

1 Grundlagen

S 1.1 Es gibt keine Gleichung der Form

x^n + a\_{n-1}x^{n-1} + ... + a\_0 = 0

mit a\_i in Q, so dass x = pi eine Lösung ist

S 1.2 R ist ein kommutativer, angeordneter Körper, der ordnungsvollständig ist

D Axiome der Addition

A1 Assoziativität x + (y + z) = (x + y) + z

A2 Neutrales Element x + 0 = x für alle x in R

A3 Inverses Element für alle x in R existiert y in R : x + y = 0

A4 Kommutativität x + z = z + x für alle x, z in R

D Axiome der Multiplikation

M1 Assoziativität x · (y · z) = (x · y) · z für alle x, y, z in R

M2 Neutrales Element x · 1 = x für alle x in R

M3 Inverses Element für alle x in R, x ≠ 0 existiert y in R : x · y = 1

M4 Kommutativität x · z = z · x für alle x, z in R

D Distributivität

D1 Distributivität x · (y + z) = x · y + x · z

D Ordnungssaxiome

O1 Reflexivität x ≤ x für alle x in R

O2 Transitivität x ≤ y and y ≤ z implies x ≤ z

O3 Antisymmetrie x ≤ y and y ≤ x implies x = y

O4 Total für alle x, y in R gilt entweder x ≤ y oder y ≤ x

D Kompatibilität

K1 für alle x, y, z in R : x ≤ y implies x + z ≤ y + z

K2 für alle x ≥ 0, für alle y ≥ 0 : x · y ≥ 0

D Ordnungsvollständigkeit Seien A, B ⊆ von R

i A ≠ ∅, B ≠ ∅

ii für alle a in A and für alle b in B : a ≤ b

Dann gibt es c in R, dass für alle a in A : a ≤ c und für alle b in B : c ≤ b

K 1.6

1 Additive und multiplikate Inverse eindeutig

2 0 · x = 0 für alle x in R

3 (-1) · x = -x für alle x in R

4 y ≥ 0 iff (-y) ≤ 0

5 y^2 ≥ 0 für alle x in R

6 x ≤ y and u ≤ v implies x + u ≤ y + v

7 0 ≤ x ≤ y und 0 ≤ u ≤ v implies x · u ≤ y · v

K 1.7(Archimedisches Prinzip)

Sei x in R mit x > 0 und y in R. Dann gibt es n in N mit y ≤ n · x

S 1.8

Für jedes t ≥ 0, t in R hat x^2 = t eine Lösung in R

D 1.9 Seien x, y in R

(i) max{x, y} = { x falls y ≤ x, y falls x ≤ y }

(ii) min{x, y} = { y falls y ≤ x, x falls x ≤ y }

(iii) Der Absolutbetrag einer Zahl x in R : |x| = max{x, -x}

S 1.10

(i) |x| ≥ 0 für alle x in R

(ii) |xy| = |x| |y| für alle x, y in R

(iii) |x + y| ≤ |x| + |y| für alle x, y in R

(iv) |x + y| ≥ |x| - |y| für alle x, y in R

S 1.11(Young'sche Ungleichung)

für ε > 0, für alle x, y in R:

2 |xy| ≤ εx^2 + (1/ε)y^2

1.1 Infimum und Supremum

D 1.12 Sei A ⊆ R eine Teilmenge.

1) c in R ist obere Schranke if für alle a in A : a ≤ c

2) c in R ist untere Schranke if für alle a in A : c ≤ a

3) m in R heisst ein Maximum von A if m in A und m eine obere Schranke von A ist.

4) m in R heisst ein Minimum von A if m in A und m eine untere Schranke von A ist.

S 1.15 . Sei A ⊆ R, A ≠ ∅

1) Sei A nach oben beschränkt. Dann gibt es eine kleinste obere Schranke:

c := sup A (Supremum von A)

2) Sei A nach unten beschränkt. Dann gibt es eine grösste untere Schranke:

d := inf A (Infimum von A)

Eigenschaften von Supremum und Infimum

• sup(A ∪ B) = max(sup A, sup B)

• sup(A + B) = sup A + sup B

• inf(A ∪ B) = min(inf A, inf B)

• inf(A + B) = inf A + inf B

K 1.16 Seien A ⊆ B ⊆ R Teilmengen von R

1 Falls B nach oben beschränkt ist, sup A ≤ sup B

2 Falls B nach unten beschränkt ist, inf B ≤ inf A

D 1.18 Kardinalität

(i) Zwei Mengen X, Y heissen gleichmächtig if eine Bijektion f : X → Y existiert

(ii) Eine Menge ist endlich, wenn X = ∅ or ∃ n in N so dass {1, 2, ..., n} gleichmächtig wie X

(iii) Eine Menge X ist abzählbar if endlich oder gleichmächtig wie N

S 1.20 (Cantor) R ist nicht abzählbar

2 Folgen und Reihen

D 2.1 Eine Folge ist eine Abbildung

a : N\* → R (N\* = N / {0})

2.1 Grenzwert einer Folge

L 2.3 (a\_n)\_{n ≥ 1} eine Folge, es gibt höchstens eine Zahl l in R mit der Eigenschaft:

für ε > 0 ist Menge {n in N : a\_n nicht in [l - ε, l + ε]} endlich

D 2.4 (a\_n)\_{n ≥ 1} ist konvergent, falls l in R so dass für ε > 0 die Menge {n in N\* : a\_n nicht in [l - ε, l + ε]} endlich ist. Dieses l ist der Limes der Folge.

Bem: [2.5] Jede Konvergente Folge ist beschränkt

L 2.6 Folgende Aussagen sind äquivalent

1 (a\_n)\_{n ≥ 1} konvergiert gegen l = lim\_{n → ∞} a\_n

2 für ε > 0 ∃ N ≥ 1 that

|a\_n - l| < ε für alle n ≥ N

S 2.8 Seien (a\_n)\_{n ≥ 1} und (b\_n)\_{n ≥ 1} konvergent Folgen mit a = lim\_{n → ∞} a\_n, b = lim\_{n → ∞} b\_n

1 (a\_n + b\_n)\_{n ≥ 1} ist konvergent und lim\_{n → ∞} (a\_n + b\_n) = a + b

2 (a\_n · b\_n)\_{n ≥ 1} ist konvergent und lim\_{n → ∞} (a\_n · b\_n) = a · b

3 if b\_n ≠ 0 für alle n ≥ 1, b ≠ 0 ((a\_n/b\_n)\_{n ≥ 1} konvergent, lim\_{n → ∞} (a\_n/b\_n) = a/b

4 Falls existiert K ≥ 1 mit a\_n ≤ b\_n für alle n ≥ K implies a ≤ b

2.2 Satz von Weierstrass

D 2.10

1 (a\_n)\_{n ≥ 1} ist monoton wachsend if

a\_n ≤ a\_{n+1} für alle n ≥ 1

2 (a\_n)\_{n ≥ 1} ist monoton fallend if

a\_{n+1} ≤ a\_n für alle n ≥ 1

S 2.11 (Weierstrass)

• Sei (a\_n)\_{n ≥ 1} monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann konvergiert (a\_n)\_{n ≥ 1} nach

lim\_{n → ∞} a\_n = sup{a\_n : n ≥ 1}

• Sei (a\_n)\_{n ≥ 1} monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann konvergiert (a\_n)\_{n ≥ 1} nach

lim\_{n → ∞} a\_n = inf{a\_n : n ≥ 1}

Bem: [2.13] Sei (a\_n)\_{n ≥ 1} eine konvergente Folge mit lim\_{n → ∞} a\_n = a und k in N. Dann ist

b\_n := a\_{n+k} n ≥ 1 konvergent und lim\_{n → ∞} b\_n = a

L 2.16 (Bernoulli Ungleichung)

(1 + x)^n ≥ 1 + n · x für alle n in N, x > -1

2.3 Limes inferior, Limes superior

lim\_{n → ∞} inf a\_n = lim\_{n → ∞} b\_n, (b\_n = inf{a\_k : k ≥ n})

lim\_{n → ∞} sup a\_n = lim\_{n → ∞} c\_n, (c\_n = sup{a\_k : k ≥ n})

lim\_{n → ∞} inf a\_n ≤ lim\_{n → ∞} sup a\_n

2.4 Cauchy Kriterium

L 2.19 (a\_n)\_{n ≥ 1} konvergiert if and only if (a\_n)\_{n ≥ 1} beschränkt und

lim\_{n → ∞} inf a\_n = lim\_{n → ∞} sup a\_n

S 2.20 (Cauchy Kriterium) .

Die Folge (a\_n)\_{n ≥ 1} ist genau dann konvergent if

für ε > 0 ∃ N ≥ 1 so dass |a\_n - a\_m| < ε für alle n, m ≥ N

2.5 Satz von Bolzano-Weierstrass

D 2.21 Ein abgeschlossenes Intervall ist I ⊆ R

1 [a, b] a ≤ b, a, b in R

2 [a, +∞[ a in R

3 ] -∞, a] a in R

4 ] -∞, +∞[ = R

Länge L(I) ist in 1) b - a, ansonsten +∞

Bem: [2.22] I ⊆ R ist abgeschlossen if and only if für jede konvergente Folge (a\_n)\_{n ≥ 1} aus Elementen in I, der Grenzwert auch in I ist.

Bem: [2.23] Seien I = [a, b], J = [c, d] mit a ≤ b und c ≤ d a, b, c, d in R. Dann gilt I ⊆ J genau dann, wenn c ≤ a und b ≤ d

**S 2.25 (Cauchy-Cantor)** Sei  $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$  eine Folge abgeschlossener Intervalle mit  $\mathcal{L}(I_1) < +\infty$ . Dann gilt

$$\bigcap_{n \geq 1} I_n \neq \emptyset$$

Falls zudem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(I_n) = 0$  enthält  $\bigcap_{n \geq 1} I_n$  genau einen Punkt

**D 2.27** Eine Teilfolge einer Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  ist eine Folge  $(b_n)_{n \geq 1}$  wobei

$$b_n = a_l(n)$$

und  $l: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  eine Abbildung ist mit

$$l(n) < l(n+1) \quad \forall n \geq 1$$

**S 2.29 (Bolzano-Weierstrass)** Jede beschränkte Folge besitzt eine Konvergente Teilfolge.  
**Bem:** [2.30] Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine beschränkte Folge. Dann gilt für jede konvergente Teilfolge  $(b_n)_{n \geq 1}$ :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

## 2.6 Folgen in $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{C}$

**D 2.31** Eine Folge in  $\mathbb{R}^d$  ist eine Abbildung

$$a: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}^d$$

**D 2.32** Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  in  $\mathbb{R}^d$  heisst **konvergent**, falls es  $a \in \mathbb{R}^d$  gibt so dass:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1 \text{ mit } \|a_n - a\| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

**S 2.33** Sei  $b = b_1, \dots, b_d$ . 1) und 2) sind äquivalent:

- 1  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$
- 2  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,j} = b_j \quad \forall 1 \leq j \leq d$

**S 2.36**

- 1 Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergiert genau, wenn sie eine Cauchy Folge ist:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1 \text{ mit } \|a_n - a_m\| < \epsilon \quad \forall n, m \geq N$$

- 2 Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge

## 2.7 Reihen

**D 2.7.0** Eine Reihe ist eine unendliche Summe

$$S_n := a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

**D 2.37** Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

ist **konvergent**, falls die Folge  $(S_n)_{n \geq 1}$  der Partialsummen konvergiert. In diesem Fall:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

**S 2.40** Seien  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$  konvergent, sowie  $\alpha \in \mathbb{C}$

- 1  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$  konvergent und  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = (\sum_{k=1}^{\infty} a_k) + (\sum_{j=1}^{\infty} b_j)$
- 2  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k$  konvergent und  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

**S 2.41 (Cauchy Kriterium)**

Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist konvergent if and only if:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1 \text{ mit } \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \epsilon \quad \forall m \geq n \geq N$$

**S 2.42** Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  eine Reihe mit  $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$ . Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergiert if and only if  $(S_n)_{n \geq 1}$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  der Partialsummen nach oben beschränkt ist.

**K 2.43 (Vergleichssatz)**

Seien  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  Reihen mit:

$$0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent}$$

Diese Implikation gilt auch, wenn

$$K \geq 1 \text{ mit } 0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq K$$

**D 2.45** Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  heisst **absolut konvergent**

$$\text{falls } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ konvergiert}$$

**S 2.46** Eine absolut konvergente Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist auch konvergent und:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

**S 4.8 (Leibniz 1682)** Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  monoton fallend mit  $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Dann konvergiert

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \text{ und es gilt } a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$$

**D 2.50** Eine Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$  ist eine **Umordnung** der Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , falls eine bijektive Abbildung

$$\phi: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^* \text{ mit } a'_n = a_{\phi(n)}$$

**S 2.52** (Dirichlet 1837) Falls  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut konvergiert, dann konvergiert jede Umordnung der Reihe und hat den selben Grenzwert

**S 2.53 (Quotientenkriterium)**

Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  mit  $a_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1$ . Falls

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}$$

Falls

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

**Bem:** 2.55 Das Quotientenkriterium versagt, z.B. wenn unendliche viele Glieder der Reihe verschwinden

**S 2.56 Wurzelkriterium**

- 1 Falls

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

dann konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut

- 2 Falls

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

dann divergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

**K 2.57** Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

- konvergiert absolut für alle  $|z| < \rho$
- divergiert für alle  $|z| > \rho$

$$\rho = \begin{cases} +\infty & \text{falls } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{falls } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$$

**D 2.58**  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  ist eine **lineare Anordnung** der Doppelreihe  $\sum_{i,j \geq 0} a_{i,j}$ , falls es eine Bijektion

$$\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

gibt mit  $b_k = a_{\sigma(k)}$

**S 2.59** (Cauchy 1821). Wir nehmen an, dass es  $B \geq 0$  gibt, so dass

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m |a_{ij}| \leq B \quad \forall m \geq 0$$

Dann konvergieren die folgenden Reihen absolut:

$$S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall i \geq 0 \text{ und } U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall j \geq 0$$

sowie

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i \text{ und } \sum_{j=0}^{\infty} U_j$$

und es gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i = \sum_{j=0}^{\infty} U_j$$

Zudem konvergiert jede lineare Anordnung der Doppelreihe absolut, mit selbem Grenzwert

**D 2.60** Das **Cauchy Produkt** der Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \sum_{j=0}^{\infty} b_j$$

ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^n a_{n-j} b_j \right) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \dots$$

**S 2.62** Falls die Reihen

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \sum_{j=0}^{\infty} b_j$$

absolut konvergieren, so konvergiert ihr Cauchy Produkt und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^n a_{n-j} b_j \right) = \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} b_j \right)$$

**S 2.64** Sei  $f_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge. Wir nehmen an:

- 1  $f(j) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(j)$  existiert  $\forall j \in \mathbb{N}$
- 2 Es gibt eine Funktion  $g: \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty[$ , so dass
  - 2.1  $|f_n(j)| \leq g(j) \quad \forall j \geq 0, \forall n \geq 0$
  - 2.2  $\sum_{j=0}^{\infty} g(j)$  konvergiert

Dann folgt

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j)$$

**K 2.65** Für jedes  $z \in \mathbb{C}$  konvergiert die Folge  $((1 + \frac{z}{n})^n)_{n \geq 1}$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{z}{n} \right)^n = \exp(z)$$

3 Stetige Funktionen

3.1 Reellwertige Funktionen

- D 3.1** Sei  $f \in \mathbb{R}^d$
- 1  $f$  ist nach **oben beschränkt**, if  $f(D) \subseteq \mathbb{R}$  nach oben beschränkt ist
  - 2  $f$  ist nach **unten beschränkt**, if  $f(D) \subseteq \mathbb{R}$  nach unten beschränkt ist
  - 3  $f$  ist beschränkt, if  $f(D) \subseteq \mathbb{R}$  b ist

- D 3.2** Eine funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $D \subseteq \mathbb{R}$  ist
- 1 **monoton wachsend**, if  $\forall x, y \in D$   
$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$
  - 2 **streng monoton wachsend**, if  $\forall x, y \in D$   
$$x < y \implies f(x) < f(y)$$
  - 3 **monoton fallend**, if  $\forall x, y \in D$   
$$x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$$
  - 4 **streng monoton fallend**, if  $\forall x, y \in D$   
$$x < y \implies f(x) > f(y)$$
  - 5 **monoton**, falls  $f$  monoton wachsend oder monoton fallend
  - 6 **streng monoton**, falls  $f$  streng monoton wachsend/fallend

3.2 Stetigkeit

- D 3.4** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$ . Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist in  $x_0$  **stetig**, falls es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass für alle  $x \in D$  die Implikation
- $$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$
- D 3.5** Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist **stetig**, falls sie in jedem Punkt von  $D$  stetig ist.
- S 3.7** Sei  $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Funktion  $f$  ist genau dann in  $x_0$  stetig falls für jede Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  in  $D$  folgende implikation gilt:

- $$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0)$$
- K 3.8** Sei  $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  beide stetig in  $x_0$
- 1 Dann sind  $f + g, \lambda \cdot f, f \cdot g$  stetig in  $x_0$
  - 2 Falls  $g(x_0) \neq 0$  dann ist
- $$\frac{f}{g} : D \cap \{x \in D : g(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$
- $$x \rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$$
- stetig in  $x_0$

**D 3.9** Eine **polynomiale Funktion**  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Funktion der Form

- $$P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$$
- wobei :  $a_n \dots a_0 \in \mathbb{R}$ . Falls  $a_n \neq 0$  ist  $n$  der **Grad** von  $P$
- K 3.10** Polynomiale Funktionen sind auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig
- K 3.11** Seien  $P, Q$ , polynomiale Funktionen auf  $\mathbb{R}$  mit  $Q \neq 0$ . Seien  $x_1 \dots x_m$  die Nullstellen von  $Q$ . Dann ist

$$\frac{P}{Q} : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_m\} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)}$$

stetig

3.3 Der Zwischenwertsatz

- S 3.12** (Bolzano 1817). Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $a, b \in I$ . Für jedes  $c$  zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  gibt es ein  $z$  zwischen  $a$  und  $b$  mit  $f(z) = c$
- K 3.13** Sei  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  ein Polynom mit  $a_n \neq 0$  und  $n$  ungerade. Dann besitzt  $P$  mindestens eine Nullstelle in  $\mathbb{R}$
- Bem:** [3.14] für  $c > 0$  besitzt  $Q(x) = x^2 + c$  keine Nullstelle in  $\mathbb{R}$

3.4 Der Min-Max Satz

- D 3.16** Ein Intervall  $\subseteq \mathbb{R}$  ist **kompakt**, falls es von Form
- $$I = [a, b], \quad a \leq b$$
- ist
- L 3.17** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$  und  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$ . Dann sind
- $$|f|, \max(f, g), \min(f, g)$$
- stetig in  $x_0$
- L 3.18** Sei  $(x_n)_{n \geq 1}$  eine konvergente Folge in  $\mathbb{R}$  mit Grenzwert

- $$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}$$
- sei  $a \leq b$ . Falls  $\{x_n : n \geq 1\} \subseteq [a, b]$  folgt
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in [a, b]$$
- S 3.19** Sei  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf dem kompakten Intervall  $I$ . Dann gibt es  $u \in I$  und  $v \in I$  mit
- $$f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall x \in I$$
- Insbesondere ist  $f$  beschränkt

3.5 Der Satz über Umkehrabbildung

- S 3.20** Seien  $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$  zwei Teilmengen,  $f : D_1 \rightarrow D_2, g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen, sowie  $x_0 \in D_1$ . Falls  $f$  in  $x_0$  und  $g$  in  $f(x_0)$  stetig sind
- $$g \circ f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$$
- in  $x_0$  stetig
- K 3.21** Falls in Satz 3.20  $f$  auf  $D_1$  und  $g$  auf  $D_2$  stetig sind, so ist  $g \circ f$  auf  $D_1$  stetig
- S 3.22** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, streng monoton. Dann ist  $J := f(I) \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f^{-1} : J \rightarrow I$  ist stetig, streng monoton.

3.6 Die reelle Exponentialfunktion

- D Exponentialfunktion**
- $$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$
- S 3.24**  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv
- K 3.25**
- $$\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
- $$\exp(x) > 1 \quad \forall x > 0$$
- K 3.26**
- $$\exp(z) > \exp(y) \quad \forall z > y$$
- K 3.27**
- $$\exp(x) \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
- K 3.28** Der natürliche Logarithmus
- $$\ln : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

- Wir können den Logarithmus und die Exponentialfunktion benutzen, um allgemeine Potenzen zu definieren. Für  $x > 0$  und  $a \in \mathbb{R}$  beliebig definieren wir:
- $$x^a := \exp(a \ln x)$$
- Insbesondere  $x^0 = 1 \quad \forall x > 0$
- K 3.29**
- 1 Für  $a > 0$  ist
- $$]0, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[$$
- $$x \rightarrow x^a$$
- eine stetige, streng monoton wachsende Bijektion

- 2 Für  $a < 0$  ist
- $$]0, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[$$
- $$x \rightarrow x^a$$
- eine stetige, streng monoton fallende Bijektion
- 3  $\ln(x^a) = a \ln(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall x > 0$
  - 4  $x^a \cdot x^b = x^{a+b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$
  - 5  $(x^a)^b = x^{a \cdot b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$

3.7 Konvergenz v. Funktionenfolgen

- Eine Funktionenfolge ist eine Abbildung
- $$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^D$$
- $$n \rightarrow f(n)$$
- D 3.30** Die Funktionenfolge  $(f_n)_{n \geq 0}$  **konvergiert punktweise** gegen eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , falls für alle  $x \in D$  :
- $$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$
- D 3.32** (Weierstrass 1841) Die Folge
- $$f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$$
- konvergiert gleichmässig** in  $D$  gegen
- $$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$
- falls gilt  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \geq 1$ , so dass
- $$\forall n \geq N, \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

- In dieser Definition ist es wichtig, dass  $N$  nur von  $\epsilon$  abhängig ist und nicht von  $x \in D$ . Deswegen kommt die Bedingung  $\forall x \in D$  nach der Bedingung  $\exists N \geq 1$
- S 3.33** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktionenfolge bestehend aus (in  $D$ ) stetigen Funktionen die (in  $D$ ) gleichmässig gegen eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. Dann ist  $f$  (in  $D$ ) stetig
- D 3.34** Eine Funktionenfolge
- $$f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$$
- ist **gleichmässig konvergent**, falls für alle  $x \in D$  der Grenzwert

- $$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$
- existiert und die Folge  $(f_n)_{n \geq 0}$  gleichmässig gegen  $f$  konvergiert
- K 3.35** Die Funktionenfolge
- $$f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$$
- konvergiert genau dann gleichmässig in  $D$ , falls
- $$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \geq 1, \text{ so dass } \forall n, m \geq N \text{ und } \forall x \in D :$$
- $$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

**K 3.36** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Falls  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine gleichmässig konvergente Folge stetiger Funktionen ist, dann ist die Funktion

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

stetig

**D 3.37**  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge von Funktionen. Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$  konvergiert gleichmässig (in D), falls die durch

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

definierte Funktionenfolge gleichmässig konvergiert

**S 3.38** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und

$$f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$$

eine Folge stetiger Funktionen. Wir nehmen an

$$|f_n(x)| < c_n \quad \forall x \in D$$

und, dass  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  konvergiert. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

gleichmässig in D und deren Grenzwert

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

ist eine in D stetige Funktion

**D 3.39** Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

hat **positiven Konvergenzradius**, falls  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$  existiert. Der Konvergenzradius ist dann definiert als:

$$\rho = \begin{cases} +\infty & \text{falls } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{falls } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$$

**S 3.40** Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius  $\rho > 0$  und sei

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, |x| < \rho$$

Dann gilt:  $\forall 0 \leq r < \rho$  konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

gleichmässig auf  $[-r, r]$ , insbesondere ist

$f : ]-\rho, \rho[ \rightarrow \mathbb{R}$  stetig

## 3.8 Trigonometrische Funktionen

### D Sinus&Cosinus

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

**S 3.41**  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind stetige Funktionen

**S 3.42**

$$1 \quad \exp iz = \cos(z) + i \sin(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$2 \quad \cos(z) = \cos(-z) \text{ und } \sin(-z) = -\sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$3 \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$4 \quad \sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w) \\ \cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$$

$$5 \quad \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

**K 3.34**

$$\sin(2z) = 2 \sin(z) \cos(z)$$

$$\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z)$$

## 3.9 Die Kreiszahl $\pi$

**S 3.44** Die Sinusfunktion hat auf  $]0, +\infty[$  mindestens eine Nullstelle

$$\pi := \inf\{t > 0 : \sin t = 0\}$$

Dann gilt:

$$1 \quad \sin \pi = 0, \quad \pi \in ]2, 4[$$

$$2 \quad \forall x \in ]0, \pi[ : \sin x > 0$$

$$3 \quad e^{\frac{i\pi}{2}} = i$$

**K 3.45**

$$x \geq \sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} \quad \forall 0 \leq x \leq \sqrt{6}$$

**K 3.46**

$$1 \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{2i\pi} = 1$$

$$2 \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x), \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$3 \quad \sin(x + \pi) = -\sin(x), \\ \sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$4 \quad \cos(x + \pi) = -\cos(x), \\ \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$5 \quad \text{Nullstellen von Sinus} = \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\sin(x) > 0 \quad \forall x \in ]2k\pi, (2k+1)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(x) < 0 \quad \forall x \in ](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$6 \quad \text{Nullstellen von Cosinus} = \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \\ \cos(x) > 0 \\ \forall x \in ]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \cos(x) < 0 \\ \forall x \in ]-\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+2)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Für  $z \notin \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}$  definieren wir:

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$$

und für  $z \notin \pi \cdot \mathbb{Z}$ :

$$\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$$

## 3.10 Grenzwerte von Funktionen

**D 3.47**  $x_0 \in \mathbb{R}$  ist ein **Häufungspunkt** der Menge D falls  $\forall \delta > 0$ :

$$(\ ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \setminus \{x_0\} ) \cap D \neq \emptyset$$

**D 3.49** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$  ein Häufungspunkt von D. Dann ist  $A \in \mathbb{R}$  der Grenzwert von  $f(x)$  für  $x \rightarrow x_0$  bezeichnet mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

falls  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$  so dass

$$\forall x \in D \cap (\ ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \setminus \{x_0\} ) : |f(x) - A| < \epsilon$$

**Bem:** 3.50

1 Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0$  ein Häufungspunkt von D. Dann gilt  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  genau dann wenn für alle Folgen  $(a_n)_{n \geq 1}$  in  $D \setminus \{x_0\}$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$$

folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A$$

2 Sei  $x_0 \in D$ . Dann ist f stetig in  $x_0$  genau dann, falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

3 Falls  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  existieren, so folgt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

4 Sei  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f \leq g$ . Dann folgt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

falls beide Grenzwerte existieren

5 Falls  $g_1 \leq f \leq g_2$  und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g_2(x)$$

dann existiert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x)$$

**S 3.52** Seien  $D, E \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0$  Häufungspunkt von D,  $f : D \rightarrow E$  eine Funktion. Wir nehmen an, dass

$$y_0 := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

existiert und  $y_0 \in E$ . Falls  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $y_0$  folgt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0)$$

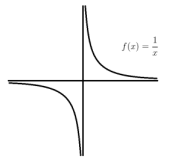
## 3.11 Linksseitige und rechtsseitige Grenzwerte

Betrachten wir zum Beispiel

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \frac{1}{x}$$

Dann wird für  $x > 0$ , x beliebig nahe an 0,  $\frac{1}{x}$  beliebig positiv gross und für  $x < 0$ , x beliebig nahe an 0,  $\frac{1}{x}$  beliebig negativ "gross". In beiden Fällen hat



$\frac{1}{x}$  ein einfaches Verhalten. Im Fall  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$f : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow x^a$$

ist f auf  $]0, \infty[$  definiert. Falls  $a > 0$  werden wir sehen, dass

$$\lim_{x \in ]0, \infty[ \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Wir nehmen an,  $x_0$  ist Häufungspunkt von  $D \cap ]x_0, +\infty[$ ; das heisst ein rechtsseitiger Häufungspunkt. Falls der Grenzwert der eingeschränkten Funktion

$$f|_{D \cap ]x_0, +\infty[}$$

für  $x \rightarrow x_0$  existiert, wird er mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

bezeichnet und nennt sich rechtsseitiger Grenzwert von f bei  $x_0$ .



Wir erweitern diese Definition auf:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x \in D \cap ]x_0, x_0 + \delta[: f(x) > \frac{1}{\epsilon}$$

und analog:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$

falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x \in D \cap ]x_0, x_0 + \delta[: f(x) < -\frac{1}{\epsilon}$$

Linksseitige Häufungspunkt und Grenzwerte werden analog definiert. Mit diesen Definitionen gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

## 4 Differenzierbare Funktionen

### 4.1 Die Ableitung

**D** 4.1 Sei  $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D$  ein Häufungspunkt von  $D$

$f$  ist in  $x_0$  **Differenzierbar**, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Ist dies der Fall, wird der Grenzwert mit  $f'(x_0)$  bezeichnet **Bem:** 4.2 Es ist oft von Vorteil in der Definition von  $f'(x_0), x = x_0 + h$  zu setzen, so dass:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

**S** 4.3 (Weierstrass 1861). Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in D$  Häufungspunkt von  $D$ . Folgende Aussagen sind äquivalent:

- 1  $f$  ist in  $x_0$  differenzierbar.
- 2 Es gibt  $c \in \mathbb{R}$  und  $r : D \rightarrow D$  mit:

$$2.1 \quad f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$$

$$2.2 \quad r(x_0) = 0 \text{ und } r \text{ ist stetig in } x_0$$

Falls dies zutrifft ist  $c = f'(x_0)$  eindeutig bestimmt

**S** 4.4 Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann in  $x_0$  differenzierbar, falls es eine Funktion  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  gibt die stetig in  $x_0$  ist und so, dass

$$f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0) \quad \forall x \in D$$

In diesem Fall gilt  $\phi(x_0) = f'(x_0)$  **K** 4.5 Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D$  ein Häufungspunkt von  $D$ . Falls  $f$  in  $x_0$  differenzierbar ist, so ist  $f$  stetig in  $x_0$

**D** 4.7  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist in **D differenzierbar**, falls für jeden Häufungspunkt  $x_0 \in D, f$  in  $x_0$  differenzierbar ist. **S** 4.9 Sei  $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$  ein Häufungspunkt von  $D$  und  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  differenzierbar. Dann gelten

1  $f + g$  ist in  $x_0$  differenzierbar und

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2  $f \cdot g$  ist in  $x_0$  differenzierbar und  $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

3 Falls  $g(x_0) \neq 0$  ist  $\frac{f}{g}$  in  $x_0$  differenzierbar und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

**S** 4.11 Seien  $D, E \subseteq \mathbb{R}$  und sei  $x_0 \in D$  ein Häufungspunkt. Sei  $f : D \rightarrow E$  eine in  $x_0$  differenzierbare Funktion so dass  $y_0 := f(x_0)$  ein Häufungspunkt von  $E$  ist, und sei  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  eine in  $y_0$  differenzierbare Funktion. Dann ist  $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

**K** 4.12 Sei  $f : D \rightarrow E$  eine bijektive Funktion,  $x_0 \in D$  ein Häufungspunkt; wir nehmen an  $f$  ist in  $x_0$  differenzierbar und  $f'(x_0) \neq 0$ ; zudem nehmen wir an  $f^{-1}$  ist in  $y_0 = f(x_0)$  stetig. Dann ist  $y_0$  Häufungspunkt von  $E, f^{-1}$  ist in  $y_0$  differenzierbar und

$$f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

### 4.2 Zentrale Sätze über die Ableitung

**D** 4.14 Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D$

1  $f$  besitzt ein lokales Maximum in  $x_0$  falls es  $\delta > 0$  gibt mit:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \cap D$$

2  $f$  besitzt ein lokales Minimum in  $x_0$  falls es  $\delta > 0$  gibt mit:

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \cap D$$

3  $f$  besitzt ein lokales Extremum in  $x_0$  falls es entweder ein lokales Minimum oder Maximum von  $f$  ist.

**S** 4.15 Sei  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in ]a, b[$ . Wir nehmen an,  $f$  ist in  $x_0$  differenzierbar

1 Falls  $f'(x) > 0$  gibt es  $\delta > 0$  mit

$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in ]x_0, x_0 + \delta[$$

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0[$$

2 Falls  $f'(x_0) < 0$  gibt es  $\delta > 0$  mit

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in ]x_0, x_0 + \delta[$$

$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0[$$

3 Falls  $f$  in  $x_0$  ein lokales Extremum besitzt, folgt  $f'(x_0) = 0$

**S** 4.16 (Rolle 1690). Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $]a, b[$  differenzierbar. Erfüllt sie  $f(a) = f(b)$  so gibt es  $\xi \in ]a, b[$  mit

$$f'(\xi) = 0$$

**S** 4.17 (Lagrange 1797) Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $f$  in  $]a, b[$  differenzierbar. Dann gibt es  $\xi \in ]a, b[$  mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

**K** 4.18 Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $]a, b[$  differenzierbar

1 Falls

$$f'(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in ]a, b[ \text{ ist } f \text{ konstant}$$

2 Falls  $f'(\xi) = g'(\xi) \quad \forall \xi \in ]a, b[$

gibt es  $c \in \mathbb{R}$  mit  $f(x) = g(x) + c \quad \forall x \in [a, b]$ .

3 Falls  $f'(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in ]a, b[$

ist  $f$  auf  $[a, b]$  monoton wachsend

4 Falls  $f'(\xi) > 0 \quad \forall \xi \in ]a, b[$

ist  $f$  auf  $[a, b]$  strikt monoton wachsend

5 Falls  $f'(\xi) \leq 0 \quad \forall \xi \in ]a, b[$

ist  $f$  auf  $[a, b]$  monoton fallend

6 Falls  $f'(\xi) < 0 \quad \forall \xi \in ]a, b[$

ist  $f$  auf  $[a, b]$  strikt monoton fallend

7 Falls es  $M > 0$  gibt mit

$$|f'(\xi)| \leq M \quad \forall \xi \in ]a, b[$$

dann folgt  $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ :

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M |x_1 - x_2|$$

**S** 4.22 (Cauchy). Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $]a, b[$  differenzierbar. Dann gibt es  $\xi \in ]a, b[$  mit

$$g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a))$$

Falls  $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in ]a, b[$  folgt

$$g(a) \neq g(b)$$

und

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Randnotiz: Man erhält den Satz von Lagrange mit

$g(x) = x$  **S** 4.23 (l'Hospital 1696) Seien  $f, g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit  $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in ]a, b[$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$$

und

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$$

existiert, folgt

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**Bem:** 4.24 Der Satz gilt auch

- falls  $b = +\infty$
- falls  $\lambda = +\infty$
- falls  $x \rightarrow a^+$

**D** 4.26 Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

1  $f$  ist **konvex** (auf  $I$ ) falls es für alle  $x \leq y, x, y \in I$  und  $\lambda \in [0, 1]$   $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$  gilt

2  $f$  ist **streng konvex** falls für alle  $x < y, x, y \in I$  und  $\lambda \in ]0, 1[$   $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$

**Bem:** 4.27 Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  konvex. Ein einfacher Induktionsbeweis zeigt, dass für alle  $n \geq 1, \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq I$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  in  $[0, 1]$  mit  $\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) = 1$

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

**L** 4.28 Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige Funktion. Die Funktion  $f$  ist genau dann konvex, falls für alle  $x_0 < x < x_1$  in  $I$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

gilt.  $f$  ist streng konvex wenn  $<$  gilt in obiger Ungleichung **S** 4.29 Sei  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  in  $]a, b[$  differenzierbar. Die Funktion  $f$  ist genau dann (streng) konvex, falls  $f'$  (streng) monoton wachsend ist. **K** 4.30 Sei  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar in  $]a, b[$ . Die Funktion  $f$  ist (streng) konvex, falls  $f'' \leq 0$  (bzw  $f'' > 0$ ) auf  $]a, b[$

### 4.3 Höhere Ableitungen

**D** 4.32 Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ , so dass jedes  $x_0 \in D$  Häufungspunkt der Menge  $D$  ist. Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $D$  und  $f'$  ihre Ableitung; wir setzen  $f^{(1)} = f'$

1 Für  $n \geq 2$  ist  $f$  **n-mal differenzierbar in D** falls  $f^{(n-1)}$  in  $D$  differenzierbar ist. Dann ist  $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$  und nennt sich die  $n$ -te Ableitung von  $f$

2 Die Funktion  $f$  ist **n-mal stetig differenzierbar in D**, falls sie  $n$ -mal differenzierbar ist und falls  $f^{(n)}$  in  $D$  stetig ist

3 Die Funktion  $f$  ist in  $D$  **glatt**, falls sie  $\forall n \geq 1, n$ -mal differenzierbar ist.

**Bem:** 4.33 Es folgt aus Korollar 4.5, dass für  $n \geq 1$ , eine  $n$ -mal differenzierbare Funktion  $(n-1)$ -mal differenzierbar ist. **S** 4.34 Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  wie in Def. 4.32,  $n \geq 1$  und  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -mal differenzierbar in  $D$

1  $f + g$  ist  $n$ -mal differenzierbar und

$$(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

2  $f \cdot g$  ist n-mal differenzierbar und

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

**S** 4.36 Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  wie in Def. 4.32,  $n \geq 1$  und  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  n-mal differenzierbar in  $D$ . Falls  $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$ , ist  $\frac{f}{g}$  in  $D$  n-mal differenzierbar

**S** 4.37 Seien  $E, D \subseteq \mathbb{R}$  Teilmengen für die jeder Punkt Häufungspunkt ist. Seien  $f : D \rightarrow E$  und  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  n-mal differenzierbar. Dann ist  $g \circ f$  n-mal differenzierbar und

$$(g \circ f)^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n A_{n,k}(x) (g^{(k)} \circ f)(x)$$

wobei  $A_{n,k}$  ein Polynom in den Funktionen  $f', f^{(2)}, \dots, f^{(n+1-k)}$  ist

## 4.4 Potenzreihen & Taylor Approx.

**S** 4.39 Seien  $f_n : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktionsfolge wobei  $f_n$  einmal in  $]a, b[$  stetig differenzierbar ist  $\forall n \geq 1$ . Wir nehmen an, dass sowohl die Folge  $(f_n)_{n \geq 1}$  wie  $(f'_n)_{n \geq 1}$  gleichmäßig in  $]a, b[$  konvergieren mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = p$ . Dann

ist  $f$  stetig differenzierbar und  $f' = p$  **S** 4.40 Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  eine Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius  $\rho > 0$ . Dann ist

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

auf  $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$  differenzierbar und

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (x - x_0)^{k-1}$$

für alle  $x \in ]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$  **K** 4.41 Unter der Voraussetzung von Satz 4.39 ist  $f$  auf  $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$  glatt und

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=h}^{\infty} c_k \frac{k!}{(k-j)!} (x - x_0)^{k-j}$$

Insbesondere ist

$$c_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}$$

**S** 4.43 Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $]a, b[$  (n+1)-mal differenzierbar. Für jedes  $a < x \leq b$  gibt es  $\xi \in ]a, x[$  mit:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

**K** 4.44 (Taylor Approximatio) Sei  $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $]c, d[$  (n+1)-mal differenzierbar. Sei  $c < a < d$ . Für alle  $x \in [c, d]$  gibt es  $\xi$  zwischen  $x$

und so dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

**K** 4.45 Sei  $n \geq 0, a < x_0 < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  in  $]a, b[$  (n+1)-mal stetig differenzierbar. Annahme:  $f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$

- 1 Falls  $n$  gerade ist und  $x_0$  lokale Extremstelle, folgt  $f^{(n+1)}(x_0) = 0$
- 2 Falls  $n$  ungerade ist und  $f^{(n+1)}(x_0) > 0$  so ist  $x_0$  eine strikt lokale Minimalstelle
- 3 Falls  $n$  ungerade ist und  $f^{(n+1)}(x_0) < 0$  so ist  $x_0$  eine strikt lokale Maximalstelle

**K** 4.46 Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $]a, b[$  zweimal stetig differenzierbar. Sei  $x < x_0 < b$ . Annahme:  $f'(x) = 0$

- 1 Falls  $f^{(2)}(x_0) > 0$  ist  $x_0$  strikt lokale Minimalstelle
- 2 Falls  $f^{(2)}(x_0) < 0$  ist  $x_0$  strikt lokale Maximalstelle

## 5 Das Riemann Integral

### 5.1 Integrabilitätskriterien

**D** 5.1 Eine **Partition** von  $I$  ist eine endliche Teilmenge  $P \subseteq [a, b]$  wobei  $\{a, b\} \subseteq P$  **L** 5.2

- 1 Sei  $P'$  eine Verfeinerung von  $P$ , dann gilt:

$$s(f, P) \leq s(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P)$$

- 2 Für beliebige Partitionen  $P_1, P_2$  gilt:

$$s(f, P_1) \leq S(f, P_2)$$

**D** 5.3 Eine beschränkte Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist **Riemann integrierbar** falls

$$s(f) = S(f)$$

In diesem Fall bezeichnen wir den gemeinsamen Wert von  $s(f)$  und  $S(f)$  mit

$$\int_a^b f(x) dx$$

**S** 5.4 Eine beschränkte Funktion ist genau dann integrierbar, falls

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P \in \mathcal{P}(I)$$

mit  $S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$  **S** 5.8 (Du Bois-Reymond 1875) Eine beschränkte Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann integrierbar, falls  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$  so dass

$$\forall P \in \mathcal{P}_\delta(I), S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$$

**K** 5.9 Die beschränkte Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann integrierbar mit  $A := \int_a^b f(x) dx$  falls:

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$  so dass  $\forall P \in \mathcal{P}(I)$  Partition mit  $\delta(P) < \delta$  und  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  mit  $\mathcal{E}_i \in [x_{i-1}, x_i], P = \{x_0, \dots, x_n\}$

$$\left| A - \sum_{i=1}^n f(\mathcal{E}_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \epsilon$$

### 5.2 Integrierbare Funktionen

**S** 5.10 Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt, integrierbar und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann sind  $f + g, \lambda \cdot f, f \cdot g, |f|, \max(f, g), \min(f, g)$  und  $\frac{f}{g}$  (falls  $|g(x)| \geq \beta > 0 \quad \forall x \in [a, b]$ ) integrierbar **Bem:** 5.11 Sei  $\phi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Dann ist

$$\sup_{x, y \in [c, d]} |\phi(x) - \phi(y)| = \sup_{x \in [c, d]} \phi(x) - \inf_{x \in [c, d]} \phi(x)$$

**K** 5.12 Seien  $P_i$  Polynome und  $[a, b]$  ein Intervall in dem  $Q$  keine Nullstelle besitzt. Dann ist

$$[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)}$$

integrierbar **D** 5.13 Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$  ist in  $D$  **gleichmäßig stetig**, falls  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in D :$

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

**S** 5.15 (Heine 1872). Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in dem kompakten Intervall  $[a, b]$ . Dann ist  $f$  in  $[a, b]$  gleichmäßig stetig. **S** 5.16 Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

Dann ist  $f$  integrierbar **S** 5.17 Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monoton. Dann ist  $f$  integrierbar **Bem:** 5.18 Seien  $a < b < c$  und  $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt mit  $f|_{[a, b]}$  und  $f|_{[b, c]}$  integrierbar. Dann ist  $f$  integrierbar und

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

**S** 5.19 Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall mit Endpunkten  $a, b$  sowie  $f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt integrierbar und  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x) dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x) dx$$

### 5.3 Ungleichungen und Mittelwertsatz

**S** 5.20 Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt integrierbar, und

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Dann folgt:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

**K** 5.21 Falls  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt integrierbar, folgt

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

**S** 5.22 (Cauchy-Schwarz Ungleichung 1821) Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt integrierbar. Dann gilt:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}$$

**S** 5.23 (Mittelwertsatz, Cauchy 1821) Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gibt es  $\xi \in [a, b]$  mit:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$$

**S** 5.25 (Cauchy 1821) Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  wobei  $f$  stetig,  $g$  beschränkt integrierbar mit  $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ . Dann gibt es  $\xi \in [a, b]$  mit

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$

### 5.4 Fundamentalsatz

**S** 5.26 Seien  $a < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Die Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad a \leq x \leq b$$

ist in  $[a, b]$  stetig differenzierbar und

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

**D** 5.27 Sei  $a < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Eine Funktion  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heisst **Stammfunktion** von  $f$ , falls  $F$  (stetig) differenzierbar in  $[a, b]$  ist und  $F' = f$  in  $[a, b]$  gilt **S** 5.28 (Fundamentalsatz der Differentialrechnung) Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gibt es eine Stammfunktion  $F$  von  $f$ , die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist und es gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

**S** 5.30 (Partielle Integration) Seien  $a < b$  reelle Zahlen und  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

**S** 5.31 (Substitution) Sei  $a < b, \phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall mit  $\phi([a, b]) \subseteq I$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann gilt:

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t) dt$$

**K** 5.33 Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

1 Seien  $a, b, c \in \mathbb{R}$  so dass das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten  $a+c$ ,  $b+c$  in  $I$  enthalten ist. Dann gilt:

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x) \, dx = \int_a^b f(t+c) \, dt$$

2 Seien  $a, b, c \in \mathbb{R}$  mit  $c \neq 0$  so dass das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten  $ac$ ,  $bc$  in  $I$  enthalten ist. Dann gilt:

$$\int_a^b f(ct) \, dt = \frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} f(x) \, dx$$

### 5.5 Integration konvergenter Reihen

**S** 5.34 Sei  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge von beschränkten, integrierbaren Funktionen die gleichmässig gegen eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. Dann ist  $f$  beschränkt integrierbar und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx$$

**K** 5.35 Sei  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge beschränkter integrierbarer Funktionen so dass

$$\sum_{n=0}^\infty f_n$$

auf  $[a, b]$  gleichmässig konvergiert. Dann gilt :

$$\sum_{n=0}^\infty \int_a^b f_n(x) \, dx = \int_a^b \left( \sum_{n=0}^\infty f_n(x) \right) \, dx$$

**K** 5.36 Sei

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty c_n x^k$$

eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius  $\rho > 0$ . Dann ist für jedes  $0 \leq r < \rho$ ,  $f$  auf  $[-r, r]$  integrierbar und es gilt  $\forall x \in ]-\rho, \rho[$ :

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$$

### 5.6 Euler-McLaurin Summationsformel

**D** 5.40  $\forall k \geq 0$  ist das  $k$ 'te Bernoulli Polynom  $B_k(x) = k!P_k(x)$  **D** 5.41 Sei  $B_0 = 1$  für alle  $k \geq 2$  definieren wir  $B_{k-1}$  rekursiv:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} B_i = 0$$

**S** 5.42

$$B_k(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B_i x^{k-i}$$

**Bem:** 5.43 Für  $k \geq 2$ :

$$\begin{aligned} B_k(1) &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B_i \\ &= B_k \quad (\text{nach 5.41}) \\ &= B_k(0) \quad (\text{nach Satz 5.42}). \end{aligned}$$

Zur Aussage der Summationsformel definieren wir für  $k \geq 1$

$$\tilde{B}_k : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

als

$$\tilde{B}_k(x) = \begin{cases} B_k(x) & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ B_k(x-n) & \text{für } n \leq x < n+1 \text{ wobei } n \geq 1 \end{cases}$$

**S** 5.44 Sei  $f : [0, n] \rightarrow \mathbb{R}$   $k$ -mal stetig differenzierbar,  $k \geq 1$ . Dann gilt :

1 Für  $k = 1$ :

$$\sum_{i=1}^n f(i) = \int_0^n f(x) \, dx + \frac{1}{2}(f(n)-f(0)) + \int_0^n \tilde{B}_1(x) f'(x) \, dx$$

2 Für  $k \geq 2$ :

$$\sum_{i=1}^n f(i) = \int_0^n f(x) \, dx + \frac{1}{2}(f(n)-f(0)) + \sum_{j=2}^k \frac{(-1)^j B_j(0)}{j!} f^{(j)}(0) + R_k$$

wobei

$$\tilde{R}_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^n \tilde{B}_k(x) f^{(k)}(x) \, dx$$

### 5.7 Stirling'sche Formel

**S** 5.47

$$n! = \frac{\sqrt{2\pi n} n^n}{e^n} \cdot \exp\left(\frac{1}{12n} + R_3(n)\right)$$

wobei

$$|R_3(n)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216 \cdot \frac{1}{n^2}} \quad \forall n \geq 1$$

**L** 5.48  $\forall m \geq n+1 \geq 1$ :

$$|R_3(m, n)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

### 5.8 Uneigentliche Integrale

**D** 5.49 Sei  $f : [a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und integrierbar auf  $[a, b]$  für alle  $b > a$ . Falls

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \, dx$$

existiert, bezeichnen wir den Grenzwert mit

$$\int_a^\infty f(x) \, dx$$

und sagen, dass  $f$  auf  $[a, +\infty[$  integrierbar ist.

**L** 5.51 Sei  $f : [a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und integrierbar auf  $[a, b]$   $\forall b > a$

1 Falls  $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \geq a$  und  $g(x)$  ist auf  $[a, \infty[$  integrierbar, so ist  $f$  auf  $[a, \infty[$  integrierbar

2 Falls  $0 \leq g(x) \leq f(x)$  und  $\int_a^\infty$  divergiert, so divergiert auch  $\int_a^\infty f(x) \, dx$

**S** 5.53 (McLaurin 1742) Sei  $f : [1, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  monoton fallend. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^\infty f(n)$$

konvergiert genau dann, wenn

$$\int_1^\infty f(x) \, dx$$

konvergiert **D** 5.56 In dieser Situation ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar falls

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) \, dx$$

existiert, in diesem Fall wird der Grenzwert mit  $\int_a^b f(x) \, dx$  bezeichnet

### 5.9 Die Gamma Funktion

**D** 5.59 Für  $s \geq 0$  definieren wir

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} \, dx$$

**S** 5.60(Bohr-Mollerup)

1 Die Gamme Funktion erfüllt die Relationen

- (a)  $\Gamma(1) = 1$
- (b)  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \forall s > 0$
- (c)  $\Gamma$  ist logarithmisch, das heisst

$$\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}$$

für alle  $x, y > 0$  und  $0 \leq \lambda \leq 1$

2 Die Gamme Funktion ist die einzige Funktion  $0, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[$  die (a), (b) und (c) erfüllt. Darüber hinaus gilt:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)} \quad \forall x > 0$$

**L** 5.61 Sei  $\rho > 1$  und  $q > 1$  mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Dann gilt  $\forall a, b \geq 0$

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

**S** 5.62(Hölder Ungleichung). Seien  $\rho > 1$  und  $q > 1$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Für alle  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig gilt:

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

### 5.10 Das unbestimmte Integral