1 Grundlagen

S 1.1 Es gibt keine Gleichung der Form

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = 0$$

mit $a_i \in \mathbb{Q}$, so dass $x = \pi$ eine Lösung ist

S 1.2 R ist ein kommutativer, angeordneter Körper, der ordnungsvollständig ist

D Axiome der Addition

A1 Assoziativität $x + (y + z) = (x + y) + z$

A2 Neutrales Element $x + 0 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

A3 Inverses Element $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$

A4 Kommutativität $x + z = z + x \quad \forall x, z \in \mathbb{R}$

D Axiome der Multiplikation

M1 Assoziativität $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad \forall x, y, z \in R$

M2 Neutrales Element $x \cdot 1 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

M3 Inverses Element $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0\ \exists y \in \mathbb{R}$: $x \cdot y = 1$

M4 Kommutativität $x \cdot z = z \cdot x \quad \forall x, z \in \mathbb{R}$

D Distributivität

D1 Distributivität $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

D Ordnungsaxiome

O1 Reflexivität $x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

O2 Transitivität $x \leq y$ and $y \leq z \implies x \leq z$

O3 Antisymmetrie $x \leq y$ and $y \leq x \implies x = y$

O4 Total $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$

D Kompatibilität

K1 $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \implies x + z \leq y + z$

K2 $\forall x \geq 0, \forall y \geq 0 : x \cdot y \geq 0$

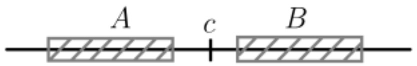
D Ordnungsvollständigkeit

Seien A,B $\subseteq$ von $\mathbb{R}$

i $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$

ii $\forall a \in A$ and $\forall b \in B : a \leq b$

Dann gibt es $c \in \mathbb{R}$, dass $\forall \in A : a \leq c$ und $\forall b \in B : c \leq b$



K 1.6

1 Additive und multiplikate Inverse eindeutig

2 $0 \cdot x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3 $(-1) \cdot x = -x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4 $y \geq 0 \Leftrightarrow (-y) \leq 0$

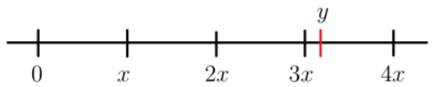
5 $y^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

6 $x \leq y$ and $u \leq v \implies x + u \leq y + v$

7 $0 \leq x \leq y$ und $0 \leq u \leq v \implies x \cdot u \leq y \cdot v$

K 1.7(Archimedisches Prinzip)

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$.Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $y \leq n \cdot x$



S 1.8

Für jedes $t \geq 0, t \in \mathbb{R}$ hat $x^2 = t$ eine Lösung in $\mathbb{R}$

D 1.9 Seien $x, y \in \mathbb{R}$

(i) $\max\{x,y\} = \begin{cases} x & \text{falls} \quad y \leq x \\ y & \text{falls} \quad x \leq y \end{cases}$

(ii) $\min\{x,y\} = \begin{cases} y & \text{falls} \quad y \leq x \\ x & \text{falls} \quad x \leq y \end{cases}$

(iii) Der Absolutbetrag einer Zahl $x \in \mathbb{R}$: $|x| = max\{x, -x\}$

S 1.10

(i) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(ii) $|xy| = |x|\,|y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(iv) $|x + y| \geq |x| - |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

S 1.11(Young'sche Ungleichung)

$\forall \epsilon > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$2\,|xy| \leq \epsilon x^2 + \frac{1}{\epsilon} y^2$$

1.1 Infimum und Supremum

D 1.12 Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge.

1) $c \in \mathbb{R}$ ist **obere Schranke** if $\forall a \in A : a \leq c$

2) $c \in \mathbb{R}$ ist **untere Schranke** if $\forall a \in A : c \leq a$

3) $m \in \mathbb{R}$ heisst ein **Maximum** von A if $m \in A$ und m eine obere Schranke von A ist.

4) $m \in \mathbb{R}$ heisst ein **Minimum** von A if $m \in A$ und m eine untere Schranke von A ist.

S 1.15 . Sei $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

1) Sei A nach oben beschränkt. Dann gibt es eine kleinste obere Schranke:

$$c := \sup A \quad \textbf{(Supremum von A)}$$

2) Sei A nach unten beschränkt. Dann gibt es eine grösste untere Schranke:

$$d := \inf A \quad \textbf{(Infimum von A)}$$

Eigenschaften von Supremum und Infimum

- $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$
- $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$
- $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$
- $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$

K 1.16 Seien $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen von $\mathbb{R}$

1 Falls B nach oben beschränkt ist, $\sup A \leq \sup B$

2 Falls B nach unten beschränkt ist, $\inf B \leq \inf A$

B 1.17

1. $A = [1, 2[: supA = 2, infA = 1$
2. $A = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ ist nicht nacht oben beschränkt (harmonische Reihe)
3. $A = \{1 - \frac{1}{3}, (1 - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{7}), (1 - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{7}) + (\frac{1}{9} - \frac{1}{11}), \ldots\}$ Dann gilt: $\sup A = \frac{\pi}{4}$(Leibniz).

D 1.18 Kardinalität

(i) Zwei Mengen X,Y heissen gleichmächtig if eine Bijection $f : X \to Y$ existiert

(ii) Eine Menge ist endlich, wenn $X = \emptyset$ or $\exists n \in \mathbb{N}$ so dass$\{1, 2, \ldots, n\}$gleichmächtig wie X

(iii) Eine Menge X ist abzählbar if endlich oder gleichmächtig wie $\mathbb{N}$

S 1.20 (Cantor) $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar

2 Folgen und Reihen

D 2.1 Eine **Folge** ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}(\mathbb{N}^* = \mathbb{N}/\{0\})$$

2.1 Grenzwert einer Folge

L 2.3 $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge, es gibt höchstens eine Zahl $l \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:

$\forall \epsilon > 0$ ist Menge $\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin]l - \epsilon, l + \epsilon[\}$ endlich

D 2.4 $(a_n)_{n\geq 1}$ ist **konvergent**, falls $l \in \mathbb{R}$ so dass $\forall \epsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N}^* : a_n \notin]l - \epsilon, l + \epsilon[\}$ endlich ist. Dieses l ist der **Limes** der Folge.

Bem: [2.5] Jede Konvergente Folge ist beschränkt

L 2.6 Folgende Aussagen sind äquivalent

1 $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen $l = \lim_{n\to\infty} a_n$

2 $\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 1$ that

$$|a_n - l| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

B 2.7 Sei $a_n = \frac{n}{n+1}, n \geq 1$.

Dann gilt: $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

Begründung: $a_n - 1 = \frac{n}{n+1} - 1 = \frac{-1}{n+1}$. Es folgt $|a_n - 1| = \frac{1}{n+1}$ Sei $\epsilon > 0$; Nach Archimedes gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N+1} < \epsilon$.

Dann folgt $\forall n \geq N$:

$$|a_n - 1| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \epsilon$$

S 2.8 Seien $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergent Folgen mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim_{n\to\infty} b_n$

1 $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ ist konvergent und $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

2 $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ ist konvergent und $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

3 if $b_n \neq 0\ \forall n \geq 1, b \neq 0$ $(\frac{a_n}{b_n})_{n\geq 1}$ konvergent, $\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$

4 Falls existiert K ≥ 1 mit $a_n \leq b_n\ \forall n \geq K \implies a \leq b$

B 2.9 $b \in \mathbb{Z} : \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^b = 1$

Das folgt aus $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ und wiederholter Anwendung von Satz 2.8 (2) & (3)

2.2 Satz von Weierstrass

D 2.10

1 $(a_n)_{n\geq 1}$ ist **monoton wachsend** if

$$a_n \leq a_{n+1}\ \forall n \geq 1$$

2 $(a_n)_{n\geq 1}$ ist **monoton fallend** if

$$a_{n+1} \leq a_n\ \forall n \geq 1$$

S 2.11 (Weierstrass)

- Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$ nach
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}$$
- Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$ nach
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq 1\}$$

B 2.12 Sei $a \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq q < 1$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} n^a q^n = 0$. Sei $x_n = n^a q^n$ dann folgt

$$x_{n+1} = (n+1)^a q^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^a q \cdot n^a q^n =$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \cdot q \cdot x_n$$

Also:

$$x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \cdot q \cdot x_n$$

Da $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^a = 1$ gibt es ein n_0, so dass $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^a < \frac{1}{q}\ \forall n \geq n_0$. Es folgt: Da $x_n > 0\ \forall n \geq 1$

ist die Folge nach unten beschränkt und für $n \geq n_0$ monoton fallend. Sei

$$l = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \cdot qx_n$$

$$= q \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = q \cdot l$$

Also $(1-q)\cdot l = 0$ woraus l=0 folgt.

Bem: [2.13] Oben haben wir folgede Tatsache benützt: Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann ist die durch

$$b_n := a_{n+k} \quad n \geq 1$$

definierte Folge konvergent und

$$lim_{n\to\infty} b_n = a$$

B 2.14 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

B 2.15 Die Folge $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n \geq 1$ konvergiert. Der Limes ist

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

die Eulersche Konstante $e \approx 2.71828$

L 2.16 (Bernoulli Ungleichung)

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x \quad \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$$

B 2.17 Sei $c > 1$. Wir definieren $(a_n)_{n\geq 1}$ durch:

$$a_1 = c, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \quad n \geq 1$$

Dann existiert $a := \lim_{n\to\infty} a_n > 0$ und es gilt $a^2 = c$

1. $(a_n)_{n\geq 1}$ ist monoton fallend.

   $$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a_n} - a_n\right) = a_n + \left(\frac{c - a_n^2}{2a_n}\right)$$

   Wir zeigen zunächst: $a_n^2 \geq c \quad \forall n \geq 1$ Für $n = 1: a_1^2 = c^2 > c$, da $c > 1$. Und für $n \geq 1$:

   $$a_{n+1}^2 = a_n^2 + (c - a_n^2) + \left(\frac{c - a_n^2}{2a_n}\right)^2 =$$

   $$c + \left(\frac{c - a_n^2}{2a_n}\right)^2 \geq c$$

   Aus $a_n^2 \geq c$ folgt:

   $$a_{n+1} = a_n + \left(\frac{c - a_n^2}{2a_n}\right) \leq a_n$$

2. Es ist klar: $a_n > 0 \quad \forall n \geq 1$ Aus $a_n^2 \geq c > 1$ folgt dann $a_n \geq 1 \; \forall n \geq 1$
3. Nach Weierstrass: $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, dann folgt aus (2) $a \geq 1 \& a \neq 0$

   $$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{c}{\lim_{n\to\infty} a_n}\right)$$

   $$= \frac{1}{2}\left(a + \frac{c}{a}\right) \implies a^2 = c$$

2.3 Limes inferior, Limes superior

Eine wichtige Anwendung des Satzes von Weierstrass ist, wie man mit jeder beschränkten Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ zwei monotone Folgen $(b_n)_{n\geq 1}$ und $(c_n)_{n\geq 1}$ definieren kann, welche dann einen Grenzwert besitzen.

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n = \lim_{n\to\infty} b_n, (b_n = inf\{a_k : k \geq n\})$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = \lim_{n\to\infty} c_n, \; (c_n = sup\{a_k : k \geq n\})$$

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n \leq \lim_{n\to\infty} \sup a_n$$

B 2.18 $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}, \; n \geq 1$.
Dann: $b_n = -1$ und $c_n = 1 + \frac{1}{n_g}$ wobei n_g die kleinste gerade Zahl $\geq n$ bezeichnet. Also:
$\lim_{n\to\infty} \inf a_n = -1$ und $\lim_{n\to\infty} \sup a_n = +1$

2.4 Cauchy Kriterium

Wie sieht man einer Folge an, ob sie konvergent ist, ohne ihren Grenzwert zu kennen? Dafür wird das Cauchy Kriterium angewendet.

L 2.19 $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert if only if $(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt und

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n = \lim_{n\to\infty} \sup a_n$$

S 2.20 (Cauchy Kriterium) .

Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist genau dann konvergent wenn

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \geq 1 \text{ so dass } |a_n - a_m| < \epsilon \; \forall n, m \geq N$$

2.5 Satz von Bolzano-Weierstrass

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

D 2.21 Ein abgeschlossenes Intervall ist $I \subseteq \mathbb{R}$

1 $[a, b] \quad a \leq b, \; a, b \in \mathbb{R}$

2 $[a, +\infty[\; a \in \mathbb{R}$

3 $]-\infty, a] \; a \in \mathbb{R}$

4 $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

Länge $\mathcal{L}(I)$ ist in 1) $b - a$, ansonsten $+\infty$

Bem: [2.22] $I \subseteq \mathbb{R}$ ist abgeschlossen if only if für jede konvergente Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ aus Elementen in I, der Grenzwert auch in I ist.

Bem: [2.23] Seien $I = [a, b], J = [c, d]$ mit $a \leq b$ und $c \leq d$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann gilt $I \subseteq J$ genau dann, wenn $c \leq a$ und $b \leq d$

S 2.25 (Cauchy-Cantor) Sei $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$ eine Folge abgeschlossener Intervale mit $\mathcal{L}(I_1) < +\infty$ Dann gilt

$$\bigcap_{n\geq 1} I_n \neq \emptyset$$

Falls zudem $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(I_n) = 0$ enthält $\bigcap_{n\geq 1} I_n$ genau einen Punkt

D 2.27 Eine Teilfolge einer Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist eine Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ wobei

$$b_n = a_l(n)$$

und $l: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ eine Abbildung ist mit

$$l(n) < l(n+1) \quad \forall n \geq 1s$$

S 2.29 (Bolzano.Weierstrass) Jede beschränkte Folge besitzt eine Konvergente Teilfolge

Bem: [2.30] Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Folge. Dann gilt für jede konvergente Teilfolge $(b_n)_{n\geq 1}$:

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n \leq \lim_{n\to\infty} \sup a_n$$

.

2.6 Folgen in $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{C}$

D 2.31 Eine Folge in $\mathbb{R}^d$ ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}^d$$

D 2.32 Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}^d$ heisst **konvergent**, falls es $a \in \mathbb{R}^d$ gibt so dass:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \geq 1 \text{ mit } ||a_n - a|| < \epsilon \; \forall n \geq N$$

S 2.33 Sei $b = b_1, \ldots, b_d$. 1) und 2) sind äquivalent:

1 $\lim_{n\to\infty} a_n = b$

2 $\lim_{n\to\infty} a_{n,j} = b_j \quad \forall 1 \leq j \leq d$

S 2.36

1 Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert genau, wenn sie eine Cauchy Folge ist :

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \geq 1 \text{ mit } ||a_n - a_m|| < \epsilon \; \forall n, m \geq N$$

2 Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge

2.7 Reihen

D 2.7.0 Eine Reihe ist eine unendliche Summe

$$S_n := a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

D 2.37 Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

ist **konvergent**, falls die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ der Partialsummen konvergiert. In diesem Fall :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n$$

B 2.38 (Geometrische Reihe). Sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ und der Wert ist:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

Sei $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \cdots + q^n$

$$q \cdot S_n = q + \ldots q^n + q^{n+1}$$

woraus

$$(1-q)S_n = 1 - q^{n+1}$$

folgt. Es gilt also: $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
Nun zeigen wir die Konvergenz:

$$\left|S_n - \frac{1}{1-q}\right| = \left|\frac{-q^{n+1}}{1-q}\right| = \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|}$$

Aus Bsp 2.12 und $0 \leq |q| < 1$ folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \left|S_n - \frac{1}{1-q}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|} = 0$$

Somit konvergiert $(S_n)_{n\geq 1}$ gegen $\frac{1}{1-q}$

S 2.40 Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ konvergent, sowie $\alpha \in \mathbb{C}$

1 $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = (\sum_{k=1}^{\infty} a_k) + (\sum_{j=1}^{\infty} b_j)$

2 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k$ konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

S 2.41 (Cauchy Kriterium)

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \geq 1 \text{ mit } \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \epsilon \quad \forall m \geq n \geq N$$

Anmerkung: Aus dem Cauchy Kriterium folgt das Nullfolgenkriterium. Bildet die Folge der Summanden einer Reihe keine Nullfolge, dann divergiert die Reihe. Also falls $\lim_{n\to\infty} |a_n| \neq 0 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert.

S 2.42 Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert if only if $(S_n)_{n\geq 1}, S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ der Partialsummen nach oben beschränkt ist.

K 2.43 (Vergleichssatz)

Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen mit:

$$0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent}$$

Diese Implikation gilt auch, wenn

$$K \geq 1 \text{ mit } 0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq K$$

B 2.44 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert.
Sei $a_k = \frac{1}{k^2}, b_k = \frac{1}{(k-1)k}$, $k \geq 1$. Dann gilt $0 \leq a_k \leq b_k, k \geq 2$ und

$$\sum_{k=2}^{n} b_k = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \dots \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n} < 1 \quad \forall n \geq 1$$

D 2.45 Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heisst **absolut konvergent**

$$\text{falls } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ konvergiert}$$

S 2.46 Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist auch konvergent und:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

B 2.47 $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ konvergiert, ist aber nicht absolut konvergent.

S 2.48 (Leibniz 1682) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend mit $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \text{und es gilt } a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$$

B 2.49 Betrachten wir nochmals Bsp 2.47

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \leq S \leq 1$$

D 2.50 Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ ist eine **Umordnung** der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, falls eine bijektive Abbildung

$$\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^* \text{mit } a'_n = a_{\phi(n)}$$

S 2.52 (Dirichlet 1837) Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, dann konvergiert jede Umordnung (oder auch Teilfolge) der Reihe und hat den selben Grenzwert

---

S 2.53(Quotientenkriterium
Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1$.Falls

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}$$

Falls

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

B 2.54 (Exponentialfunktion). Für $z \in \mathbb{C}$ betrachte die Reihe

$$1 + z\frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

mit allgemeinem Glied

$$a_n = \frac{z^n}{n!}$$

Dann folgt für $z \neq 0$:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|z|}{n+1}$$

also gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0$ und die Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$
Bem: 2.55 Das Quotientenkriterium versagt, z.B wenn unendliche viele Glieder der Reihe verschwinden

---

S 2.56 Wurzelkriterium

1 Falls

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut

2 Falls

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

dann diviergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

D Kovergenzradius Gibt den Bereich an, in welchem für eine Potenzreihe Konvergenz garantiert ist. Sei $(c_k)_{k\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Falls $\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[k]{|c_k|}$ existiert, definieren wir

$$\rho = \begin{cases} +\infty & \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases} \tag{1}$$

Falls ab einem bestimmten Index all $a_n \neq 0$ und der folge limes definiert ist, kann man den Konvergenzradius auch mit dem Quotientenkriterium ausrechen.

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

K 2.57 Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

- konvergiert absolut für alle $|z| < \rho$
- divergiert für alle $|z| > \rho$

D Die Zeta Funktion Sei $s > 1$ und

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Für $s > 1$ konvergiert die obige Reihe
D 2.58 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist eine **lineare Anordnung** der Doppelreihe $\sum_{i,j\geq 0} a_{i,j}$, falls es eine Bijektion

$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

gibt mit $b_k = a_{\sigma(k)}$

S 2.59 (Cauchy 1821). Wir nehmen an, dass es $B \geq 0$ gibt, so dass

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} |a_{ij}| \leq B \quad \forall m \geq 0$$

Dann konvergieren die folgenden Reihen absolut:

$$S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall i \geq 0 \text{ und } U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall j \geq 0$$

sowie

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i \text{ und } \sum_{j=0}^{\infty} U_j$$

und es gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i = \sum_{j=0}^{\infty} U_j$$

Zudem konvergiert jede lineare Anordnung der Doppelreihe absolut, mit selbem Grenzwert
D 2.60 Das **Cauchy Produkt** der Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \sum_{j=0}^{\infty} b_j$$

ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}b_j) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \dots$$

S 2.62 Falls die Reihen

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \sum_{j=0}^{\infty} b_j$$

absolut konvergieren, so konvergiert ihr Cauchy Produkt und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}b_j) = (\sum_{i=0}^{\infty} a_i)(\sum_{j=0}^{\infty} b_j)$$

S 2.64 Sei $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge. Wir nehmen an :

1 $f(j) := \lim_{n\to\infty} f_n(j)$ existiert $\forall j \in \mathbb{N}$

2 Es gibt eine Funktion $g : \mathbb{N} \to [0, \infty[$, so dass

2.1 $|f_n(j)| \leq g(j) \quad \forall j \geq 0, \forall n \geq 0$

2.2 $\sum_{j=0}^{\infty} g(j)$ konvergiert

Dann folgt

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j)$$

K 2.65 Für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Folge $((1 + \frac{z}{n})^n)_{n\geq 1}$ und

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{z}{n})^n = \exp(z)$$

Aus K2.65 und Bsp.2.15 folgt

$$\exp(1) = e \text{ und } \exp(n) = \exp(1)^n = e^n$$

Deswegen $\exp(z) = e^z$

---

3 Stetige Funktionen

3.1 Reellwertige Funktionen

D 3.1 Sei $f \in \mathbb{R}^d$

1 f ist nach **oben beschränkt**, if $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt ist

2 f ist nach **unten beschränkt**, if $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ nach unten beschränkt ist

3 f ist beschränkt, if $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ b ist

D 3.2 Eine funktion $f : D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ ist

1 **monoton wachsend**, if $\forall x, y \in D$

$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$

2 **streng monoton wachsend**, if $\forall x, y \in D$

$$x < y \implies f(x) < f(y)$$

3 **monoton fallend**, if $\forall x, y \in D$

$$x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$$

4 **streng monoton fallend**, if $\forall x, y \in D$

$$x < y \implies f(x) > f(y)$$

5 **monoton**, falls f monoton wachsend oder monoton fallend

6 **streng monoton**, falls f streng monoton wachsend/fallend

---

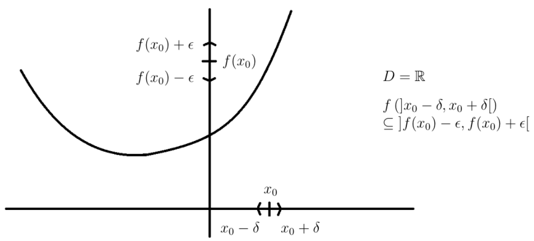
3.2 Stetigkeit

D 3.4 Sei $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist in x_0 **stetig**, falls es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$

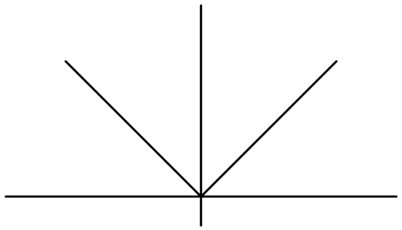
gibt, so dass für alle $x \in D$ die Implikation

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

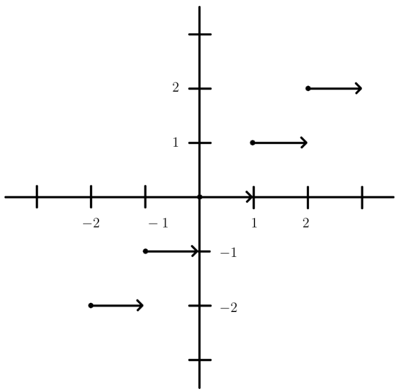
B 3.6 Sei $n \geq 0 : f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to x^n$ ist stetig.



2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto |x|$ ist stetig.



Die Abrundungsfunktion $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to \lceil x \rceil := \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq z\}$ ist in jedem Punkt $x_0 \notin \mathbb{Z}$ stetig; sie ist in keinem Punkt $y \in \mathbb{Z}$ stetig.



Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

D 3.5 Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist **stetig**, falls sie in jedem Punkt von D stetig ist.

S 3.7 Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Die Funktion f ist genau dann in x_0 stetig falls für jede Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in D folgende implikation gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

K 3.8 Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ beide stetig in x_0

1 Dann sind $f + g, \lambda \cdot f, f \cdot g$ stetig in x_0

2 Falls $g(x_0) \neq 0$ dann ist

$$\frac{f}{g} : D \cap \{x \in D : g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$$

$$x \to \frac{f(x)}{g(x)}$$

stetig in x_0

D 3.9 Eine **polynomiale Funktion** $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion der Form

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$$

wobei : $a_n \dots a_0 \in \mathbb{R}$. Falls $a_n \neq 0$ ist n der **Grad** von P

K 3.10 Polynomiale Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig

K 3.11 Seien P,Q, polynomiale Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit $Q \neq 0$. Seien $x_1 \dots x_m$ die Nullstellen von Q. Dann ist

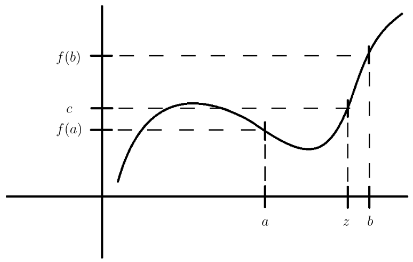
$$\frac{P}{Q} : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots x_m\} \to \mathbb{R}$$

$$x \to \frac{P(x)}{Q(x)}$$

stetig

3.3 Der Zwischenwertsatz

S 3.12 (Bolzano 1817). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b \in I$. Für jedes c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein z zwischen a und b mit $f(z) = c$

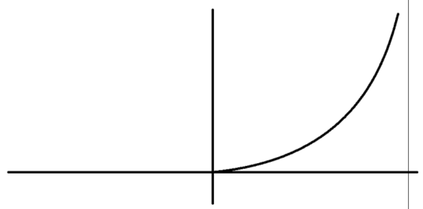


K 3.13 Sei $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ ein Polynom mit $a_n \neq 0$ und n ungerade. Dann besitzt P mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$
Bem: [3.14] für $c > 0$ besitzt $Q(x) = x^2 + c$ keine Nullstelle in R

3.4 Der Min-Max Satz

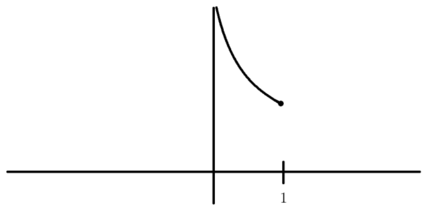
In diesem Abschnitt zeigen wir, dass eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall beschränkt ist und zudem ein Maximum und ein Minimum annimmt.

Beispiel 3.15. 1. $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \ x \longmapsto x^2$



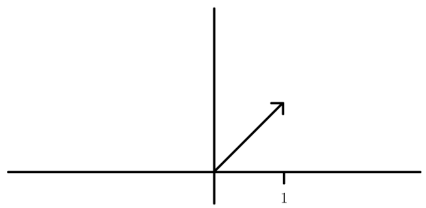
ist stetig aber nicht beschränkt.

2. $f :]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \longmapsto \frac{1}{x}$



ist stetig aber nicht beschränkt.

3. $f : [0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}, \ x \longmapsto x$



wobei das 3. Beispiel stetig und beschränkt ist, allerdings nimmt es kein Maximum an: Es gibt kein $a \in [0,1[$, so dass $f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in [0,1[$

D 3.16 Ein Intervall $\subseteq \mathbb{R}$ ist **kompakt**, falls es von Form

$$I = [a.b], \quad a \leq b$$

ist

L 3.17 Sei $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0. Dann sind

$$|f|, \max(f, g), \min(f, g)$$

stetig in x_0

L 3.18 Sei $(x_n)_{n \geq 1}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$$

sei $a \leq b$. Falls $\{x_n : n \geq 1\} \subseteq [a, b]$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in [a, b]$$

S 3.19 Sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem kompakten Intervall I. Dann gibt es $u \in I$ und $v \in I$ mit

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall x \in I$$

Insbesondere ist f beschränkt

3.5 Der Satz über Umkehrabbildung

S 3.20 Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$ *zwei Teilmengen*, $f : D_1 \to D_2, g : D_2 \to \mathbb{R}$ Funktionen, sowie $x_0 \in D_1$. Falls f in x_0 und g in $f(x_0)$ stetig sind

$$g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}$$

in x_0 stetig

K 3.21 Falls in Satz 3.20 f auf D_1 und g auf D_2 stetig sind, so ist $g \circ f$ auf D_1 stetig

S 3.22 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton. Dann ist $J := f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f^{-1} : J \to I$ ist stetig. streng monoton.

B 3.23 Sei $n \geq 1$. Dann ist

$$[0, \infty[\to [0, \infty[$$

$$x \to x^n$$

streng monoton wachsend, stetig und surjektiv. Nach dem Umkehrsatz existiert eine streng monoton wachsende stetige Umkehrabbildung

$$[0, \infty[\to [0, \infty[$$

$$x \to \sqrt[n]{x}$$

3.6 Die reelle Exponentialfunktion

D Exponentialfunktion

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad z \in \mathbb{R}$$

S 3.24 exp : $\mathbb{R} \to]0, +\infty[$ ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv

K 3.25

$$\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\exp(x) > 1 \quad \forall x > 0$$

K 3.26

$$\exp(z) > \exp(y) \quad \forall z > y$$

K 3.27

$$\exp(x) \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

K 3.28 Der natürliche Logarithmus

$$\ln :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

ist eine streng monoton wachsende, stetige, bijektive Funktion. Des Weiteren gilt:

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b \quad \forall a, b \in]0, +\infty[$$

Wir können den Logarithmus und die Exponentialfunktion benutzen, um allgemeine Potenzen zu definieren. Für $x > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ beliebig definieren wir:

$$x^a := \exp(a \ln x)$$

Insbesondere $x^0 = 1 \quad \forall x > 0$

K 3.29

1 Für $a > 0$ ist

$$]0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$$

$$x \longrightarrow x^a$$

eine stetige, streng monoton wachsende Bijektion

2 Für $a < 0$ ist

$$]0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$$

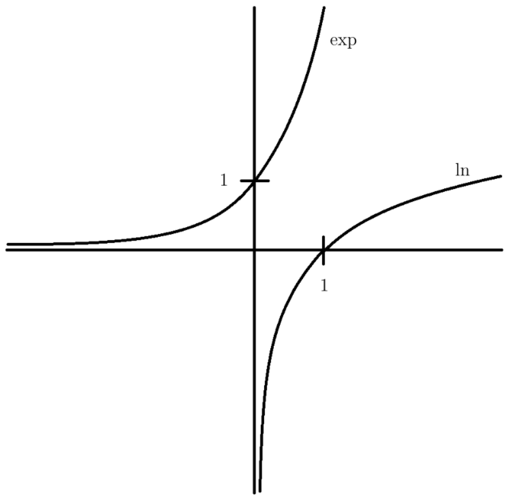
$$x \longrightarrow x^a$$

eine stetige, streng monoton fallende Bijektion

3 $ln(x^a) = a \ln(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall x > 0$

4 $x^a \cdot x^b = x^{a+b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$

5 $(x^a)^b = x^{a \cdot b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$



3.7 Konvergenz v. Funktionenfolgen

Eine Funktionenfolge ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^D$$

$$n \longrightarrow f(n)$$

D 3.30 Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 0}$ **konvergiert punktweise** gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, falls für alle $x \in D$:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

B 3.31 Sei $D = [0, 1]$ und

$$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}$$

$$x \to x^n$$

Dann folgt aus Bsp 2.12

$$lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} x^n = 0 \quad \forall 0 \leq x < 1$$

Ausserdem gilt $f_n(1) = 1^n = 1$. Also konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 0}$ punktweise gegen die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} \tag{2}$$

Bemerke: die Funktionen f_n sind alle stetig in $[0, 1]$, die Funktion f ist nicht stetig in 1. Um zu garantieren, dass der Grenzwert einer Folge stetiger Funktionen stetig ist, braucht es zusätzliche Voraussetzungen.

D 3.32 (Weierstrass 1841) Die Folge

$$f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

konvergiert gleichmässig in D gegen

$$f : D \to \mathbb{R}$$

falls gilt $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \geq 1$, so dass

$$\forall n \geq N, \ \forall x \in D : \ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

In dieser Definition ist es wichtig, dass N nur von ϵ abhängig ist und nicht von $x \in D$.Deswegen kommt die Bedingung $\forall x \in D$ nach der Bedingung $\exists N \geq 1$

S 3.33 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge bestehend aus(in D) stetigen Funktionen die (in D) gleichmässig gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f (in D) stetig

D 3.34 Eine Funktionenfolge

$$f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist **gleichmässig konvergent**, falls für alle $x \in D$ der Grenzwert

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

existiert und die Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ gleichmässig gegen f konvergiert

K 3.35 Die Funktionenfolge

$$f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

konvergiert genau dann gleichmässig in D, falls

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \geq 1, \text{so dass } \forall n, m \geq N \text{ und } \forall x \in D :$$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

K 3.36 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Falls $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine gleichmässig konvergente Folge stetiger Funktionen ist, dann ist die Funktion

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

stetig

D 3.37 $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmässig (in D), falls die durch

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

definierte Funktionenfolge gleichmässig konvergiert

S 3.38 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und

$$f_n : D \to \mathbb{R}$$

eine Folge stetiger Funktionen. Wir nehmen an

$$|f_n(x)| < c_n \quad \forall x \in D$$

und, dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

gleichmässin in D und deren Grenzwert

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

ist eine in D stetige Funktion

D 3.39 Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

hat **positiven Konvergenzradius**, falls $\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$ existiert Der Konvergenzradius ist dann definiert als:

$$\rho = \begin{cases} +\infty & \text{falls } \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{c \to \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{falls } \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$$

S 3.40 Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$ und sei

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, |x| < \rho$$

Dann gilt: $\forall 0 \leq r < \rho$ konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

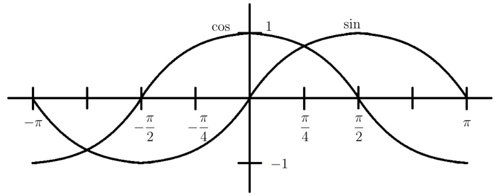
gleichmässig auf $[-r, r]$, insbesondere ist $f :]-\rho, \rho[\longrightarrow \mathbb{R}$ stetig

3.8 Trigonometrische Funktionen

D Sinus&Cosinus

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{2!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n)!}$$

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$



S 3.41 $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetige Funktionen

S 3.42

1 $\exp iz = \cos(z) + i \ sin(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

2 $\cos(z) = \cos(-z)$ und
$\sin(-z) = -\sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

3 $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$

4 $\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$
$\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$

5 $\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

K 3.34

$$\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$$

$$\cos(2z) = \cos(z)^2 - \sin(z)^2$$

3.9 Die Kreiszahl π

S 3.44 Die Sinusfuktion hat auf $]0, +\infty[$ mindestens eine Nullstelle

$$\pi := \inf\{t > 0 : \sin t = 0\}$$

Dann gilt:

1 $\sin \pi = 0, \quad \pi \in]2, 4[$

2 $\forall x \in]0, \pi[: \sin x > 0$

3 $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$

K 3.45

$$x \geq \sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} \quad \forall 0 \leq x \leq \sqrt{6}$$

K 3.46

1 $e^{i\pi} = -1, \quad e^{2i\pi} = 1$

2 $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$,
$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3 $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$,
$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4. $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$,
$\cos(x+2\pi) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
5. Nullstellen von Sinus $= \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$
$$\sin(x) > 0 \quad \forall x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\sin(x) < 0 \quad \forall x \in](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$$
6. Nullstellen von Cosinus $= \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$
$cos(x) > 0$
$\forall x \in]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$
$cos(x) < 0$
$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi, -\frac{\pi}{2}+(2k+2)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$

Für $z \notin \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}$ definieren wir:
$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\tan(z)}$$
und für $z \notin \pi \cdot \mathbb{Z}$:
$$\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$$

3.10 Grenzwerte von Funktionen

D 3.47 $x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein **Häufungspunkt** der Menge D falls $\forall \delta > 0$:
$$(]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus\{x_0\}) \cap D \neq \emptyset$$

B 3.48 Sei $D = \{0\} \cup]1, 2[$. Dann ist die Menge D' der Häufungspunkt von D:
$$D' = [1, 2]$$

D 3.49 Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D. Dann ist $A \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to x_0$ bezeichnet mit
$$"\lim_{x \to x_0} f(x) = A"$$
falls $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ so dass
$$\forall x \in D \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus\{x_0\}) : |f(x) - A| < \epsilon$$

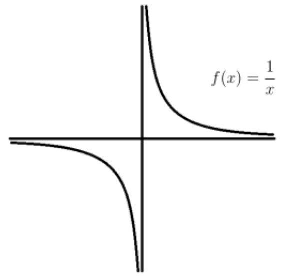
Bem: 3.50
1. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D. Dann gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ genau dann wenn für alle Folgen $(a_n)_{n \geq 1}$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit
$$\lim_{n \to \infty} a_n = x_0$$
folgt
$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = A$$
2. Sei $x_0 \in D$. Dann ist f stetig in x_0 genau dann, falls
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$
3. Falls $f, g : D \to \mathbb{R}$ und $\lim_{x \to x_0} f(x), \lim_{x \to x_0} g(x)$ existieren, so folgt
$$\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$
und
$$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$
4. Sei $f, g : D \to \mathbb{R}$ mit $f \leq g$. Dann folgt
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$
falls beide Grenzwerte existieren
5. Falls $g_1 \leq f \leq g_2$ und
$$\lim_{x \to x_0} g_1(x) = \lim_{x \to x_0} g_2(x)$$
dann existiert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ und
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g_1(x)$$

B 3.51 Sei $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Dann gilt:
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$
Aus K3.45 folgt $\forall x \in]0, \sqrt{6}$:
$$1 - \frac{x^2}{3!} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$
und folglich $\forall x \in [-\sqrt{6}, \sqrt{6}] \setminus \{0\}$ da x^2 und $\frac{\sin x}{x}$ gerade sind. Die Aussage folgt dann aus Bem3.50(5)

S 3.52 Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$, x_0 Häufungspunkt von $D, f : D \longrightarrow E$ eine Funktion. Wir nehmen an, dass
$$y_0 := \lim_{x \to x_0} f(x)$$
existiert und $y_0 \in E$. Falls $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in y_0 folgt:
$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$$

3.11 Linksseitige und rechsseitige Grenzwerte

Betrachten wir zum Beispiel
$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \frac{1}{x}$$
Dann wird für $x > 0$, x beliebig nahe an 0, $\frac{1}{x}$ beliebig positiv gross und für $x < 0$, x beliebig nahe an 0, $\frac{1}{x}$ beliebig negativ "gross".In beiden Fällen hat $\frac{1}{x}$ ein einfaches Verhalten.



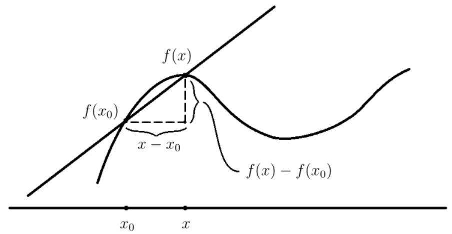
Im Fall $a \in \mathbb{R}$,
$$f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \to x^a$$
ist f auf $]0, \infty[$ definiert. Falls $a > 0$ werden wir sehen, dass
$$\lim_{x \in]0, \infty[\to 0} f(x) = 0$$
Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir nehemn an, x_0 ist Häufungspunkt von $D \cap]x_0, +\infty[$; das heisst ein rechtsseitiger Häufungspunkt. Falls der Grenzwert der eingeschränkten Funktion
$$f|_{D \cap [x_0, +\infty[}$$
für $x \longrightarrow x_0$ existiert, wird er mit
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$
bezeichnet und nennt sicht rechtsseitiger Grenzwert von f bei x_0.

Wir erweitern diese Definition auf:
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$
falls gilt:
$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0, \ \forall x \in D \cap]x_0, x_0 + \delta[: \ f(x) > \frac{1}{\epsilon}$$
und analog:
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$
falls
$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in D \cap]x_0, x_0 + \delta[: f(x) < -\frac{1}{\epsilon}$$
Linksseitige Häufungspunkt und Grenzwerte werden analog definiert. Mit diesen Definitionen gilt:
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

B 3.53 $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ Nun, $]0, \infty[\to R$, $x \to \ln x$ ist strikt monoton. Sei $e^{-(n+1)} < x < e^{-n}$, dann folgt $-(n+1) < \ln x < -n$ **B 3.54** Für $a > 0$ ist $\lim_{x \to 0^+} x^a = 0$. Aus 5.53 folgt, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $\delta > 0$ gibt so dass:
$$0 < x < \delta \implies \ln x < -n$$
und da $a > 0$
$$a \ln x < -an$$
und da exp (streng) monoton wachsend,
$$x^a = \exp(a \ln x) < \exp(-an)$$
Nun wird mit $n \in \mathbb{N}$ beliebig gross $\exp(-an) = (\exp(-a))^n$ beliebig klein, da $\exp(-a) < 1$

4 Differenzierbare Funktionen

D 4.1 Sei $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D
f ist ist **in** x_0 **Differenzierbar**, falls der Grenzwert
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
existiert. Ist dies der Fall, wird der Grenzwert mit $f'(x_0)$ bezeichnet
Bem: 4.2: Es ist oft von Vorteil in der Definiton von $f'(x_0)$, $x = x_0 + h$ zu setzen
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ist die Steigung der Gerade durch $(x_0, f(x_0)), (x, f(x))$. Falls $f'(x_0)$ existiert ist die Intuition, dass die Familien der Geraden durch $(x_0, f(x_0)), (x, f(x))$ für $x \neq x_0, x \to x_0$ als "Grenzwert"die Tangente zum Graphen von f in $(x_0, f(x_0))$ annimmt.

4.1 Die Ableitung

S 4.3 (Weierstrass 1861). Sei $f : D \to \mathbb{R}, x_0 \in D$ Häufungspunkt von D. Folgende Aussagen sind äquivalent:
1. f ist in x_0 differenzierbar.
2. Es gibt $c \in \mathbb{R}$ und $r : D \to D$ mit:
   2.1 $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$
   2.2 $r(x_0) = 0$ und r ist stetig in x_0

Falls dies zutrifft ist $c = f'(x_0)$ eindeutig bestimmt
Die Formulierung der Differenzierbarkeit von f mittels
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$$

und der Stetigkeit von r in x_0 hat den Vorteil, dass sie keinen Limes enthält. Ausserdem ist dann

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

die Gleichung der Tangente zum Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. WIr können die Charakterisierung der Differenzierbarkeit noch vereinfachen in dem wir in Satz 4.3(2.1)

$$\phi(x) = f'(x_0) + r(x)$$

setzen. Wir erhalten:

S 4.4 Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in x_0 differenzierbar, falls es eine Funktion $\phi : D \to \mathbb{R}$ gibt die stetig in x_0 ist und so, dass

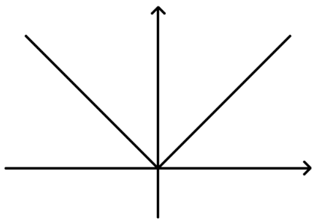
$$f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0) \quad \forall x \in D$$

In diesem Fall gilt $\phi(x_0) = f'(x_0)$

K 4.5 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D. Falls f in x_0 differenzierbar ist, so ist f stetig in x_0

B 4.6

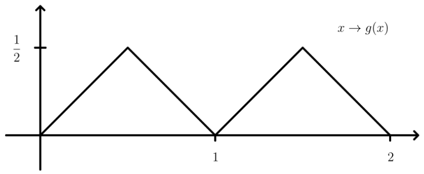
1. $f = 1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dann ist $f'(x) = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$
   Folgt aus $f(x) - f(x_0) = 1 - 1 = 0$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$. Dann ist $f'(x_0) = 1$
   Folgt aus $f(x) - f(x_0) = 1 \cdot (x - x_0)$
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$. Dann ist $f'(x_0) = 2x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$
   Folgt aus:
   $$f(x) - f(x_0) = x^2 - x_0^2 = (x - x_0)(x + x_0)$$
   Also für $x \neq x_0$:
   $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = x + x_0$$
   woraus
   $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$$
   folgt.
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$

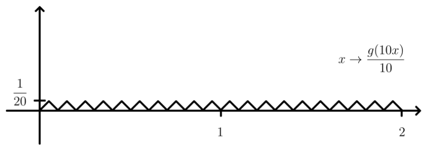


   Ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar:
   Für $x < 0$:
   $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = -1$$
   Für $x > 0$:
   $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = 1$$

Also hat für $x \to 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ keinen Grenzwert. Für alle $x_0 \neq 0$ ist f in x_0 differenzierbar.

5. (Van der Waerden) Sei für $x \in \mathbb{R}$,
   $$g(x) = \min\{|x - m| : m \in \mathbb{Z}\}$$





   Sei
   $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(10^n x)}{10^n}$$
   Dann ist nach Satz 3.38 diese Reihe auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmässig konvergent und f ist deswegen stetig. Mittels Dezimalentwicklung kann man zeigen, dass f in keinem Punkt von $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

D 4.7 $f : D \to \mathbb{R}$ ist **in D differenzierbar**, falls für jeden Häufungspunkt $x_0 \in D, f$ in x_0 differenzierbar ist.

B 4.8

1. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in $\mathbb{R}$ differenzierbar und $exp' = exp$ Seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und $h \neq 0$:
   $$\frac{\exp(x_0 + h) - \exp(x_0)}{h} =$$
   $$\frac{\exp(x_0)\exp(h) - \exp(x_0)}{h} =$$
   $$\exp(x_0)\left[\frac{\exp(h) - 1}{h}\right]$$
   Also:
   $$\exp'(x_0) = \exp(x_0) \lim_{h \to 0} \left[\frac{\exp(h) - 1}{h}\right]$$
   Aus $\exp(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \ldots$ folgt für $h \neq 0$:
   $$\frac{\exp(h) - 1}{h} = 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \ldots$$
   und für $h \in [-1, 1], h \neq 0$:
   $$\left|\frac{\exp(h) - 1}{h} - 1\right| \leq |h| \left[\frac{1}{2!} + \frac{|h|}{3!} + \ldots\right] \leq 2|h|$$
   woraus
   $$\lim_{h \to 0} \left(\frac{\exp(h) - 1}{h}\right) - 1 = 0$$
   folgt.
2. $\sin' = \cos \, und \, \cos' = -\sin$

S 4.9 Sei $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D und $f, g : D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar. Dann gelten

1 $f + g$ ist in x_0 differenzierbar und
$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2 $f \cdot g$ ist in x_0 differenzierbar und $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

3 Falls $g(x_0) \neq 0$ ist $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

D Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst **gerade(resp. ungerade)**, falls $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$) gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

B 4.10

1. $n \geq 1 : (x^n)' = nx^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. Die Tangensfunktion
   $$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$$
   ist auf ihrem Definitonsbereich differenzierbar und
   $$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$
3. Die Cotangensfunktion
   $$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, x \notin \pi\mathbb{Z}$$
   ist auf ihrem Definitonsbereich differenzierbar und
   $$cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

S 4.11 Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ und sei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt. Sei $f : D \to E$ eine in x_0 differenzierbare Funktion so dass $y_0 := f(x_0)$ ein Häufungspunkt von E ist, und sei $g : E \to \mathbb{R}$ eine in y_0 differenzierbare Funktion. Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

K 4.12 Sei $f : D \to E$ eine bijektive Funktion, $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt; wir nehem an f ist in x_0 differenzierbar und $f'(x) \neq 0$; zudem nehemn wir an f^{-1} ist in $y_0 = f(x_0)$ stetig. Dann ist y_0 Häufungspunkt von E, f^{-1} ist in y_0 differenzierbar und
$$\left(f^{-1}\right)(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

B 4.13

1. Die Ableitung von $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ ist
   $$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$
   Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
   $$\ln(\exp(x)) = x$$
   S4.11 für $f(x) = \exp x$ und $g(y) = \ln y$
   $$\ln'(\exp x)\exp'(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
   und da $\exp : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ bijektiv ist, folgt:
   $$\forall y \in]0, \infty[: \quad \ln'(y) \cdot y = 1$$

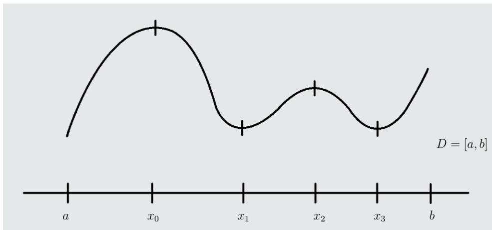
4.2 Erste Ableitung

D 4.14 Sei $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$

1 f besitzt ein lokales Maximum in x_0 falls es $\delta > 0$ gibt mit:
$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D$$

2 f besitzt ein lokales Minimum in x_0 falls es $\delta > 0$ gibt mit:
$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D$$

3 f besitzt ein lokales Extremum in x_0 falls es entweder ein lokales Minimum oder Maximum von f ist.



x_0, x_2 sind lokale Maximalstellen und x_1, x_3 sind lokale Minimalstellen.

S 4.15 Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}, x_0 \in]a, b[$. Wir nehmen an, f ist in x_0 differenzierbar

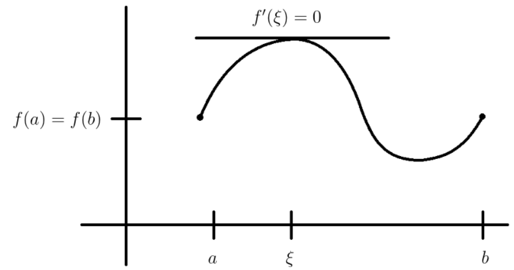
1 Falls $f'(x) > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit
$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$$
$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$$

2 Falls $f'(x_0) < 0$ gibt es $\delta > 0$ mit
$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$$
$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$$

3 Falls f in x_0 ein lokales Extremum besitzt, folgt $f'(x_0) = 0$

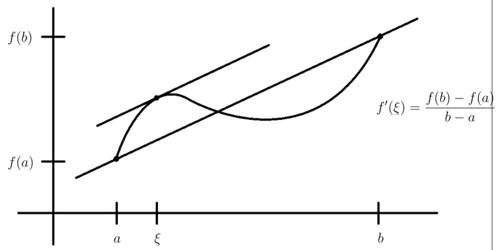
S 4.16 (Rolle 1690). Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Erfüllt sie $f(a) = f(b)$ so gibt es $\mathcal{E} \in]a, b[$ mit

$$f'(\mathcal{E}) = 0$$



S 4.17 (Lagrange 1797) Sei $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ stetig mit f in $]a, b[$ differenzierbar. Dann gibt es $\mathcal{E} \in]a, b[$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\mathcal{E})(b - a)$$



K 4.18 Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar

1 Falls

$$f'(\mathcal{E}) = 0 \quad \forall \mathcal{E} \in]a, b[\text{ ist f konstant}$$

2 Falls $f'(\mathcal{E}) = g'(\mathcal{E}) \quad \forall \mathcal{E} \in]a, b[$
gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x) + c \quad \forall x \in [a, b]$.

3 Falls $f'(\mathcal{E}) \geq 0 \quad \forall \mathcal{E} \in]a, b[$
ist f auf $[a, b]$ monoton wachsend

4 Falls $f'(\mathcal{E}) > 0 \quad \forall \mathcal{E} \in]a, b[$
ist f auf $[a, b]$ strikt monoton wachsend

5 Falls $f'(\mathcal{E}) \leq 0 \quad \forall \mathcal{E} \in]a, b[$
ist f auf $[a, b]$ monoton fallend

6 Falls $f'(\mathcal{E}) < 0 \quad \forall \mathcal{E} \in]a, b[$
ist f auf $[a, b]$ strikt monoton fallend

7 Falls es $M \geq 0$ gibt mit

$$|f'(\mathcal{E})| \leq M \quad \forall \mathcal{E} \in]a, b[$$

dann folgt $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M |x_1 - x_2|$$

B 4.19

1. arcsin: Da $\sin' = cos$ und $\cos(x) > 0$ $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ folgt aus K4.18, dass die Sinusfunktion auf $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ strikt monoton wachsend ist, also ist

$$sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

bijektiv. Wir definieren

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

als die Umkehrfunktion von sin. Nach 4.12 ist sie auf $]-1, 1[$ differenzierbar und für $y = \sin x, \ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ folgt nach 4.12

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos x}$$

Nun benützen wir:

$$y^2 = \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

woraus mit $\cos x > 0$ folgt:

$$\cos x = \sqrt{1 - y^2}$$

Wir erhalten also $\forall y \in]-1, 1[$

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

2. arccos: Eine analoge Diskussion zeigt, dass $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ strikt monoton fallend ist, und $[0, \pi]$ auf $[-1, 1]$ bijektiv abbildet. Sei:

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

die Umkehrfunktion. Sie ist auf $]-1, 1[$ differenzierbar und:

$$\arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}} \quad \forall y \in]-1, 1[$$

3. arctan: Für $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Also ist tan auf $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ streng monoton wachsend mit

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \tan x = +\infty,$$

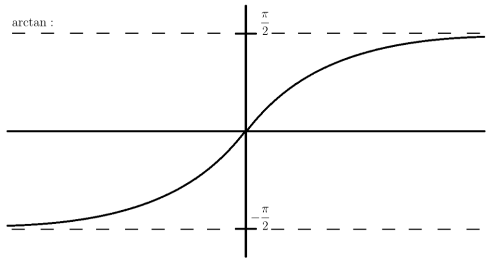
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} \tan x = -\infty,$$

Also ist $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to]-\infty, \infty[$ bijektiv. Sei

$$\arctan :]-\infty, \infty[\to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

die Umkehrfunktion. Dann ist arctan differenzierbar und für $y = \tan x$:

$$\arctan'(y) = \cos^2 x = \frac{1}{1 + y^2}$$



4. arccot: Für $x \notin \pi \cdot \mathbb{Z}$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Die Cotangensfunktion ist auf $]0, \pi[$ streng monoton fallend und bildet $]0, \pi[$ bijektiv auf $]-\infty, \infty[$ ab. Sei:

$$\text{arccot} :]-\infty, \infty[\to]0, \pi[$$

die Umkehrfunktion. Dann folgt:

$$\text{arccot}'(y) = -\frac{1}{1 + y^2}, \quad y \in]-\infty, \infty[$$

B 4.20 (Hyperbel und Areafunktionen)
Als Hyperbelfunktionen bezeichnet man die Funktionen $\cosh x, \sinh x, \tanh x$ definiert $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\cosh'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$\sinh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

Offensichtlich gilt $\cosh x \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \sinh x \geq 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[, \sinh(0) = 0$. Daraus folgt: cosh ist auf $[0, \infty[$ strikt monoton wachsend, $\cosh(0) = 1$ und $\lim_{x \to +\infty} \cosh x = +\infty$.

$$\cosh : [0, \infty[\to [1, \infty[$$

bijektiv. Deren Umkehrfunktion wird mit

$$\text{arcosh} : [1, \infty[\to [0, \infty[$$

bezeichnet. Unter benützung von

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

folgt:

$$\text{arcosh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} \quad \forall y \in]1, \infty[$$

Analog:

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

streng monoton wachsend und bijektiv. Die Umkehrfunktion wird mit

$$\text{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

bezeichnet und es gilt:

$$\text{arsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Für tanh folgt:

$$\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} > 0$$

Also ist tanh auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend und man zeigt, dass

$$\lim_{x \to +\infty} \tanh(x) = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \tanh(x) = -1$$

Die Funktion $\tanh : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ ist bijektiv. Ihre Umkehrabbildung wird mit

$$\text{artanh} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$$

bezeichnet. Es gilt dann:

$$\text{artanh}'(y) = \frac{1}{1 - y^2} \quad \forall y \in]-1, 1[$$

S 4.22 (Cauchy). Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Dann gibt es $\mathcal{E} \in]a.b[$ mit

$$g'(\mathcal{E})(f(b) - f(a)) = f'(\mathcal{E})(g(b) - g(a))$$

Falls $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$ folgt

$$g(a) \neq g(b)$$

und

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\mathcal{E})}{g'(\mathcal{E})}$$

Randnotiz: Man erhält den Satz von Lagrange mit $g(x) = x$

S 4.23 (l'Hospital 1696) Seien $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$
Falls

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = 0, \ \lim_{x \to b^-} g(x) = 0$$

und

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$$

existiert, folgt

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to b^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Bem: 4.24 Der Satz gilt auch

- falls $b=+\infty$
- falls $\lambda=+\infty$
- falls $x\to a^+$

B 4.25

1. Für $a>0$ folgt aus S4.13 (1), (2) und l'Hospital:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^a}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{ax^{a-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{ax^a}=0$$

2.

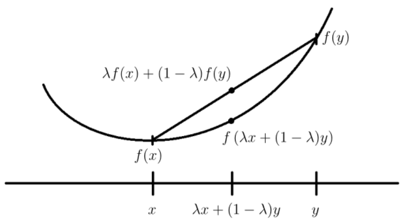
$$\lim_{x\to 0^+}x\cdot\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

D 4.26 Sei $I\subseteq\mathbb{R}$ ein Intervall und $f:I\to\mathbb{R}$ eine Funktion.

1 f ist **konvex** (auf I) falls es für alle $x\le y,\quad x,y\in I$ und $\lambda\in[0,1]$ $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ gilt

2 f ist **streng konvex** falls für alle $x<y,\quad x,y\in I$ und $\lambda\in]0,1[$ $f(\lambda x+(1-\lambda)y)<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$



Bem: 4.27 Sei $f:I\to\mathbb{R}$ konvex. Ein einfacher Induktionsbeweis zeigt, dass für alle $n\ge 1$, $\{x_1,\dots x_n\}\subseteq I$ und $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ in $[0,1]$ mit $\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$

$$f\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i\right)\le\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i)$$

L 4.28 Sei $f:I\to\mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Die Funktion f ist genau dann konvex, falls für alle $x_0<x<x_1$ in I

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$$

gilt.
f ist streng konvex wenn $<$ gilt

S 4.29 Sei $f\ :]a,b[\to\mathbb{R}$ in $]a,b[$ differenzierbar. Die Funktion f ist genau dann (streng) konvex, falls f' (streng) monoton wachsend ist.

K 4.30 Sei $f\ :]a,b[\to\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar in $]a.b[$. Die Funktion f ist (streng) konvex, falls $f''\le 0$ (bzw $f''>0$) auf $]a,b[$

B 4.31 Für alle $n\ge 1$ und $x_1\dots x_n$ in $]0,\infty[$ gilt

$$\sqrt[n]{x_1\dots x_n}\le\frac{x_1+\dots+x_n}{n}$$

Wir betrachten $f(x)=-\ln x$, dann ist

$$f'(x)=-\frac{1}{x}$$

und

$$f''(x)=\frac{1}{x^2},\ x\in]0,\infty[$$

Folglich ist f konvex und aus Bem. 4.27 mit $I=]0,\infty[$ und $\lambda_1=\dots=\lambda_n=\frac{1}{n}$ folgt:

$$-\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)\le\sum_{i=1}^n-\frac{1}{n}\ln x_i=-\frac{1}{n}\ln(x_1,\dots x_n)$$

4.3 Höhere Ableitungen

D 4.32 Sei $D\subseteq\mathbb{R}$, so dass jedes $x_0\in D$ Häufungspunkt der Menge D ist. Sei $f:D\to\mathbb{R}$ differenzierbar in D und f' ihre Ableitung; wir setzen $f^{(1)}=f'$

1 Für $n\ge 2$ ist f **n-mal differenzierbar in D** falls $f^{(n-1)}$ in D differenzierbar ist. Dann ist $f^{(n)}:=\left(f^{(n-1)}\right)'$ und nennt sich die n-te Ableitung von f

2 Die Funktion f ist **n-mal stetig differenzierbar in D**, falls sie n-mal differenzierbar ist und falls $f^{(n)}$ in D stetig ist

3 Die Funktion f ist in D **glatt**, falls sie $\forall n\ge 1$, n-mal differenzierbar ist.

Bem: 4.33 Es folgt aus Korollar 4.5, dass für $n\ge 1$, eine n-mal differenzierbare Funktion $(n-1)$-mal differenzierbar ist.

S 4.34 Sei $D\subseteq\mathbb{R}$ wie in Def. 4.32, $n\ge 1$ und $f,g:D\to\mathbb{R}$ n-mal differenzierbar in D

1 $f+g$ ist n-mal differenzierbar und

$$(f+g)^{(n)}=f^{(n)}+g^{(n)}$$

2 $f\cdot g$ ist n-mal differenzierbar und

$$(f\cdot g)^{(n)}=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}$$

B 4.35

1. Die Funktionen $\exp,\sin,\cos,\sinh,\cosh,\tanh$ sind glatt auf ganz $\mathbb{R}$
2. Polynome sind auf ganz $\mathbb{R}$ glatt.
3. $\ln:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ ist glatt;

$$(\ln)'(x)=\frac{1}{x}=x^{-1},\ (\ln)''(x)=(-1)x^{-2},\dots$$

$$\ln^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n},\ n\ge 1$$

S 4.36 Sei $D\subseteq\mathbb{R}$ wie in Def. 4.32, $n\ge 1$ und $f,g:D\to\mathbb{R}$ n-mal differenzierbar in D Falls $g(x)\ne 0\quad\forall x\in D$, ist $\frac{f}{g}$ in D n-mal differenzierbar

S 4.37 Seien $E,D\subseteq\mathbb{R}$ Teilmengen für die jeder Punkt Häufungspunkt ist. Seien $f:D\to E$ und $g:E\to\mathbb{R}$ n-mal differenzierbar. Dann ist $g\circ f$ n-mal differenzierbar und

$$(g\circ f)^{(n)}(x)=\sum_{k=1}^n A_{n,k}(x)(g^{(k)}\circ f)(x)$$

wobei $A_{n,k}$ ein Polynom in den Funktionen $f',f^{(2)},\dots,f^{(n+1-k)}$ ist

$$(g\circ f)'=(g'\circ f)\cdot f'$$

$$(g\circ f)^{(2)}=(g^{(2)}\circ f)(f')^2+(g'\circ f)\cdot f^{(2)}$$

$$(g\circ f)^{(3)}=$$

$$(g^{(3)}\circ f)(f')^3+3(g^{(2)}\circ f)f'f^{(2)}+(g'\circ f)f^{(3)}$$

4.4 Potenzreihen & Taylor Approx.

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass grob gesagt, konvergente Potenzreihen glatte Funktionen ergeben. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht und wird durch eine schwächere Aussage (Taylor Approximation) ersetzt.

S 4.39 Seien $f_n\ :]a,b[\to\mathbb{R}$ eine Funktionsfolge wobei f_n einmal in $]a,b[$ stetig differenzierbar ist $\forall n\ge 1$. Wir nehemen an, dass sowohl die Folge $(f_n)_{n\ge 1}$ wie $(f_n')_{n\ge 1}$ gleichmässig in $]a,b[$ konvergieren (Def. 3.34) mit $\lim_{n\to\infty}f_n=:f$ und $\lim_{n\to\infty}f_n'=:p$.
Dann ist f stetig differenzierbar und $f'=p$

S 4.40 Sei $\sum_{k=0}^\infty c_k x^k$ eine Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius (3.39) $\rho>0$. Dann ist

$$f(x)=\sum_{k=0}^\infty c_k(x-x_0)^k$$

auf $]x_0-\rho,x_0+\rho[$ differenzierbar und

$$f'(x)=\sum_{k=1}^\infty kc_k(x-x_0)^{k-1}$$

für alle $x\in]x_0-\rho,x_0+\rho[$

K 4.41 Unter der Voraussetzung von Satz 4.39 ist f auf $]x_0-\rho,x_0+\rho[$ glatt und

$$f^{(j)}(x)=\sum_{k=j}^\infty c_k\frac{k!}{(k-j)!}(x-x_0)^{k-j}$$

Insbesondere ist

$$c_j=\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}$$

B 4.42 (Cauchy 1823)
Das nicht jede glatte Funktion Summe einer Potenzreihe ist, folgt aus diesem Beispiel

$$f(x)=\begin{cases}\exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

Diese Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ glatt und $f^{(k)}(0)=0\quad\forall k\ge 0$. Da andererseits $f(x)>0\quad\forall x\ne 0$, gibt es keine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius ρ, die in $]-\rho,\rho[$ gegen f konvergiert.
Aus Satz 4.37 folgt, dass $\forall k\ge 0$

$$f^{(k)}(x)=\mathcal{P}_k\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)\quad\forall x\ne 0$$

wobei $\mathcal{P}_k$ ein Polynom ist. Unter Benützung von:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^m}\exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)=0\quad\forall m\ge 0$$

folgt mit $f^{(k)}(0)=0$:

$$f^{(k+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^k(x)-f^{(k)}(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(k)}(x)}{x}=0$$

S 4.43 Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ (n+1)-mal differenzierbar. Für jedes $a<x\le b$ gibt es $\mathcal{E}\in]a,x[$ mit:

$$f(x)=\sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(\mathcal{E})}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

K 4.44 (Taylor Approximatio) Sei $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ stetig und in $]c,d[$ (n+1)-mal differenzierbar. Sei $c<a<d$. Für alle $x\in[c,d]$ gibt es $\mathcal{E}$ zwischen x und a so dass

$$f(x)=\sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(\mathcal{E})}{(n+1)}(x-a)^{n+1}$$

Anhand dieses Korollars können wir eine präzisere Aussage über lokale Extremalstellen einer $(n+1)$-mal differenzierbaren Funktion machen.

K 4.45 Sei $n\ge 0, a<x_0<b$ und $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ in $]a,b[$ (n+1)-mal stetig differenzierbar. Annahme: $f'(x_0)=f^{(2)}(x_0)=\dots=f^{(n)}(x_0)=0$

1 Falls n gerade ist und x_0 lokale Extremalstelle, folgt $f^{(n+1)}(x_0)=0$

2 Falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0)>0$ so ist x_0 eine strikt lokale Minimalstelle

3 Falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0)<0$ so ist x_0 eine strikt lokale Maximalstelle

K 4.46 Sei $f:[a.b]\to\mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ zweimal stetig differenzierbar. Sei $x<x_0<b$. Annahme: $f'(x)=0$

1 Falls $f^{(2)}(x_0) > 0$ ist x_0 strikte lokale Minimalstelle

2 Falls $f^{(2)}(x_0) < 0$ ist x_0 strikte lokale Maximalstelle

B 4.47 Sei $f(x) = x^4 - x^2 + 1$. Wir bestimmen die lokalen Extremalstellen von f. Sei x_0 eine solche; dann folgt nacht Satz 4.15(3):

$$f'(x_0) = 0,$$

das heisst

$$4x_0^3 - 2x_0 = 0.$$

Also gilt $x_0 \in \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. Nun ist $f^{(2)}(x) = 12x^2 - 2$;

$$f^{(2)}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f^{(2)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4 > 0$$

$$f^{(2)}(0) = -2 < 0$$

Also sind $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}$ strikte lokale Minimalstellen, und 0 strikte lokale Maximalstelle.

5 Das Riemann Integral

5.1 Integrabilitätskriterien

D 5.1 Eine **Partition** von I ist eine endliche Teilmenge $P \subsetneq [a,b]$ wobei $\{a,b\} \subseteq P$ **L** 5.2

1 Sei P' eine Verfeinerung von P, dann gilt:

$$s(f.P) \le s(f,P') \le S(f,P') \le S(f,P)$$

2 Für beliebige Partitionen P_1, P_2 gilt:

$$s(f,P_1) \le S(f,P_2)$$

D 5.3 Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist **Riemann integrierbar** falls

$$s(f) = S(f)$$

In diesem Fall bezeichnen wir den gemeinsamen Wert von $s(f)$ und $S(f)$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

S 5.4 Eine beschränkte Funtkion ist genau dann integrierbar, falls

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P \in \mathcal{P}(I)$$

mit $S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$ **S** 5.8(Du Bois-Reymond 1875) Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, falls $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ so dass

$$\forall P \in P_\delta(I), S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$$

K 5.9 Die beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar mit $A := \int_a^b f(x)\,dx$ falls: $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ so dass $\forall P \in p(I)$ Partition mit $\delta(P) < \delta$ und $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ mit $\mathcal{E}_i \in [x_{i-1}, x_i], P = \{x_0, \dots, x_n\}$

$$\left| A - \sum_{i=1}^n f(\mathcal{E}_)(x_i - x_{i-1}) \right| << epsilon$$

5.2 Integrierbare Funktionen

S 5.10 Seien $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $f+g, \lambda \cdot f, f \cdot g, |f|, \max(f,g), \min(f,g)$ und $\frac{f}{g}$ (falls $|g(x) \ge \beta > 0 \quad \forall x \in [a,b]|$) integrierbar **Bem:** 5.11 Sei $\phi : [c,d] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann ist

$$\sup_{x,y \in [c,d]} |\phi(x) - \phi(y)| = \sup_{x \in [c,d]} \phi(x) - \inf_{x \in [c,d]} \phi(x)$$

K 5.12 Seien P,¡ Polynome und $[a,b]$ ein Intervall in dem Q keine Nullstelle besitzt. Dann ist

$$[a,b] \to \mathbb{R}$$

$$x \to \frac{P(x)}{Q(x)}$$

integrierbar **D** 5.13 Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ ist in D **gleichmässig stetig**, falls $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x,y \in D :$

$$|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

S 5.15 (Heine 1872). Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in dem kompakten Intervall $[a,b]$. Dann ist f in $[a,b]$ gleichmässig stetig. **S** 5.16 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar **S** 5.17 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton. Dann ist f integrierbar **Bem:** 5.18 Seien $a < b < c$ und $f : [a.c] \to \mathbb{R}$ beschränkt mit $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ integrierbar. Dann ist f integrierbar und

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

S 5.19 Sei $I \subsetneq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit Endpunkten a,b sowie $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))\,dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x$$

5.3 Ungleichungen und Mittelwertsatz

S 5.20 Seien $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar, und

$$f(x) \le g(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

Dann folgt:

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

K 5.21 Falls $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar, folgt

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

S 5.22(Cauchy-Schwarz Ungleichung 1821) Seien $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar. Dann gilt:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\,dx \right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}$$

S 5.23(Mittelwertsatz, Cauchy 1821) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $\mathcal{E} \in [a,b]$ mit:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\mathcal{E})(b-a)$$

S 5.25(Cauchy 1821) SEien $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ wobei f stetig, g beschränkt integrierbar mit $g(x) \ge 0 \quad \forall x \in [a,b]$. Dann gibt es $\mathcal{E} \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\mathcal{E}) \int_a^b g(x)\,dx$$

5.4 Fundamentalsatz

S 5.26 Seien $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad a \le x \le b$$

ist in $[a,b]$ stetig differenzierbar und

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

D 5.27 Sei $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Eine Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ heisst **Stammfunktion** von f, falls F (stetig) differenzierbar in $[a,b]$ ist und $F' = f$ in $[a,b]$ gilt **S** 5.28 (Fundamentalsatz der Differentialrechnung) Sei $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine Stammfunktion F von f, die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

S 5.30(Partielle Integration) Seien $a < b$ reele Zahlen und $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

S 5.31(Substitution) Sei $a < b, \phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $\phi([a,b]) \subseteq I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$$

K 5.33 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig.

1 Seien $a,b,c \in \mathbb{R}$ so dass das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten a+c, b+c in I enthalten ist. Dann gilt:

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx = \int_a^b f(t+c)\,dt$$

2 Seien $a,b,c \in \mathbb{R}$ mit $c \ne 0$ so dass das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten ac, bc in I enthalten ist. Dann gilt:

$$\int_a^b f(ct)\,dt = \frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} f(x)\,dx$$

5.5 Integration konvergenter Reihen

S 5.34 Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von beschränkten, integrierbaren Funktionen die gleichmässig gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f beschränkt integrierbar und

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

K 5.35 Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge beschränkter integrierbarer Funktionen so dass

$$\sum_{n=0}^\infty f_n$$

auf $[a.b]$ gleichmässig konvergiert. Dann gilt :

$$\sum_{n=0}^\infty \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b (\sum_{n=0}^\infty f_n(x))\,dx$$

K 5.36 Sei

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty c_k x^k$$

eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist für jedes $0 \le r < \rho$, f auf $[-r,r]$ integrierbar und es gilt $\forall x \in]-\rho, \rho[$:

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$$

5.6 Euler-McLaurin Summationsformel

D 5.40 $\forall k \ge 0$ ist das k'te Bernoulli Polynom $B_k(x) = k!P_k(x)$ **D** 5.41 Sei $B_0 = 1$ für alle $k \ge 2$ definieren wir B_{k-1} rekursiv:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} B_i = 0$$

S 5.42

$$B_k(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B_i x^{k-i}$$

Bem: 5.43 Für $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} B_k(1) &= \sum_{i=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array} \right) B_i = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array} \right) B_i + B_k \\ &= B_k \quad \text{(nach 5.41)} \\ &= B_k(0) \quad \text{(nach Satz 5.42).} \end{aligned}$$

Zur Aussage der Summationsformel definieren wir für $k \geq 1$

$$\widetilde{B}_k : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

als

$$\widetilde{B}_k(x) = \begin{cases} B_k(x) & \text{für} \quad 0 \leq x < 1 \\ B_k(x-n) & \text{für } n \leq x < n+1 \text{ wobei } n \geq 1 \end{cases}$$

S 5.44 Sei $f : [0,n] \to \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar, $k \geq 1$. Dann gilt :

1 Für k = 1:

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \int_0^n \tilde{B}_1(x) f'(x)\,dx$$

2 Für $k \geq 2$:

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \sum_{J=2}^{k} \frac{(-1)^j B_j}{j!}(f^{(j-1)}(n) - f^{(j-1)}(0)) + \tilde{R}_k$$

wobei

$$\tilde{R}_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^n \tilde{B}_k(x) f^{(k)}(x)\,dx$$

5.7 Stirling'sche Formel

S 5.47

$$n! = \frac{\sqrt{2\pi n} n^n}{e^n} \cdot \exp\left(\frac{1}{12n} + R_3(n)\right)$$

wobei

$$|R_3(n)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216 \cdot \frac{1}{n^2}} \quad \forall n \geq 1$$

L 5.48 $\forall m \geq n + 1 \geq 1$:

$$|R_3(m,n)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

5.8 Uneigentliche Integrale

D 5.49 Sei $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a,b]$ für alle $b > a$. Falls

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

existiert, bezeichnen wir den Grenzwert mit

$$\int_a^\infty f(x\,dx)$$

und sagen, dass f auf $[a, +\infty[$ integrierbar ist.

L 5.51 Sei $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a,b] \quad \forall b > a$

1 Falls $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \geq a$ und $g(x)$ ist auf $[a, \infty[$ integrierbar, so ist f auf $[a, \infty[$ integrierbar

2 Falls $0 \leq g(x) \leq f(x)$ und $\int_a^\infty$ divergiert, so divergiert auch $\int_a^\infty f(x)\,dx$

S 5.53 (McLaurin 1742) Sei $f : [1, \infty[\to [0, \infty[$ monoton fallend. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

konvergiert genau dann, wenn

$$\int_1^\infty f(x)\,dx$$

konvergiert

D 5.56 In dieser Siutation ist $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar falls

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx$$

existiert, in diesem Fall wird der Grenzwert mit $\int_a^b f(x)\,dx$ bezeichnet

5.9 Die Gamma Funktion

D 5.59 Für s ¿ 0 definieren wir

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\,dx$$

S 5.60(Bohr-Mollerup)

1 Die Gamme Funktion erfüllt die Relationen

(a) $\Gamma(1) = 1$

(b) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \forall s > 0$

(c) Γ ist logarithmisch, das heisst

$$\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}$$

für alle $x, y > 0$ und $0 \leq \lambda \leq 1$

2 Die Gamme Funktion ist die einzige Funktion auf $0, \infty[\to]0, \infty[$ die (a), (b) und (c) erfüllt. Darüber hinaus gilt:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)} \quad \forall x > 0$$

L 5.61 Sei $\rho > 1$ und $q > 1$ mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Dann gilt $\forall a, b \geq 0$

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

S 5.62(Hölder Ungleichung). Seien $\rho > 1$ und $q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für alle $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig gilt:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq ||f||_p \, ||g||_q$$

5.10 Das unbestimmte Integral