Ejercicio 5:

Muestre con detalle que la sustitución hacia adelante se expresa como: $X_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} x_j}{A_{ii}}$

Solución: Para demostrar la expresión anterior, se considera el siguiente sistema triangular inferior: $\begin{bmatrix} A_{10} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Esto no es más que $Ax = b$

→ Lo anterior se resuelve como $X_1 = \dfrac{b_1}{A_{11}}$; $X_2 = \dfrac{(b_2 - A_{21} X_1)}{A_{22}}$

→ Para un sistema 3 x 3 se tendría $\begin{vmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ y su solución sería $X_1 = \dfrac{b_1}{A_{11}}$; $X_2 = \dfrac{(b_2 - A_{21} X_1)}{A_{22}}$; $X_3 = \dfrac{(b_3 - A_{31} X_1 - A_{32} X_2)}{A_{33}}$

→ De manera general, para un sistema nxn, se tendría: $X_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} \cdot X_j}{A_{ii}}$