Tarea 1. Hugo Perlaza, Samuel García.

① Demostrar que son consistes significa que cuando el tamaño de paso tiende a cero, los operadores convergen a la derivada conocida de la función.

Solución:

* Para x^2:

Operador 1: $f'(x) = \dfrac{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)}{2h} \longrightarrow \dfrac{-(x+2h)^2 + 4(x+h)^2 - 3x^2}{2h} \longrightarrow \dfrac{-\cancel{x^2} - 4xh - \cancel{4h^2} + \cancel{4x^2} + 8xh + \cancel{4h^2} - \cancel{3x^2}}{2h}$

$\longrightarrow \dfrac{4xh}{2h} = 2x$ ✓

Operador 2: $f''(x) = \dfrac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \longrightarrow \lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2 - 2x^2 + (x-h)^2}{h^2} \longrightarrow \lim_{h\to 0} \dfrac{\cancel{x^2} + \cancel{2xh} + h^2 - \cancel{2x^2} + \cancel{x^2} - \cancel{2xh} + h^2}{h^2}$

$\longrightarrow \dfrac{2\cancel{h^2}}{\cancel{h^2}} = 2$

* Para $\sin(x)$:

Operador 1: $f'(x) = \dfrac{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)}{2h} \longrightarrow \lim_{h\to 0} \dfrac{-(x+2h) + 4(x+h) - 3\sin(x)}{2h} \longrightarrow \lim_{h\to 0} \dfrac{-(\sin(x)+2h) + 4(\sin(x)+h) - 3\sin(x)}{2h}$

$\longrightarrow \lim_{h\to 0} \dfrac{-[\sin(x)\cos(2h) + \cos(x)\sin(2h)] + 4[\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h)]}{2h} \longrightarrow -\frac{1}{2}\left[\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin(x)\cos(2h)}{h}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos(x)\sin(2h)}{h}\right)\right] + 2\left[\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin(x)\cos(h)}{h}\right)\right] + 2\left[\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos(x)\sin(h)}{h}\right)\right]$

diverge en $h \to 0$ diverge en $h \to 0$

Operador 2: $f''(x) = \dfrac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \longrightarrow \lim_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h) - 2\sin(x) + \sin(x-h)}{h^2} \longrightarrow$

$\longrightarrow -2\sin(x) \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}}_{\text{diverge}} + \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)}{h^2} + \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x-h)}{h^2}$

Según los cálculos anteriores, los operadores no son consistentes cuando se hace la prueba con $f(x) = \sin(x)$. Sin embargo, en un archivo .py adjunto en la carpeta de este punto, implementamos un programa que facilita el test de consistencia.

Conclusión: La demostración teórica de los operadores para $f(x) = x^2$ apunta a que ambos son consistentes. Por otro lado, pese a que no hubo un resultado concluyente de forma teórica para $f(x) = \sin(x)$, el código auxiliar implementado para evaluar los operadores con esta función, apuntan a que son consistentes.