

# TDF

Samuel Fortunato

8 de janeiro de 2026

## Conteúdo

<b>1 Info</b>	<b>4</b>
1.1 Professor . . . . .	4
1.2 Bibliografia . . . . .	4
<b>I Termodinâmica</b>	<b>5</b>
<b>1 Leis da termodinâmica</b>	<b>6</b>
1.1 Lei zero da termodinâmica . . . . .	6
1.2 1 <sup>a</sup> Lei da Termodinâmica . . . . .	6
1.3 2 <sup>a</sup> Lei da Termodinâmica . . . . .	6
1.3.1 Enunciado de Clausius . . . . .	6
1.3.2 Enunciado de Kelvin-Planck . . . . .	6
1.3.3 Enunciado da entropia . . . . .	6
<b>2 Sistemas e grandezas de estado. Pressão e temperatura.</b>	<b>7</b>
2.1 Sistemas Termodinâmicos . . . . .	7
2.1.1 Classificação de Sistemas . . . . .	7
2.2 Propriedades . . . . .	7
2.2.1 Propriedades intensivas e extensivas . . . . .	7
2.3 Equilíbrio . . . . .	7
2.4 Sistemas compressíveis simples . . . . .	7
2.5 Processos . . . . .	8
2.6 Volume Específico . . . . .	8
2.7 Pressão . . . . .	8
2.7.1 Medições de Pressão . . . . .	8
2.7.2 Equilíbrio hidrostático . . . . .	9
2.8 Temperatura . . . . .	9
2.8.1 Escalas de temperatura . . . . .	9
<b>3 Energia: Calor e Trabalho. 1<sup>a</sup> lei da termodinâmica</b>	<b>10</b>
3.1 Conhecimento prévio . . . . .	10
3.2 Trabalho . . . . .	10
3.2.1 Convenção de sinais e notação . . . . .	10
3.2.2 Potência . . . . .	10
3.2.3 Trabalho de expansão ou compressão de um fluído . . . . .	11
3.2.4 Outros exemplos de trabalho . . . . .	11
3.3 Energia . . . . .	12
3.4 Calor . . . . .	12
3.4.1 Convenção de sinais e notação . . . . .	12
3.4.2 Calor num processo . . . . .	12

3.4.3	Modos de transferência de calor . . . . .	12
3.5	Primeira Lei da termodinâmica - Balanço energético . . . . .	13
3.6	Análise de Ciclos . . . . .	13
3.6.1	Ciclos de Potência . . . . .	13
3.6.2	Ciclos de refrigeração e bombas de calor . . . . .	13
3.6.3	Limitações de eficiência . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Diagramas de fases. Calor latente</b>	<b>14</b>
4.1	Fases e substâncias puras . . . . .	14
4.2	Relação $p - v - T$ . . . . .	14
4.2.1	Regiões de fase única . . . . .	14
4.2.2	Regiões de duas fases . . . . .	14
4.3	Projeções do diagrama $p - v - T$ . . . . .	15
4.3.1	Diagrama de fases . . . . .	15
4.3.2	Diagrama $p - v$ . . . . .	15
4.3.3	Diagrama $T - v$ . . . . .	15
4.4	Mudanças de fase . . . . .	15
4.4.1	Parâmetro de qualidade . . . . .	17
4.5	Calor latente . . . . .	17
4.6	Entalpia . . . . .	17
4.7	Calores específicos . . . . .	17
4.8	Aproximações para líquidos . . . . .	17
4.9	Modelo da substância incompressível . . . . .	18
4.9.1	Coeficientes de dilatação e compressibilidade . . . . .	18
4.10	Leis experimentais . . . . .	18
4.10.1	Lei de Boyle e Mariotte . . . . .	18
4.10.2	Lei dos volumes de Charles e Gay-Lussac . . . . .	19
4.10.3	Lei de Avogadro . . . . .	19
4.10.4	Constante universal dos gases . . . . .	19
4.10.5	Fator de compressibilidade . . . . .	19
4.10.6	Compressibilidade generalizada . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Gases ideais</b>	<b>22</b>
5.1	Equação de estado do gás ideal . . . . .	22
5.2	Modelo do gás ideal . . . . .	22
5.3	Energia interna, entalpia, e calores específicos de gases ideais . . . . .	22
<b>6</b>	<b>Reversibilidade e irreversibilidade: 2<sup>a</sup> lei da termodinâmica</b>	<b>23</b>
6.1	Enunciados da 2 <sup>a</sup> Lei da Termodinâmica . . . . .	23
6.1.1	Enunciado de Clausius . . . . .	23
6.1.2	Enunciado de Kelvin-Planck . . . . .	23
6.1.3	Enunciado da entropia . . . . .	23
6.2	Processos reversíveis e irreversíveis . . . . .	23
6.3	Detalhar o enunciado de Kelvin-Planck . . . . .	24
6.4	Corolários de Carnot . . . . .	24
6.4.1	Ciclos de Potência . . . . .	24
6.4.2	Ciclos de refrigeração e de bomba de calor . . . . .	24
6.5	Escala de temperatura absoluta . . . . .	25
6.6	Rendimento máximo de ciclos . . . . .	25
6.6.1	Máquinas térmicas . . . . .	25
6.6.2	Ciclos de refrigeração/bomba de calor . . . . .	25
6.7	Desigualdade de Clausius . . . . .	25

<b>7 Entropia: Formulação da 2<sup>a</sup> lei da Termodinâmica</b>	<b>26</b>
7.1 Definição de entropia . . . . .	26
7.2 Equações $T dS$ . . . . .	26
7.3 Entropia de substancias incompressíveis . . . . .	26
7.4 Balanço de entropia . . . . .	26
7.5 Interpretação estatística da entropia . . . . .	27
<b>II Dinâmica de Fluidos</b>	<b>28</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>29</b>
1.1 Volume de controlo (pag. 16) . . . . .	29
1.2 Campo de velocidades (pag. 17) . . . . .	29
1.3 Linhas de corrente / streamlines (pag. 41) . . . . .	29
<b>2 Relações integrais para um volume de controlo</b>	<b>30</b>
2.1 Caudal e fluxo de massa (pag. 138) . . . . .	30
2.2 Teorema do transporte de Reynolds (pag. 139) . . . . .	31
2.3 Equação da conservação da massa (pag. 147) . . . . .	32
2.4 Equação do momento linear (pag. 152) . . . . .	33
2.4.1 Força total da pressão (pag. 153) . . . . .	33
2.5 Equação de Bernoulli (pag. 168) . . . . .	35
2.6 Equação da conservação da energia (pag. 184) . . . . .	36
<b>3 Relações diferenciais para um escoamento</b>	<b>38</b>
3.1 Derivada material e derivada local . . . . .	38
3.2 Equação da continuidade (conservação da massa) . . . . .	39
3.2.1 Simplificação para escoamento incompressível . . . . .	39
3.3 Equação do momento linear (Navier-Stokes) . . . . .	40
3.3.1 Fluidos não viscosos - Equação de Euler . . . . .	40
3.3.2 Fluidos Newtonianos - Equação de Navier-Stokes . . . . .	40
<b>4 Cheat Sheet</b>	<b>42</b>
4.1 Suposições / aproximações comuns . . . . .	42
4.2 Fórmulas essenciais . . . . .	42

# 1 Info

## 1.1 Professor

José M. Castanheira  
e-mail: jcast@ua.pt  
Gabinete: 13.3.31.2

## 1.2 Bibliografia

**Fundamentals of Engineering Thermodynamics** - W. Greiner, Springer  
**Fluid Mechanics** - Frank M. White. Henry Xue

**Parte I**

**Termodinâmica**

# 1 Leis da termodinâmica

## 1.1 Lei zero da termodinâmica

*Dois sistemas em equilíbrio térmico com um terceiro estão em equilíbrio térmico entre si.*

## 1.2 1<sup>a</sup> Lei da Termodinâmica

*A variação de **energia total** de um sistema fechado é igual à diferença entre a energia transferida para o sistema sobre a forma de calor e o trabalho realizado pelo sistema sobre a vizinhança.*

Expressa pela equação:

$$\Delta U = Q - W$$

## 1.3 2<sup>a</sup> Lei da Termodinâmica

Existem 3 formas de enunciar a 2<sup>a</sup> lei da termodinâmica:

- Enunciado de Clausius
- Enunciado de Kelvin-Planck
- Enunciado da entropia

Os enunciados de Clausius e de Kelvin-Planck são as formulações mais comuns da 2<sup>a</sup> lei, mas o enunciado da entropia é o mais útil, e aplicável a uma grande variedade de contextos. Este último enunciado irá ser estudado no próximo capítulo.

### 1.3.1 Enunciado de Clausius

*É impossível para qualquer sistema operar de forma que o **único** resultado seja uma transferência de calor de um corpo mais frio para um mais quente.*

O enunciado de Clausius não impossibilita a transferencia de calor de um corpo mais frio para um mais quente, mas tal transferência implica outros efeitos no sistema, na vizinhança, ou em ambos.

### 1.3.2 Enunciado de Kelvin-Planck

*É impossível para qualquer sistema operar num ciclo termodinâmico e fornecer energia por trabalho à sua vizinhança enquanto recebe energia por transferência de calor de **um único reservatório** de temperatura.*

O enunciado de Kelvin-Planck não impossibilita um sistema de realizar trabalho a partir de calor transferido de um único reservatório, mas implica que esse sistema não realiza um ciclo.

O enunciado de Kelvin-Planck pode ser expressado analiticamente pela equação:

$$W_{ciclo} \leq 0 \quad (\text{com um único reservatório})$$

### 1.3.3 Enunciado da entropia

A entropia é uma propriedade extensiva de um sistema, tal como a massa e a energia, mas ao contrário destas, a entropia pode ser gerada quando existem *irreversibilidades* no sistema.

*É impossível para qualquer sistema operar de forma a que entropia seja destruída.*

## 2 Sistemas e grandezas de estado. Pressão e temperatura.

### 2.1 Sistemas Termodinâmicos

Um **sistema termodinâmico** é uma porção do universo constituída por matéria e/ou radiação e separada da sua **vizinhança** por paredes reais ou imaginárias, nomeadas de **fronteira**.

#### 2.1.1 Classificação de Sistemas

Os sistemas termodinâmicos podem ser classificados como:

- **Fechados** - Permitem a troca de energia com a vizinhança, mas não de matéria.
- **Abertos** - Permitem a troca de energia e massa com a vizinhança.
- **Isolados** - Não permitem a troca de energia nem massa com a vizinhança.

Sistemas fechados são comumente chamados de **massas de controlo** e sistemas abertos de **volumes de controlo**

### 2.2 Propriedades

Uma **propriedade** é uma característica de um sistema termodinâmico à qual se pode atribuir valores quantitativos em cada instante sem conhecer os processos pelos quais o sistema passou.

Isto é, uma **propriedade** é uma característica mensurável de um sistema, que é independente do que aconteceu antes no sistema.

Ao conjunto dos valores das propriedades de um sistema chama-se **estado do sistema**.

#### 2.2.1 Propriedades intensivas e extensivas

As propriedades de um sistema dividem-se em:

- **Propriedades intensivas** - propriedades cuja magnitude é independente do tamanho do sistema.  
*e.g.: Temperatura,  $T$ ; Densidade,  $\rho$ ; Temperatura de fusão,  $T_m$ ,*
- **Propriedade extensiva** - propriedades cuja magnitude é aditiva para subsistemas.  
*e.g.: Massa,  $m$ ; Volume,  $V$ ; Rígidez da mola,  $k$ ,*

### 2.3 Equilíbrio

Diz-se que um sistema está num **estado de equilíbrio termodinâmico** quando as condições da vizinhança são fixas e o sistema evoluiu para um estado que não varia com o tempo e que é independente dos estados anteriores.

Este estado só se alterará se a vizinhança do sistema for sujeita a alterações.

### 2.4 Sistemas compressíveis simples

Quando analisamos **sistemas compressíveis simples** (sistemas macroscópicamente homogêneos, isotrópicos e não carregados) aplica-se o seguinte **postulado de estado**:

O estado de um **sistema compressível simples** é completamente especificado por duas propriedades independentes e pela massa de cada substância que o constitui.

Um sistema compressível simples é geralmente caracterizado pela pressão,  $p$ , temperatura,  $T$ , volume,  $V$ , e pela sua composição (*e.g.* massa dos elementos). Logo, pelo *postulado de estado* uma das propriedades do sistema é determinada pelas outras duas através de uma **equação de estado**:

$$X_3 = f(X_1, X_2)$$

onde  $X_i$  representa uma variável de estado.

## 2.5 Processos

Um processo é a mudança que um sistema sofre de um estado de equilíbrio para outro. Se qualquer propriedade do sistema muda diz-se que ocorre um processo.

**Processo Adiabático** Processo que ocorre sem transferência de energia por calor.

**Processo Diabático** O oposto de adiabático, processo em que ocorre transferência de energia por calor.

**Processo Isotérmico** Processo ao longo do qual não há mudança de temperatura.

**Processo Isocórico** Processo que ocorre sem alteração de volume do sistema.

**Processo Isopícnico** Processo a densidade constante

**Processo Politrópico** Processo que obedece a relação:  $PV^n = \text{constante}$

## 2.6 Volume Específico

O **Volume Específico** ( $v$ ) é definido como o inverso da densidade:

$$v = \frac{1}{\rho}$$

sendo a densidade dada pela expressão já conhecida:  $\rho = \frac{m}{V}$

## 2.7 Pressão

A **Pressão** ( $P$  ou  $p$ ) é a força exercida perpendicularmente por unidade de área de uma superfície.

$$p = \lim_{A \rightarrow A'} \left( \frac{F_{normal}}{A} \right)$$

sendo  $A'$  a menor área para a qual existe um valor definido da expressão.<sup>1</sup>

### 2.7.1 Medidas de Pressão

- **Pressão Absoluta** - obtida por aplicação direta da fórmula acima. É medida em referência a um vácuo absoluto, onde a pressão é 0.
- **Pressão Atmosférica** - pressão (absoluta) do ar na atmosfera terrestre, que varia principalmente com a altitude, entre outros fatores. Tem o valor ao nível do mar tabelado de: 101.325 Pa, 1013.25 mbar, 760 mmHg, 29.9212 inHg ou 14.696 psi.
- **Pressão Manométrica** - pressão medida relativamente à pressão atmosférica local. Tem o valor zero quando a pressão do fluido é igual à pressão atmosférica.

$$p_{gauge} = p_{abs} - p_{atm}$$

- **Pressão de Vácuo** - módulo de uma pressão manométrica negativa. Usada quando a pressão a ser medida é inferior à atmosférica, isto é, existe um vácuo.

---

<sup>1</sup>  $A'$  é suficientemente grande para efeitos de partículas individuais serem desprezáveis, mas suficientemente pequena para ser considerada um ponto

## 2.7.2 Equilibrio hidrostático

Quando um fluído se encontra num campo gravítico  $\vec{g}$ , a pressão cresce na direção do campo. A equação obtém-se aplicando a 2ª Lei de Newton a um volume infinitesimal.

$$d\vec{F}_{press} = - \left( \frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{k} \right) dx dy dz$$

obtendo-se, de forma mais geral:

$$\vec{\nabla}p = \rho \vec{g}$$

## 2.8 Temperatura

### 2.8.1 Escalas de temperatura

Para a definição de uma escala de temperatura é necessário a escolha de dois estados de referência, chamados **pontos fixos**. O estado escolhido é normalmente o ponto triplo da água.

**Escala Kelvin** Baseia-se no ponto triplo da água, atribuindo o valor de 273.16 K à temperatura nesse estado. O valor de 0 K representa o zero absoluto, e temperaturas inferiores a esta não estão definidas.

**Celcius** Baseia-se no **ponto de fusão do gelo** e no **ponto de ebulação da água** atribuindo-lhes, respectivamente, os valores de 0 °C e 100 °C

**Fahrenheit e Rankine** Baseadas na escala Kelvin, e menos comuns. Relacionam-se através das equações:

$$\begin{aligned} {}^{\circ}R &= 1.8 \cdot K \\ {}^{\circ}F &= {}^{\circ}R - 459.67 \\ {}^{\circ}F &= 1.8 \cdot {}^{\circ}C + 32 \end{aligned}$$

A relação entre as 4 escalas nos pontos fixos é representada na tabela 1

	K	°C	°R	°F
Zero Absoluto	0.00	-273.15	0.00	-459.67
Ponto de fusão	273.15	0.00	491.67	32.0
Ponto triplo	273.16	0.01	491.69	32.02
Ponto de Ebulação	373.15	100.0	671.67	212

Tabela 1: Relações entre escalas de temperatura

### 3 Energia: Calor e Trabalho. 1<sup>a</sup> lei da termodinâmica

#### 3.1 Conhecimento prévio

Já conhecemos uma série de definições relacionadas com conceitos energéticos:

$$W_{\vec{F}} = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (1)$$

$$\Delta KE = \frac{1}{2}m(V_2^2 - V_1^2) \quad (2)$$

$$\Delta PE = -mg(z_2 - z_1) \quad (3)$$

$$\Delta E_m = \Delta KE + \Delta PE \quad (4)$$

sendo (1) a definição de trabalho de uma força, (2) a (variação de) energia cinética, (3) a (variação de) energia potencial, e (4) a (variação de) energia mecânica. A partir da equação 4 deduz-se o princípio da conservação da energia.

São também já conhecidas as relações entre as grandezas:

$$\Delta KE = W_{\vec{F}_R}$$

$$\Delta PE = W_{\vec{F}_C}$$

$$\Delta E_m = W_{\vec{F}_{NC}}$$

sendo  $\vec{F}_R$  a resultante das forças,  $\vec{F}_C$  o somatório das forças conservativas, e  $\vec{F}_{NC}$  o somatório das forças não conservativas.

#### 3.2 Trabalho

Em termodinâmica uma interação é caracterizada como trabalho se o efeito dessa interação na vizinhança do sistema puder ser substituída pela subida ou descida de um peso.

Trabalho é um processo de transferência de energia.

##### 3.2.1 Convenção de sinais e notação

Trabalho feito **pelo** sistema:  $W > 0$

Trabalho feito **no** sistema:  $W < 0$

**Diferencial do trabalho** O trabalho não é uma propriedade do sistema. Ao contrário de outras grandezas, como o volume ou a pressão, o trabalho não tem um valor definido para cada estado, apenas sendo definido para um processo, ou seja, mudança de um estado para outro.

Assim sendo adota-se a notação  $\delta W$  para o diferencial do trabalho em vez do expectável  $dW$ .

##### 3.2.2 Potência

A taxa de transferência de energia por trabalho é denominada por **Potência**:

$$\dot{W} = \frac{\delta W}{dt}$$

Quando o trabalho resulta de uma força macroscópica observável é válida a formula:

$$\dot{W} = \vec{F} \cdot \vec{V}$$

### 3.2.3 Trabalho de expansão ou compressão de um fluido

O trabalho realizado por um sistema que consiste num fluido dentro de um pistão quando este é deslocado é dado por:

$$\delta W = pA dx$$

sendo  $p$  a pressão do fluido e  $A$  a área da face do pistão.

O produto  $A dx$  representa uma mudança de volume,  $dV$ . A equação pode ser integrada para uma mudança de volume de  $V_1$  a  $V_2$  obtendo-se a seguinte expressão, válida para todos os sistemas, em processos quase-estáticos:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad (5)$$

**Processos politrópicos** Para avaliar o integral da equação (5) é necessário obter uma relação entre a pressão  $p$  e o volume  $V$ . Uma das relações que pode ser considerada é aquela que representa um processo politrópico:

$$pV^n = \text{constante}$$

OU

$$pv^n = \text{constante}$$

Outras relações entre  $p$  e  $V$  podem ser consideradas.

### 3.2.4 Outros exemplos de trabalho

**Extensão de uma barra sólida** Numa barra fixa em  $x = 0$  à qual é aplicada uma tensão normal  $\sigma$  o trabalho é dado por:

$$W = - \int_{x_1}^{x_2} \sigma A dx$$

**Extensão de um filme de líquido** Para um líquido suspenso numa estrutura de arame, sustentado pela tensão superficial do mesmo. Sendo  $\tau$  a tensão superficial exercida pelo filme num arame móvel, o trabalho é dado por:

$$W = - \int_{A_1}^{A_2} \tau dA$$

**Potência transmitida por um eixo** Num eixo a rodar com velocidade angular  $\omega$  que exerce um torque  $\tau$  na vizinhança, o trabalho realizado em  $n$  rotações é dado por:

$$W = 2\pi n \tau$$

e a equação da potência transmitida para a vizinhança é:

$$\dot{W} = \tau \omega$$

**Trabalho elétrico** Num sistema constituído por uma bateria de diferença de potencial  $\varepsilon$ , conectada a um circuito externo com uma corrente  $I$ . Sendo  $Q$  a carga que atravessa um ponto do circuito, o trabalho é dado por

$$\delta W = -\varepsilon dQ$$

e a potência transmitida é

$$\dot{W} = -Ei$$

### 3.3 Energia

Em termodinâmica a energia é dividida em 3 componentes:

- **Energia Cinética**  $KE$  - Associada com o movimento do sistema como um todo.
- **Energia Potencial Gravítico**  $PE$  - Relacionada com a posição do sistema como um todo, no campo gravítico terrestre.
- **Energia Interna**  $U$  - Todas as outras formas de energia.

Assim sendo, a energia total de um sistema é dada por:

$$E = KE + PE + U$$

e a variação da energia é representada por:

$$\Delta E = \Delta KE + \Delta PE + \Delta U$$

### 3.4 Calor

Até agora foram consideradas as transferências de energia que podem ser consideradas trabalho, mas é possível haver outras formas de transferência de energia. A este tipo de interação chama-se **calor**.

#### 3.4.1 Convenção de sinais e notação

Calor é a transferência de energia de e para um sistema. Por convenção considera-se positiva quando o sistema ganha energia e negativa quando o sistema transfere energia para a vizinhança.

Energia transferida **para** o sistema:  $Q > 0$

Energia transferida **do** sistema:  $Q < 0$

Tal como o trabalho, o calor não é uma propriedade do sistema, logo não tem um valor definido para um estado, sendo também usada a notação  $\delta Q$  em vez de  ~~$dQ$~~ .

#### 3.4.2 Calor num processo

O calor transferido num processo entre o estado 1 e o estado 2 é dado por:

$$Q = \int_1^2 \delta Q$$

Para calcular o integral é útil definir uma grandeza denominada **tакса de transferência de calor** dada por:

$$\dot{Q} = \frac{\delta Q}{dt}$$

sendo assim a energia transferida por calor entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$  dada por:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} \dot{Q} dt$$

#### 3.4.3 Modos de transferência de calor

Existem 3 modos básicos de transferência de energia por calor: condução, convecção e radiação.

### 3.5 Primeira Lei da termodinâmica - Balanço energético

Das experiencias de Joule, entre outros, surgiu a primeira lei da termodinâmica:

*A variação de **energia total** de um sistema fechado é igual à diferença entre a energia transferida para o sistema sobre a forma de calor e o trabalho realizado pelo sistema sobre a vizinhança.*

Esta é expressa pela equação:

$$\Delta U = Q - W \quad (6)$$

em que o significado das variáveis está expresso na tabela 2.

Símbolo	Variável	Unidades
$\Delta E$	Variação de energia total	Joule (J)
$Q$	Energia transferida para o sistema por calor	Joule (J)
$W$	Energia transferida para a vizinhança por trabalho do sistema	Joule (J)

Tabela 2: Variáveis na 1<sup>a</sup> Lei da Termodinâmica

### 3.6 Análise de Ciclos

Quando são analisados ciclos de um sistema, a variação de energia é nula.

$$\Delta E^0 = Q - W \\ \Leftrightarrow Q = W$$

Se considerarmos o calor de entrada  $Q_{in}$  e o calor de saída  $Q_{out}$  como quantidades positivas, o trabalho total é dado por:

$$W_{ciclo} = Q_{in} - Q_{out}$$

#### 3.6.1 Ciclos de Potência

Um ciclo de potência é uma série de processos que converte energia térmica em trabalho. A eficiência térmica (rendimento) do ciclo é calculado com a equação:

$$\eta = \frac{W_{ciclo}}{Q_{in}} \quad (7)$$

#### 3.6.2 Ciclos de refrigeração e bombas de calor

Um ciclo de refrigeração / bomba de calor é um sistema que transmite energia por calor de uma fonte para um acumulador, que se encontra a temperatura mais elevada, necessitando um trabalho positivo para tal.

A eficiência (coeficiente de performance) de um **Ciclo de Refrigeração** é dada por:

$$\beta = \frac{Q_{in}}{W_{ciclo}} \quad (8)$$

e para uma **Bomba de Calor** calcula-se com:

$$\gamma = \frac{Q_{out}}{W_{ciclo}} \quad (9)$$

#### 3.6.3 Limitações de eficiência

Devido à 2<sup>a</sup> Lei da Termodinâmica, que será estudada mais tarde, todos os coeficientes de eficiência mencionados ( $\eta$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ ) têm um valor teórico máximo de 1, mas em aplicações reais vão ser sempre menores que 1.

## 4 Diagramas de fases. Calor latente

### 4.1 Fases e substâncias puras

Uma **Substância Pura** é uma cuja composição química é uniforme. Uma substânciaca pura pode existir em várias **fases**

Uma **fase** de uma substância é uma quantidade de substância com propriedades **físicas** homogéneas. Homogeneidade neste contexto significa que toda a matéria é **sólida**, **líquida** ou **gasosa**. Um sistema pode conter uma ou mais fases.

### 4.2 Relação $p - v - T$

Em sistemas compressíveis simples, sabe se por procedimento experimental que a Temperatura  $T$  e o Volume específico  $v$  podem ser considerados como independentes e a Pressão  $p$  pode ser determinada como função destes dois:  $p = p(T, v)$ . O gráfico desta função é uma superfície, a superfície  $p - v - T$

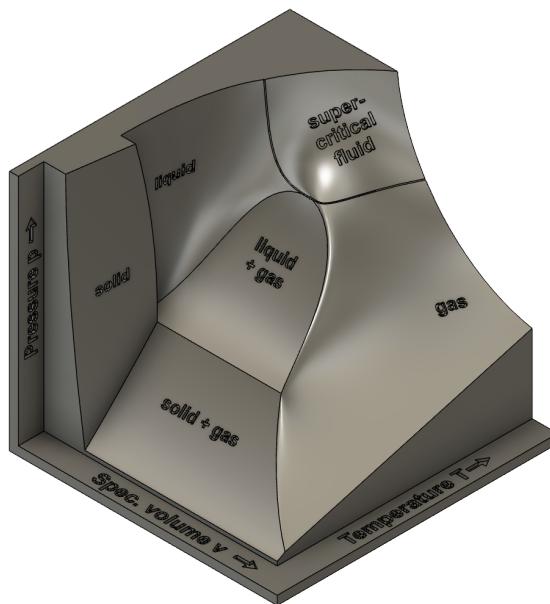


Figura 1: Diagrama  $p - v - T$  de uma substância que expande ao solidificar

#### 4.2.1 Regiões de fase única

Num diagrama  $p - v - T$  de uma substância há regiões em que apenas existe uma fase: região sólida, líquida, e gasosa. Nestas regiões o estado do sistema fica definido por **duas** das seguintes propriedades: pressão, volume específico e temperatura.

#### 4.2.2 Regiões de duas fases

Entre as fases de fase única encontram-se zonas em que existem duas fases em equilíbrio: líquido-gás, sólido-líquido, e sólido-vapor.

Nas zonas de duas fases, a pressão e a temperatura não são independentes e o estado do sistema não pode ser definido apenas por temperatura e pressão. Para descrever o estado numa região de duas fases, é necessário indicar o volume específico, juntamente com a temperatura **ou** a pressão.

Um estado onde uma mudança de fase se inicia é chamado de **estado de saturação**.

As 3 fases podem existir em equilíbrio ao longo de uma linha chamada **triple line** ou **linha tripla**.

A zona líquido-vapor é chamada de **saturation dome** ou **cúpula de saturação**, e é limitada pelas linhas de líquido saturado e vapor saturado. No topo da cúpula, encontra-se o **ponto crítico**. A cúpula é limitada inferiormente pela linha tripla.

### 4.3 Projeções do diagrama $p - v - T$

#### 4.3.1 Diagrama de fases

Ao projetar a superfície  $p - v - T$  no plano pressão-temperatura, obtém-se um **diagrama de fases**.

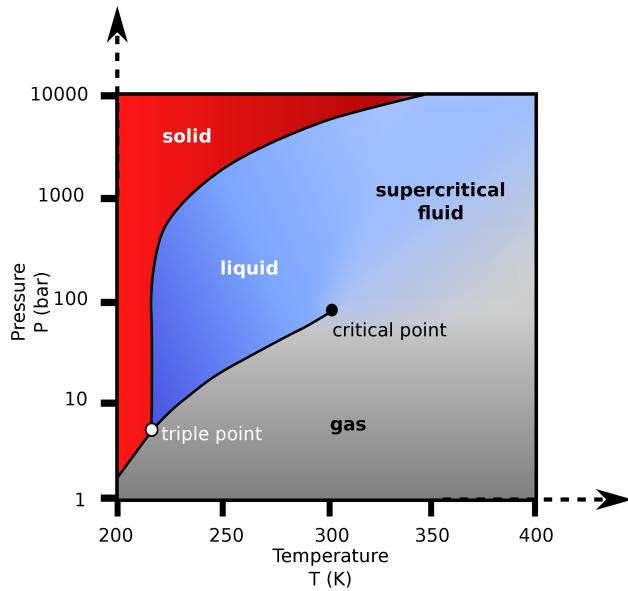


Figura 2: Diagrama de Fases

Neste tipo de diagramas, as regiões de duas fases reduzem-se a uma linha. Um ponto nesta linha representa todas as misturas de duas fases à temperatura e pressão do ponto.

A linha tripla (da superfície  $p - v - T$ ) é projetada num ponto, chamado de **ponto triplo**.

#### 4.3.2 Diagrama $p - v$

Projetando a superfície  $p - v - T$  no plano pressão-volume específico, obtém-se um diagrama  $p - v$ .

Este tipo de diagrama é útil para a resolução de alguns exercícios, e é muitas vezes apresentado com linhas de temperatura constante. Quando o sistema se encontra numa região de duas fases, a temperatura constante, a pressão mantém-se também constante com mudanças de  $v$ . (As linhas isotérmicas são horizontais na cúpula de saturação).

#### 4.3.3 Diagrama $T - v$

Projetando a superfície  $p - v - t$  para o plano temperatura-volume específico, obtém-se um diagrama  $T - v$ .

Tal como o diagrama  $p - v$ , o diagrama  $T - v$  é útil na resolução de problemas, e é apresentado muitas vezes com linhas de pressão constante.

Para pressões abaixo da pressão do ponto crítico, a pressão mantém-se constante com mudanças de temperatura, enquanto é atravessada a região de 2 fases (ocorre mudança de estado).

### 4.4 Mudanças de fase

Um sistema constituído por 1 kg de água a uma temperatura de 20 °C e a uma pressão de 1.014 bar é aquecido a pressão constante.

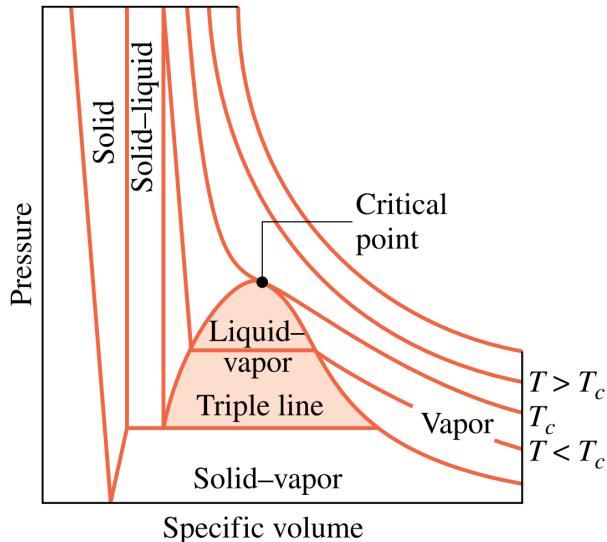


Figura 3: Diagrama  $p - v$

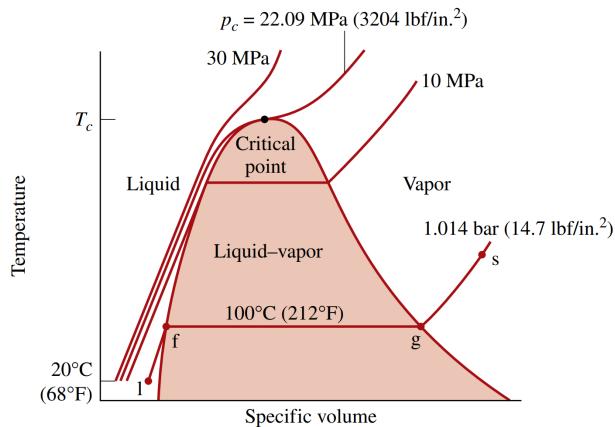


Figura 4: Diagrama  $T - v$

**Estado líquido** O sistema inicia numa fase líquida, denominada de **líquido sub-arrefecido**, **líquido comprimido**, ou apenas líquido. À medida que aumenta a temperatura, o volume específico aumenta gradualmente até atingir o ponto f da figura 4. Ao estado representado pelo ponto f chama-se **líquido saturado**.

**Mistura líquido-vapor** Após atingir o estado de líquido saturado, qualquer transferência adicional de calor leva à formação de vapor, sem qualquer alteração da temperatura. O sistema consiste numa mistura de duas fases líquido-gás. Ao continuar a transferir energia por calor, o sistema chega eventualmente ao ponto g da figura 4. A este estado chama-se **vapor saturado**.

**Estado gasoso** Assim que o sistema atinge o estado de vapor saturado, transferência adicional de energia leva ao aumento tanto da temperatura como do volume específico. Este estado corresponde ao ponto s da figura 4, e é chamado de **vapor sobre-aquecido**, ou simplesmente vapor.

#### 4.4.1 Parâmetro de qualidade

Para misturas líquido-vapor, é conveniente definir o parâmetro de qualidade:

$$x = \frac{m_{vapor}}{m_{liquid} + m_{vapor}} \quad (10)$$

### 4.5 Calor latente

O **calor latente** é a quantidade de calor que uma unidade de massa de substância deve receber ou ceder para mudar de fase.

### 4.6 Entalpia

Numa mudança de fase, o **calor latente** não corresponde à variação de energia interna do sistema ( $\Delta U$ ) uma vez que durante uma mudança de fase há expansão/contração do sistema, logo é realizado trabalho.

$$\begin{aligned} \text{calor latente} &\neq \Delta U \\ \text{calor latente} &= \Delta U + W = \Delta U + \int_{v_i}^{v_f} p dV \end{aligned}$$

É assim conveniente definir uma variável de estado tal que a sua variação durante uma mudança de fase corresponda ao calor latente. Essa variável é a entalpia:

$$H = U + pV \quad (11)$$

ou expressa por unidade de massa (entalpia específica):

$$h = u + pv \quad (12)$$

ou por mole:

$$\bar{h} = \bar{u} + p\bar{v} \quad (13)$$

As unidades para a entalpia são as mesmas de energia interna (J).

### 4.7 Calores específicos

Duas propriedades importantes em termodinâmica são conhecidas como **calores específicos**, notados como  $c_v$  e  $c_p$ . São propriedades intensivas e são definidas como as derivadas da energia interna específica,  $u$ , e da entalpia específica,  $h$ :

$$c_v = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \quad (14)$$

$$c_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \quad (15)$$

### 4.8 Aproximações para líquidos

Usando dados experimentais (ver valores tabelados) conclui-se que, a temperatura constante, o volume específico  $v$  e a energia interna específica  $u$  variam muito pouco com a pressão.

São assim usadas as seguintes aproximações para cálculos:

$$v(T, p) \approx v_f(T) \quad (16)$$

$$u(T, p) \approx u_f(T) \quad (17)$$

onde  $v_f$  e  $u_f$  são os valores dessas propriedades para um líquido saturado.

Pode também ser obtida uma aproximação da entalpia usando as equações (16), (17) e a definição de entalpia (12):

$$h(T, p) \approx h_f(T)$$

## 4.9 Modelo da substância incompressível

Através de aproximações e para simplificar cálculos usa se o **modelo da substância incompressível**, onde o volume expecífico é constante e a energia interna expecifica é considerada apenas função da temperatura:

$$v = \text{constante}$$

$$u = u(T)$$

Sendo a energia apenas dependente da temperatura, então o **calor expecífico**  $c_v$  é tambem uma função da temperatura:

$$c_v(T) = \frac{du}{dT}$$

mas a **entalpia** depende da pressão e temperatura:

$$h(T, p) = u(T) + pv$$

Numa substância incompressível os calores específicos  $c_p$  e  $c_v$  são iguais, sendo representados apenas como  $c$ .

As equações para a variação da energia interna e da entalpia são:

$$\Delta u = \int_{T_1}^{T_2} c(T) dT$$

$$\Delta h = \Delta u + v(p_2 - p_1)$$

Em intervalos de temperatura pequenos,  $c$  pode ser considerado constante, sem perda significativa de precisão, obtendo-se:

$$\Delta u = c(T_2 - T_1)$$

$$\Delta h = c(T_2 - T_1) + v(p_2 - p_1)$$

### 4.9.1 Coeficientes de dilatação e compressibilidade

Substâncias incompressíveis são apenas uma idealização. As propriedades que caracterizam a variação de volume devido à pressão ou à temperatura são o **coeficiente de dilatação volumétrica**:

$$\beta = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$$

e o **coeficiente de compressibilidade isotérmica**:

$$k = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$$

## 4.10 Leis experimentais

Abaixo são enunciadas uma série de leis obtidas de resultados experimentais:

### 4.10.1 Lei de Boyle e Mariotte

Num processo **isotérmico** a pressão e o volume dos estados finais e iniciais são inversamente proporcionais:

$$p_i V_i = p_f V_f$$

#### 4.10.2 Lei dos volumes de Charles e Gay-Lussac

Para uma temperatura de referência  $T_0$ , todos os gases tem o mesmo coeficiente de expansão térmica volumétrica médio:

$$\overline{\beta}_0 = \frac{1}{V_0} \frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{1}{V_0} \frac{V - V_0}{T - T_0}$$

sendo assim a variação de volume de um gás proporcional à variação de temperatura:

$$V - V_0 = \overline{\beta}_0 V_0 (T - T_0)$$

minimo de temperatura, bla bla bla, escala absoluta de temperatura ????

Definição de escala de temperatura absoluta:

$$T = 273.1 \lim_{p_{PT} \rightarrow 0} \left( \frac{p}{p_{PT}} \right) (\text{K})$$

a volume  $V$  constante, onde  $p_{PT}$  é a pressão do gás à temperatura do ponto triplo da água.

#### 4.10.3 Lei de Avogadro

Segundo a lei de Avogadro, nas mesmas condições de pressão e temperatura, todos os gases têm o mesmo volume molar:

$$\bar{v} = \frac{V}{n} = f(p, T)$$

#### 4.10.4 Constante universal dos gases

De resultados experimentais concluiu-se que a razão  $p\bar{v}/T$  tende para um valor constante a pressões baixas, independentemente da temperatura e do gás em consideração.

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{p\bar{v}}{T} = \overline{R} \quad (\text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}) \quad (18)$$

A esta constante  $\overline{R}$  chama-se **constante universal dos gases**, e tem o valor de  $R^* = 8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

A constante universal dos gases pode ser expressa em ordem à massa molar de uma molécula  $M$ , usando-se apenas o símbolo  $R$  para este valor (sem a linha):

$$R = \frac{R^*}{M} \quad (\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1})$$

#### 4.10.5 Fator de compressibilidade

A razão adimensional denominada **fator de compressibilidade**  $Z$  é definida como:

$$Z = \frac{p\bar{v}}{\overline{R}T} = \frac{pv}{RT}$$

Expressando a equação (18) em termos do fator de compressibilidade obtém-se:

$$\lim_{p \rightarrow 0} Z = 1$$

ou seja, o fator de compressibilidade tende para 1 a pressões baixas.

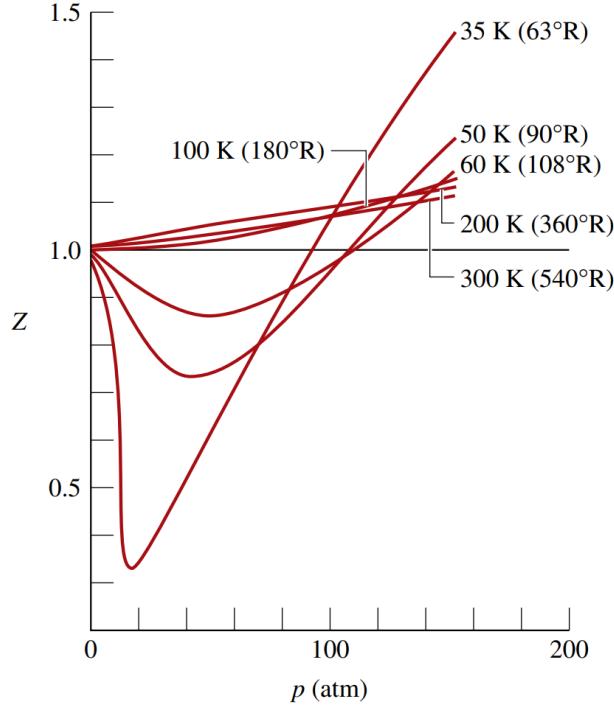


Figura 5: Fator de Compressibilidade  $Z$  em função da pressão  $p$ , a temperatura constante  $T$

#### 4.10.6 Compressibilidade generalizada

A figura 5 apresenta o fator de compressibilidade para o hidrogénio, mas os gráficos são **qualitativamente** iguais (gráficos parecidos) para todos os gases. Se as coordenadas forem mudadas, é obtida igualdade **quantitativa** (gráficos iguais com valores iguais). Para obter esta igualdade, o fator de compressibilidade  $Z$  é representado nos eixos **pressão reduzida**  $p_R$ , e **temperatura reduzida**  $T_R$ , definidas como:

$$p_R = \frac{p}{p_c}$$

$$T_R = \frac{T}{T_c}$$

onde  $p_c$  e  $T_c$  são a pressão e temperatura do ponto crítico (desse gás).

A representação do gráfico de  $Z$  nestas coordenadas é igual para todos os gases, obtendo-se um gráfico de compressibilidade generalizado (figura 6).

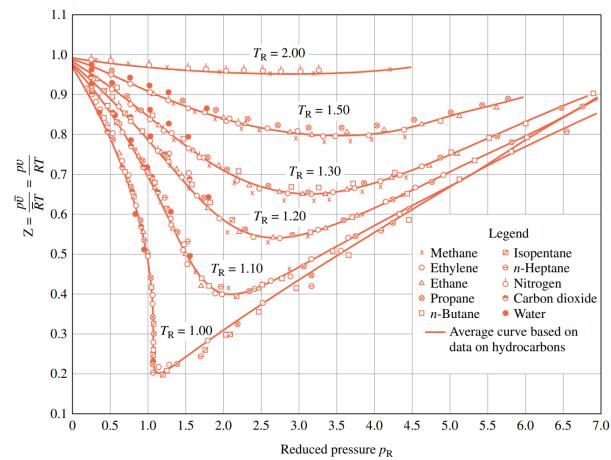


Figura 6: Gráfico de compressibilidade generalizado

## 5 Gases ideais

Nesta secção introduz-se o modelo do gas ideal

### 5.1 Equação de estado do gás ideal

Como visto na secção anterior, quando a pressão é baixa relativamente à pressão critica, e/ou quando a temperatura é elevada em relação à temperatura crítica, o fator de compressibilidade é aproximadamente 1. Nestas situações, assume-se  $Z = 1$ , ou seja:

$$pv = RT$$

conhecida como a **equação de estado do gás ideal**.

Existem formas alternativas da mesma equação, obtidas com as relações  $v = \frac{V}{m}$ ,  $v = \frac{\bar{v}}{M}$  e  $R = \frac{\bar{R}}{M}$ :

$$\begin{aligned} pV &= mRT \\ p\bar{v} &= \bar{R}T \\ pV &= n\bar{R}T \end{aligned}$$

### 5.2 Modelo do gás ideal

O modelo do gás ideal é definido por 3 equações, que podem ser usadas com um certo grau de erro, uma vez que gases reais se aproximam deste modelo.

$$pv = RT \quad (19)$$

$$u = u(T) \quad (20)$$

$$h = h(T) = u(T) + RT \quad (21)$$

### 5.3 Energia interna, entalpia, e calores específicos de gases ideais

Num gás ideal, como a energia interna  $u$  específica depende apenas da temperatura  $T$ , o calor específico  $c_v$  também depende apenas de  $T$ .

$$c_v(T) = \frac{du}{dT}$$

De igual forma, como a entalpia específica  $h$  depende apenas de  $T$ , então o calor específico  $c_p$  também é uma função apenas da temperatura.

$$c_p(T) = \frac{dh}{dT}$$

Diferenciando a equação (21) em relação à temperatura, obtém-se:

$$\frac{dh}{dT} = \frac{du}{dT} + R$$

de onde se obtém a relação:

$$c_p(T) = c_v(T) + R$$

Sabe-se também que  $c_p > c_v$ , logo, a razão de calores específicos,  $k = \frac{c_p(T)}{c_v(T)}$ , é função apenas da temperatura e  $k > 1$ .

## 6 Reversibilidade e irreversibilidade: 2<sup>a</sup> lei da termodinâmica

### 6.1 Enunciados da 2<sup>a</sup> Lei da Termodinâmica

Existem 3 formas de enunciar a 2<sup>a</sup> lei da termodinâmica:

- Enunciado de Clausius
- Enunciado de Kelvin-Planck
- Enunciado da entropia

Os enunciados de Clausius e de Kelvin-Planck são as formulações mais comuns da 2<sup>a</sup> lei, mas o enunciado da entropia é o mais útil, e aplicável a uma grande variedade de contextos. Este último enunciado irá ser estudado no próximo capítulo.

#### 6.1.1 Enunciado de Clausius

*É impossível para qualquer sistema operar de forma que o único resultado seja uma transferência de calor de um corpo mais frio para um mais quente.*

O enunciado de Clausius não impossibilita a transferencia de calor de um corpo mais frio para um mais quente, mas tal transferência implica outros efeitos no sistema, na vizinhança, ou em ambos.

#### 6.1.2 Enunciado de Kelvin-Planck

*É impossível para qualquer sistema operar num ciclo termodinâmico e fornecer energia por trabalho à sua vizinhança enquanto recebe energia por transferência de calor de um único reservatório de temperatura.*

O enunciado de Kelvin-Planck não impossibilita um sistema de realizar trabalho a partir de calor transferido de um único reservatório, mas implica que esse sistema não realiza um ciclo.

O enunciado de Kelvin-Planck pode ser expressado analiticamente pela equação:

$$W_{ciclo} \leq 0 \quad (\text{com um único reservatório})$$

#### 6.1.3 Enunciado da entropia

A entropia é uma propriedade extensiva de um sistema, tal como a massa e a energia, mas ao contrário destas, a entropia pode ser gerada quando existem *irreversibilidades* no sistema. Este conceito será estudado em profundidade no próximo capítulo.

*É impossível para qualquer sistema operar de forma a que entropia seja destruída.*

## 6.2 Processos reversíveis e irreversíveis

Um processo é dito de **irreversível** se o sistema e todas as partes de sua vizinhança não puderem ser exatamente restauradas para os respetivos estados iniciais após a ocorrência do processo.

Um sistema que sofre um processo irreversível não está necessariamente impedido de voltar ao seu estado inicial, mas isto implicaria mudanças na vizinhança. É impossível reverter **ambos** (sistema e vizinhança) para o seu estado inicial. Uma consequência de segunda lei da termodinâmica é que todos os processos naturais espontâneos são irreversíveis.

Um processo é **reversível** se o sistema e a vizinhança puderem retornar aos seus estados iniciais. Isto acontece quando:

1. O processo é quase estático
2. Não é acompanhado de quaisquer efeitos dissipativos

### 6.3 Detalhar o enunciado de Kelvin-Planck

A expressão analítica do enunciado de Kelvin-Planck pode ser decomposta entre processos reversíveis e irreversíveis:

$$W_{ciclo} \leq 0 \begin{cases} < 0 : & \text{irreversibilidade} \\ = 0 : & \text{reversibilidade} \end{cases}$$

### 6.4 Corolários de Carnot

#### 6.4.1 Ciclos de Potência

Recordando, a eficiência ou rendimento,  $\eta$  de uma máquina térmica é dado pela razão entre o trabalho realizado e o calor recebido num ciclo:

$$\eta = \frac{W_{ciclo}}{Q_H} = 1 - \frac{Q_C}{Q_H} \quad (22)$$

Se hipotéticamente  $Q_C = 0$  o sistema iria receber energia do reservatório quente,  $Q_H$ , e produzir uma quantidade de trabalho igual à energia recebida (eficiência máxima,  $\eta = 1$ ). No entanto, esta hipótese viola o enunciado de Kelvin-Planck.

Assim sendo em qualquer ciclo de potência, apenas uma parte da energia recebida como calor  $Q_H$  é obtida como trabalho. A restante energia,  $Q_C$  é descarregada para o reservatório frio. Logo, **a eficiência térmica de um ciclo de potência é sempre inferior a 100%.** -  $\eta < 100\%$  (sistemas reais)

Os corolários de Carnot, consequencia da 2ª Lei da Termodinâmica, dizem nos que:

1. A eficiência,  $\eta$ , de um ciclo de potência irreversível, realizado entre dois reservatórios térmicos, é inferior à eficiência de um ciclo reversível, realizado entre os mesmos reservatórios.
2. Todos os ciclos de potência reversíveis, que se realizem entre os mesmos reservatórios térmicos, tem a mesma eficiência,  $\eta$ .

#### 6.4.2 Ciclos de refrigeração e de bomba de calor

O raciocínio anterior pode ser igualmente aplicado a ciclos de refrigeração e de bomba de calor, cuja eficiência/rendimento é dada por:

$$\beta = \frac{Q_C}{W_{ciclo}} = \frac{Q_C}{Q_H - Q_C} \quad (\text{Ciclos de Refrigeração})$$

$$\gamma = \frac{Q_C}{W_{ciclo}} = \frac{Q_C}{Q_H - Q_C} \quad (\text{Bombas de Calor})$$

Aplicando o mesmo raciocínio, obtém-se os corolários:

1. Os coeficientes de performance de uma bomba de calor ou ciclo de refrigeração tendem para  $+\infty$  quando  $W_{ciclo}$  tende para 0. No entanto, num ciclo irreversível são sempre um valor real, finito.
2. O coeficiente de performance de um ciclo de refrigeração/bomba de calor é sempre menor que o coeficiente de performance de um ciclo reversível, quando estes operam entre os mesmos reservatórios térmicos.
3. Todos os ciclos de refrigeração/bomba de calor que operam entre os mesmos dois reservatórios térmicos têm o mesmo coeficiente de performance.

## 6.5 Escala de temperatura absoluta

Do segundo corolário de Carnot sabemos que qualquer sistema que execute um ciclo reversível entre dois reservatórios de temperatura tem o mesmo rendimento, logo, devido à definição de rendimento (22), sabemos que a razão  $\frac{Q_C}{Q_H}$  depende apenas das temperaturas dos reservatórios:

$$\left( \frac{Q_C}{Q_H} \right) = f(T_C, T_H)$$

Esta equação é a base para a definição de uma escala de temperatura termodinâmica, havendo diversas escolhas para a função  $f$ , mas a **Escala Kelvin** é definida com  $f = \frac{T_H}{T_C}$ . Obtém-se assim:

$$\frac{Q_C}{Q_H} = \frac{T_C}{T_H} \quad (\text{ciclos reversíveis}) \quad (23)$$

Esta equação, no entanto, dá nos apenas a razão entre temperaturas, sendo necessário adotar um valor de referência, que é como já sabemos, a temperatura no ponto triplo da água ( $T_{TP} = 237.16\text{ K}$ ). Assim temos a definição da escala Kelvin, dada por:

$$T = 273.16 \frac{|Q|}{|Q_{TP}|} \text{ K}$$

## 6.6 Rendimento máximo de ciclos

### 6.6.1 Máquinas térmicas

Das equações 22 e 23 obtém-se uma expressão para a eficiência de um ciclo **reversível** a operar entre dois reservatórios, chamada de **eficiência de Carnot**:

$$\eta_{max} = 1 - \frac{T_C}{T_H}$$

Esta é a eficiência **máxima** de qualquer ciclo a operar entre reservatórios de temperatura  $T_C$  e  $T_H$ , e aumenta à medida que  $T_H$  aumenta e  $T_C$  diminui.

### 6.6.2 Ciclos de refrigeração/bomba de calor

Pelo mesmo raciocínio chega-se às equações para a eficiência máxima de ciclos de refrigeração (24) e de bomba de calor (25):

$$\beta_{max} = \frac{T_C}{T_H - T_C} \quad (24)$$

$$\gamma_{max} = \frac{T_H}{T_H - T_C} \quad (25)$$

## 6.7 Desigualdade de Clausius

A desigualdade de Clausius, aplicável para qualquer ciclo termodinâmico, diz-nos que:

$$\oint_{fronteira} \left( \frac{\delta Q}{T} \right) \leq 0$$

e esta pode ser escrita na forma:

$$\oint_{fronteira} \left( \frac{\delta Q}{T} \right) \leq -\sigma_{ciclo}$$

onde  $\sigma_{ciclo}$  vai ser interpretada, no próximo capítulo, como a entropia gerada, e  $\sigma_{ciclo} \geq 0$ .

$$\begin{cases} \sigma_{ciclo} = 0 & \text{não há irreversibilidades presentes no sistema} \\ \sigma_{ciclo} > 0 & \text{há irreversibilidades no sistema} \\ \sigma_{ciclo} < 0 & \text{sistema impossível} \end{cases}$$

## 7 Entropia: Formulação da 2<sup>a</sup> lei da Termodinâmica

### 7.1 Definição de entropia

Partindo da desigualdade de Clausius, chega-se à conclusão que o integral  $\int \delta Q/T$ , num processo reversível, depende apenas dos estados inicial e final. Isto significa que este integral representa uma variação de uma propriedade do sistema.

A esta propriedade chamamos **entropia** e designa-se pela letra  $S$ :

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$$

e escrevendo-se na forma diferencial:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad (26)$$

A entropia é uma propriedade extensiva, e a unidade SI é o  $\text{JK}^{-1}$ , mas é apresentada comumente em  $\text{kJK}^{-1}$ .

### 7.2 Equações $T dS$

Partindo da 1<sup>a</sup> lei da Termodinâmica, e rearanjando a equação (26), obtemos a primeira equação  $T ds$ :

$$T dS = dU + pdV$$

A segunda equação é obtida derivando a definição de entalpia (12), resolvendo em ordem a  $dU$  e substituindo na primeira equação, obtendo-se:

$$T dS = dH - V dp$$

Estas equações podem ainda ser escritas por unidade de massa:

$$T ds = du + pdv$$

$$T ds = dh - v dp$$

### 7.3 Entropia de substâncias incompressíveis

Na secção 4.9 definiu-se o modelo da substância incompressível, que assume que o volume específico é constante e que a energia interna específica depende apenas da temperatura, e os calores específicos  $c_v$  e  $c_p$  são iguais, e representados por  $c$ . Assim sendo,  $du = c(T) dT$ , e aplicando esta igualdade à primeira equação  $T ds$  obtém-se:

$$ds = \frac{c(T) dT}{T} + \cancel{\frac{p dv}{T}}^0 = \frac{c(T) dT}{T}$$

e integrando, obtém-se:

$$s_2 - s_1 = c \ln \frac{T_2}{T_1} \quad (\text{incompressível, } c \text{ constante})$$

### 7.4 Balanço de entropia

Partindo da desigualdade de Clausius e da definição de variação de entropia obtém-se a seguinte equação, denominada de **balanço da entropia em sistemas fechados**:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + \sigma \quad (27)$$

que pode ser interpretada como: “A variação de entropia num sistema é dada pela entropia transferida através da fronteira do sistema, somada com a entropia gerada dentro do sistema (pelas irreversibilidades)”

Esta equação pode ser escrita na forma diferencial como:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} + \delta\sigma$$

## 7.5 Interpretação estatística da entropia

Com base em cálculos detalhados da mecânica estatística mostra-se que a entropia é dada pela expressão:

$$S = k_B \ln \Omega$$

onde  $\Omega$  representa o número de mico-estados (configurações possíveis, isto é, posições e velocidades das partículas, que o sistema pode ter, de acordo com a energia total do sistema) e  $k_B$  representa a constante de Boltzmann.

Esta constante de Boltzmann,  $k_B$  é dada pela equação:

$$k_B = \frac{\bar{R}}{N_A}$$

**Parte II**

**Dinâmica de Fluidos**

# 1 Introdução

## 1.1 Volume de controlo (pag. 16)

Em Dinâmica de Fluidos vamos trabalhar principalmente com volumes de controlo, ou seja, sistemas abertos. Há fluxo de energia e massa entre o sistema e a vizinhança (praticamente) sempre. Assim sendo, torna-se quase impossível analisar um sistema aberto, usando técnicas Newtonianas ou Lagrangianas, pois estas envolvem obter a posição, velocidade, e aceleração de todas as partículas.

Utiliza-se assim o método Euleriano, onde as propriedades de um fluxo de fluido são dadas como funções das coordenadas espaciais, e do tempo. Abaixo encontra-se o exemplo da velocidade, descrita no método de Euler.

## 1.2 Campo de velocidades (pag. 17)

A velocidade é uma função vetorial da posição e do tempo, e as suas componentes são por convenção  $u$ ,  $v$  e  $w$ .

A velocidade é das propriedades mais fundamentais de um fluxo, pois muitas outras propriedades obtém-se através da velocidade.

$$\vec{V}(x, y, z, t) = u(x, y, z, t)\hat{i} + v(x, y, z, t)\hat{j} + w(x, y, z, t)\hat{k}$$

## 1.3 Linhas de corrente / streamlines (pag. 41)

Uma linha de corrente é uma curva tangente à velocidade em cada ponto, num dado instante.

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = \frac{dr}{V}$$

## 2 Relações integrais para um volume de controlo

### 2.1 Caudal e fluxo de massa (pag. 138)

Qual o volume de fluido que atravessa uma superfície  $S$  por unidade de tempo? Como  $\vec{V}$  varia com a posição, devemos integrar em ordem a  $dA$ , e ter em conta que a velocidade pode fazer um ângulo  $\theta$  com a normal à superfície. Assim sendo, o volume que atravessa a superfície é dado por:

$$dV = V dt dA \cos \theta = (\vec{V} \cdot \hat{n}) dA dt$$

sendo  $V$  o volume de fluido. (não confundir com  $\vec{V}$  que representa a velocidade)

O integral de  $dV$  dá nos o **caudal** (fluxo de volume):

$$Q = \frac{dV}{dt} = \int_S \vec{V} \cdot \hat{n} dA$$

Para obter o **fluxo de massa**, multiplica-se o fluxo de volume pela densidade:

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \int_S \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA \quad (28)$$

Se a densidade e a velocidade forem uniformes na superfície, então obtém se a aproximação unidimensional:

$$\boxed{\dot{m} = \rho Q = \rho V A}$$

Por convenção define-se  $\hat{n}$  como o vetor normal que aponta para fora. Assim sendo,  $Q$  e  $\dot{m}$  indicam fluxo para fora quando são positivos, e para dentro quando são negativos.

As unidades de  $Q$  são  $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$  e de  $\dot{m}$  são  $\text{kg s}^{-1}$

## 2.2 Teorema do transporte de Reynolds (pag. 139)

Seja  $B$  uma propriedade qualquer do fluido e  $\beta = \frac{dB}{dm}$  o seu valor específico, a quantidade total de  $B$  no volume de controlo é dada por:

$$B_{CV} = \int_{CV} \beta dm = \int_{CV} \beta \rho dV$$

Interessa-nos saber a taxa de variação temporal da propriedade  $B$ , e esta é dada pelo **Teorema do transporte de Reynolds**:

$$\boxed{\frac{dB_{Sist}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \int_{CV} \beta \rho dV \right) + \int_{CS} \beta \rho (\vec{V} \cdot \hat{n}) dA}$$

onde  $\vec{V}$  é a **velocidade relativa** do fluido relativamente superfície do volume de controlo. CV é o volume de controlo e CS é a superfície de controlo.

Se o volume for fixo a derivada temporal passa para dentro do integral, obtendo-se:

$$\frac{dB_{Sist}}{dt} = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} (\beta \rho) dV + \int_{CS} \beta \rho (\vec{V} \cdot \hat{n}) dA$$

Em muitos casos o volume é fixo, e tem um número definido de entradas e saídas unidimensionais - a velocidade é perpendicular a cada secção e as propriedades são uniformes em cada secção. Nestes casos, o teorema de transporte de Reynolds pode escrever-se como:

$$\boxed{\frac{dB_{Sist}}{dt} = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} (\beta \rho) dV + \sum \beta_i \dot{m}_i \Big|_{out} - \sum \beta_i \dot{m}_i \Big|_{in}}$$

onde  $\dot{m}_i = \rho_i A_i V_i$ , obtendo-se assim:

$$\frac{dB_{Sist}}{dt} = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} (\beta \rho) dV + \sum (\rho_i \beta_i V_i A_i)_{out} - \sum (\rho_i \beta_i V_i A_i)_{in}$$

### 2.3 Equação da conservação da massa (pag. 147)

Até agora usamos  $B$  para uma qualquer propriedade do sistema, e  $\beta$  para o valor específico (por unidade de massa) da propriedade.

Aplicando agora o teorema do transporte de Reynolds à massa  $m$ , onde a massa específica  $\frac{dm}{dm} = 1$  obtém-se a **equação da conservação da massa**, com volume fixo:

$$\frac{dm_{Sist}}{dt} = 0 = \int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{CS} \rho(\vec{V} \cdot \hat{n}) dA$$

No caso específico de escoamento estável, a equação da conservação da massa reduz-se a:

$$\int_{CS} \rho(\vec{V} \cdot \hat{n}) dA = 0$$

que, para um sistema com entradas e saídas unidimensionais, pode escrever-se como:

$$\sum (\rho_i A_i V_i)_{out} - \sum (\rho_i A_i V_i)_{in} = 0$$

## 2.4 Equação do momento linear (pag. 152)

### AVISO: Notação

Na próxima equação, é usada a notação  $\vec{p}$  para o momento linear, que não deve ser confundida com a notação usada nos restantes capítulos onde  $p$  (normalmente representada sem vetor) que representa a pressão.

Usando a 3<sup>a</sup> lei de Newton:  $\vec{F}_R = \dot{\vec{p}}$  e aplicando o teorema do transporte de Reynolds ao momento linear  $\vec{p} = m\vec{V}$ , onde o valor específico é a velocidade ( $\beta = d\vec{p}/dm = \vec{V}$ ), obtém-se a seguinte relação para o momento linear:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}_{Sist}}{dt} = \int_{CV} \frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t} dV + \int_{CS} \rho\vec{V}(\vec{V} \cdot \hat{n}) dA$$

sendo esta válida para um volume de controlo fixo, com a velocidade observada num referencial inercial.

Para um sistema com entradas e saídas unidimensionais, presente na maioria dos exercícios, usa-se a versão simplificada:

$$\sum \vec{F} = \int_{CV} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \rho dV + \sum \vec{V}_i \dot{m}_i \Big|_{out} - \sum \vec{V}_i \dot{m}_i \Big|_{in}$$

O termo  $\sum \vec{F}$  representa a soma de todas as forças exercidas no fluido:

- **Forças de superfície**

Forças que atuam na fronteira do volume de controlo, como:

- Forças de pressão
- Forças viscosas ( atrito )
- Forças exercidas por corpos sólidos (ex. pistão), sendo estas uma pressão distribuída na superfície de contacto.

- **Forças volúmicas**

Forças que atuam em todo o volume de controlo, como:

- Força da gravidade
- Forças eletromagnéticas

### 2.4.1 Força total da pressão (pag. 153)

As **forças de superfície** que atuam num volume de controlo são devidas (1) a forças **exercidas por corpos sólidos** que intersetam o volume de controlo (ex. pistão), e (2) a forças de **pressão e viscosidade** exercidas pelo **fluido envolvente** (quando a superfície de controlo interseca o fluido).

A força total da pressão é dada por:

$$\vec{F}_{press} = \int_{CS} p(-\hat{n}) dA \quad (29)$$

Se a pressão for uniforme,  $p = p_a$  em toda a superfície de controlo, então a força total de pressão é nula.

$$\vec{F}_{press} = -p_a \int_{CS} \hat{n} dA = 0$$

### ATENÇÃO: Vetor normal e sinais

A convenção para o vetor normal  $\hat{n}$  é que este aponta para fora do volume de controlo.

A força de **pressão atua de fora para dentro** do volume de controlo, ou seja, no sentido oposto ao vetor normal, daí o sinal negativo. Este pode ser colocado no vetor normal, como em (29) ou fora do integral, como em (30).

Muitos problemas podem ser simplificados se a pressão uniforme,  $p_a$  for subtraída de todas as pressões envolvidas, sendo assim considerada, por definição desta a **pressão manométrica**. A equação da força total da pressão pode então ser escrita como:

$$\vec{F}_{press} = - \int_{CS} (p - p_a) \hat{n} dA = - \int_{CS} p_{gauge} \hat{n} dA \quad (30)$$

Um exemplo de pressão uniforme,  $p_a$  é a pressão atmosférica, que atua em todas as superfícies expostas ao ar.

Para um volume de controlo com entradas e saídas unidimensionais, a força total da pressão pode ser escrita como:

$$F_x \text{ press} = \sum p_i A_i (\hat{n} \cdot \vec{e}_x)$$

### ATENÇÃO: Sinais

O sinal positivo ou negativo depende da orientação do vetor normal e da direção positiva do eixo.

$$(\hat{n} \cdot \vec{e}_x) = \begin{cases} +1 & \hat{n} \text{ no sentido do eixo} \\ -1 & \hat{n} \text{ no sentido oposto ao eixo} \\ 0 & \hat{n} \text{ perpendicular ao eixo} \\ \cos \theta & \text{caso geral} \end{cases}$$

A **pressão** atua sempre no sentido **de fora para dentro** do volume de controlo.

## 2.5 Equação de Bernoulli (pag. 168)

Uma relação clássica e usada extensivamente que deriva da análise do momento linear é a **equação de Bernoulli**. Esta é aplicável para escoamentos não viscosos, sem atrito, logo deve ser aplicada apenas a regiões do escoamento onde a fricção é praticamente nula.

Considera-se um volume de controlo definido por um elemento  $ds$  de um tubo de corrente com secção  $A(s)$  onde  $s$  é a coordenada ao longo de uma linha de corrente. As propriedades  $(\rho, p, V)$  são constantes em cada secção, mas variam com  $s$ .

Aplica-se a conservação da massa (transporte de Reynolds), obtendo, na forma diferencial:

$$\frac{d\rho}{dt} dV + d\dot{m} = 0$$

que se rearanja para obter a forma que pretendemos:

$$d\dot{m} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} A ds$$

Escrevendo o diferencial do momento linear (transporte de Reynolds), na direção da corrente:

$$\sum dF_s = \frac{\partial}{\partial t} (\rho V_s) A ds + d(\dot{m} V_s) \quad (31)$$

sendo  $\sum F_s$  e  $V_s$  o somatório das forças, e a velocidade, ambos na direção de  $s$ .  $V_s = V$  pois  $s$  tem a direção da corrente.

Se o escoamento for não viscoso (= atrito desprezado), as únicas forças que atuam no corpo são:

- **Força da gravidade:**

$$dF_{s,\text{grav}} = -\rho g A dz$$

- **Força da pressão:**

$$dF_{s,\text{press}} = -A dp$$

Substituindo estas forças na equação do momento linear (31) e simplificando, obtemos a **Equação de Bernoulli** para escoamento não estável, não viscoso, ao longo de uma linha de corrente:

$$\frac{\partial V}{\partial t} ds + \frac{dp}{\rho} + V dV + g dz = 0$$

esta equação está na forma diferencial, e pode ser integrada entre quaisquer 2 pontos na linha de corrente.

Como consideramos apenas escoamentos estáveis ( $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ ) e incompressíveis ( $\rho = \text{const}$ ), a equação reduz-se para:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} V_1^2 + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} V_2^2 + gz_2 = \text{const}$$

## 2.6 Equação da conservação da energia (pag. 184)

Após aplicar o teorema do transporte de Reynolds para a conservação da massa, conservação do momento linear, e do momento angular (este último não abordado na cadeira de TDF, mas encontra-se presente no livro), aplicamos agora o teorema à **Primeira Lei da Termodinâmica**.

A variável em estudo passa a ser  $E$ , a energia total, e a quantidade por unidade de massa é a energia específica:

$$e = \frac{1}{2}V^2 + \hat{u} + gz$$

Assim sendo, a **Primeira Lei da Termodinâmica**, escrita na forma diferencial, toma a seguinte forma:

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \int_{CV} e\rho dV \right) + \int_{CS} e\rho(V \cdot \hat{n}) dA$$

O termo do Calor,  $\dot{Q}$  pode ser decomposto em várias componentes: condução, convecção e radiação, no entanto não é abordado na cadeira, nem no livro.

Já o termo do trabalho pode ser decomposto em 3 parcelas:

$$\dot{W} = \dot{W}_{eixo} + \dot{W}_{pressao} + \dot{W}_{tensao\ de\ viscosidade} = \dot{W}_s + \dot{W}_p + \dot{W}_\tau \quad (32)$$

O trabalho de forças gravíticas não é incluído, pois já é contabilizado na primeira lei da Termodinâmica como energia potencial.

O trabalho de eixo representa o trabalho realizado por uma máquina (veio de um motor, ventoinha, pistão, etc.) que entra pela superfície de controlo.

O trabalho realizado pela pressão ocorre apenas na superfície de controlo, pois dentro do volume de controlo todas as forças de pressão são iguais e opostas, logo cancelam-se. O trabalho da pressão é dado pela força de pressão vezes a velocidade normal para dentro do volume de controlo:

$$\begin{aligned} d\dot{W}_p &= p(\vec{V} \cdot \hat{n}) dA \Leftrightarrow \\ \dot{W}_p &= \int_{CS} p(\vec{V} \cdot \hat{n}) dA \end{aligned}$$

O trabalho das forças de viscosidade também ocorre apenas na superfície de controlo, e é dado por:

$$\begin{aligned} d\dot{W}_\nu &= -\tau \cdot \vec{V} dA \Leftrightarrow \\ \dot{W}_\nu &= - \int_{CS} \tau \cdot \vec{V} dA \end{aligned}$$

Calculando este termo:

- numa **superficie sólida** (*no slipping condition*)

$$\vec{V} = \vec{0} \text{ então } \dot{W}_\nu = 0$$

- numa **entrada ou saída** do volume de controlo

$$d\dot{W}_\nu = -\tau_{nn} V_n dA \approx 0$$

onde  $\tau_{nn}$  é a componente normal da tensão que é normalmente muito pequena.

- numa **superficie ss de um fluido** externo ao sistema

$$d\dot{W}_\nu = -\tau_n V_n dA \neq 0$$

sendo esta a única componente **não desprezada**.

Substituindo esta equação na primeira lei da Termodinâmica, e simplificando, obtemos a seguinte relação:

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{ss} = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \hat{u} + \frac{1}{2}V^2 + gz \right) \right] dV + \int_{CS} \rho \left( \hat{h} + \frac{1}{2}V^2 + gz \right) (\vec{V} \cdot \hat{n}) dA$$

Esta é a equação geral para a primeira lei da Termodinâmica, mas é mais útil quando simplificada para 1 entrada e 1 saída unidimensionais e escoamento estacionário obtemos a seguinte versão simplificada:

$$\hat{h}_1 + \frac{1}{2}V_1^2 + gz_1 = \left( \hat{h}_2 + \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2 \right) - q + w_s + w_{ss}$$

Onde  $w_s$  é o trabalho de eixo e  $w_{ss}$  é o trabalho da viscosidade de um fluido externo ao sistema.

Assume-se ainda um escoamento incompressível e trocas de calor com o exterior nulas, com uma bomba e uma turbina a operar no fluido. Dividem-se todos os termos pela aceleração gravítica, para converter as energias  $q$  e  $w$  para unidades de comprimento, que representam a **carga hidráulica**  $h$ . Com estas condições, obtém-se a formula:

$$\left( \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 \right)_{in} = \left( \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \right)_{out} + h_{atrito} + h_{turbina} - h_{bomba}$$

Neste caso o trabalho da fricção remove sempre energia ao fluido, ou seja,  $h_{atrito}$  é sempre positivo.

#### ATENÇÃO: Entalpia $\hat{h}$ vs carga hidráulica $h$

Não confundir a notação de entalpia  $\hat{h} = \hat{u} + \frac{p}{\rho}$  com a notação de carga hidráulica  $h = \frac{e}{g}$

A carga hidráulica é uma representação da energia, mas com unidades de comprimento, que representa a altura que uma coluna de fluido a uma certa pressão e velocidade teria num tubo vertical.

A presença de  $g$  deve-se ao facto de líquido sobe no tubo, contra a ação da gravidade.

Por vezes adiciona-se um fator de correção ao termo da velocidade, se não se puder assumir que esta é constante nas secções de entrada e saída. O fator de correção representa-se por  $\alpha$  e é igual a 2 para escoamentos perfeitamente laminares, e aproximadamente 1 num escoamento turbulento

### 3 Relações diferenciais para um escoamento

Com o teorema do transporte de Reynolds podemos aplicar leis da Mecanica e da Termodinâmica a volumes de controlo finitos. Pretendemos agora aplicar as mesmas leis a partículas materiais de um meio contínuo - isto é, quantidades de massa muito pequenas.

#### 3.1 Derivada material e derivada local

Para aplicar leis da mecanica a partículas materiais temos que relacionar a derivada local de uma propriedade, com a derivada segundo o movimento das partículas.

Considerando uma propriedade com função da posição e do tempo, a **derivada material** (derivada de uma propriedade de uma partícula de matéria que se move com velocidade  $\vec{v}$ ) é dada por:

$$\boxed{\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla})}$$

O primeiro termo denomina-se termo local ou **derivada local**. O segundo chama-se **termo convectivo**

##### Notação de derivada material

Por convenção usa se o  $D$  maiúsculo para indicar derivada material, e para não confundir com a derivada local.

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{d}{dt} \neq \frac{\partial}{\partial t}$$

Daqui em diante usaremos apenas a notação com  $D$  maiúsculo

## 3.2 Equação da continuidade (conservação da massa)

A equação da conservação de massa, ou **equação da continuidade**, escrita em coordenadas cartesianas é a seguinte:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0}$$

Esta equação pode ser convertida para **coordenadas polares cilíndricas**, tomando a seguinte forma:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0}$$

### 3.2.1 Simplificação para escoamento incompressível

Se assumirmos escoamento incompressível,  $\partial \rho / \partial t \approx 0$ , e a densidade pode ser tirada para fora da divergência, obtendo-se a equação simplificada:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{V} = 0}$$

### 3.3 Equação do momento linear (Navier-Stokes)

A equação para o momento linear é dada por:

$$\sum \vec{F} = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} dx dy dz$$

As forças que atuam na partícula são as forças volúmicas (apenas consideraremos a gravidade) e as forças de contacto. Estas últimas são devidas às tensões na superfície do volume de controlo (infinitesimal), que são a soma da pressão hidrostática,  $p$  com as tensões viscosas  $\tau_{ij}$ .

Substituindo as forças na equação do momento linear obtemos a seguinte equação, na forma vetorial:

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \bar{\tau}}$$

onde

$$\bar{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

Esta equação está escrita de uma forma extremamente compacta, mas se for escrita por extenso, para cada componente, toma a forma:

$$\boxed{\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}}$$

#### 3.3.1 Fluidos não viscosos - Equação de Euler

Caso a viscosidade seja desprezável (fluidos ideais) assumimos que  $\bar{\tau} = 0$ , a equação do momento linear reduz-se a:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p$$

#### 3.3.2 Fluidos Newtonianos - Equação de Navier-Stokes

Para **fluidos newtonianos** as tensões viscosas são proporcionais à velocidade e ao coeficiente de viscosidade. Para escoamento incompressível tem-se que:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, & \tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, & \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

onde  $\mu$  é o coeficiente de viscosidade.

Substituindo na equação do momento linear obtém-se as **equações de Navier-Stokes**, expressas na forma vetorial:

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{V}}$$

Ou expressas forma extensa, para a componente em  $x$ :

$$\boxed{\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)}$$

## 4 Cheat Sheet

### 4.1 Suposições / aproximações comuns

**Conservação da massa**

$$\dot{m}_{in} = \dot{m}_{out}$$

**Fluxo incompressível**

$$\rho = \text{const}$$

**Escoamento estável**

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = 0$$

### 4.2 Fórmulas essenciais

**Caudal e fluxo de massa**

Aprox. para entradas e saídas unidimensionais

$$\dot{m} = \rho Q = \rho V A$$

**Teorema do transporte de Reynolds**

Forma integral

$$\frac{dB_{Sist}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \int_{CV} \beta \rho dV \right) + \int_{CS} \beta \rho (\vec{V} \cdot \hat{n}) dA$$

**Transporte Reynolds**

Volume de controlo constante, entradas e saídas unidimensionais

$$\frac{dB_{Sist}}{dt} = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} (\beta \rho) dV + \sum \beta_i \dot{m}_i \Big|_{out} - \sum \beta_i \dot{m}_i \Big|_{in}$$

**Equação do momento linear**

Escoamento estável e incompressível, entradas e saídas unidimensionais.

$$\sum \vec{F} = \int_{CV} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \rho dV + \sum \vec{V}_i \dot{m}_i \Big|_{out} - \sum \vec{V}_i \dot{m}_i \Big|_{in}$$

**Força total da pressão**

Entradas e saídas unidimensionais

$$F_{x \text{ press}} = \sum p_i A_i (\hat{n} \cdot \vec{e}_x)$$

**Equação de Bernoulli**

Escoamento estável, incompressível, não viscoso, ao longo de uma linha de corrente

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} V_1^2 + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} V_2^2 + gz_2 = \text{const}$$

**Equação da Energia**

1 entrada e 1 saída unidimensionais, escoamento estacionário

$$\hat{h}_1 + \frac{1}{2} V_1^2 + gz_1 = \left( \hat{h}_2 + \frac{1}{2} V_2^2 + gz_2 \right) - q + w_s + w_{ss}$$

### Equação da Energia

Mesmas condições que a anterior + escoamento incompressível, trocas de calor com o exterior nulas, com uma bomba e uma turbina a operar no fluido. Unidades de comprimento: carga hidráulica

$$\left( \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 \right)_{\text{in}} = \left( \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \right)_{\text{out}} + h_{\text{atrito}} + h_{\text{turbina}} - h_{\text{bomba}}$$

### Derivada Material

Derivada de uma propriedade de uma partícula de matéria que se move com velocidade  $\vec{v}$

$$\boxed{\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla})}$$

### Equação da continuidade

Conservação da massa

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0}$$

### Equação da continuidade

Coordenadas cilíndricas

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0}$$

### Equação da continuidade

Escoamento incompressível

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{V} = 0}$$

### Equação do momento linear

Forma vetorial

$$\boxed{\rho \frac{D \vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \bar{\tau}}$$

### Equação do momento linear para a componente $x$

Equivalentes para as componentes  $y$  e  $z$

$$\boxed{\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}}$$

### Equação de Navier-Stokes

Escoamento incompressível, fluido Newtoniano, forma vetorial

$$\boxed{\rho \frac{D \vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{V}}$$

### Equação de Navier-Stokes

Mesmas condições que o anterior, componente em  $x$

$$\boxed{\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)}$$