Samuel García
Hugo Perlaza

Tarea 3 Métodos computacionales 2. Punto 3

a.

El momento de inercia para un disco delgado con respecto a los ejes x o y, al tener la misma simetría, su momento de inercia es el mismo, y este es $I_d = \frac{1}{4}mr^2$, mientras que para un cilindro con hueco su momento de inercia es $I_= mr^2$. Luego si aplicamos este teorema para encontrar el momento de inercia del sistema total respecto al eje de rotación tenemos que:

$$I_0 = I_d + I$$

$I_0 = \frac{1}{4}mr^2 + md^2$, con d equivalente al radio del hueco del cilindro.

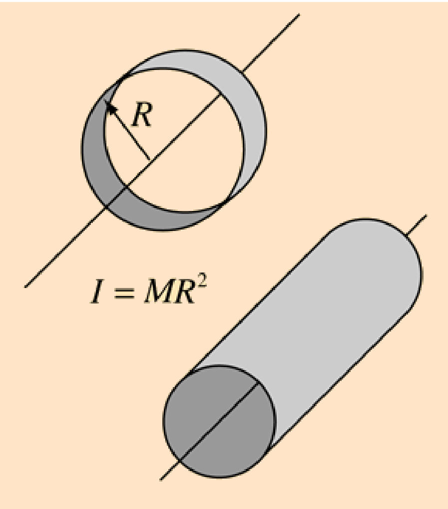

Figura 1. Momento de inercia del cilindro hueco. Tomado de http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/ihoop.html

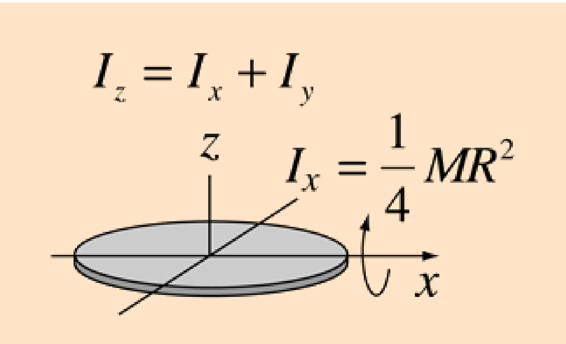

Figura 2. Momento de inercia para un disco delgado. Tomado de http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/tdisc.html

b.

Para calcular el momento de inercia del disco respecto a Z tenemos que:

$I_z = \int_0^r r^2\, dm$, la ecuación general del momento de inercia. Teniendo que $m = \rho A = \rho(\pi r^2)$, luego que $dm = 2\pi r \rho dr$ Despues, se puede reemplazar.

$$I_z = \int_0^r 2\pi r \rho r^2\, dr$$

$$I_z = 2\pi\rho \int_0^r r^3\, dr$$

$$I_z = \frac{2\pi\rho r^4}{4}$$

$$I_z = \frac{2\pi\rho r^2 r^2}{2}$$

$$I_z = \frac{1}{2} m r^2$$

c.

El lagrangiano del sistema se define como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} I_0 (\phi^{\cdot 2} \sin^2 \quad \theta + \theta^{\cdot 2} 2) + \frac{1}{2} I_z (\phi^{\cdot} cos\theta + \psi^{\cdot})^2 - mgdcos\theta$$

y la ecuación de Euler-Lagrange como:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\right) = 0$$

Con esto, tomamos las derivadas del Lagrangiano respecto a $\phi^{\cdot}, \psi^{\cdot} y\ \theta$
Y queda de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{\cdot}} = I_0 \phi^{\cdot} \sin^2 \quad \theta + I_z \phi^{\cdot} \cos^2 \quad \theta + \psi^{\cdot} cos\theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^{\cdot}} = I_z (\phi^{\cdot} cos\theta + \psi^{\cdot})$$

Para θ además se tiene que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = I_0 \phi^{\cdot 2} sin\theta cos\theta - I_z (\phi^{\cdot} cos\theta + \psi^{\cdot}) \phi^{\cdot} sin\theta + mgdsin\theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^{\cdot}} = I_0 \theta^{\cdot}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^{\cdot}}\right) = I_0 \theta^{\cdot\cdot}$$

Por último, se puede reemplazar en la ecuación de Euler Lagrange para θ

$$\dot{\psi}^2 sin\theta cos\theta(I_\theta - I_z) - \dot{\varphi}\dot{\psi} I_z sin\theta + mgd sin\theta = I_\theta \ddot{\theta}$$