$$W = 2\pi n\tau$$

e a equação da potência transmitida para a vizinhanca é:

$$\dot{W} = \tau\omega$$

Trabalho elétrico Num sistema constituido por uma bateria de diferença de potencial ε, conectada a um circuito externo com uma corrente I. Sendo Q a carga que atravessa um ponto do circuito, o trabalho é dado por

$$\delta W = -\varepsilon\,dQ$$

e a potência transmitida é

$$\dot{W} = -Ei$$

2.3 Energia

Em termodinâmica a energia é dividida em 3 componentes:

- **Energia Cinética** KE - Associada com o movimento do sistema como um todo.
- **Energia Potencial Gravítica** PE - Relacionada com a posição do sistema como um todo, no campo gravítico terrestre.
- **Energia Interna** U - Todas as outras formas de energia.

Assim sendo, a energia total de um sistema é dada por:

$$E = KE + PE + U$$

e a variação da energia é representada por:

$$\Delta E = \Delta KE + \Delta PE + \Delta U$$

2.4 Calor

Até agora foram consideradas as transferências de energia que podem ser consideradas trabalho, mas é possivel haver outras formas de transferencia de enrgia. A este tipo de interação chama se **calor**.

2.4.1 Convenção de sinais e notação

Calor é a transferência de energia de e para um sistema. Por convenção considera se positiva quando o sistema ganha energia e negativa quando o sistema transfere energia para a vizinhança.

Energia transferida ***para*** o sistema: $Q > 0$
Energia transferida ***do*** sistema: $Q < 0$

Tal como o trabalho, o calor não é uma propriedade do sistema, logo não tem um valor definido para um estado, sendo tambem usada a notação δQ em vez de $\cancel{dQ}$.

2.4.2 Calor num processo

O calor transferido num processo entre o estado 1 e o estado 2 é dado por:

$$Q = \int_1^2 \delta Q$$

Para calcular o integral é útil definir uma grandeza denominada **taxa de transferência de calor** dada por:

$$\dot{Q} = \frac{\delta Q}{dt}$$

sendo assim a energia transferida por calor entre os instantes t_1 e t_2 dada por:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} \dot{Q}\, dt$$

2.4.3 Modos de transferência de calor

Existem 3 modos básicos de tranferencia de energia por calor: condução, convecção e radiação.

2.5 Primeira Lei da termodinâmica - Balanço energético

Das experiencia de Joule, entre outros, surgiu a primeira lei da termodinâmica:

> *A variação de **energia total** de um sistema fechado é igual à diferenca entre a energia transderida para o sistema sobre a forma de calor e o trabalho realizado pelo sistema sobre a vizinhança.*

Esta é expressa pela equação:

$$\Delta U = Q - W \tag{6}$$

em que o significado das variáveis está expresso na tabela 2.

Símbolo	Variável	Unidades
ΔE	Variação de energia total	Joule (J)
Q	Energia transferida para o sistema por calor	Joule (J)
W	Energia transferida para a vizinhança por trabalho do sistema	Joule (J)

Tabela 2: Variáveis na 1ª Lei da Termodinâmica

2.6 Análise de Ciclos

Quando são analisados ciclos de um sistema, a variação de energia é nula.

$$\begin{gathered} \cancelto{0}{\Delta E} = Q - W \\ \Leftrightarrow Q = W \end{gathered}$$

Se considerarmos o calor de entrada Q_{in} e o calor de saída Q_{out} como quantidades positivas, o trabalho total é dado por:

$$W_{ciclo} = Q_{in} - Q_{out}$$

2.6.1 Ciclos de Potência

Um ciclo de potência é uma série de processos que converte energia térmica em trabalho. A eficiência térmica (rendimento) do ciclo é calculado com a equação:

$$\eta = \frac{W_{ciclo}}{Q_{in}} \tag{7}$$

2.6.2 Ciclos de refrigeração e bombas de calor

Um ciclo de refrigeração / bomba de calor é um sistema que transmite energia por calor de uma uma fonte para um acomulador, que se encontra a temperatura mais elevada, necessitando um trabalho positivo para tal.

A eficiência (coeficiente de performance) de um **Ciclo de Refrigeração** é dada por:

$$\beta = \frac{Q_{in}}{W_{ciclo}} \tag{8}$$

e para uma **Bomba de Calor** calcula se com:

$$\gamma = \frac{Q_{out}}{W_{ciclo}} \tag{9}$$

2.6.3 Limitações de eficiência

O rendimento (η) tem o limite teórico de 1, e a eficiência (β e γ) não têm limite superior. No entanto, devido à 2ª Lei da Termodinâmica, que será estudada mais tarde, todos os coeficientes de performance, em aplicacoes reais, tem limites inferiores a esses valores teóricos.

3 Diagramas de fases. Calor latente

3.1 Fases e substâncias puras

Uma **Substância Pura** é uma cuja composição química é uniforme. Uma substânica pura pode existir em várias **fases**

Uma **fase** de uma substância é uma cantidade de substância com propriedades **fisicas** homogéneas. Homogeneidade neste contexto significa que toda a matéria é **sólida**, **líquida** ou **gasosa**. Um sistema pode conter uma ou mais fases.

3.2 Relação $p - v - T$

Em sistemas compressíveis simples, sabe se por procedimento experimental que a Temperatura T e o Volume específico v podem ser considerados como independentes e a Pressão p pode ser determinada como função destes dois: $p = p(T, v)$. O gráfico desta função é uma superfície, a superfície $p - v - T$

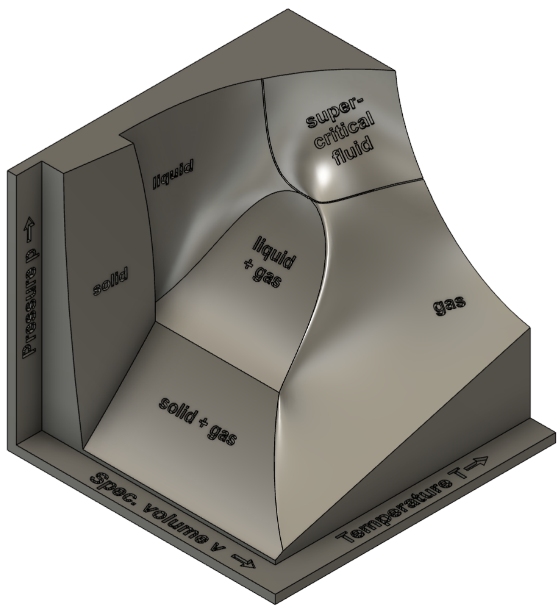

Figura 1: Diagrama $p - v - T$ de uma substância que expande ao solidificar

3.2.1 Regiões de fase única

Num diagrama $p - v - T$ de uma substância há regiões em que apenas existe uma fase: região sólida, líquida, e gasosa. Nestas regiões o estado do sistema fica definido por **duas** das seguintes propriedades: pressão, volume expecífico e temperatura.

3.2.2 Regiões de duas fases

Entre as fases de fase única encontram se zonas em que existem duas fases em equilibrio: líquido-gás, sólido-líquido, e sólido-vapor.

Nas zonas de duas fases, a pressão e a temperatura não são independentes e o estado do sistema não pode ser definido apenas por temperatura e pressão. Para descrever o estado numa região de duas fases, é necessário indicar o volume específico, juntamente com a temperatura **ou** a pressão.

Um estado onde uma mudança de fase se inicia é chamado de **estado de saturação**.

As 3 fases podem existir em equilibrio ao longo de uma linha chamada **triple line** ou **linha tripla**.

A zona líquido-vapor é chamada de **saturation dome** ou **cúpula de saturação**, e é limitada pelas linhas de líquido saturado e vapor saturado. No topo da cúpula, encontra se o **ponto crítico**. A cúpula é limitada inferiormente pela linha tripla.

3.3 Projeções do diagrama $p - v - T$

3.3.1 Diagrama de fases

Ao projetar a superfície $p - v - T$ no plano pressão-temperatura, obtém se um **diagrama de fases**.

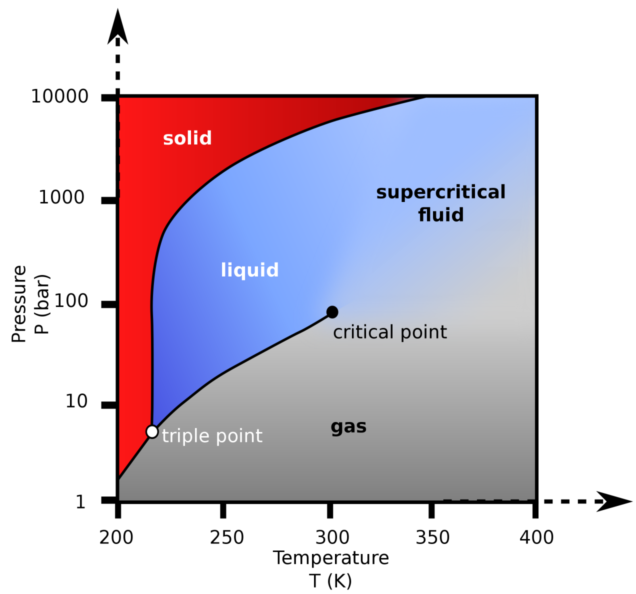

Figura 2: Diagrama de Fases

Neste tipo de diagramas, as regiões de duas fases reduzem-se a uma linha. Um ponto nesta linha representa todas as misturas de duas fases à temperatura e pressão do ponto.

A linha tripla (da superficie $p - v - T$) é projetada num ponto, chamado de **ponto triplo**.

3.3.2 Diagrama $p - v$

Projetando a superficie $p - v - T$ no plano pressão-volume específico, obtém se um diagrama $p - v$.

Este tipo de diagrama é útil para a resolução de alguns exercícios, e é muitas vezes apresentado com linhas de temperatura constante. Quando o sistema se encontra numa região de duas fases, a temperatura constante, a pressão mantém se tambem constante com mudanças de v. (as linhas isotérmicas são horizontais na cúpula de saturação).

3.3.3 Diagrama $T - v$

Projetando a superfície $p - v - t$ para o plano temperatura-volume específico, obtém-se um diagrama $T - v$.

Tal como o diagrama $p - v$, o diagrama $T - v$ é útil na resolução de problemas, e é apresentado muitas vezes com linhas de pressão constante.

Para pressões abaixo da pressão do ponto crítico, a pressão mantém se constante com mudanças de temperatura, enquanto é atravessada a região de 2 fases (ocorre mudança de estado).

3.4 Mudanças de fase

Um sistema constituido por 1 kg de àgua a uma temperatura de 20 °C e a uma pressão de 1.014 bar é aquecido a pressão constante.

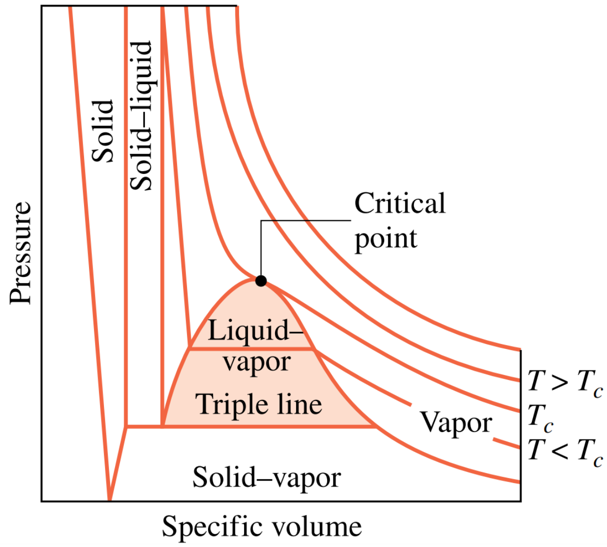

Figura 3: Diagrama $p - v$

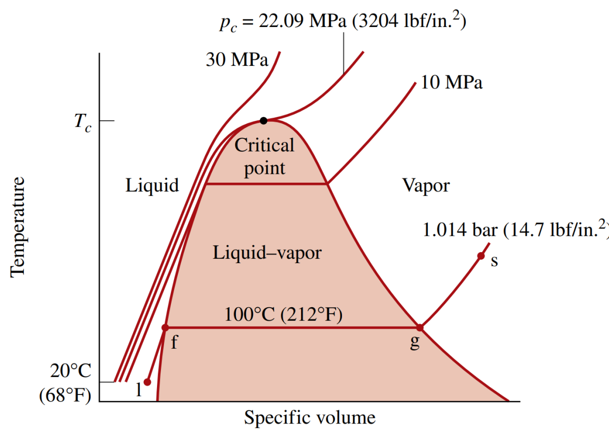

Figura 4: Diagrama $T - v$

Estado líquido O sistema inicia numa fase líquida, denominada de **líquido sub-arrefecido**, **líquido comprimido**, ou apenas líquido. À medida que aumenta a temperatura, o volume específico aumenta gradualmente até atingir o ponto f da figura 4. Ao estado representado pelo ponto f chama-se **líquido saturado**.

Mistura líquido-vapor Após atingir o estado de líquido saturado, qualquer transferência adicional de calor leva à formação de vapor, sem qualquer alteração da temperatura. O sistema consiste numa mistura de duas fases líquido-gás. Ao continuar a transferir energia por calor, o sistema chega eventualmente ao ponto g da figura 4. A este estado chama-se **vapor saturado**.

Estado gasoso Assim que o sistema atinge o estado de vapor saturado, transferencia adicional de energia leva ao aumento tanto da temperatura como do volume específico. Este estado corresponde ao ponto s da figura 4, e é chamado de **vapor sobre-aquecido**, ou simplesmente vapor.

3.4.1 Parâmetro de qualidade

Para misturas líquido-vapor, é conveniente definir o parâmetro de qualidade:

$$x = \frac{m_{vapor}}{m_{liquid} + m_{vapor}} \tag{10}$$

3.5 Calor latente

O **calor latente** é a quantidade de calor que uma unidade de massa de substância deve receber ou ceder para mudar de fase.

3.6 Entalpia

Numa mudança de fase, o **calor latente** não corresponde à variação de energia interna do sistema (ΔU) uma vez que durante uma mudança de fase há expansão/contração do sistema, logo é realizado trabalho.

$$\text{calor latente} \neq \Delta U$$

$$calor\ latente = \Delta U + W = \Delta U + \int_{v_i}^{v_f} p\, dV$$

É assim conveniente definir uma variável de estado tal que a sua variação durante uma mudança de fase corresponda ao calor latente. Essa variável é a entalpia:

$$H = U + pV \tag{11}$$

ou expressa por unidade de massa (entalpia específica):

$$h = u + pv \tag{12}$$

ou por mole:

$$\overline{h} = \overline{u} + p\overline{v} \tag{13}$$

As unidades para a entalpia são as mesmas de energia interna (J).

3.7 Calores específicos

Duas propriedades importantes em termodinâmica são conhecidas como **calores específicos**, notados como c_v e c_p. São propriedades intensivas e são definidas como as derivadas da energia interna específica, u, e da entalpia específica, h:

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v \tag{14}$$

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p \tag{15}$$

3.8 Aproximações para líquidos

Usando dados experimentais (ver valores tabelados) conclui-se que, a temperatura constante, o volume expecífico v e a energia interna específica u variam muito pouco com a pressão.

São assim usadas as seguintes aproximações para cálculos:

$$v(T, p) \approx v_f(T) \tag{16}$$

$$u(T, p) \approx u_f(T) \tag{17}$$

onde v_f e u_f são os valores dessas propriedades para um líquido saturado.

Pode também ser obtida uma aproximação da entalpia usando as equações (16), (17) e a definição de entalpia (12):

$$h(T, p) \approx h_f(T)$$

3.9 Modelo da substância incompressível

Através de aproximações e para simplificar cálculos usa se o **modelo da substância incompressível**, onde o volume expecífico é constante e a energia interna expecifica é considerada apenas funcção da temperatura:

$$v = \text{constante}$$
$$u = u(T)$$

Sendo a energia apenas dependente da temperatura, então o **calor expecífico** c_v é tambem uma funcão da temperatura:

$$c_v(T) = \frac{du}{dT}$$

mas a **entalpia** depende da pressão e temperatura:

$$h(T, p) = u(T) + pv$$

Numa substância incompressível os calores específicos c_p e c_v são iguais, sendo representados apenas como c.

As equações para a variação da energia interna e da entalpia são:

$$\Delta u = \int_{T_1}^{T_2} c(T)\, dT$$
$$\Delta h = \Delta u + v(p2 - p1)$$

Em intervalos de temperatura pequenos, c pode ser considerado constante, sem perda significativa de precisão, obtendo-se:

$$\Delta u = c(T_2 - T_1)$$
$$\Delta h = c(T_2 - T_1) + v(p_2 - p_1)$$

3.9.1 Coeficientes de dilatação e compressibilidade

Substâncias incompressíveis são apenas uma idealização. As propriedades que caracterizam a variação de volume devido à pressão ou à temperatura são o **coeficiente de dilatação volumétrica**:

$$\beta = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$$

e o **coeficiente de compressibilidade isotérmica**:

$$k = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T$$

3.10 Leis experimentais

Abaixo são enunciadas uma série de leis obtidas de resultados experimentais:

3.10.1 Lei de Boyle e Mariotte

Num processo ***isotérmico*** a pressão e o volume dos estados finais e iniciais são inversamente proporcionais:

$$p_i V_i = p_f V_f$$

3.10.2 Lei dos volumes de Charles e Gay-Lussac

Para uma temperatura de referência T_0, todos os gases tem o mesmo coeficiente de expansão térmica volumétrica médio:

$$\overline{\beta_0} = \frac{1}{V_0}\frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{1}{V_0}\frac{V - V_0}{T - T_0}$$

sendo assim a variação de volume de um gás proporcional à variação de temperatura:

$$V - V_0 = \overline{\beta_0} V_0 (T - T_0)$$

minimo de temperatura, bla bla bla, escala absoluta de temperatura **????**

Definição de escala de temperatura absoluta:

$$T = 273.1 \lim_{p_{PT} \to 0} \left(\frac{p}{p_{PT}} \right) (\mathrm{K})$$

a volume V constante, onde p_{PT} é a pressão do gás à temperatura do ponto triplo da água.

3.10.3 Lei de Avogadro

Segundo a lei de Avogadro, nas mesmas condições de pressão e temperatura, todos os gases têm o mesmo volume molar:

$$\overline{v} = \frac{V}{n} = f(p, T)$$

3.10.4 Constante universal dos gases

De resultados experimentais concluiu-se que a razão $p\overline{v}/T$ tende para um valor constante a pressões baixas, independentemente da temperatura e do gás em consideração.

$$\lim_{p \to 0} \frac{p\overline{v}}{T} = \overline{R} \quad (\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}) \tag{18}$$

A esta constante $\overline{R}$ chama-se **constante universal dos gases**, e tem o valor de $R^* = 8.314\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$.

A constante universal dos gases pode ser expressa em em ordem à massa molar de uma molécula M, usando-se apenas o símbolo R para este valor (sem a $\overline{\text{linha}}$):

$$R = \frac{R^*}{M} \quad (\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}})$$

3.10.5 Fator de compressibilidade

A razão adimensional denominada **fator de compressibilidade** Z é definida como:

$$Z = \frac{p\overline{v}}{\overline{R}T} = \frac{pv}{RT}$$

Expressando a equação (18) em termos do fator de compressibilidade obtém-se:

$$\lim_{p \to 0} Z = 1$$

ou seja, o fator de compressibilidade tende para 1 a pressões baixas.

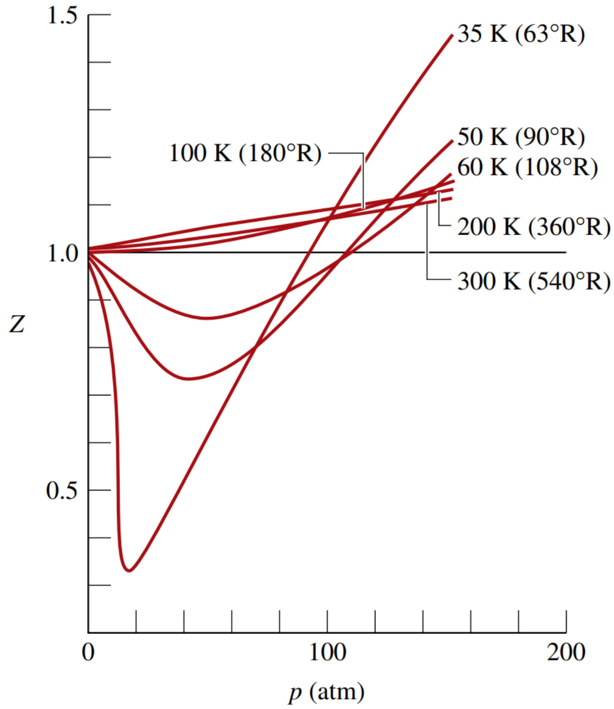

Figura 5: Fator de Compressibilidade Z em função da pressão p, a temperatura constante T

3.10.6 Compressibilidade generalizada

A figura 5 apresenta o fator de compressibilidade para o hidrogénio, mas os gráficos são **qualitativamente** iguais (gráficos parecidos) para todos os gases. Se as coordenadas forem mudadas, é obtida igualdade **quantitativa** (gráficos iguais com valores iguais). Para obter esta igualdade, o fator de compressibilidade Z é representado nos eixos **pressão reduzida** p_R, e **temperatura reduzida** T_R, definidas como:

$$p_R = \frac{p}{p_c}$$
$$T_R = \frac{T}{T_c}$$

onde p_c e T_c são a pressão e temperatura do ponto crítico (desse gás).

A representação do gráfico de Z nestas coordenadas é igual para todos os gases, obtendo-se um gráfico de compressibilidade generalizado (figura 6).

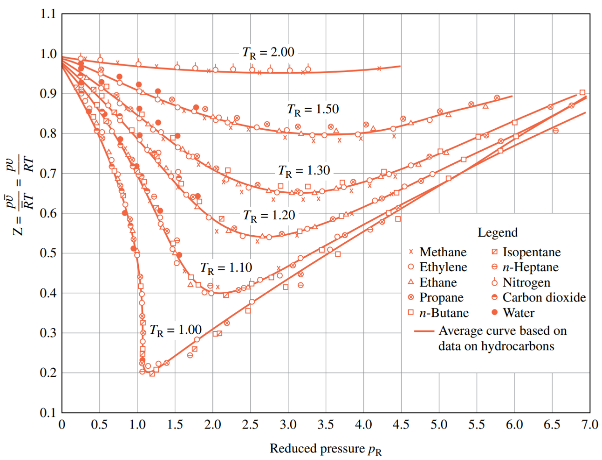

Figura 6: Gráfico de compressibilidade generalizado

4 Gases ideais

Nesta secção indroduz-se o modelo do gas ideal

4.1 Equação de estado do gás ideal

Como visto na secção anterior, quando a pressão é baixa relativamente à pressão critica, e/ou quando a temperatura é elevada em relação à temperatura crítica, o fator de compressibilidade é aproximadamente 1. Nestas situações, assume-se $Z = 1$, ou seja:

$$pv = RT$$

conhecida como a **equação de estado do gás ideal**.

Existem formas alternativas da mesma equação, obtidas com as relações $v = \frac{V}{m}$, $v = \frac{\overline{v}}{M}$ e $R = \frac{\overline{R}}{M}$:

$$pV = mRT$$
$$p\overline{v} = \overline{R}T$$
$$pV = n\overline{R}T$$

4.2 Modelo do gás ideal

O modelo do gás ideal é definido por 3 equações, que podem ser usadas com um certo grau de erro, uma vez que gases reais se aproximam deste modelo.

$$pv = RT \tag{19}$$
$$u = u(T) \tag{20}$$
$$h = h(T) = u(T) + RT \tag{21}$$

4.3 Energia interna, entalpia, e calores específicos de gases ideiais

Num gás ideal, como a energia interna u específica depende apenas da temperatura T, o calor específico c_v também depende apenas de T.

$$c_v(T) = \frac{du}{dT}$$

De igual forma, como a entalpia especifica h depende apenas de T, então o calor específico c_P também é uma função apenas da temperatura.

$$c_p(T) = \frac{dh}{dT}$$

Diferenciando a equação (21) em relação à temperatura, obtém-se:

$$\frac{dh}{dT} = \frac{du}{dT} + R$$

de onde se obtém a relação:

$$c_p(T) = c_v(T) + R$$

Sabe se também que $c_p > c_v$, logo, a razão de calores específicos, $k = \frac{c_p(T)}{c_v(T)}$, é funcão apenas da temperatura e $k > 1$.

5 Reversibilidade e irreversibilidade: 2ª lei da termodinâmica

5.1 Enunciados da 2ª Lei da Termodinâmica

Existem 3 formas de enunciar a **2ª lei da termodinâmica**:

- Enunciado de Clausius
- Enunciado de Kelvin-Planck
- Enunciado da entropia

Os enunciados de Clausius e de Kelvin-Planck são as formulações mais comuns da 2ª lei, mas o enunciado da entropia é o mais útil, e aplicável a uma grande variedade de contextos. Este último enunciado irá ser estudado no próximo capítulo.

5.1.1 Enunciado de Clausius

É impossível para qualquer sistema operar de forma que o ***único*** *resultado seja uma transferência de calor de um corpo mais frio para um mais quente.*

O enunciado de Clausius não impossibilita a transferencia de calor de um corpo mais frio para um mais quente, mas tal transferência implica outros efeitos no sistema, na vizinhança, ou em ambos.

5.1.2 Enunciado de Kelvin-Planck

É impossível para qualquer sistema operar num ciclo termodinâmico e fornecer energia por trabalho à sua vizinhança enquanto recebe energia por transfeência de calor de ***um único reservatório*** *de temperatura.*

O enunciado de Kelvin-Planck não impossibilita um sistema de realizar trabalho a partir de calor transferido de um único reservatório, mas implica que esse sistema não realiza um ciclo.

O enunciado de Kelvin-Planck pode ser expressado analiticamente pela equação:

$$W_{ciclo} \leq 0 \quad \text{(com um único reservatório)}$$

5.1.3 Enunciado da entropia

A entropia é uma propriedade extensiva de um sistema, tal como a massa e a energia, mas ao contrário destas, a entropia pode ser gerada quando existem *irreverssibilidades* no sistema. Este conceito será estudado em profundidade no próximo capítulo.

É impossível para qualquer sistema operar de forma a que entropia seja destruida.

5.2 Processos reversíveis e irreversíveis

Um processo é dito de **irreversível** se o sistema e todas as partes de sua vizinhança não puderem ser exatamente restauradas para os respetivos estados iniciais após a ocorrência do processo.

Um sistema que sofre um processo irreversível não está necessáriamente impedido de voltar ao seu estado inicial, mas isto implicaria mudanças na vizinhança. É impossível reverter **ambos** (sistema e vizinhança) para o seu estado inicial. Uma consequência de segunda lei da termodinâmica é que todos os processos naturais espontâneos são irreversíveis.

Um processo é **reversível** se o sistema e a vizinhança puderem retornar aos seus estados iniciais. Isto acontece quando:

1. O processo é quase estático
2. Não é acompanhado de quaisquer efeitos dissipativos

5.3 Detalhar o enunciado de Kelvin-Planck

A expressão analítica do enunciado de Kelvin-Planck pode ser decomposta entre processos reversíveis e irreversíveis:

$$W_{ciclo} \leq 0 \begin{cases} < 0 : & \text{irreversibilidade} \\ = 0 : & \text{reversibilidade} \end{cases}$$

5.4 Corolários de Carnot

5.4.1 Ciclos de Potência

Recordando, a eficiência ou rendimento, η de uma máquina térmica é dado pela razão entre o trabalho realizado e o calor recebido num ciclo:

$$\eta = \frac{W_{ciclo}}{Q_H} = 1 - \frac{Q_C}{Q_H} \tag{22}$$

Se hipotéticamente $Q_C = 0$ o sistema iria receber energia do reservatório quente, Q_H, e produzir uma quantidade de trabalho igual à energia recebida (eficiência máxima, $\eta = 1$). No entanto, esta hipotese viola o enunciado de Kelvin-Planck.

Assim sendo em qualquer ciclo de potência, apenas uma parte da energia recebida como calor Q_H é obtida como trabalho. A restante energia, Q_C é descarregada para o reservatório frio. Logo, **a eficiencia térmica de um ciclo de potência é sempre inferior a 100%. -** $\eta < 100\%$ (sistemas reais)

Os corolários de Carnot, consequencia da 2ª Lei da Termodinâmica, dizem nos que:

1. A eficiência, η, de um ciclo de potência irreversível, realizado entre dois reservatórios térmicos, é inferior à eficiência de um ciclo reversível, realizado entre os mesmos reservatórios.

2. Todos os ciclos de potência reversíveis, que se realizem entre os mesmos reservatórios térmicos, tem a mesma eficiência, η.

5.4.2 Ciclos de refrigeração e de bomba de calor

O raciocínio anterior pode ser igualmente aplicado a ciclos de refrigeração e de bomba de calor, cuja eficiência/rendimento é dada por:

$$\beta = \frac{Q_C}{W_{ciclo}} = \frac{Q_C}{Q_H - Q_C} \quad \text{(Ciclos de Refrigeração)}$$
$$\gamma = \frac{Q_H}{W_{ciclo}} = \frac{Q_H}{Q_H - Q_C} \quad \text{(Bombas de Calor)}$$

Aplicando o mesmo raciocínio, obtém-se os corolários:

1. Os coeficientes de performance de uma bomba de calor ou ciclo de refrigeração tendem para $+\infty$ quando W_{ciclo} tende para 0, No entando, num ciclo irreversível são sempre um valor real, finito.

2. O coeficiente de performance de um ciclo de refrigeração/bomba de calor é sempre menor que o coeficiente de performance de um ciclo reversível, quando estes operam entre os mesmos reservatórios térmicos.

3. Todos os ciclos de refrigeração/bomba de calor que operam entre os mesmos dois reservatórios termicos têm o mesmo coeficiente de performance.

5.5 Escala de temrperatura absoluta

Do segundo corolário de Carnot sabemos que qualquer sistema que execute um ciclo reversível entre dois reservatórios de temperatura tem o mesmo rendimento, logo, devido à definição de rendimento (22), sabemos que a razão $\frac{Q_C}{Q_H}$ depende apenas das temperaturas dos reservatórios:

$$\left(\frac{Q_C}{Q_H}\right) = f(T_C, T_H)$$

Esta equação é a base para a definição de uma escala de temperatura termodinâmica, havendo diversas escolhas para a função f, mas a **Escala Kelvin** é definida com $f = \frac{T_H}{T_C}$. Obtém-se assim:

$$\frac{Q_C}{Q_H} = \frac{T_C}{T_H} \quad \text{(ciclos reversíveis)} \tag{23}$$

Esta equação, no entanto, dá nos apenas a razao entre temperaturas, sendo necessário adotar um valor de referência, que é como ja sabemos, a temperatura no ponto triplo da água ($T_{TP} = 237.16\,\text{K}$. Assim temos a definicao da escala Kelvin, dada por:

$$T = 273.16 \frac{|Q|}{|Q_{TP}|} \text{K}$$

5.6 Rendimento máximo de ciclos

5.6.1 Máquinas térmicas

Das equações 22 e 23 obtém se uma expressão para a eficiência de um ciclo **reversível** a operar entre dois reservatórios, chamada de **eficiência de Carnot**:

$$\eta_{max} = 1 - \frac{T_C}{T_H}$$

Esta é a eficiência **máxima** de qualquer ciclo a operar entre reservatórios de temperatura T_C e T_H, e aumenta à medida que T_H aumenta e T_C diminui.

5.6.2 Ciclos de refrigeração/bomba de calor

Pelo mesmo raciocínio chega-se às equações para a eficiência máxima de ciclos de refrigiração (24) e de bomba de calor (25):

$$\beta_{max} = \frac{T_C}{T_H - T_C} \tag{24}$$

$$\gamma_{max} = \frac{T_H}{T_H - T_C} \tag{25}$$

5.7 Desigualdade de Clausius

A desigualdade de Clausius, aplicável para qualquer ciclo termodinâmico, diz-nos que:

$$\oint_{fronteira} \left(\frac{\delta Q}{T}\right) \leq 0$$

e esta pode ser escrita na forma:

$$\oint_{fronteira} \left(\frac{\delta Q}{T}\right) \leq -\sigma_{ciclo}$$

onde σ_{ciclo} vai ser interpretada, no próximo capítulo, como a entropia gerada, e $\sigma_{ciclo} \geq 0$.

$$\begin{cases} \sigma_{ciclo} = 0 & \text{não há irreversibilidades presentes no sistema} \\ \sigma_{ciclo} > 0 & \text{há irreversibilidades no sistema} \\ \sigma_{ciclo} < 0 & \text{sistema impossível} \end{cases}$$

6 Entropia: Formulação da 2ª lei da Termodinâmica

6.1 Definição de entropia

Partindo da desigualdade de Clausius, chega-se à conclusão que o integral $\int \delta Q/T$, num processo reversível, depende apenas dos estados inicial e final. Isto significa que este integral representa uma varição de uma propriedade do sistema.

A esta propriedade chamamos **entropia** e designa-se pela letra S:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$$

e escrevendo-se na forma diferencial:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \tag{26}$$

A entropia é uma propriedade extensiva, e a unidade SI é o $\mathrm{J\,K^{-1}}$, mas é apresentada comumente em $\mathrm{kJ\,K^{-1}}$.

6.2 Equações $T\,dS$

Partindo da 1ª lei da Termodinâmica, e rearanjando a equação (26), obtemos a primeira equação $T\,ds$:

$$T\,dS = dU + pdV$$

A segunda equação é obtida derivando a definição de entalpia (12), resolvendo em ordem a dU e susbtituindo na primeira equaçáo, obtendo-se:

$$T\,dS = dH - V\,dp$$

Estas equações podem ainda ser escritas por unidade de massa:

$$T\,ds = du + p\,dv$$
$$T\,ds = dh - v\,dp$$

6.3 Entropia de substancias incompressíveis

Na secção 3.9 definiu-se o modelo da substancia incompressível, que assume que o volume específico é constante e que a energia interna específica depende apenas da temperatura, e os calores específicos c_v e c_p são iguais, e representados por c. Assim sendo, $du = c(T)\,dT$, e aplicando esta igualdade à primeira equação $T\,ds$ obtém-se:

$$ds = \frac{c(T)\,dT}{T} + \cancelto{0}{\frac{p\,dv}{T}} = \frac{c(T)\,dT}{T}$$

e integrando, obtém-se:

$$s_2 - s_2 = c \ln \frac{T_2}{T_1} \quad \text{(incompressível, c constante)}$$

6.4 Balanço de entropia

Partindo da desigualdade de Clausius e da definicção de variação de entropia obtém-se a seguinte equação, denominada de **balanço da entropia em sistemas fechados**:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + \sigma \tag{27}$$

que pode ser interpretada como: "A variação de entropia num sistema é dada pela entropia transferida através da fronteira do sistema, somada com a entropia gerada dentro do sistema (pelas irreverssibilidades)"

Esta equação pode ser escrita na forma diferencial como:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} + \delta\sigma$$

6.5 Interpretação estatística da entropia

Com base em cálculos detalhados da mecânica estatística mostra-se que a entropia é dada pela expressão:

$$S = k_B \ln \Omega$$

onde Ω representa o número de mico-estados (configurações possíveis, isto é, posições e velocidades das particulas, que o sistema pode ter, de acordo com a energia total do sistema) e k_B representa a constante de Boltzmann.

Esta constante de Boltzmann, k_B é dada pela equação:

$$k_B = \frac{\overline{R}}{N_A}$$

7 Resumo: Leis da termodinâmica

7.1 Lei zero da termodinâmica

Dois sistemas em equilíbrio térmico com um terceiro estão em equilíbrio térmico entre si.

7.2 1ª Lei da Termodinâmica

*A variação de **energia total** de um sistema fechado é igual à diferenca entre a energia transderida para o sistema sobre a forma de calor e o trabalho realizado pelo sistema sobre a vizinhança.*

Expressa pela equação:

$$\Delta U = Q - W$$

7.3 2ª Lei da Termodinâmica

Existem 3 formas de enunciar a **2ª lei da termodinâmica**:

- Enunciado de Clausius
- Enunciado de Kelvin-Planck
- Enunciado da entropia

Os enunciados de Clausius e de Kelvin-Planck são as formulações mais comuns da 2ª lei, mas o enunciado da entropia é o mais útil, e aplicável a uma grande variedade de contextos. Este último enunciado irá ser estudado no próximo capítulo.

7.3.1 Enunciado de Clausius

*É impossível para qualquer sistema operar de forma que o **único** resultado seja uma transferência de calor de um corpo mais frio para um mais quente.*

O enunciado de Clausius não impossibilita a transferencia de calor de um corpo mais frio para um mais quente, mas tal transferência implica outros efeitos no sistema, na vizinhança, ou em ambos.

7.3.2 Enunciado de Kelvin-Planck

*É impossível para qualquer sistema operar num ciclo termodinâmico e fornecer energia por trabalho à sua vizinhança enquanto recebe energia por transfeência de calor de **um único reservatório** de temperatura.*

O enunciado de Kelvin-Planck não impossibilita um sistema de realizar trabalho a partir de calor transferido de um único reservatório, mas implica que esse sistema não realiza um ciclo.

O enunciado de Kelvin-Planck pode ser expressado analiticamente pela equação:

$$W_{ciclo} \leq 0 \quad \text{(com um único reservatório)}$$

7.3.3 Enunciado da entropia

A entropia é uma propriedade extensiva de um sistema, tal como a massa e a energia, mas ao contrário destas, a entropia pode ser gerada quando existem *irreverssibilidades* no sistema.

É impossível para qualquer sistema operar de forma a que entropia seja destruida.

Parte II

Dinâmica de Fluidos

1 Introdução

1.1 Volume de controlo (pag. 16)

Em Dinâmica de Fluidos vamos trabalhar principalmente com volumes de controlo, ou seja, sistemas abertos. Há fluxo de energia e massa entre o sistema e a vizinhança (praticamente) sempre. Assim sendo, torna-se quase impossível analisar um sistema aberto, usando téncicas Newtonianas ou Lagrangianas, pois estas envolvem obter a posição, velocidade, e aceleração de todas as partículas.

Utiliza-se assim o método Euleriano, onde as propriedades de um fluxo de fluido são dadas como funções das coordenadas espaciais, e do tempo. Abaixo encontra-se o exemplo da velocidade, descrita no método de Euler.

1.2 Campo de velocidades (pag. 17)

A velocidade é uma função vetorial da posição e do tempo, e as suas componentes são por convenção u, v e w.

A velocidade é das propriedades mais fundamentais de um fluxo, pois muitas outras propriedades obtém-se através da velocidade.

$$\vec{V}(x,y,z,t) = u(x,y,z,t)\hat{i} + v(x,y,z,t)\hat{j} + w(x,y,z,t)\hat{k}$$

1.3 Linhas de corrente / streamlines (pag. 41)

Uma linha de corrente é uma curva tangente à velocidade em cada ponto, num dado instante.

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = \frac{dr}{V}$$

2 Relações integrais para um volume de controlo

2.1 Caudal e fluxo de massa (pag. 138)

Qual o volume de fluido que atravessa uma superficie S por unidade de tempo? Como $\vec{V}$ varia com a posição, devemos integrar em ordem a dA, e ter em conta que a velocidade pode fazer um ângulo θ com a normal à superficie. Assim sendo, o volume que atravessa a superfície é dado por:

$$d\mathcal{V} = V\, dt\, dA \cos\theta = (\vec{V} \cdot \hat{n})\, dA\, dt$$

sendo $\mathcal{V}$ o volume de fluido. (não confundir com $\vec{V}$ que representa a velocidade)

O integral de $d\mathcal{V}$ dá nos o **caudal** (fluxo de volume):

$$Q = \frac{d\mathcal{V}}{dt} = \int_S \vec{V} \cdot \hat{n}\, dA$$

Para obter o **fluxo de massa**, multiplica-se o fluxo de volume pela densidade:

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \int_S \rho \vec{V} \cdot \hat{n}\, dA \tag{28}$$

Se a densidade e a velocidade forem uniformes na superfície, então obtém se a aproximação unidimensional:

$$\boxed{\dot{m} = \rho Q = \rho V A}$$

Por convenção define-se $\hat{n}$ como o vetor normal que aponta para fora. Assim sendo, Q e $\dot{m}$ indicam fluxo para fora quando são positivos, e para dentro quando são negativos.

As unidades de Q são $\mathrm{m^3\,s^{-1}}$ e de $\dot{m}$ são $\mathrm{kg\,s^{-1}}$

2.2 Teorema do transporte de Reynolds (pag. 139)

Seja B uma propriedade qualquer do fluido e $\beta = \frac{dB}{dm}$ o seu valor específico, a quantidade total de B no volume de controlo é dada por:

$$B_{CV} = \int_{CV} \beta\, dm = \int_{CV} \beta\rho\, d\mathcal{V}$$

Interessa-nos saber a taxa de variação temporal da propriedade B, e esta é dada pelo **Teorema do transporte de Reynolds**:

$$\boxed{\frac{dB_{Sist}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_{CV} \beta\rho\, d\mathcal{V}\right) + \int_{CS} \beta\rho(\vec{V}\cdot\hat{n})\, dA}$$

onde $\vec{V}$ é a **velocidade relativa** do fluido relativamente superfície do volume de controlo. CV é o volume de controlo e CS é a superfície de controlo.

Se o volume for fixo a derivada temporal passa para dentro do integral, obtendo-se:

$$\frac{dB_{Sist}}{dt} = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t}(\beta\rho)\, d\mathcal{V} + \int_{CS} \beta\rho(\vec{V}\cdot\hat{n})\, dA$$

Em muitos casos o volume é fixo, e tem um número definido de entradas e saidas unidimensionais - a velocidade é perpendicular a cada secção e as propriedades são uniformes em cada secção. Nestes casos, o teorema de transporte de Reynolds pode escrever-se como:

$$\boxed{\frac{dB_{Sist}}{dt} = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t}(\beta\rho)\, d\mathcal{V} + \sum \beta_i \dot{m}_i\Big|_{out} - \sum \beta_i \dot{m}_i\Big|_{in}}$$

onde $\dot{m}_i = \rho_i A_i V_i$, obtendo-se assim:

$$\frac{dB_{Sist}}{dt} = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t}(\beta\rho)\, d\mathcal{V} + \sum(\rho_i\beta_i V_i A_i)_{out} - \sum(\rho_i\beta_i V_i A_i)_{in}$$

2.3 Equação da conservação da massa (pag. 147)

Até agora usamos B para uma qualquer propriedade do sistema, e β para o valor especifico (por unidade de massa) da propriedade.

Aplicando agora o teorema do transporte de Reynolds à massa m, onde a massa específica $\frac{dm}{dm} = 1$ obtém-se a **equação da conservação da massa**, com volume fixo:

$$\frac{dm_{Sist}}{dt} = 0 = \int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\mathcal{V} + \int_{CS} \rho(\vec{V} \cdot \hat{n}) \, dA$$

No caso especifico de escoamento estável, a equação da conservação da massa reduz-se a:

$$\int_{CS} \rho(\vec{V} \cdot \hat{n}) \, dA = 0$$

que, para um sistema com entradas e saídas unidimensionais, pode escrever-se como:

$$\sum (\rho_i A_i V_i)_{out} - \sum (\rho_i A_i V_i)_{in} = 0$$

2.4 Equação do momento linear (pag. 152)

AVISO: Notação

Na próxima equação, é usada a notação $\vec{p}$ para o momento linear, que não deve ser confundida com a notação usada nos restantes capítulos onde p (normalmente representada sem vetor) que representa a pressão.

Usando a 3ª lei de Newton: $\boxed{\vec{F}_R = \dot{\vec{p}}}$ e aplicando o teorema do transporte de Reynolds ao momento linear $\boxed{\vec{p} = m\vec{V}}$, onde o valor especifico é a velocidade ($\beta = d\vec{p}/dm = \vec{V}$), obtém-se a seguinte relação para o momento linear:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}_{Sist}}{dt} = \int_{CV} \frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t}\, d\mathcal{V} + \int_{CS} \rho\vec{V}(\vec{V}\cdot\hat{n})\, dA$$

sendo esta válida para um volume de controlo fixo, com a velocidade observada num referencial inercial.

Para um sistema com entradas e saídas unidimensionais, presente na maioria dos exercícios, usa se a versão simplificada:

$$\boxed{\sum \vec{F} = \int_{CV} \cancelto{0}{\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}}\rho\, d\mathcal{V} + \sum \vec{V}_i\dot{m}_i\Big|_{out} - \sum \vec{V}_i\dot{m}_i\Big|_{in}}$$

O termo $\sum \vec{F}$ representa a soma de todas as forças exercidas no fluído:

- **Forças de superficie**
  Forças que atuam na fronteira do volume de controlo, como:
  - Forças de pressão
  - Forças viscosas (atrito)
  - Forças exercidas por corpos sólidos (ex. pistão), sendo estas uma pressão distribuída na superfície de contacto.
- **Forças volúmicas**
  Forças que atuam em todo o volume de controlo, como:
  - Força da gravidade
  - Forças eletromagnéticas

2.4.1 Força total da pressão (pag. 153)

As **forças de superficie** que atuam num volume de controlo são devidas **(1)** a forças **exercidas por corpos sólidos** que intersetam o volume de controlo (ex. pistão), e **(2)** a forças de **pressão** e **viscosidade** exercidas pelo **fluido envolvente** (quando a superficie de controlo interseta o fluido).

A força total da pressão é dada por:

$$\vec{F}_{press} = \int_{CS} p(-\hat{n})\, dA \tag{29}$$

Se a pressão for uniforme, $p = p_a$ em toda a superficie de controlo, então a força total de pressão é nula.

$$\vec{F}_{press} = -p_a \int_{CS} \hat{n}\, dA \; \boxed{= 0}$$

ATENÇÃO: Vetor normal e sinais

A convenção para o vetor normal $\hat{n}$ é que este aponta para fora do volume de controlo.
A força de **pressão atua de fora para dentro** do volume de controlo, ou seja, no sentido oposto ao vetor normal, daí o sinal negativo. Este pode ser colocado no vetor normal, como em (29) ou fora do integral, como em (30).

Muitos problemas podem ser simplificados se a pressão uniforme, p_a for subtraída de todas as pressões envolvidas, sendo assim considerada, por definição desta a **pressão manométrica**. A equação da força total da pressão pode então ser escrita como:

$$\vec{F}_{press} = -\int_{CS} (p - p_a)\hat{n}\, dA = -\int_{CS} p_{gauge}\hat{n}\, dA \tag{30}$$

Um exemplo de pressão uniforme, p_a é a pressão atmosférica, que atua em todas as superfícies expostas ao ar.

Para um volume de controlo com entradas e saídas unidimensionais, a força total da pressão pode ser escrita como:

$$\boxed{F_{\text{x press}} = \sum p_i A_i (-\hat{n} \cdot \vec{e}_x)}$$

ATENÇÃO: Sinais

O sinal positivo ou negativo depende da orientação do vetor normal e da direção positiva do eixo.

$$(-\hat{n} \cdot \vec{e}_x) = \begin{cases} -1 & \hat{n} \text{ no sentido do eixo} \\ 1 & \hat{n} \text{ no sentido oposto ao eixo} \\ 0 & \hat{n} \text{ perpendicular ao eixo} \\ -\cos\theta & \text{caso geral} \end{cases}$$

A **pressão** atua sempre no sentido **de fora para dentro** do volume de controlo.

2.5 Equação de Bernoulli (pag. 168)

Uma relação clássica e usada extensívamente que deriva da análise do momento linear é a **equação de Bernoulli**. Esta é aplicável para escoamentos não viscosos, sem atrito, logo deve ser aplicada apenas a regiões do escoamento onde a fricção é praticamente nula.

Considera-se um volume de controlo definido por um elemento ds de um tubo de corrente com secção $A(s)$ onde s é a coordenada ao longo de uma linha de corrente. As propriedades (ρ, p, V) são constantes em cada secção, mas variam com s.

Aplica-se a conservação da massa (transporte de Reynolds), obtendo, na forma diferencial:

$$\frac{d\rho}{dt} d\mathcal{V} + d\dot{m} = 0$$

que se rearanja para obter a forma que pretendemos:

$$d\dot{m} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} A\, ds$$

Escrevendo o diferencial do momento linear (transporte de Reynolds), na direção da corrente:

$$\sum dF_s = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho V_s\right) A\, ds + d(\dot{m} V_s) \tag{31}$$

sendo $\sum F_s$ e V_s o somatório das forças, e a velocidade, ambos na direção de s. $V_s = V$ pois s tem a direção da corrente.

Se o escoamento for não viscoso (= atrito desprezado), as únicas forças que atuam no corpo são:

- **Força da gravidade**:

$$dF_{s,\text{grav}} = -\rho g A\, dz$$

- **Força da pressão**:

$$dF_{s,\text{press}} = -A\, dp$$

Substituindo estas forças na equação do momento linear (31) e simplificando, obtemos a **Equação de Bernoulli** para escoamento não estável, não viscoso, ao longo de uma linha de corrente:

$$\frac{\partial V}{\partial t} ds + \frac{dp}{\rho} + V\, dV + g\, dz = 0$$

esta equação está na forma diferencial, e pode ser integrada entre quaisquer 2 pontos na linha de corrente.

Como consideramos apenas escoamentos estáveis ($\frac{\partial V}{\partial t} = 0$) e incompressíveis ($\rho$ = const), a equação reduz-se para:

$$\boxed{\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} V_1^2 + g z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} V_2^2 + g z_2 = \text{const}}$$

2.6 Equação da conservação da energia (pag. 184)

Após aplicar o teorema do transporte de Reynolds para a conservação da massa, conservação do momento linear, e do momento angular (este último não abordado na cadeira de TDF, mas encontra-se presente no livro), aplicamos agora o teorema à **Primeira Lei da Termodinâmica**.

A variável em estudo passa a ser E, a energia total, e a quantidade por unidade de massa é a energia expecífica:

$$e = \frac{1}{2}V^2 + \hat{u} + gz$$

Assim sendo, a **Primeira Lei da Termodinâmica**, escrita na forma diferencial, toma a seguinte forma:

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_{CV} e\rho \, d\mathcal{V}\right) + \int_{CS} e\rho(V \cdot \hat{n}) \, dA$$

O termo do Calor, $\dot{Q}$ pode ser decomposto em várias componentes: condução, convecção e radiação, no entanto não é abordado na cadeira, nem no livro.

Já o termo do trabalho pode ser decomposto em 3 parcelas:

$$\dot{W} = \dot{W}_{eixo} + \dot{W}_{pressao} + \dot{W}_{tensao\ de\ viscosidade} = \dot{W}_s + \dot{W}_p + \dot{W}_\nu \tag{32}$$

O trabalho de forças gravíticas não é incluido, pois já é contabilizado na primeira lei da Termodinâmica como energia potencial.

O trabalho de eixo representa o trabalho realizado por uma máquina (veio de um motor, ventoinha, pistão, etc.) que entra pela superficie de controlo.

O trabalho realizado pela pressão ocorre apenas na superfície de controlo, pois dentro do volume de controlo todas as forças de pressão são iguais e opostas, logo cancelam-se. O trabalho da pressão é dado pela força de pressão vezes a velocidade normal para dentro do volume de controlo:

$$d\dot{W}_p = p(\vec{V} \cdot \hat{n}) \, dA \Leftrightarrow$$
$$\dot{W}_p = \int_{CS} p(\vec{V} \cdot \hat{n}) \, dA$$

O trabalho das forças de viscosidade também ocorre apenas na superficie de controlo, e é dado por:

$$d\dot{W}_\nu = -\tau \cdot \vec{V} \, dA \Leftrightarrow$$
$$\dot{W}_\nu = -\int_{CS} \tau \cdot \vec{V} \, dA$$

Calculando este termo:

- numa **superficie sólida** *(no splipping condition)*

  $\vec{V} = \vec{0}$ então $\dot{W}_\nu = 0$

- numa **entrada ou saída** do volume de controlo

  $\dot{W}_\nu = -\int_{CS} \tau_{nn} V_n \, dA \approx 0$

  onde τ_{nn} é a componente normal da tensão que é normalmente muito pequena.

- numa **superficie** ss **de um fluido** externo ao sistema

  $\dot{W}_\nu = -\int_{ss} \vec{\tau} \cdot \vec{V} \, dA \neq 0$

  sendo esta a única componente **não desprezada**.

Assim, a expressão para o trabalho das forças viscosas é:

$$\dot{W}_\nu = \dot{W}_{ss}$$

Substituindo esta equação na primeira lei da Termodinâmica, e simplificando, obtemos a seguinte relação:

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{ss} = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\hat{u} + \frac{1}{2}V^2 + gz\right)\right] d\mathcal{V} + \int_{CS} \rho\left(\hat{h} + \frac{1}{2}V^2 + gz\right)(\vec{V}\cdot\hat{n})\, dA$$

Esta é a equação geral para a primeira lei da Termodinâmica, mas é mais útil quando simplficada para 1 entrada e 1 saída unidimensionais e escoamento estacionário obtemos a seguinte versão simplificada:

$$\boxed{\hat{h}_1 + \frac{1}{2}V_1^2 + gz_1 = \left(\hat{h}_2 + \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2\right) - q + w_s + w_{ss}}$$

Onde w_s é o trabalho de eixo e w_{ss} é o trabalho da viscosidade de um fluido externo ao sistema.

Assume-se ainda um escoamento incompressível e trocas de calor com o exterior nulas, com uma bomba e uma turbina a operar no fluido. Dividem-se todos os termos pela aceleração gravítica, para converter as energias q e w para unidades de comprimento, que representam a **carga hidraulica** h. Com estas condições, obtém-se a formula:

$$\boxed{\left(\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1\right)_{\text{in}} = \left(\frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2\right)_{\text{out}} + h_{\text{atrito}} + h_{\text{turbina}} - h_{\text{bomba}}}$$

Neste caso o trabalho da fricção remove sempre energia ao fluido, ou seja, h_{atrito} é sempre positivo.

ATENÇÃO: Entalpia $\hat{h}$ vs carga hidraulica h

Não confundir a notação de entalpia $\hat{h} = \hat{u} + \frac{p}{\rho}$ com a notação de carga hidraulica $h = \frac{e}{g}$
A carga hidraulica é uma representação da energia, mas com unidades de comprimento, que representa a altura que uma coluna de fluido a uma certa pressão e velocidade teria num tubo vertical.
A presença de g deve-se ao facto de líquido sobe no tubo, contra a ação da gravidade.

Por vezes adiciona-se um fator de correção ao termo da velocidade, se não se puder assumir que esta é constante nas secçãoes de entrada e saida. O fator de correção representa-se por α e é igual a 2 para escoamentos perfeitamente laminares, e aproximadamente 1 num escoamento turbulento

3 Relações diferenciais para um escoamento

Com o teorema do transporte de Reynolds podemos aplicar leis da Mecanica e da Termodinâmica a volumes de controlo finitos. Pretendemos agora aplicar as mesmas leis a partículas materiais de um meio contínuo - isto é, quantidades de massa muito pequenas.

3.1 Derivada material e derivada local

Para aplicar leis da mecanica a partículas materiais temos que relacionar a derivada local de uma propriedade, com a derivada segundo o movimento das partículas.

Considerando uma propriedade com função da posição e do tempo, a **derivada material** (derivada de uma propriedade de uma partícula de matéria que se move com velocidade $\vec{v}$) é dada por:

$$\boxed{\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\vec{v}(\vec{r},t)\cdot\vec{\nabla}\right) = \frac{\partial}{\partial t} + \left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}\right)}$$

O primeiro termo denomina-se termo local ou **derivada local**. O segundo chama-se **termo convectivo**

Notação de derivada material

Por convenção usa se o D maiúsculo para indicar derivada material, e para não confundir com a derivada local.

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{d}{dt} \neq \frac{\partial}{\partial t}$$

Daqui em diante usaremos apenas a notação com D maiúsculo

3.2 Equação da continuidade (conservação da massa)

A equação da conservação de massa, ou **equação da continuidade**, escrita em coordenadas cartesianas é a seguinte:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0}$$

Esta equação pode ser convertida para **coordenadas polares cilindricas**, tomando a seguinte forma:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0}$$

3.2.1 Simplificação para escoamento incompressível

Se assumirmos escoamento incompressível, $\partial\rho/\partial t \approx 0$, e a densidade pode ser tirada para fora da divergência, obtendo se as equação simplificada:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{V} = 0}$$

3.3 Equação do momento linear (Navier-Stokes)

A equação para o momento linear é dada por:

$$\sum \vec{F} = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt}\, dx\, dy\, dz$$

As forças que atuam na partícula são as forças volúmicas (apenas consideraremos a gravidade) e as forças de contacto. Estas últimas são devidas às tensões na superficie do volume de controlo (infinitesimal), que são a soma da pressão hidrostática, p com as tensões viscosas τ_{ij}.

Substituindo as forças na equação do momento linear obtemos a seguinte equação, na forma vetorial:

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{\tau}}}$$

onde

$$\overline{\overline{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

Esta equação está escrita de uma forma extremamente compacta, mas se for escrita por extenso, para cada componente, toma a forma:

$$\boxed{\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}}$$

3.3.1 Fluidos não viscosos - Equação de Euler

Caso a viscosidade seja desprezável (fluidos ideiais) assumimos que $\overline{\overline{\tau}} = 0$, a equação do momento linear reduz-se a:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p \tag{33}$$

3.3.2 Fluidos Newtonianos - Equação de Navier-Stokes

Para **fluidos newtonianos** as tensões viscosas são proporcionais à velocidade e ao coeficiente de viscosidade. Para escoamento incompressível tem-se que:

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

onde μ é o coeficiente de viscosidade.

Substituindo na equação do momento linear obtém-se as **equações de Navier-Stokes**, expressas na forma vetorial:

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{V}}$$

Ou expressas forma extensa, para a componente em x:

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)}$$

3.4 Vorticidade

A velocidade angular em torno do eixo z (e igualmente para os outros eixos) é dada por:

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Para eliminar o fator de 1/2 define-se a **vorticidade**:

$$\boxed{\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = 2\vec{\omega}}$$

Quando $\vec{\zeta} = \vec{0}$ o escoamento diz se **irrotacional**.

3.5 Escoamento ideal e irrotacional

Já sabemos que para um escoamento ideal (viscosidade desprezável), é válida a equação de Euler (33). Se o escoamento for arrotacional, através da expansão da derivada material, podemos voltar a obter a equação de Bernoulli:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + gz = \text{const}$$

Nesta equação, o valor da constante depende da linha de corrente. No caso expecifico de um escoamento **irrotacional**, a constante é a mesma em todo o volume de escoamento, independentemente da linha de corrente

4 Cheat Sheet

4.1 Suposições / aproximações comuns

Conservação da massa

$$\boxed{\dot{m}_{in} = \dot{m}_{out}}$$

Fluxo incompressível

$$\boxed{\rho = \text{const}}$$

Escoamento estável

$$\boxed{\frac{d\vec{V}}{dt} = 0}$$

4.2 Fórmulas essenciais

Caudal e fluxo de massa

Aprox. para entradas e saídas unidimensionais

$$\boxed{\dot{m} = \rho Q = \rho V A}$$

Teorema do transporte de Reynolds

Forma integral

$$\boxed{\frac{dB_{Sist}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_{CV} \beta\rho \, d\mathcal{V}\right) + \int_{CS} \beta\rho(\vec{V}\cdot\hat{n}) \, dA}$$

Transporte Reynolds

Volume de controlo constante, entradas e saidas unidimensionais

$$\boxed{\frac{dB_{Sist}}{dt} = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t}(\beta\rho) \, d\mathcal{V} + \sum \beta_i \dot{m}_i\Big|_{out} - \sum \beta_i \dot{m}_i\Big|_{in}}$$

Equação do momento linear

Escoamento estável e incompressível, entradas e saídas unidimensionais.

$$\boxed{\sum \vec{F} = \int_{CV} \cancelto{0}{\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}} \rho \, d\mathcal{V} + \sum \vec{V}_i \dot{m}_i\Big|_{out} - \sum \vec{V}_i \dot{m}_i\Big|_{in}}$$

Força total da pressão

Entradas e saídas unidimensionais

$$\boxed{F_{\text{x press}} = \sum p_i A_i(-\hat{n}\cdot\vec{e}_x)}$$

Equação de Bernoulli

Escoamento estável, incompressível, não viscoso, ao longo de uma linha de corrente

$$\boxed{\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}V_1^2 + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2 = \text{const}}$$

Equação da Energia

1 entrada e 1 saída unidimensionais, escoamento estacionário

$$\boxed{\hat{h}_1 + \frac{1}{2}V_1^2 + gz_1 = \left(\hat{h}_2 + \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2\right) - q + w_s + w_{ss}}$$

Equação da Energia

Mesmas condições que a anterior + escoamento incompressível, trocas de calor com o exterior nulas, com uma bomba e uma turbina a operar no fluido. Unidades de comprimento: carga hidraulica

$$\boxed{\left(\frac{p_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1\right)_{\text{in}}=\left(\frac{p_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2\right)_{\text{out}}+h_{\text{atrito}}+h_{\text{turbina}}-h_{\text{bomba}}}$$

Derivada Material

Derivada de uma propriedade de uma partícula de matéria que se move com velocidade $\vec{v}$

$$\boxed{\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\left(\vec{v}(\vec{r},t)\cdot\vec{\nabla}\right)=\frac{\partial}{\partial t}+\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)}$$

Equação da continuidade

Conservação da massa

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{V})=0}$$

Equação da continuidade

Coordenadas cilíndricas

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho v_\theta)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)=0}$$

Equação da continuidade

Escoamento incompressível

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{V}=0}$$

Equação do momento linear

Forma vetorial

$$\boxed{\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=\rho\vec{g}-\vec{\nabla}p+\vec{\nabla}\cdot\overline{\overline{\tau}}}$$

Equação do momento linear para a componente x

Equivalente para as componentes y e z

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}}$$

Equação de Navier-Stokes

Escoamento incompressível, fluido Newtoniano, forma vetorial

$$\boxed{\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=\rho\vec{g}-\vec{\nabla}p+\mu\vec{\nabla}^2\vec{V}}$$

Equação de Navier-Stokes

Mesmas condições que o anterior, componente em x

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)}$$

Vorticidade

$\vec{\zeta}=2\vec{\omega}$

$$\boxed{\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = 2\vec{\omega}}$$