1 Grundlagen

S 1.1 Es gibt keine Gleichung der Form

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = 0$$

mit $a_i \in \mathbb{Q}$, so dass $x = \pi$ eine Lösung ist

S 1.2 R ist ein kommutativer, angeordneter Körper, der ordnungsvollständig ist

D Axiome der Addition

A1 Assoziativität $x + (y + z) = (x + y) + z$

A2 Neutrales Element $x + 0 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

A3 Inverses Element $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$

A4 Kommutativität $x + z = z + x \quad \forall x, z \in \mathbb{R}$

D Axiome der Multiplikation

M1 Assoziativität $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad \forall x, y, z \in R$

M2 Neutrales Element $x \cdot 1 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

M3 Inverses Element $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0\ \exists y \in \mathbb{R} :$ $x \cdot y = 1$

M4 Kommutativität $x \cdot z = z \cdot x \quad \forall x, z \in \mathbb{R}$

D Distributivität

D1 Distributivität $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

D Ordnungsaxiome

O1 Reflexivität $x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

O2 Transitivität $x \leq y$ and $y \leq z \implies x \leq z$

O3 Antisymmetrie $x \leq y$ and $y \leq x \implies x = y$

O4 Total $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$

D Kompatibilität

K1 $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \implies x + z \leq y + z$

K2 $\forall x \geq 0, \forall y \geq 0 : x \cdot y \geq 0$

D Ordnungsvollständigkeit Seien A,B $\subseteq$ von $\mathbb{R}$

i $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$

ii $\forall a \in A$ and $\forall b \in B : a \leq b$

Dann gibt es $c \in \mathbb{R}$, dass $\forall \in A : a \leq c$ und $\forall b \in B : c \leq b$

K 1.6

1 Additive und multiplikate Inverse eindeutig

2 $0 \cdot x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3 $(-1) \cdot x = -x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4 $y \geq 0 \Leftrightarrow (-y) \leq 0$

5 $y^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

6 $x \leq y$ and $u \leq v \implies x + u \leq y + v$

7 $0 \leq x \leq y$ und $0 \leq u \leq v \implies x \cdot u \leq y \cdot v$

K 1.7(Archimedisches Prinzip)
Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$.Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $y \leq n \cdot x$

S 1.8
Für jedes $t \geq 0, t \in \mathbb{R}$ hat $x^2 = t$ eine Lösung in $\mathbb{R}$

D 1.9 Seien $x, y \in \mathbb{R}$

(i) $\max\{x,y\} = \begin{cases} x & \text{falls} \quad y \leq x \\ y & \text{falls} \quad x \leq y \end{cases}$

(ii) $\min\{x,y\} = \begin{cases} y & \text{falls} \quad y \leq x \\ x & \text{falls} \quad x \leq y \end{cases}$

(iii) Der Absolutbetrag einer Zahl $x \in \mathbb{R}$: $|x| = max\{x, -x\}$

S 1.10

(i) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(ii) $|xy| = |x|\,|y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(iv) $|x + y| \geq |x| - |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

S 1.11(Young'sche Ungleichung)
$\forall \epsilon > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$2\,|xy| \leq \epsilon x^2 + \frac{1}{\epsilon} y^2$$

1.1 Infimum und Supremum

D 1.12 Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge.

1) $c \in \mathbb{R}$ ist **obere Schranke** if $\forall a \in A : a \leq c$

2) $c \in \mathbb{R}$ ist **untere Schranke** if $\forall a \in A : c \leq a$

3) $m \in \mathbb{R}$ heisst ein **Maximum** von A if $m \in A$ und m eine obere Schranke von A ist.

4) $m \in \mathbb{R}$ heisst ein **Minimum** von A if $m \in A$ und m eine untere Schranke von A ist.

S 1.15 . Sei $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

1) Sei A nach oben beschränkt. Dann gibt es eine kleinste obere Schranke:

$$c := \sup A \quad \textbf{(Supremum von A)}$$

2) Sei A nach unten beschränkt. Dann gibt es eine grösste untere Schranke:

$$d := \inf A \quad \textbf{(Infimum von A)}$$

Eigenschaften von Supremum und Infimum

- $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$
- $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$
- $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$
- $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$

K 1.16 Seien $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen von $\mathbb{R}$

1 Falls B nach oben beschränkt ist, $\sup A \leq \sup B$

2 Falls B nach unten beschränkt ist, $\inf B \leq \inf A$

D 1.18 Kardinalität

(i) Zwei Mengen X,Y heissen gleichmächtig if eine Bijection $f : X \to Y$ existiert

(ii) Eine Menge ist endlich, wenn $X = \emptyset$ or $\exists n \in \mathbb{N}$ so dass$\{1, 2, \ldots, n\}$gleichmächtig wie X

(iii) Eine Menge X ist abzähbar if endlich oder gleichmächtig wie $\mathbb{N}$

S 1.20 (Cantor) $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar

2 Folgen und Reihen

D 2.1 Eine **Folge** ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}(\mathbb{N}^* = \mathbb{N}/\{0\})$$

2.1 Grenzwert einer Folge

L 2.3 $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge, es gibt höchstens eine Zahl $l \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:
$\forall \epsilon > 0$ ist Menge $\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin]l - \epsilon, l + \epsilon[\}$ endlich

D 2.4 $(a_n)_{n\geq 1}$ ist **konvergent**, falls $l \in \mathbb{R}$ so dass $\forall \epsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N}^* : a_n \notin]l - \epsilon, l + \epsilon[\}$ endlich ist. Dieses l ist der **Limes** der Folge.

Bem: [2.5] Jede Konvergente Folge ist beschränkt

L 2.6 Folgende Aussagen sind äquivalent

1 $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen $l = \lim_{n\to\infty} a_n$

2 $\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 1$ that

$$|a_n - l| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

S 2.8 Seien $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergent Folgen mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim_{n\to\infty} b_n$

1 $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ ist konvergent und $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

2 $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ ist konvergent und $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

3 if $b_n \neq 0\ \forall n \geq 1, b \neq 0$ $(\frac{a_n}{b_n})_{n\geq 1}$ konvergent, $\lim_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$

4 Falls existiert K ≥ 1 mit $a_n \leq b_n\ \forall n \geq K \implies a \leq b$

2.2 Satz von Weierstrass

D 2.10

1 $(a_n)_{n\geq 1}$ ist **monoton wachsend** if

$$a_n \leq a_{n+1}\ \forall n \geq 1$$

2 $(a_n)_{n\geq 1}$ ist **monoton fallend** if

$$a_{n+1} \leq a_n\ \forall n \geq 1$$

S 2.11 (Weierstrass)

- Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$ nach

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}$$

- Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$ nach

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq 1\}$$

Bem: [2.13] Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine konvergent Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $b_n := a_{n+k}$ $n \geq 1$ konvergent und $\lim_{n\to\infty} b_n = a$

L 2.16 (Bernoulli Ungleichung)

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x \quad \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$$

2.3 Limes inferior, Limes superior

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n = \lim_{n\to\infty} b_n, (b_n = inf\{a_k : k \geq n\})$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = \lim_{n\to\infty} c_n,\ (c_n = sup\{a_k : k \geq n\})$$

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n \leq \lim_{n\to\infty} \sup a_n$$

2.4 Cauchy Kriterium

L 2.19 $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert if only if $(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt und

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n = \lim_{n\to\infty} \sup a_n$$

S 2.20 (Cauchy Kriterium) .
Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist genau dann konvergent if

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 1 \text{ so dass } |a_n - a_m| < \epsilon\ \forall n, m \geq N$$

2.5 Satz von Bolzano-Weierstrass

D 2.21 Ein abgeschlossenes Intervall ist $I \subseteq \mathbb{R}$

1 $[a, b] \quad a \leq b,\ a, b \in \mathbb{R}$

2 $[a, +\infty[\ a \in \mathbb{R}$

3 $]-\infty, a]\ a \in \mathbb{R}$

4 $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

Länge $\mathcal{L}(I)$ ist in 1) $b - a$, ansonsten $+\infty$

Bem: [2.22] $I \subseteq \mathbb{R}$ ist abgeschlossen if only if für jede konvergent Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ aus Elementen in I, der Grenzwert auch in I ist.

Bem: [2.23] Seien $I = [a, b], J = [c, d]$ mit $a \leq b$ und $c \leq d$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann gilt $I \subseteq J$ genau dann, wenn $c \leq a$ und $b \leq d$

S 2.25 (Cauchy-Cantor) Sei $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$ eine Folge abgeschlossener Intervale mit $\mathcal{L}(I_1) < +\infty$ Dann gilt

$$\bigcap_{n \geq 1} I_n \neq \emptyset$$

Falls zudem $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(I_n) = 0$ enthält $\bigcap_{n\geq 1} I_n$ genau einen Punkt

D 2.27 Eine Teilfolge einer Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist eine Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ wobei

$$b_n = a_l(n)$$

und $l : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ eine Abbildung ist mit

$$l(n) < l(n+1) \quad \forall n \geq 1s$$

S 2.29 (Bolzano.Weierstrass) Jede beschränkte Folge besitzt eine Konvergente Teilfolge

Bem: [2.30] Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Folge. Dann gilt für jede konvergente Teilfolge $(b_n)_{n\geq 1}$:

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n \leq \lim_{n\to\infty} \sup a_n$$

.

2.6 Folgen in $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{C}$

D 2.31 Eine Folge in $\mathbb{R}^d$ ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}^d$$

D 2.32 Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}^d$ heisst **konvergent**, falls es $a \in \mathbb{R}^d$ gibt so dass:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \geq 1 \text{ mit } ||a_n - a|| < \epsilon \; \forall n \geq N$$

S 2.33 Sei $b = b_1, \dots, b_d$. 1) und 2) sind äquivalent:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = b$
2. $\lim_{n\to\infty} a_{n,j} = b_j \quad \forall 1 \leq j \leq d$

S 2.36

1. Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert genau, wenn sie eine Cauchy Folge ist :

   $$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \geq 1 \text{ mit } ||a_n - a_m|| < \epsilon \; \forall n, m \geq N$$

2. Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge

2.7 Reihen

D 2.7.0 Eine Reihe ist eine unendliche Summe

$$S_n := a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

D 2.37 Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

ist **konvergent**, falls die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ der Partialsummen konvergiert. In diesem Fall :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n$$

S 2.40 Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ konvergent, sowie $\alpha \in \mathbb{C}$

1. $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = (\sum_{k=1}^{\infty} a_k) + (\sum_{j=1}^{\infty} b_j)$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k$ konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

S 2.41 (Cauchy Kriterium)

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent if onyl if :

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \geq 1 \text{ mit } \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k \right| < \epsilon \quad \forall m \geq n \geq N$$

S 2.42 Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert if only if $(S_n)_{n\geq 1}, S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ der Partialsummen nach oben beschränkt ist.

K 2.43 (Vergleichssatz)

Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen mit:

$$0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent}$$

Diese Implikation gilt auch, wenn

$$K \geq 1 \text{ mit } 0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq K$$

D 2.45 Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heisst **absolut konvergent**

$$\text{falls} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ konvergiert}$$

S 2.46 Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist auch konvergent und:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

S 4.8 (Leibniz 1682) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend mit $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \text{und es gilt } a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$$

D 2.50 Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ ist eine **Umordnung** der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, falls eine bijektive Abbildung

$$\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^* \text{mit } a'_n = a_{\phi(n)}$$

S 2.52 (Dirichlet 1837) Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, dann konvergiert jede Umordnung der Reihe und hat den selben Grenzwert

S 2.53(Quotientenkriterium

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1$.Falls

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}$$

Falls

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

Bem: 2.55 Das Quotientenkriterium versagt, z.B wenn unendliche viele Glieder der Reihe verschwinden

S 2.56 Wurzelkriterium

1. Falls

   $$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

   dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut
2. Falls

   $$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

   dann divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

K 2.57 Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

- konvergiert absolut für alle $|z| < \rho$
- divergiert für alle $|z| > \rho$

$$\rho = \begin{cases} +\infty & \text{falls } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{c\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{falls } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$$

D 2.58 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist eine **lineare Anordnung** der Doppelreihe $\sum_{i,j\geq 0} a_{i,j}$, falls es eine Bijektion

$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

gibt mit $b_k = a_{\sigma(k)}$

S 2.59 (Cauchy 1821). Wir nehmen an, dass es $B \geq 0$ gibt, so dass

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} |a_{ij}| \leq B \quad \forall m \geq 0$$

Dann konvergieren die folgenden Reihen absolut:

$$S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall i \geq 0 \text{ und } U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall j \geq 0$$

sowie

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i \text{ und } \sum_{j=0}^{\infty} U_j$$

und es gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i = \sum_{j=0}^{\infty} U_j$$

Zudem konvergiert jede lineare Anordnung der Doppelreihe absolut, mit selbem Grenzwert

D 2.60 Das **Cauchy Produkt** der Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \sum_{j=0}^{\infty} b_j$$

ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \dots$$

S 2.62 Falls die Reihen

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \sum_{j=0}^{\infty} b_j$$

absolut konvergieren, so konvergiert ihr Cauchy Produkt und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j) = (\sum_{i=0}^{\infty} a_i)(\sum_{j=0}^{\infty} b_j)$$

S 2.64 Sei $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge. Wir nehmen an :

1. $f(j) := \lim_{n\to\infty} f_n(j)$ existiert $\forall j \in \mathbb{N}$
2. Es gibt eine Funktion $g : \mathbb{N} \to [0, \infty[$, so dass

   2.1 $|f_n(j)| \leq g(j) \quad \forall j \geq 0, \forall n \geq 0$

   2.2 $\sum_{j=0}^{\infty} g(j)$ konvergiert

Dann folgt

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j)$$

K 2.65 Für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Folge $((1 + \frac{z}{n})^n)_{n\geq 1}$ und

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{z}{n})^n = \exp(z)$$

3 Stetige Funktionen

3.1 Reellwertige Funktionen

D 3.1 Sei $f \in \mathbb{R}^d$

1. f ist nach **oben beschränkt**, if $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt ist
2. f ist nach **unten beschränkt**, if $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ nach unten beschränkt ist
3. f ist beschränkt, if $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ b ist

D 3.2 Eine funktion $f : D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ ist

1. **monoton wachsend**, if $\forall x, y \in D$
$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$
2. **streng monoton wachsend**, if $\forall x, y \in D$
$$x < y \implies f(x) < f(y)$$
3. **monoton fallend**, if $\forall x, y \in D$
$$x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$$
4. **streng monoton fallend**, if $\forall x, y \in D$
$$x < y \implies f(x) > f(y)$$
5. **monoton**, falls f monoton wachsend oder monoton fallend
6. **streng monoton**, falls f streng monoton wachsend/fallend

3.2 Stetigkeit

D 3.4 Sei $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist in x_0 **stetig**, falls es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ die Implikation

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

D 3.5 Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist **stetig**, falls sie in jedem Punkt von D stetig ist.
S 3.7 Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Die Funktion f ist genau dann in x_0 stetig falls für jede Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in D folgende implikation gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

K 3.8 Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ beide stetig in x_0

1. Dann sind $f + g, \lambda \cdot f, f \cdot g$ stetig in x_0
2. Falls $g(x_0) \neq 0$ dann ist
$$\frac{f}{g} : D \cap \{x \in D : g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$$
$$x \to \frac{f(x)}{g(x)}$$
stetig in x_0

D 3.9 Eine **polynomiale Funktion** $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion der Form

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$$

wobei : $a_n \ldots a_0 \in \mathbb{R}$. Falls $a_n \neq 0$ ist n der **Grad** von P
K 3.10 Polynomiale Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig
K 3.11 Seien P,Q, polynomiale Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit $Q \neq 0$. Seien $x_1 \ldots x_m$ die Nullstellen von Q. Dann ist

$$\frac{P}{Q} : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots x_m\} \to \mathbb{R}$$

$$x \to \frac{P(x)}{Q(x)}$$

stetig

3.3 Der Zwischenwertsatz

S 3.12 (Bolzano 1817). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b \in I$. Für jedes c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein z zwischen a und b mit $f(z) = c$
K 3.13 Sei $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ ein Polynom mit $a_n \neq 0$ und n ungerade. Dann besitzt P mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$
Bem: [3.14] für $c > 0$ besitzt $Q(x) = x^2 + c$ keine Nullstelle in R

3.4 Der Min-Max Satz

D 3.16 Ein Intervall $\subseteq \mathbb{R}$ ist **kompakt**, falls es von Form

$$I = [a.b], \quad a \leq b$$

ist
L 3.17 Sei $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0. Dann sind

$$|f|, \max(f, g), \min(f, g)$$

stetig in x_0
L 3.18 Sei $(x_n)_{n \geq 1}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$$

sei $a \leq b$. Falls $\{x_n : n \geq 1\} \subseteq [a, b]$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in [a, b]$$

S 3.19 Sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem kompakten Intervall I. Dann gibt es $u \in I$ und $v \in I$ mit

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall x \in I$$

Insbesondere ist f beschränkt

3.5 Der Satz über Umkehrabbildung

S 3.20 Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$ *zwei Teilmengen*, $f : D_1 \to D_2, g : D_2 \to \mathbb{R}$ Funktionen, sowie $x_0 \in D_1$. Falls f in x_0 und g in $f(x_0)$ stetig sind

$$g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}$$

in x_0 stetig
K 3.21 Falls in Satz 3.20 f auf D_1 und g auf D_2 stetig sind, so ist $g \circ f$ auf D_1 stetig
S 3.22 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton. Dann ist $J := f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f^-1 : J \to I$ ist stetig. streng monoton.

3.6 Die reelle Exponentialfunktion

D

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

S 3.24 $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv **K** 3.25

$$\exp(x) > 1 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\exp(x) > 1 \forall x > 0$$

Falls $(y < z)$

$$\exp(z) = \exp(y + (z - y)) = \exp(y)\exp(z - y)$$

und da $(\exp(z - y) > 1)$ folgt **K** 3.26

$$\exp(z) > \exp(y) \forall z > y$$

K 3.27

$$\exp(x) \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

K 3.28 Der natürliche Logarithmus(Umkehrabbildung exp in $\mathbb{R}$)

$$\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

ist eine streng monoton wachsende, stetige, bijektive Funktion.

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b \quad \forall a, b \in]0, +\infty[$$

K 3.29

1. Für $a > 0$ ist $]0, +\infty[\to]0, +\infty[$
$$x \to x^a$$
eine stetige, streng monoton wachsende Bijektion
2. Für $a < 0$ ist $]0, +\infty[\to]0, +\infty[$
$$x \to x^a$$
eine stetige, streng monoton fallende Bijektion
3. $ln(x^a) = a \ln(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall x > 0$
4. $x^a \cdot x^b = x^{a+b} \quad \forall a.b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$
5. $(x^a)^b = x^{a \cdot b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$

3.7 Konvergenz v. Funktionenfolgen

D 3.30 Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 0}$ **konvergiert punktweise** gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, falls für alle $x \in D$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

D 3.32 (WEierstrass 1841) Die Folge

$$f_n : D \to \mathbb{R}$$

konvergiert gleichmässig in D gegen

$$f : D \to \mathbb{R}$$

falls gilt $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \geq 1$, so dass

$$\forall n \geq N, \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

S 3.33 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge bestehend aus(in D) stetige Funktionen die (in D) gleichmässig gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f (in D) stetig **D** 3.34 Eine Funktionenfolge

$$f_n : D \to \mathbb{R}$$

ist **gleichmässig konvergent**, falls für alle $x \in D$ der Grenzwert

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

existiert und die Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ gleichmässig gegen f konvergiert **K** 3.35 Die Funktionenfolge

$$f_n : D \to \mathbb{R}$$

konvergiert genau dann gleichmässig in D, falls

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \geq 1, \text{so dass} \forall n, m \geq N \text{und} \forall x \in D$$

:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

K 3.36 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Falls $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine gleichmässig konvergente Folge stetiger Funktionen ist, dann ist die Funktion

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

stetig **D** 3.37 Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmässig (in D), falls die durch

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

definierte Funktionenfolge gleichmässig konvergiert
S 3.38 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und

$$f_n : D \to \mathbb{R}$$

eine Folge stetiger Funktionen. Wir nehmen an, dass

$$|f_n(x)| < c_n \quad \forall x \in D$$

und, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

konvergiert. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

gleichmässin in D und deren Grenzwert

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

ist eine in D stetige Funktion

D 3.39 Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

hat **positiven Konvergenzradius**, falls $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$ existiert Der Konvergenzradius ist dann definiert als:

$$\rho = \begin{cases} -\infty & \text{falls } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{c\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{falls } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$$

S 3.40 Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$ und sei

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, |x| < \rho$$

Dann gilt: $\forall 0 \leq r \leq \rho$ konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

gleichmässig auf $[-r, r]$, Insbesondere ist f :] $-p, p[\to \mathbb{R}$ stetig **S** 3.41 $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetige Funktionen **S** 3.42

1 $\exp iz = \cos(z) + i sin(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

2 $\cos(z) = \cos(-z)$ und $\sin(-z) = -\sin z \quad \forall z in \mathbb{C}$

3 $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}$

4 $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$ $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$

5 $\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

K 3.34

$$\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$$

$$\cos(2z) = cos(z)^2 - \sin(z)^2$$

3.8 Die Kreiszahl π

S 3.44 Die Sinusfuktion hat auf $]0, +\infty[$ mindestens eine Nullstelle

$$\pi := \inf\{t > 0 : sint = 0\}$$

Dann gilt:

1

$$\sin\pi = 0, \pi \in]2, 4[$$

2

$$\forall x \in]0, \pi[: \sin x > 0$$

3

$$e^{\frac{i\pi}{2}} = i$$

K 3.45

$$x \geq \sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} \quad \forall 0 \leq x \leq \sqrt{6}$$

K 3.46

1 $e^{i\pi} = -1, \quad e^{2i\pi} = 1$

2 $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x), \quad \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x) \forall x \in \mathbb{R}$

3 $\sin(x + \pi) = -\sin(x), \quad \sin(x + 2\pi == \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4 $\cos(x + \pi) = -\cos(x), \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \forall x \in \mathbb{R}$

5 Nullstellen von Sinus $= \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$

$$\sin(x) > 0 \quad \forall x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[\quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(x) < 0 \quad \forall x \in](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[\quad k \in \mathbb{Z}$$

6 Nullstellen von Cosinus $= \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$

$$cos(x) > 0 \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{pi}{2} + (2k+1)\pi[\quad k \in \mathbb{Z}$$

$$cos(x) < 0 \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+2)\pi[\quad k \in \mathbb{Z}$$

3.9 Grenzwerte von Funktionen

D 3.47 $x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein **Häufungspunkt** der Menge D falls $\forall \delta > 0$:

$$(]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}) \cap D \neq \emptyset$$

D 3.49 Sei $F : D \to \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D. Dann ist $A \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to x_0$ bezeichnet mit

$$\text{"} \lim_{x\to x_0} f(x) = A\text{"}$$

falls $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ so dass

$$\forall x \in D \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}) : |f(x) - A| < \epsilon$$

Bem: 3.50

1 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D. Dann gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ genau dann wenn für alle Folgen $(a_n)_{a\geq 1}$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$$

folgt

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = A$$

2 Sei $x_0 \in D$. Dann ist f stetig in x_0 genau dann, falls

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

3 Mitells (1) zeigt man leicht, dass falls $f, g : D \to \mathbb{R}$ und $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$ existieren, so folgt

$$\lim_{x\to\infty} (f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

und

$$\lim_{x\to\infty} (f \cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

4 Sei $f, g : D \to \mathbb{R}$ mit $f \leq g$. Dann folgt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$$

falls beide Grenzwerte existieren

5 Falls $g_1 \leq f \leq g_2$ und

$$\lim_{x\to x_0} g_1(x) = \lim_{x\to x_0} g_2(x)$$

dann existiert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ und

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g_1(x)$$

S 3.52 Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}, x_0$ Häufungspunkt von $D, f : D \to E$ eine Funktion. Wir nehmen an, dass

$$y_0 := \lim_{x\to x_0} f(x)$$

existiert und $y_0 \in E$. Falls $g : E \to \mathbb{R}$ stetig in y_0 folgt

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$$

3.10 Linkseitige und rehcsseitige Grenzwerte

4 Differenzierbare Funktionen

4.1 Die Ableitung

D 4.1 Sei $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D
f ist ist **in** x_0 **Differenzierbar**, falls der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Ist dies der Fall, wird der Grenzwert mit $f'(x_0)$ bezeichnet **Bem:** 4.2 Es ist oft von Vorteil in der Definiton von $f'(x_0), x = x_0 + h$ zu setzten, so dass:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

S 4.3(Weierstrass 1861). Sei $f : D \to \mathbb{R}, x_0 \in D$ Häufungspunkt von D. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1 f ist in x_0 differenzierbar.

2 Es gibt $c \in \mathbb{R}$ und $r : D \to D$ mit:

2.1 $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$

2.2 $r(x_0) = 0$ und r ist stetig in x_0

Falls dies zutrifft ist $c = f'(x_0)$ eindeutig bestimmt

S 4.4 Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in x_0 differenzierbar, falls es eine Funktion $\Phi : D \to \mathbb{R}$ gibt die stetig in x_0 ist und so, dass

$$f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0) \quad \forall x \in D$$

In diesem Fall gilt $\phi(x_0) = f'(x_0)$ **K** 4.5 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D. Falls f in x_0 differenzierbar ist, so ist f stetig in x_0 **D** 4.7 $f : D \to \mathbb{R}$ ist **in D differenzierbar**, falls für jeden Häufungspunkt $x_0 \in D, f$ in x_0 differenzierbar ist. **S** 4.9 Sei $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D und $f, g : D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar. Dann gelten

1 $f + g$ ist in x_0 differenzierbar und

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2 $f \cdot g$ ist in x_0 differenzierbar und $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

3 Falls $g(x_0) \neq 0$ ist $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und

$$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

S 4.11 Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ und sei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt. Sei $f.D \to E$ eine in x_0 differenzierbare Funktion so dass $y_0 := f(x_0)$ ein Häufungspunkt von E ist, und sei $g : E \to \mathbb{R}$ eine in y_0 differenzierbare Funktion. Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

K 4.12 Sei $f : D \to E$ eine bijektive Funktion, $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt; wir nehem an f ist in x_0 differenzierbar und $f'(x) \neq 0$; zudem nehemn wir an f^{-1} ist in $y_0 = f(x_0)$ stetig. Dann ist y_0 Häufungspunkt von E, f^{-1} ist in y_0 differenzierbar und

$$f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

4.2 Zentrale Sätze über die Ableitung

D 4.14 Sei $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$

1 f besitzt ein lokales Maximum in x_0 falls es $\delta > 0$ gibt mit:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D$$

2 f besitzt ein lokales Minimum in x_0 falls es $\delta > 0$ gibt mit:

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D$$

3 f besitzt ein lokales Extremum in x_0 falls es entweder ein lokales Minimum oder Maximum von f ist.

S 4.15 Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}, x_0 \in]a, b[$. Wir nehmen an, f ist in x_0 differenzierbar

1 Falls $f'(x) > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit

$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$$

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$$

2 Falls $f'(x_0) < 0$ gibt es $\delta > 0$ mit

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$$

$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$$

3 Falls f in x_0 ein lokales Extremum besitzt, folgt $f'(x_0) = 0$

S 4.16 (Rolle 1690). Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Erfüllt sie $f(a) = f(b)$ so gibt es $\mathcal{E} \in]a, b[]$ mit

$$f'(\mathcal{E} = 0)$$

S 4.17 (Lagrange 1797) Sei $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ stetig mit f in $]a, b[$ differenzierbar. Dann gibt es $\mathcal{E} \in]a, b[$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\mathcal{E}(b - a))$$

K 4.18 Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar

1 Falls

$$f'(\mathcal{E} = 0) \quad \forall \mathcal{E} \in]a, b[\text{ist f konstant}$$

2 Falls $f'(\mathcal{E}) = g'(\mathcal{E}) \quad \forall \mathcal{E} \in]a, b[$
gibt es$c \in \mathbb{R}$mit$f(x) = g(x) + c \quad \forall x \in [a, b]$.

3 Falls $f'(\mathcal{E}) \geq 0 \quad \forall \mathcal{E} \in]a, b[$
ist f auf $[a, b]$monoton wachsend

4 Falls $f'(\mathcal{E}) > 0 \quad \forall \mathcal{E} \in]a, b[$
ist f auf$[a, b]$ strikt monoton wachsend

5 Falls $f'(\mathcal{E}) \leq 0 \quad \forall \mathcal{E} \in]a, b[$
ist f auf $[a, b]$monoton fallend

6 Falls $f'(\mathcal{E}) < 0 \quad \forall \mathcal{E} \in]a, b[$
ist f auf $[a, b]$strikt monoton fallend

7 Falls es $M > 0$ gibt mit

$$|f'(\mathcal{E})| \leq M \quad \forall \mathcal{E} \in]a, b[$$

dann folgt $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M |x_1 - x_2|$$

S 4.22 (Cauchy). Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Dann gibt es $\mathcal{E} \in]a.b[$ mit

$$g'(\mathcal{E})(f(b) - f(a)) = f'(\mathcal{E})(g(b) - g(a))$$

Falls $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$ folgt

$$g(a) \neq g(b)$$

und

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\mathcal{E})}{g'(\mathcal{E})}$$

Randnotiz: Man erhält den Satz von Lagrange mit $g(x) = x$ **S** 4.23 (l'Hospital 1696) Seien $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$

$$\lim_{x \to b-} f(x) = 0, \lim_{x \to b-} g(x) = 0$$

und

$$\lim_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$$

existiert, folgt

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Bem: 4.24 Der Satz gilt auch

- falls $b = +\infty$
- falls $\lambda = +\infty$
- falls $x \to a^+$

D 4.26 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

1 f ist **konvex** (auf I) falls es für alle $x \leq y, \quad x, y \in I$ und $\lambda \in [0, 1]$ $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ gilt

2 f ist **streng konvex** falls für alle $x < y, \quad x, y \in I$ und $\lambda \in]0, 1[$ $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$

Bem: 4.27 Sei $f : I \to \mathbb{R}$ konvex. Ein einfacher Induktionsbeweis zeigt, dass für alle $n \geq 1, \{x_1, \dots x_n\} \subseteq I$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ in $[0, 1]$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) = 1$

$$f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

L 4.28 Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Die Funktion f ist genau dann konvex, falls für alle $x_0 < x < x_1$ in I

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

gilt. f ist streng konvex wenn $<$ gilt in obiger Ungleichung **S** 4.29 Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ in $]a, b[$ differenzierbar. Die Funktion f ist genau dann (streng) konvex, falls f' (streng) monoton wachsend ist. **K** 4.30 Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar in $]a.b[$. Die Funktion f ist (streng) konvex, falls $f'' \leq 0$ (bzw $f'' > 0$) auf $]a, b[$

4.3 Höhere Ableitungen

D 4.32 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, so dass jedes $x_0 \in D$ Häufungspunkt der Menge D ist. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in D und f' ihre Ableitung; wir setzen $f^{(1)} = f'$

1 Für $n \geq 2$ ist f **n-mal differenzierbar in D** falls $f^{(n-1)}$ in D differenzierbar ist. Dann ist $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ und nennt sich die n-te Ableitung von f

2 Die Funktion f ist **n-mal stetig differenzierbar in D**, falls sie n-mal differenzierbar ist und falls $f^{(n)}$ in D stetig ist

3 Die Funktion f ist in D **glatt**, falls sie $\forall n \geq 1$, n-mal differenzierbar ist.

Bem: 4.33 Es folgt aus Korollar 4.5, dass für $n \geq 1$, eine n-mal differenzierbare Funktion (n-1)-mal differenzierbar ist. **S** 4.34 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ wie in Def. 4.32, $n \geq 1$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar in D

1 $f + g$ ist n-mal differenzierbar und

$$(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

2 $f \cdot g$ ist n-mal differenzierbar und

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

S 4.36 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ wie in Def. 4.32, $n \geq 1$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar in D Falls $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$, ist $\frac{f}{g}$ in D n-mal differenzierbar

S 4.37 Seien $E, D \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen für die jeder Punkt Häufungspunkt ist. Seien $f : D \to E$ und $g : E \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ n-mal differenzierbar und

$$(g \circ f)^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n A_{n,k}(x)(g^{(k)} \circ f)(x)$$

wobei $A_{n,k}$ ein Polynom in den Funktionen $f', f^{(2)}, \dots, f^{(n+1-k)}$ ist

4.4 Potenzreihen & Taylor Approx.

S 4.39 Seien $f_n :]a, b[\to \mathbb{R}$ eine Funktionsfolge wobei f_n einmal in $]a, b[$ stetig differenzierbar ist $\forall n \geq 1$. Wir nehemen an, dass sowohl die Folge $(f_n)_{n \geq 1}$ wie $(f'_n)_{n \geq 1}$ gleichmässig in $]a, b[$ konvergieren mit $\lim_{n \to \infty} f_n =: f$ und $(\lim_{n \to \infty} f'_n =: p$. Dann ist f stetig differenzierbar und $f' = p$ **S** 4.40 Sei $\sum_{k=0}^\infty c_k x^k$ eine Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist

$$f(x) = \sum_{k=0}^\infty c_k (x - x_0)^k$$

auf $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ differenzierbar und

$$f'(x) = \sum_{k=1}^\infty k c_k (x - x_0)^{k-1}$$

für alle $x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ **K** 4.41 Unter der Voraussetzung von Satz 4.39 ist f auf $]x_0 - \rho, x_0 + \rho$ glatt und

$$f^(j)(x) = \sum_{k=h}^\infty c_k \frac{k!}{(k - j)!}(x - x_0)^{k-j}$$

Insbesondere ist

$$c_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}$$

. **S** 4.43 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ (n+1)-mal differenzierbar. Für jedes $a < x \leq b$ gibt es $\mathcal{E} \in]a, x[$ mit:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}\mathcal{E}}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}$$

K 4.44 (Taylor Approximatio) Sei $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]c, d[$ (n+1)-mal differenzierbar. Sei $c < a < d$. Für alle $x \in [c, d]$ gibt es $\mathcal{E}$ zwischen x und so dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}\mathcal{E}}{(n + 1)}(x-a)^{(n+1)}$$

K 4.45 Sei $n \geq 0, a < x_0 < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in $]a, b[$ (n+1)-mal stetig differenzierbar. Annahme: $f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$

1 Falls n gerade ist und x_0 lokale Extremstelle, folgt $f^{(n+1)}(x_0) = 0$

2 Falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ so ist x_0 eine strikt lokale Minimalstelle

3 Falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ so ist x_0 eine strikt lokale Maximalstelle

K 4.46 Sei $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ zweimal stetig differenzierbar. Sei $x < x_0 < b$. Annahme: $f'(x) = 0$

1 Falls $f^{(2)}(x_0) > 0$ ist x_0 strikt lokale Minimalstelle

2 Falls $f^{(2)}(x_0) < 0$ ist x_0 strikt lokale Maximalstelle

5 Das Riemann Integral

5.1 Integrabilitätskriterien

D 5.1 Eine **Partition** von I ist eine endliche Teilmenge $P \subsetneq [a,b]$ wobei $\{a,b\} \subseteq P$ **L** 5.2

1 Sei P' eine Verfeinerung von P, dann gilt:

$$s(f.P) \le s(f,P') \le S(f,P') \le S(f,P)$$

2 Für beliebige Partitionen P_1, P_2 gilt:

$$s(f,P_1) \le S(f,P_2)$$

D 5.3 Eine beschränkte Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist **Riemann integrierbar** falls

$$s(f)=S(f)$$

In diesem Fall bezeichnen wir den gemeinsamen Wert von $s(f)$ und $S(f)$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

S 5.4 Eine beschränkte Funtkion ist genau dann integrierbar, falls

$$\forall\epsilon>0 \quad \exists P\in\mathcal{P}(I)$$

mit $S(f,P)-s(f,P)<\epsilon$ **S** 5.8(Du Bois-Reymond 1875) Eine beschränkte Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, falls $\forall\epsilon>0 \quad \exists\delta>0$ so dass

$$\forall P\in P_\delta(I), S(f,P)-s(f,P)<\epsilon$$

K 5.9 Die beschränkte Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar mit $A:=\int_a^b f(x)\,dx$ falls: $\forall\epsilon>0 \quad \exists\delta>0$ so dass $\forall P\in p(I)$ Partition mit $\delta(P)<\delta$ und $\epsilon_1,\dots,\epsilon_n$ mit $\mathcal{E}_i\in[x_{i-1},x_i], P=\{x_0,\dots,x_n\}$

$$\left|A-\sum_{i=1}^n f(\mathcal{E}_\rangle)(x_i-x_{i-1})\right| << epsilon$$

5.2 Integrierbare Funktionen

S 5.10 Seien $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar und $\lambda\in\mathbb{R}$. Dann sind $f+g, \lambda\cdot f, f\cdot g, |f|, \max(f,g), \min(f,g)$ und $\frac{f}{g}$ (falls $|g(x)\ge\beta>0 \quad \forall x\in[a,b]|$) integrierbar **Bem:** 5.11 Sei $\phi:[c,d]\to\mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann ist

$$\sup_{x,y\in[c,d]}|\phi(x)-\phi(y)| = \sup_{x\in[c,d]}\phi(x)-\inf_{x\in[c,d]}\phi(x)$$

K 5.12 Seien P,¡ Polynome und $[a,b]$ ein Intervall in dem Q keine Nullstelle besitzt. Dann ist

$$[a,b]\to\mathbb{R}$$

$$x\to\frac{P(x)}{Q(x)}$$

integrierbar **D** 5.13 Eine Funktion $f:D\to\mathbb{R}$, $D\subseteq\mathbb{R}$ ist in D **gleichmässig stetig**, falls $\forall\epsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x,y\in D:$

$$|x-y|<\delta \implies |f(x)-f(y)|<\epsilon$$

S 5.15 (Heine 1872). Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig in dem kompakten Intervall $[a,b]$. Dann ist f in $[a,b]$ gleichmässig stetig. **S** 5.16 Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar **S** 5.17 Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monoton. Dann ist f integrierbar **Bem:** 5.18 Seien $a<b<c$ und $f:[a.c]\to\mathbb{R}$ beschränkt mit $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ integrierbar. Dann ist f integrierbar und

$$\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx$$

S 5.19 Sei $I\subsetneq\mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit Endpunkten a,b sowie $f_1,f_2:I\to\mathbb{R}$ beschränkt integrierbar und $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\int_a^b(\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x))\,dx=\lambda_1\int_a^b f_1(x)\,dx+\lambda_2\int_a^b f_2(x)\,dx$$

5.3 Ungleichungen und Mittelwertsatz

S 5.20 Seien $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt integrierbar, und

$$f(x)\le g(x) \quad \forall x\in[a,b]$$

Dann folgt:

$$\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$$

K 5.21 Falls $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt integrierbar, folgt

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b|f(x)|\,dx$$

S 5.22(Cauchy-Schwarz Ungleichung 1821) Seien $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt integrierbar. Dann gilt:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right|\le\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}$$

S 5.23(Mittelwertsatz, Cauchy 1821) Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $\mathcal{E}\in[a,b]$ mit:

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(\mathcal{E})(b-a)$$

S 5.25(Cauchy 1821) SEien $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ wobei f stetig, g beschränkt integrierbar mit $g(x)\ge 0 \quad \forall x\in[a,b]$. Dann gibt es $\mathcal{E}\in[a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(\mathcal{E})\int_a^b g(x)\,dx$$

5.4 Fundamentalsatz

S 5.26 Seien $a<b$ und $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Die Funktion

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad a\le x\le b$$

ist in $[a,b]$ stetig differenzierbar und

$$F'(x)=f(x) \quad \forall x\in[a,b]$$

D 5.27 Sei $a<b$ und $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Eine Funktion $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ heisst **Stammfunktion** von f, falls F (stetig) differenzierbar in $[a,b]$ ist und $F'=f$ in $[a,b]$ gilt **S** 5.28 (Fundamentalsatz der Differentialrechnung) Sei $f:[a.b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine Stammfunktion F von f, die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

S 5.30(Partielle Integration) Seien $a<b$ reele Zahlen und $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

S 5.31(Substitution) Sei $a<b, \phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $I\subseteq\mathbb{R}$ ein Intervall mit $\phi([a,b])\subseteq I$ und $f:I\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)}f(x)\,dx=\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$$

K 5.33 Sei $I\subseteq\mathbb{R}$ ein Intervall und $f:I\to\mathbb{R}$ stetig.

1 Seien $a,b,c\in\mathbb{R}$ so dass das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten a+c, b+c in I enthalten ist. Dann gilt:

$$\int_{a+c}^{b+c}f(x)\,dx=\int_a^b f(t+c)\,dt$$

2 Seien $a,b,c\in\mathbb{R}$ mit $c\neq 0$ so dass das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten ac, bc in I enthalten ist. Dann gilt:

$$\int_a^b f(ct)\,dt=\frac{1}{c}\int_{ac}^{bc}f(x)\,dx$$

5.5 Integration konvergenter Reihen

S 5.34 Sei $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine Folge von beschränkten, integrierbaren Funktionen die gleichmässig gegen eine Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f beschränkt integrierbar und

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

K 5.35 Sei $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine Folge beschränkter integrierbarer Funktionen so dass

$$\sum_{n=0}^{\infty}f_n$$

auf $[a.b]$ gleichmässig konvergiert. Dann gilt :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b(\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x))\,dx$$

K 5.36 Sei

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_k x^k$$

eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $\rho>0$. Dann ist für jedes $0\le r<\rho$, f auf $[-r,r]$ integrierbar und es gilt $\forall x\in]-\rho,\rho[$:

$$\int_0^x f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}x^{n+1}$$

5.6 Euler-McLaurin Summationsformel

D 5.40 $\forall k\ge 0$ ist das k'te Bernoulli Polynom $B_k(x)=k!P_k(x)$ **D** 5.41 Sei $B_0=1$ für alle $k\ge 2$ definieren wir B_{k-1} rekursiv:

$$\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}B_i=0$$

S 5.42

$$B_k(x)=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}B_i x^{k-i}$$

Bem: 5.43 Für $k\ge 2$:

$$B_k(1)=\sum_{i=0}^{k}\left(\begin{array}{c}k\\ i\end{array}\right) \qquad B_i=\sum_{i=0}^{k-1}\left(\begin{array}{c}k\\ i\end{array}\right.$$

$$=B_k \quad \text{(nach 5.41)}$$

$$=B_k(0) \quad \text{(nach Satz 5.42).}$$

Zur Aussage der Summationsformel definieren wir für $k\ge 1$

$$\widetilde{B}_k:[0,\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$$

als

$$\widetilde{B}_k(x)=\begin{cases}B_k(x) & \text{für} \quad 0\le x<1\\ B_k(x-n) & \text{für } n\le x<n+1 \text{ wobei } n\ge\end{cases}$$

S 5.44 Sei $f:[0,n]\to\mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar, $k\ge 1$. Dann gilt :

1 Für k = 1:

$$\sum_{i=1}^n f(i)=\int_0^n f(x)\,dx+\frac{1}{2}(f(n)-f(0))+\int_0^n\tilde{B}_1(x)f$$

2 Für $k \geq 2$:

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \sum_{J=2}^{k} \frac{(-1)^j B_j}{j!}(f^{(j-1)}(n) - f^{(j-1)}(0)) + \tilde{R_k}$$

wobei

$$\tilde{R_k} = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^n \tilde{B_k}(x) f^{(k)}(x)\,dx$$

5.7 Stirling'sche Formel

S 5.47

$$n! = \frac{\sqrt{2\pi n} n^n}{e^n} \cdot \exp(\frac{1}{12n} + R_3(n))$$

wobei

$$|R_3(n)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216 \cdot \frac{1}{n^2}} \quad \forall n \geq 1$$

L 5.48 $\forall m \geq n+1 \geq 1$:

$$|R_3(m,n)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216}(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2})$$

5.8 Uneigentliche Integrale

D 5.49 Sei $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b]$ für alle $b > a$. Falls

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

existiert, bezeichnen wir den Grenzwert mit

$$\int_a^\infty f(x\,dx)$$

und sagen, dass f auf $[a, +\infty[$ integrierbar ist. **L** 5.51 Sei $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b] \quad \forall b > a$

1 Falls $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \geq a$ und $g(x)$ ist auf $[a, \infty[$ integrierbar, so ist f auf $[a, \infty[$ integrierbar

2 Falls $0 \leq g(x) \leq f(x)$ und $\int_a^\infty$ divergiert, so divergiert auch $\int_a^\infty f(x)\,dx$

S 5.53 (McLaurin 1742) Sei $f : [1, \infty[\to [0, \infty[$ monoton fallend. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

konvergiert genau dann, wenn

$$\int_1^\infty f(x)\,dx$$

konvergiert **D** 5.56 In dieser Siutation ist $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ integrierbar falls

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx$$

existiert; in diesem Fall wird der Grenzwert mit $\int_a^b f(x)\,dx$ bezeichnet

5.9 Die Gamma Funktion

D 5.59 Für s ¿ 0 definieren wir

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\,dx$$

S 5.60(Bohr-Mollerup)

1 Die Gamme Funktion erfüllt die Relationen

(a) $\Gamma(1) = 1$

(b) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \forall s > 0$

(c) Γ ist logarithmisch, das heisst

$$\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}$$

für alle $x, y > 0$ und $0 \leq \lambda \leq 1$

2 Die Gamme Funktion ist die einzige Funktion $0, \infty[\to]0, \infty[$ die (a), (b) und (c) erfüllt. Darüber hinaus gilt:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)} \quad \forall x > 0$$

L 5.61 Sei $\rho > 1$ und $q > 1$ mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Dann gilt $\forall a, b \geq 0$

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

S 5.62(Hölder Ungleichung). Seien $\rho > 1$ und $q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für alle $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig gilt:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq ||f||_p\,||g||_q$$

5.10 Das unbestimmte Integral