Tarea 2:

Punto 2:

a). Demostrar que el error está dado $\varepsilon_{n+1} - (2 + h^2 a'_n)e_{n-1} = 0$ con $a'_n = \partial a / \partial x$

→ $x_{n+1} = x_n + hv_n + \frac{h^2}{2} a_n + O(h^3)$
→ $x_{n-1} = x_n - hv_n + \frac{h^2}{2} a_n + O(h^3)$

Restando: $x_{n+1} - x_{n-1} = 2h v_n + O(h^3)$ → Diferenciar respecto a x: $a_{n+1} - a_{n-1} = 2hv_n + O(h^3)$

* Ya que $a_n' = \frac{\partial a}{\partial x}$, por $F = ma \longrightarrow a = F/m$ entonces $a_n' = \frac{1}{m}\frac{\partial F}{\partial x}$

→ $\varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - x_n - hv_n - \frac{h^2}{2} a_n = (x_n + hv_n + \frac{h^2}{2} a_n + O(h^3)) - x_n - hv_n - \frac{h^2}{2} a_n = Oh^3$

→ $\varepsilon_{n+1} = O(h^3)$ → Luego, expandiendo alrededor de x_{n+1} y x_{n-1}, da $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + O(h^3)$ → $\underline{\varepsilon_{n+1} - (2 + h^2 a_n')\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} = 0}$

b.) Mostrar que para el caso del oscilador armónico $\varepsilon_{n+1} - 2(1-R)\varepsilon_n + e_{n-1} = 0$ donde $2R = h^2 w^2$

→ $a_n = -w^2 x_n$ donde w es la frecuencia angular del oscilador. → $a_n' = \frac{\partial a}{\partial x} = -w^2$ → $\varepsilon_{n+1} - (2 + h^2 w^2)\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} = 0$

donde $\varepsilon_n = x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} - h^2 w^2 x_n \longrightarrow \varepsilon_n = -2h^2 w^2 x_n$

c.) Usando $\varepsilon_n = \varepsilon_0 \lambda^n$ mostrar que $\lambda_\pm = 1 - R \pm \sqrt{R^2 - 2R}$

→ $\varepsilon_{n+1} - 2(1-R)\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} = 0$ → $\varepsilon_0 \lambda^{n+1} - 2(1-R)\varepsilon_0 \lambda^n + \varepsilon_0 \lambda^{n-1} = 0$ → diviendo por λ^{n-1}: $\lambda^2 - 2(1-R)\lambda + 1 = 0$

→ $\lambda = \frac{2R - 2 \pm \sqrt{(2R-2)^2 - 4}}{2}$ → $\lambda = \frac{2R - 2 \pm \sqrt{4R^2 - 8R}}{2}$ → $\lambda = 1 - R \pm \sqrt{R^2 - 2R}$ → $\lambda_\pm = 1 - R \pm \sqrt{R^2 - 2R}$

d.) Para que $|\lambda_\pm| \leq 1$ → $|1 - R \pm \sqrt{R^2 - 2R}| \leq 1$ → $-1 \leq 1 - R \pm \sqrt{R^2 - 2R} \leq 1$ → $0 \leq 1 - R \pm \sqrt{R^2 - 2R} \leq 2$

→ $R = h^2 w^2 = 1$ → $h = \frac{1}{w}$