Ejercicio 6: Muestre con detalle que la sustitución hacia atrás se expresa como: $x_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij} x_j}{A_{ii}}$ donde $i = n, n-1, \dots, 0$. Note que la diagonal de la matriz triangular superior puede tener cualquier valor.

Solución: A diferencia de la sustitución hacia adelante, la sustitución hacia atrás es para una matríz triangular superior.

Partimos de un sistema $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ donde $x_n = \dfrac{b_n}{A_{nn}}$ y $x_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij} x_j}{A_{ii}}$

Por ejemplo, si tenemos un sistema 2x2: $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, la solución está dada por $X_2 = \dfrac{b_2}{A_{22}}$ ; $X_2 = \dfrac{b_2 - A_{23} X_3}{A_{22}}$