1 Grundlagen

S 1.1 Es gibt keine Gleichung der Form

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = 0$$

mit $a_i \in \mathbb{Q}$, so dass $x = \pi$ eine Lösung ist

S 1.2 R ist ein kommutativer, angeordneter Körper, der ordnungsvollständig ist

D Axiome der Addition

A1 Assoziativität $x + (y + z) = (x + y) + z$

A2 Neutrales Element $x + 0 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

A3 Inverses Element $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$

A4 Kommutativität $x + z = z + x \quad \forall x, z \in \mathbb{R}$

D Axiome der Multiplikation

M1 Assoziativität $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad \forall x, y, z \in R$

M2 Neutrales Element $x \cdot 1 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

M3 Inverses Element $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0\ \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$

M4 Kommutativität $x \cdot z = z \cdot x \quad \forall x, z \in \mathbb{R}$

D Distributivität

D1 Distributivität $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

D Ordnungsaxiome

O1 Reflexivität $x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

O2 Transitivität $x \leq y$ and $y \leq z \implies x \leq z$

O3 Antisymmetrie $x \leq y$ and $y \leq x \implies x = y$

O4 Total $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$

D Kompatibilität

K1 $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \implies x + z \leq y + z$

K2 $\forall x \geq 0, \forall y \geq 0 : x \cdot y \geq 0$

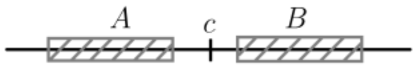
D Ordnungsvollständigkeit

Seien A,B $\subseteq$ von $\mathbb{R}$

i $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$

ii $\forall a \in A$ and $\forall b \in B : a \leq b$

Dann gibt es $c \in \mathbb{R}$, dass $\forall \in A : a \leq c$ und $\forall b \in B : c \leq b$



K 1.6

1 Additive und multiplikate Inverse eindeutig

2 $0 \cdot x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3 $(-1) \cdot x = -x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4 $y \geq 0 \Leftrightarrow (-y) \leq 0$

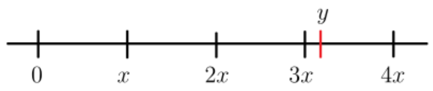
5 $y^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

6 $x \leq y$ and $u \leq v \implies x + u \leq y + v$

7 $0 \leq x \leq y$ und $0 \leq u \leq v \implies x \cdot u \leq y \cdot v$

K 1.7(Archimedisches Prinzip)

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$.Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $y \leq n \cdot x$



S 1.8

Für jedes $t \geq 0, t \in \mathbb{R}$ hat $x^2 = t$ eine Lösung in $\mathbb{R}$

D 1.9 Seien $x, y \in \mathbb{R}$

(i) $\max\{x,y\} = \begin{cases} x & \text{falls} \quad y \leq x \\ y & \text{falls} \quad x \leq y \end{cases}$

(ii) $\min\{x,y\} = \begin{cases} y & \text{falls} \quad y \leq x \\ x & \text{falls} \quad x \leq y \end{cases}$

(iii) Der Absolutbetrag einer Zahl $x \in \mathbb{R}$: $|x| = max\{x, -x\}$

S 1.10

(i) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(ii) $|xy| = |x|\,|y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(iv) $|x + y| \geq |x| - |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

S 1.11(Young'sche Ungleichung)

$\forall \epsilon > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$2\,|xy| \leq \epsilon x^2 + \frac{1}{\epsilon} y^2$$

1.1 Infimum und Supremum

D 1.12 Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge.

1) $c \in \mathbb{R}$ ist **obere Schranke** if $\forall a \in A : a \leq c$

2) $c \in \mathbb{R}$ ist **untere Schranke** if $\forall a \in A : c \leq a$

3) $m \in \mathbb{R}$ heisst ein **Maximum** von A if $m \in A$ und m eine obere Schranke von A ist.

4) $m \in \mathbb{R}$ heisst ein **Minimum** von A if $m \in A$ und m eine untere Schranke von A ist.

S 1.15 . Sei $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

1) Sei A nach oben beschränkt. Dann gibt es eine kleinste obere Schranke:

$$c := \sup A \quad \textbf{(Supremum von A)}$$

2) Sei A nach unten beschränkt. Dann gibt es eine grösste untere Schranke:

$$d := \inf A \quad \textbf{(Infimum von A)}$$

Eigenschaften von Supremum und Infimum

- $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$
- $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$
- $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$
- $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$

K 1.16 Seien $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen von $\mathbb{R}$

1 Falls B nach oben beschränkt ist, $\sup A \leq \sup B$

2 Falls B nach unten beschränkt ist, $\inf B \leq \inf A$

B 1.17

1. $A = [1, 2[$: $supA = 2, infA = 1$
2. $A = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ ist nicht nacht oben beschränkt (harmonische Reihe)
3. $A = \{1 - \frac{1}{3}, (1 - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{7}), (1 - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{7}) + (\frac{1}{9} - \frac{1}{11}), \dots\}$ Dann gilt: $\sup A = \frac{\pi}{4}$(Leibniz).

D 1.18 Kardinalität

(i) Zwei Mengen X,Y heissen gleichmächtig if eine Bijection $f : X \to Y$ existiert

(ii) Eine Menge ist endlich, wenn $X = \emptyset$ or $\exists n \in \mathbb{N}$ so dass$\{1, 2, \dots, n\}$gleichmächtig wie X

(iii) Eine Menge X ist abzähbar if endlich oder gleichmächtig wie $\mathbb{N}$

S 1.20 (Cantor) $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar

2 Folgen und Reihen

D 2.1 Eine **Folge** ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}(\mathbb{N}^* = \mathbb{N}/\{0\})$$

2.1 Grenzwert einer Folge

L 2.3 $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge, es gibt höchstens eine Zahl $l \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:
$\forall \epsilon > 0$ ist Menge $\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin]l - \epsilon, l + \epsilon[\}$ endlich

D 2.4 $(a_n)_{n \geq 1}$ ist **konvergent**, falls $l \in \mathbb{R}$ so dass $\forall \epsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N}^* : a_n \notin]l - \epsilon, l + \epsilon[\}$ endlich ist. Dieses l ist der **Limes** der Folge.

Bem: [2.5] Jede Konvergente Folge ist beschränkt

L 2.6 Folgende Aussagen sind äquivalent

1 $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergiert gegen $l = \lim_{n \to \infty} a_n$

2 $\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 1$ that

$$|a_n - l| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

B 2.7 Sei $a_n = \frac{n}{n+1}, n \geq 1$.
Dann gilt: $\lim_{n \to \infty} a_n = 1$
Begründung: $a_n - 1 = \frac{n}{n+1} - 1 = \frac{-1}{n+1}$. Es folgt $|a_n - 1| = \frac{1}{n+1}$ Sei $\epsilon > 0$; Nach Archimedes gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N+1} < \epsilon$.
Dann folgt $\forall n \geq N$:

$$|a_n - 1| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \epsilon$$

S 2.8 Seien $(a_n)_{n \geq 1}$ und $(b_n)_{n \geq 1}$ konvergent Folgen mit $a = \lim_{n \to \infty} a_n$, $b = \lim_{n \to \infty} b_n$

1 $(a_n + b_n)_{n \geq 1}$ ist konvergent und $\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = a + b$

2 $(a_n \cdot b_n)_{n \geq 1}$ ist konvergent und $\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

3 if $b_n \neq 0\ \forall n \geq 1, b \neq 0$ $(\frac{a_n}{b_n})_{n \geq 1}$ konvergent, $\lim_{n \to \infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$

4 Falls existiert K ≥ 1 mit $a_n \leq b_n\ \forall n \geq K \implies a \leq b$

B 2.9 $b \in \mathbb{Z} : \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^b = 1$
Das folgt aus $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ und wiederholter Anwendung von Satz 2.8 (2) & (3)

2.2 Satz von Weierstrass

D 2.10

1 $(a_n)_{n \geq 1}$ ist **monoton wachsend** if

$$a_n \leq a_{n+1}\ \forall n \geq 1$$

2 $(a_n)_{n \geq 1}$ ist **monoton fallend** if

$$a_{n+1} \leq a_n\ \forall n \geq 1$$

S 2.11 (Weierstrass)

- Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n \geq 1}$ nach

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}$$

- Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n \geq 1}$ nach

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq 1\}$$

B 2.12 Sei $a \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq q < 1$. Dann gilt $\lim_{n \to \infty} n^a q^n = 0$. Sei $x_n = n^a q^n$ dann folgt

$$x_{n+1} = (n+1)^a q^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^a q \cdot n^a q^n =$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \cdot q \cdot x_n$$

Also:

$$x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \cdot q \cdot x_n$$

Da $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a = 1$ gibt es ein n_0, so dass $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^a < \frac{1}{q}\ \forall n \geq n_0$. Es folgt: Da $x_n > 0\ \forall n \geq 1$

ist die Folge nach unten beschränkt und für $n \ge n_0$ monoton fallend. Sei

$$l = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^a \cdot q x_n$$

$$= q\cdot \lim_{n\to\infty} x_n = q\cdot l$$

Also $(1-q)\cdot l = 0$ woraus l=0 folgt.

Bem: [2.13] Oben haben wir folgede Tatsache benützt: Sei $(a_n)_{n\ge1}$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $k\in\mathbb{N}$. Dann ist die durch

$$b_n := a_{n+k} \quad n\ge 1$$

definierte Folge konvergent und

$$lim_{n\to\infty} b_n = a$$

B 2.14 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

B 2.15 Die Folge $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n\ge 1$ konvergiert. Der Limes ist

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

die Eulersche Konstante $e \approx 2.71828$

L 2.16 (Bernoulli Ungleichung)

$$(1+x)^n \ge 1+n\cdot x \quad \forall n\in\mathbb{N}, x>-1$$

B 2.17 Sei $c>1$. Wir definieren $(a_n)_{n\ge1}$ durch:

$$a_1 = c,\quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n+\frac{c}{a_n}\right)\quad n\ge1$$

Dann existiert $a := \lim_{n\to\infty} a_n > 0$ und es gilt $a^2=c$

1. $(a_n)_{n\ge1}$ ist monoton fallend.

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a_n}-a_n\right) = a_n + \left(\frac{c-a_n^2}{2a_n}\right)$$

Wir zeigen zunächst: $a_n^2 \ge c \quad \forall n\ge1$ Für $n=1: a_1^2=c^2>c$, da $c>1$. Und für $n\ge1$:

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + (c-a_n^2) + \left(\frac{c-a_n^2}{2a_n}\right)^2 =$$

$$c + \left(\frac{c-a_n^2}{2a_n}\right)^2 \ge c$$

Aus $a_n^2\ge c$ folgt:

$$a_{n+1} = a_n + \left(\frac{c-a_n^2}{2a_n}\right) \le a_n$$

2. Es ist klar: $a_n>0 \quad \forall n\ge1$ Aus $a_n^2\ge c>1$ folgt dann $a_n\ge1\ \forall n\ge1$
3. Nach Weierstrass: $a=\lim_{n\to\infty} a_n$, dann folgt aus (2) $a\ge1 \& a\ne0$

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{c}{\lim_{n\to\infty} a_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(a+\frac{c}{a}\right) \implies a^2=c$$

2.3 Limes inferior, Limes superior

Eine wichtige Anwendung des Satzes von Weierstrass ist, wie man mit jeder beschränkten Folge $(a_n)_{n\ge1}$ zwei monotone Folgen $(b_n)_{n\ge1}$ und $(c_n)_{n\ge1}$ definieren kann, welche dann einen Grenzwert besitzen.

$$\lim_{n\to\infty}\inf a_n = \lim_{n\to\infty} b_n, (b_n = inf\{a_k : k\ge n\})$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup a_n = \lim_{n\to\infty} c_n,\ (c_n = sup\{a_k:k\ge n\})$$

$$\lim_{n\to\infty}\inf a_n \le \lim_{n\to\infty}\sup a_n$$

B 2.18 $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n},\ n\ge1.$

Dann: $b_n = -1$ und $c_n = 1+\frac{1}{n_g}$ wobei n_g die kleinste gerade Zahl $\ge n$ bezeichnet. Also: $\lim_{n\to\infty}\inf a_n = -1$ und $\lim_{n\to\infty}\sup a_n=+1$

2.4 Cauchy Kriterium

Wie sieht man einer Folge an, ob sie konvergent ist, ohne ihren Grenzwert zu kennen? Dafür wird das Cauchy Kriterium angewendet.

L 2.19 $(a_n)_{n\ge1}$ konvergiert if only if $(a_n)_{n\ge1}$ beschränkt und

$$\lim_{n\to\infty}\inf a_n = \lim_{n\to\infty}\sup a_n$$

S 2.20 (Cauchy Kriterium) .

Die Folge $(a_n)_{n\ge1}$ ist genau dann konvergent wenn

$$\forall\epsilon>0\ \exists N\ge1 \text{ so dass } |a_n-a_m|<\epsilon\ \forall n,m\ge N$$

2.5 Satz von Bolzano-Weierstrass

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

D 2.21 Ein abgeschlossenes Intervall ist $I\subseteq\mathbb{R}$

1 $[a,b]\quad a\le b,\ a,b\in\mathbb{R}$
2 $[a,+\infty[\ a\in\mathbb{R}$
3 $]-\infty,a]\ a\in\mathbb{R}$
4 $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$

Länge $\mathcal{L}(I)$ ist in 1) $b-a$, ansonsten $+\infty$

Bem: [2.22] $I\subseteq\mathbb{R}$ ist abgeschlossen if only if für jede konvergente Folge $(a_n)_{n\ge1}$ aus Elementen in I, der Grenzwert auch in I ist.

Bem: [2.23] Seien $I=[a,b], J=[c,d]$ mit $a\le b$ und $c\le d$ $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Dann gilt $I\subseteq J$ genau dann, wenn $c\le a$ und $b\le d$

S 2.25 (Cauchy-Cantor) Sei $I_1 \supseteq I_2\supseteq\dots$ eine Folge abgeschlossener Intervale mit $\mathcal{L}(I_1)<+\infty$

Dann gilt

$$\bigcap_{n\ge1} I_n \ne\emptyset$$

Falls zudem $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(I_n)=0$ enthält $\bigcap_{n\ge1}I_n$ genau einen Punkt

D 2.27 Eine Teilfolge einer Folge $(a_n)_{n\ge1}$ ist eine Folge $(b_n)_{n\ge1}$ wobei

$$b_n = a_l(n)$$

und $l:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ eine Abbildung ist mit

$$l(n)<l(n+1)\quad \forall n\ge 1s$$

S 2.29 (Bolzano.Weierstrass) Jede beschränkte Folge besitzt eine Konvergente Teilfolge

Bem: [2.30] Sei $(a_n)_{n\ge1}$ eine beschränkte Folge. Dann gilt für jede konvergente Teilfolge $(b_n)_{n\ge1}$:

$$\lim_{n\to\infty}\inf a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n \le \lim_{n\to\infty}\sup a_n$$

.

2.6 Folgen in $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{C}$

D 2.31 Eine Folge in $\mathbb{R}^d$ ist eine Abbildung

$$a:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}^d$$

D 2.32 Eine Folge $(a_n)_{n\ge1}$ in $\mathbb{R}^d$ heisst **konvergent**, falls es $a\in\mathbb{R}^d$ gibt so dass:

$$\forall\epsilon>0\ \exists N\ge1 \text{ mit } ||a_n-a||<\epsilon\ \forall n\ge N$$

S 2.33 Sei $b = b_1,\dots,b_d$. 1) und 2) sind äquivalent:

1 $\lim_{n\to\infty} a_n = b$
2 $\lim_{n\to\infty} a_{n,j} = b_j\quad \forall 1\le j\le d$

S 2.36

1 Eine Folge $(a_n)_{n\ge1}$ konvergiert genau, wenn sie eine Cauchy Folge ist :

$$\forall\epsilon>0\ \exists N\ge1 \text{ mit } ||a_n-a_m||<\epsilon\ \forall n,m\ge N$$

2 Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge

2.7 Reihen

D 2.7.0 Eine Reihe ist eine unendliche Summe

$$S_n := a_1+\dots+a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

D 2.37 Die Reihe

$$\sum_{k=1}^\infty a_k$$

ist **konvergent**, falls die Folge $(S_n)_{n\ge1}$ der Partialsummen konvergiert. In diesem Fall :

$$\sum_{k=1}^\infty a_k := \lim_{n\to\infty} S_n$$

B 2.38 (Geometrische Reihe). Sei $q\in\mathbb{C}$ mit $|q|<1$. Dann konvergiert $\sum_{k=0}^\infty q^k$ und der Wert ist:

$$\sum_{k=0}^\infty q^k = \frac{1}{1-q}$$

Sei $S_n = \sum_{k=0}^n q^k = 1+q+\dots+q^n$

$$q\cdot S_n = q+\dots q^n + q^{n+1}$$

woraus

$$(1-q)S_n = 1-q^{n+1}$$

folgt. Es gilt also: $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Nun zeigen wir die Konvergenz:

$$\left|S_n - \frac{1}{1-q}\right| = \left|\frac{-q^{n+1}}{1-q}\right| = \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|}$$

Aus Bsp 2.12 und $0\le|q|<1$ folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \left|S_n-\frac{1}{1-q}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|} = 0$$

Somit konvergiert $(S_n)_{n\ge1}$ gegen $\frac{1}{1-q}$

S 2.40 Seien $\sum_{k=1}^\infty a_k$ und $\sum_{j=1}^\infty b_j$ konvergent, sowie $\alpha\in\mathbb{C}$

1 $\sum_{k=1}^\infty (a_k+b_k)$ konvergent und $\sum_{k=1}^\infty(a_k+b_k) = (\sum_{k=1}^\infty a_k)+(\sum_{j=1}^\infty b_j)$
2 $\sum_{k=1}^\infty \alpha\cdot a_k$ konvergent und $\sum_{k=1}^\infty \alpha\cdot a_k = \alpha\cdot\sum_{k=1}^\infty a_k$

S 2.41 (Cauchy Kriterium)

Die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergiert genau dann, wenn:

$$\forall\epsilon>0\ \exists N\ge1 \text{ mit } \left|\sum_{k=n}^m a_k\right| < \epsilon \quad \forall m\ge n\ge N$$

Anmerkung: Aus dem Cauchy Kriterium folgt das Nullfolgenkriterium. Bildet die Folge der Summanden einer Reihe keine Nullfolge, dann divergiert die Reihe. Also falls $\lim_{n\to\infty}|a_n|\ne0 \implies \sum_{n=0}^\infty a_n$ divergiert.

S 2.42 Sei $\sum_{k=1}^\infty a_k$ eine Reihe mit $a_k\ge0\quad \forall k\in\mathbb{N}^*$. Die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergiert if only if $(S_n)_{n\ge1}, S_n=\sum_{k=1}^n a_k$ der Partialsummen nach oben beschränkt ist.

K 2.43 (Vergleichssatz)

Seien $\sum_{k=1}^\infty a_k$ und $\sum_{k=1}^\infty b_k$ Reihen mit:

$$0\le a_k\le b_k\quad\forall k\ge1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent}$$

Diese Implikation gilt auch, wenn

$$K \geq 1 \text{ mit } 0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq K$$

B 2.44 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert.
Sei $a_k = \frac{1}{k^2}, b_k = \frac{1}{(k-1)k}$, $k \geq 1$. Dann gilt $0 \leq a_k \leq b_k, k \geq 2$ und

$$\sum_{k=2}^{n} b_k = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \dots \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n} < 1 \quad \forall n \geq 1$$

D 2.45 Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heisst **absolut konvergent**

$$\text{falls} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ konvergiert}$$

S 2.46 Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist auch konvergent und:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

B 2.47 $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ konvergiert, ist aber nicht absolut konvergent.

S 2.48 (Leibniz 1682) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend mit $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \text{und es gilt } a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$$

B 2.49 Betrachten wir nochmals Bsp 2.47

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \leq S \leq 1$$

D 2.50 Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ ist eine **Umordnung** der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, falls eine bijektive Abbildung

$$\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^* \text{mit } a'_n = a_{\phi(n)}$$

S 2.52 (Dirichlet 1837) Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, dann konvergiert jede Umordnung (oder auch Teilfolge) der Reihe und hat den selben Grenzwert

---

S 2.53(Quotientenkriterium
Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1$.Falls

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}$$

Falls

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

B 2.54 (Exponentialfunktion). Für $z \in \mathbb{C}$ betrachte die Reihe

$$1 + z\frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

mit allgemeinem Glied

$$a_n = \frac{z^n}{n!}$$

Dann folgt für $z \neq 0$:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|z|}{n+1}$$

also gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0$ und die Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$
Bem: 2.55 Das Quotientenkriterium versagt, z.B wenn unendliche viele Glieder der Reihe verschwinden

---

S 2.56 Wurzelkriterium

1. Falls

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut

2. Falls

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

dann diviergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

D Kovergenzradius Gibt den Bereich an, in welchem für eine Potenzreihe Konvergenz garantiert ist. Sei $(c_k)_{k\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Falls $\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[k]{|c_k|}$ existiert, definieren wir

$$\rho = \begin{cases} +\infty & \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases} \tag{1}$$

Falls ab einem bestimmten Index all $a_n \neq 0$ und der folge limes definiert ist, kann man den Konvergenzradius auch mit dem Quotientenkriterium ausrechen.

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

K 2.57 Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

- konvergiert absolut für alle $|z| < \rho$
- divergiert für alle $|z| > \rho$

D Die Zeta Funktion Sei $s > 1$ und

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Für $s > 1$ konvergiert die obige Reihe
D 2.58 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist eine **lineare Anordnung** der Doppelreihe $\sum_{i,j\geq 0} a_{i,j}$, falls es eine Bijektion

$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

gibt mit $b_k = a_{\sigma(k)}$

S 2.59 (Cauchy 1821). Wir nehmen an, dass es $B \geq 0$ gibt, so dass

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} |a_{ij}| \leq B \quad \forall m \geq 0$$

Dann konvergieren die folgenden Reihen absolut:

$$S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall i \geq 0 \text{ und } U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall j \geq 0$$

sowie

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i \text{ und } \sum_{j=0}^{\infty} U_j$$

und es gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i = \sum_{j=0}^{\infty} U_j$$

Zudem konvergiert jede lineare Anordnung der Doppelreihe absolut, mit selbem Grenzwert
D 2.60 Das **Cauchy Produkt** der Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \sum_{j=0}^{\infty} b_j$$

ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}b_j) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \dots$$

S 2.62 Falls die Reihen

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \sum_{j=0}^{\infty} b_j$$

absolut konvergieren, so konvergiert ihr Cauchy Produkt und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}b_j) = (\sum_{i=0}^{\infty} a_i)(\sum_{j=0}^{\infty} b_j)$$

S 2.64 Sei $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge. Wir nehmen an :

1. $f(j) := \lim_{n\to\infty} f_n(j)$ existiert $\forall j \in \mathbb{N}$
2. Es gibt eine Funktion $g : \mathbb{N} \to [0, \infty[$, so dass
   2.1 $|f_n(j)| \leq g(j) \quad \forall j \geq 0, \forall n \geq 0$
   2.2 $\sum_{j=0}^{\infty} g(j)$ konvergiert

Dann folgt

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j)$$

K 2.65 Für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Folge $((1 + \frac{z}{n})^n)_{n\geq 1}$ und

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{z}{n})^n = \exp(z)$$

Aus K2.65 und Bsp.2.15 folgt

$$\exp(1) = e \text{ und } \exp(n) = \exp(1)^n = e^n$$

Deswegen $\exp(z) = e^z$

---

3 Stetige Funktionen

3.1 Reellwertige Funktionen

D 3.1 Sei $f \in \mathbb{R}^d$

1. f ist nach **oben beschränkt**, if $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt ist
2. f ist nach **unten beschränkt**, if $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ nach unten beschränkt ist
3. f ist beschränkt, if $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ b ist

D 3.2 Eine funktion $f : D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ ist

1. **monoton wachsend**, if $\forall x, y \in D$
$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$
2. **streng monoton wachsend**, if $\forall x, y \in D$
$$x < y \implies f(x) < f(y)$$
3. **monoton fallend**, if $\forall x, y \in D$
$$x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$$
4. **streng monoton fallend**, if $\forall x, y \in D$
$$x < y \implies f(x) > f(y)$$
5. **monoton**, falls f monoton wachsend oder monoton fallend
6. **streng monoton**, falls f streng monoton wachsend/fallend

---

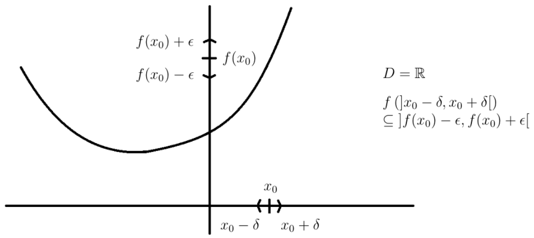
3.2 Stetigkeit

D 3.4 Sei $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist in x_0 **stetig**, falls es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$

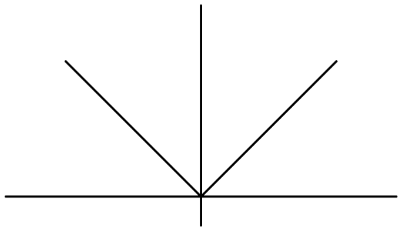
gibt, so dass für alle $x \in D$ die Implikation

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

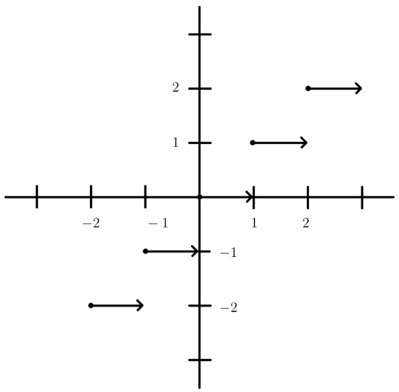
B 3.6 Sei $n \geq 0 : f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to x^n$ ist stetig.



2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto |x|$ ist stetig.



Die Abrundungsfunktion $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to \lceil x \rceil := \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq z\}$ ist in jedem Punkt $x_0 \notin \mathbb{Z}$ stetig; sie ist in keinem Punkt $y \in \mathbb{Z}$ stetig.



Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

D 3.5 Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist **stetig**, falls sie in jedem Punkt von D stetig ist.

S 3.7 Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Die Funktion f ist genau dann in x_0 stetig falls für jede Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in D folgende implikation gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

K 3.8 Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ beide stetig in x_0

1 Dann sind $f + g, \lambda \cdot f, f \cdot g$ stetig in x_0

2 Falls $g(x_0) \neq 0$ dann ist

$$\frac{f}{g} : D \cap \{x \in D : g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$$

$$x \to \frac{f(x)}{g(x)}$$

stetig in x_0

D 3.9 Eine **polynomiale Funktion** $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion der Form

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$$

wobei : $a_n \ldots a_0 \in \mathbb{R}$. Falls $a_n \neq 0$ ist n der **Grad** von P

K 3.10 Polynomiale Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig

K 3.11 Seien P,Q, polynomiale Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit $Q \neq 0$. Seien $x_1 \ldots x_m$ die Nullstellen von Q. Dann ist

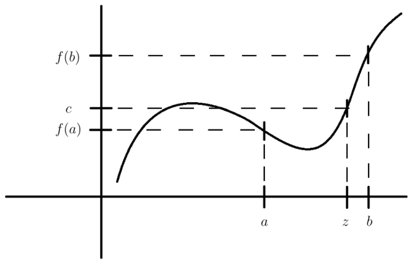
$$\frac{P}{Q} : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots x_m\} \to \mathbb{R}$$

$$x \to \frac{P(x)}{Q(x)}$$

stetig

3.3 Der Zwischenwertsatz

S 3.12 (Bolzano 1817). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b \in I$. Für jedes c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein z zwischen a und b mit $f(z) = c$

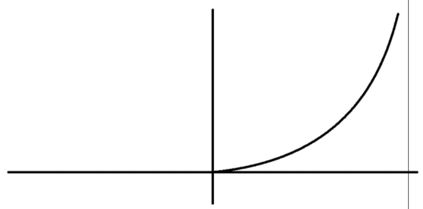


K 3.13 Sei $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ ein Polynom mit $a_n \neq 0$ und n ungerade. Dann besitzt P mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$
Bem: [3.14] für $c > 0$ besitzt $Q(x) = x^2 + c$ keine Nullstelle in R

3.4 Der Min-Max Satz

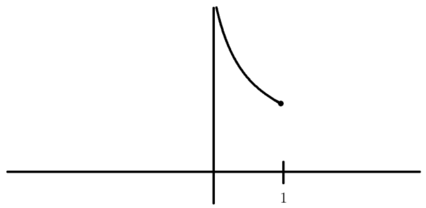
In diesem Abschnitt zeigen wir, dass eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall beschränkt ist und zudem ein Maximum und ein Minimum annimmt.

Beispiel 3.15. 1. $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \ x \longmapsto x^2$



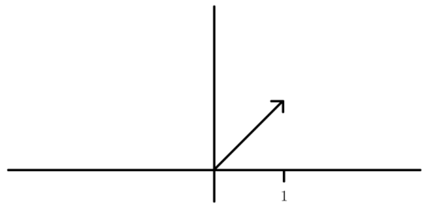
ist stetig aber nicht beschränkt.

2. $f :]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \longmapsto \frac{1}{x}$



ist stetig aber nicht beschränkt.

3. $f : [0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}, \ x \longmapsto x$



wobei das 3. Beispiel stetig und beschränkt ist, allerdings nimmt es kein Maximum an: Es gibt kein $a \in [0, 1[$, so dass $f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in [0, 1[$

D 3.16 Ein Intervall $\subseteq \mathbb{R}$ ist **kompakt**, falls es von Form

$$I = [a.b], \quad a \leq b$$

ist

L 3.17 Sei $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0. Dann sind

$$|f|, \max(f, g), \min(f, g)$$

stetig in x_0

L 3.18 Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$$

sei $a \leq b$. Falls $\{x_n : n \geq 1\} \subseteq [a, b]$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in [a, b]$$

S 3.19 Sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem kompakten Intervall I. Dann gibt es $u \in I$ und $v \in I$ mit

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall x \in I$$

Insbesondere ist f beschränkt

3.5 Der Satz über Umkehrabbildung

S 3.20 Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$ *zwei Teilmengen*, $f : D_1 \to D_2, g : D_2 \to \mathbb{R}$ Funktionen, sowie $x_0 \in D_1$. Falls f in x_0 und g in $f(x_0)$ stetig sind

$$g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}$$

in x_0 stetig

K 3.21 Falls in Satz 3.20 f auf D_1 und g auf D_2 stetig sind, so ist $g \circ f$ auf D_1 stetig

S 3.22 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton. Dann ist $J := f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f^{-1} : J \to I$ ist stetig. streng monoton.

B 3.23 Sei $n \geq 1$. Dann ist

$$[0, \infty[\to [0, \infty[$$

$$x \to x^n$$

streng monoton wachsend, stetig und surjektiv. Nach dem Umkehrsatz existiert eine streng monoton wachsende stetige Umkehrabbildung

$$[0, \infty[\to [0, \infty[$$

$$x \to \sqrt[n]{x}$$

3.6 Die reelle Exponentialfunktion

D Exponentialfunktion

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad z \in \mathbb{R}$$

S 3.24 exp : $\mathbb{R} \to]0, +\infty[$ ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv

K 3.25

$$\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\exp(x) > 1 \quad \forall x > 0$$

K 3.26

$$\exp(z) > \exp(y) \quad \forall z > y$$

K 3.27

$$\exp(x) \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

K 3.28 Der natürliche Logarithmus

$$\ln :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

ist eine streng monoton wachsende, stetige, bijektive Funktion. Des Weiteren gilt:

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b \quad \forall a, b \in]0, +\infty[$$

Wir können den Logarithmus und die Exponentialfunktion benutzen, um allgemeine Potenzen zu definieren. Für $x > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ beliebig definieren wir:

$$x^a := \exp(a \ln x)$$

Insbesondere $x^0 = 1 \quad \forall x > 0$

K 3.29

1 Für $a > 0$ ist

$$]0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$$

$$x \longrightarrow x^a$$

eine stetige, streng monoton wachsende Bijektion

2 Für $a < 0$ ist

$$]0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$$

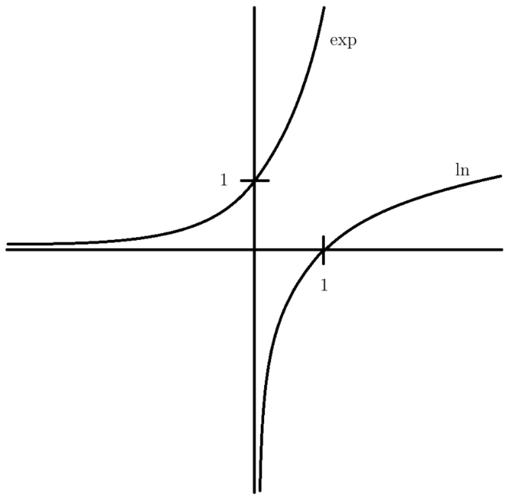
$$x \longrightarrow x^a$$

eine stetige, streng monoton fallende Bijektion

3 $ln(x^a) = a \ln(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall x > 0$

4 $x^a \cdot x^b = x^{a+b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$

5 $(x^a)^b = x^{a \cdot b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$



3.7 Konvergenz v. Funktionenfolgen

Eine Funktionenfolge ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^D$$

$$n \longrightarrow f(n)$$

D 3.30 Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 0}$ **konvergiert punktweise** gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, falls für alle $x \in D$:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

B 3.31 Sei $D = [0, 1]$ und

$$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}$$

$$x \to x^n$$

Dann folgt aus Bsp 2.12

$$lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} x^n = 0 \quad \forall 0 \leq x < 1$$

Ausserdem gilt $f_n(1) = 1^n = 1$. Also konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 0}$ punktweise gegen die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} \qquad (2)$$

Bemerke: die Funktionen f_n sind alle stetig in $[0, 1]$, die Funktion f ist nicht stetig in 1. Um zu garantieren, dass der Grenzwert einer Folge stetiger Funktionen stetig ist, braucht es zusätzliche Voraussetzungen.

D 3.32 (Weierstrass 1841) Die Folge

$$f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

konvergiert gleichmässig in D gegen

$$f : D \to \mathbb{R}$$

falls gilt $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \geq 1$, so dass

$$\forall n \geq N, \ \forall x \in D : \ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

In dieser Definition ist es wichtig, dass N nur von ϵ abhängig ist und nicht von $x \in D$.Deswegen kommt die Bedingung $\forall x \in D$ nach der Bedingung $\exists N \geq 1$

S 3.33 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge bestehend aus(in D) stetigen Funktionen die (in D) gleichmässig gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f (in D) stetig

D 3.34 Eine Funktionenfolge

$$f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist **gleichmässig konvergent**, falls für alle $x \in D$ der Grenzwert

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

existiert und die Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ gleichmässig gegen f konvergiert

K 3.35 Die Funktionenfolge

$$f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

konvergiert genau dann gleichmässig in D, falls

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \geq 1, \text{so dass } \forall n, m \geq N \text{ und } \forall x \in D :$$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

K 3.36 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Falls $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine gleichmässig konvergente Folge stetiger Funktionen ist, dann ist die Funktion

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

stetig

D 3.37 $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmässig (in D), falls die durch

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

definierte Funktionenfolge gleichmässig konvergiert

S 3.38 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und

$$f_n : D \to \mathbb{R}$$

eine Folge stetiger Funktionen. Wir nehmen an

$$|f_n(x)| < c_n \quad \forall x \in D$$

und, dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

gleichmässin in D und deren Grenzwert

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

ist eine in D stetige Funktion

D 3.39 Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

hat **positiven Konvergenzradius**, falls $\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$ existiert Der Konvergenzradius ist dann definiert als:

$$\rho = \begin{cases} +\infty & \text{falls } \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{c \to \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{falls } \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$$

S 3.40 Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$ und sei

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, |x| < \rho$$

Dann gilt: $\forall 0 \leq r < \rho$ konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

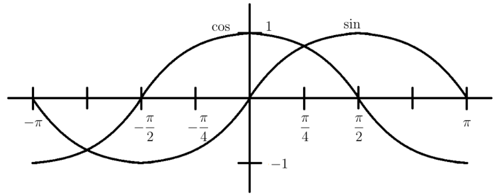
gleichmässig auf $[-r, r]$, insbesondere ist $f :] - \rho, \rho[\longrightarrow \mathbb{R}$ stetig

3.8 Trigonometrische Funktionen

D Sinus&Cosinus

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n)!}$$

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$



S 3.41 $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetige Funktionen

S 3.42

1 $\exp iz = \cos(z) + i \ sin(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

2 $\cos(z) = \cos(-z)$ und $\sin(-z) = -\sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

3 $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$

4 $\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$
$\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$

5 $\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

K 3.34

$$\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$$

$$\cos(2z) = \cos(z)^2 - \sin(z)^2$$

3.9 Die Kreiszahl π

S 3.44 Die Sinusfuktion hat auf $]0, +\infty[$ mindestens eine Nullstelle

$$\pi := \inf\{t > 0 : \sin t = 0\}$$

Dann gilt:

1 $\sin \pi = 0, \quad \pi \in]2, 4[$

2 $\forall x \in]0, \pi[: \sin x > 0$

3 $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$

K 3.45

$$x \geq \sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} \quad \forall 0 \leq x \leq \sqrt{6}$$

K 3.46

1 $e^{i\pi} = -1, \quad e^{2i\pi} = 1$

2 $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$,
$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3 $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$,
$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4. $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$,
   $\cos(x+2\pi) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
5. Nullstellen von Sinus $= \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$

   $$\sin(x) > 0 \quad \forall x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$$

   $\sin(x) < 0 \quad \forall x \in](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$
6. Nullstellen von Cosinus $= \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$
   $cos(x) > 0$
   $\forall x \in]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$
   $cos(x) < 0$
   $\forall x \in]-\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+2)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$

Für $z \notin \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}$ definieren wir:

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\tan(z)}$$

und für $z \notin \pi \cdot \mathbb{Z}$:

$$\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$$

3.10 Grenzwerte von Funktionen

D 3.47 $x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein **Häufungspunkt** der Menge D falls $\forall \delta > 0$:

$$(]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus\{x_0\}) \cap D \neq \emptyset$$

B 3.48 Sei $D = \{0\} \cup]1, 2[$. Dann ist die Menge D' der Häufungspunkt von D:

$$D' = [1, 2]$$

D 3.49 Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D. Dann ist $A \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to x_0$ bezeichnet mit

$$\text{"}\lim_{x \to x_0} f(x) = A\text{"}$$

falls $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ so dass

$$\forall x \in D \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus\{x_0\}) : |f(x) - A| < \epsilon$$

Bem: 3.50

1. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D. Dann gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ genau dann wenn für alle Folgen $(a_n)_{n \geq 1}$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit

   $$\lim_{n \to \infty} a_n = x_0$$

   folgt

   $$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = A$$

2. Sei $x_0 \in D$. Dann ist f stetig in x_0 genau dann, falls

   $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

3. Falls $f, g : D \to \mathbb{R}$ und $\lim_{x \to x_0} f(x), \lim_{x \to x_0} g(x)$ existieren, so folgt

   $$\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

   und

   $$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

4. Sei $f, g : D \to \mathbb{R}$ mit $f \leq g$. Dann folgt

   $$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

   falls beide Grenzwerte existieren

5. Falls $g_1 \leq f \leq g_2$ und

   $$\lim_{x \to x_0} g_1(x) = \lim_{x \to x_0} g_2(x)$$

   dann existiert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ und

   $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g_1(x)$$

B 3.51 Sei $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Dann gilt:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Aus K3.45 folgt $\forall x \in]0, \sqrt{6}$:

$$1 - \frac{x^2}{3!} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

und folglich $\forall x \in [-\sqrt{6}, \sqrt{6}] \setminus \{0\}$ da x^2 und $\frac{\sin x}{x}$ gerade sind. Die Aussage folgt dann aus Bem3.50(5)

S 3.52 Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$, x_0 Häufungspunkt von $D, f : D \longrightarrow E$ eine Funktion. Wir nehmen an, dass

$$y_0 := \lim_{x \to x_0} f(x)$$

existiert und $y_0 \in E$. Falls $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in y_0 folgt:

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$$

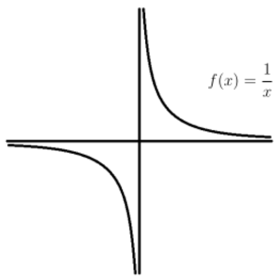
3.11 Linksseitige und rechsseitige Grenzwerte

Betrachten wir zum Beispiel

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \frac{1}{x}$$

Dann wird für $x > 0$, x beliebig nahe an 0, $\frac{1}{x}$ beliebig positiv gross und für $x < 0$, x beliebig nahe an 0, $\frac{1}{x}$ beliebig negativ "gross".In beiden Fällen hat $\frac{1}{x}$ ein einfaches Verhalten.



Im Fall $a \in \mathbb{R}$,

$$f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$$

$$x \to x^a$$

ist f auf $]0, \infty[$ definiert. Falls $a > 0$ werden wir sehen, dass

$$\lim_{x \in]0,\infty[\to 0} f(x) = 0$$

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir nehemn an, x_0 ist Häufungspunkt von $D \cap]x_0, +\infty[$; das heisst ein rechtsseitiger Häufungspunkt. Falls der Grenzwert der eingeschränkten Funktion

$$f|_{D \cap [x_0, +\infty[}$$

für $x \longrightarrow x_0$ existiert, wird er mit

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

bezeichnet und nennt sicht rechtsseitiger Grenzwert von f bei x_0.

Wir erweitern diese Definition auf:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$

falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0, \ \forall x \in D \cap]x_0, x_0 + \delta[: \ f(x) > \frac{1}{\epsilon}$$

und analog:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

falls

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in D \cap]x_0, x_0 + \delta[: f(x) < -\frac{1}{\epsilon}$$

Linksseitige Häufungspunkt und Grenzwerte werden analog definiert. Mit diesen Definitionen gilt:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

B 3.53 $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ Nun, $]0, \infty[\to R$, $x \to \ln x$ ist strikt monoton. Sei $e^{-(n+1)} < x < e^{-n}$, dann folgt $-(n+1) < \ln x < -n$

B 3.54 Für $a > 0$ ist $\lim_{x \to 0^+} x^a = 0$. Aus 5.53 folgt, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $\delta > 0$ gibt so dass:

$$0 < x < \delta \implies \ln x < -n$$

und da $a > 0$

$$a \ln x < -an$$

und da exp (streng) monoton wachsend,

$$x^a = \exp(a \ln x) < \exp(-an)$$

Nun wird mit $n \in \mathbb{N}$ beliebig gross $\exp(-an) = (\exp(-a))^n$ beliebig klein, da $\exp(-a) < 1$

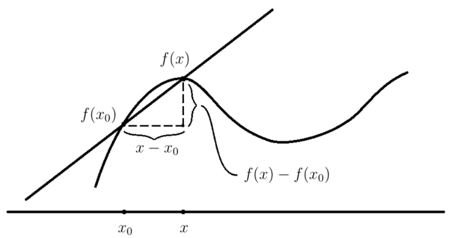
4 Differenzierbare Funktionen

D 4.1 Sei $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D
f ist ist **in** x_0 **Differenzierbar**, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Ist dies der Fall, wird der Grenzwert mit $f'(x_0)$ bezeichnet
Bem: 4.2: Es ist oft von Vorteil in der Definiton von $f'(x_0)$, $x = x_0 + h$ zu setzen

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ist die Steigung der Gerade durch $(x_0, f(x_0)), (x, f(x))$. Falls $f'(x_0)$ existiert ist die Intuition, dass die Familien der Geraden durch $(x_0, f(x_0)), (x, f(x))$ für $x \neq x_0, x \to x_0$ als "Grenzwert"die Tangente zum Graphen von f in $(x_0, f(x_0))$ annimmt.

4.1 Die Ableitung

S 4.3 (Weierstrass 1861). Sei $f : D \to \mathbb{R}, x_0 \in D$ Häufungspunkt von D. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. f ist in x_0 differenzierbar.
2. Es gibt $c \in \mathbb{R}$ und $r : D \to D$ mit:
   2.1 $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$
   2.2 $r(x_0) = 0$ und r ist stetig in x_0

Falls dies zutrifft ist $c = f'(x_0)$ eindeutig bestimmt
Die Formulierung der Differenzierbarkeit von f mittels

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$$

und der Stetigkeit von r in x_0 hat den Vorteil, dass sie keinen Limes enthält. Ausserdem ist dann

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

die Gleichung der Tangente zum Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. WIr können die Charakterisierung der Differenzierbarkeit noch vereinfachen in dem wir in Satz 4.3(2.1)

$$\phi(x) = f'(x_0) + r(x)$$

setzen. Wir erhalten:

S 4.4 Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in x_0 differenzierbar, falls es eine Funktion $\phi : D \to \mathbb{R}$ gibt die stetig in x_0 ist und so, dass

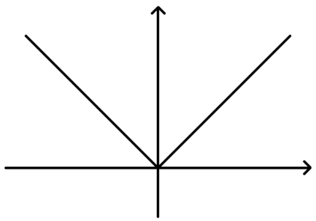
$$f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0) \quad \forall x \in D$$

In diesem Fall gilt $\phi(x_0) = f'(x_0)$

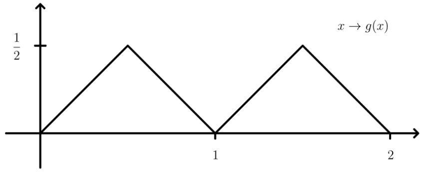
K 4.5 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D. Falls f in x_0 differenzierbar ist, so ist f stetig in x_0

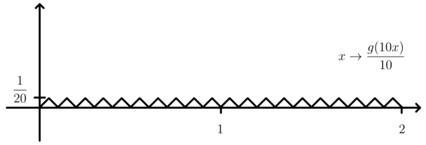
B 4.6

1. $f = 1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dann ist $f'(x) = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$
   Folgt aus $f(x) - f(x_0) = 1 - 1 = 0$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$. Dann ist $f'(x_0) = 1$
   Folgt aus $f(x) - f(x_0) = 1 \cdot (x - x_0)$
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$. Dann ist $f'(x_0) = 2x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$
   Folgt aus:
   $$f(x) - f(x_0) = x^2 - x_0^2 = (x - x_0)(x + x_0)$$
   Also für $x \neq x_0$:
   $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = x + x_0$$
   woraus
   $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$$
   folgt.
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$



   Ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar:
   Für $x < 0$:
   $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = -1$$
   Für $x > 0$:
   $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = 1$$
   Also hat für $x \to 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ keinen Grenzwert. Für alle $x_0 \neq 0$ ist f in x_0 differenzierbar.
5. (Van der Waerden) Sei für $x \in \mathbb{R}$,
   $$g(x) = \min\{|x - m| : m \in \mathbb{Z}\}$$





   Sei
   $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(10^n x)}{10^n}$$
   Dann ist nach Satz 3.38 diese Reihe auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmässig konvergent und f ist deswegen stetig. Mittels Dezimalentwicklung kann man zeigen, dass f in keinem Punkt von $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

D 4.7 $f : D \to \mathbb{R}$ ist **in D differenzierbar**, falls für jeden Häufungspunkt $x_0 \in D, f$ in x_0 differenzierbar ist.

B 4.8

1. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in $\mathbb{R}$ differenzierbar und $exp' = exp$ Seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und $h \neq 0$:
   $$\frac{\exp(x_0 + h) - \exp(x_0)}{h} =$$
   $$\frac{\exp(x_0)\exp(h) - \exp(x_0)}{h} =$$
   $$\exp(x_0)\left[\frac{\exp(h) - 1}{h}\right]$$
   Also:
   $$\exp'(x_0) = \exp(x_0) \lim_{h \to 0} \left[\frac{\exp(h) - 1}{h}\right]$$
   Aus $\exp(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \ldots$ folgt für $h \neq 0$:
   $$\frac{\exp(h) - 1}{h} = 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \ldots$$
   und für $h \in [-1, 1], h \neq 0$:
   $$\left|\frac{\exp(h) - 1}{h} - 1\right| \leq |h| \left[\frac{1}{2!} + \frac{|h|}{3!} + \ldots\right] \leq 2\,|h|$$
   woraus
   $$\lim_{h \to 0} \left(\frac{\exp(h) - 1}{h}\right) - 1 = 0$$
   folgt.
2. $\sin' = \cos$ *und* $\cos' = -\sin$

S 4.9 Sei $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D und $f, g : D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar. Dann gelten

1 $f + g$ ist in x_0 differenzierbar und
$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2 $f \cdot g$ ist in x_0 differenzierbar und $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

3 Falls $g(x_0) \neq 0$ ist $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

D Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst **gerade(resp. ungerade)**, falls $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$) gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

B 4.10

1. $n \geq 1 : (x^n)' = nx^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. Die Tangensfunktion
   $$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$$
   ist auf ihrem Definitonsbereich differenzierbar und
   $$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$
3. Die Cotangensfunktion
   $$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, x \notin \pi\mathbb{Z}$$
   ist auf ihrem Definitonsbereich differenzierbar und
   $$cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

S 4.11 Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ und sei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt. Sei $f : D \to E$ eine in x_0 differenzierbare Funktion so dass $y_0 := f(x_0)$ ein Häufungspunkt von E ist, und sei $g : E \to \mathbb{R}$ eine in y_0 differenzierbare Funktion. Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

K 4.12 Sei $f : D \to E$ eine bijektive Funktion, $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt; wir nehem an f ist in x_0 differenzierbar und $f'(x) \neq 0$; zudem nehemn wir an f^{-1} ist in $y_0 = f(x_0)$ stetig. Dann ist y_0 Häufungspunkt von E, f^{-1} ist in y_0 differenzierbar und

$$\left(f^{-1}\right)(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

B 4.13

1. Die Ableitung von $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ ist
   $$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$
   Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
   $$\ln(\exp(x)) = x$$
   S4.11 für $f(x) = \exp x$ und $g(y) = \ln y$
   $$\ln'(\exp x)\exp'(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
   und da $\exp : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ bijektiv ist, folgt:
   $$\forall y \in]0, \infty[: \quad \ln'(y) \cdot y = 1$$

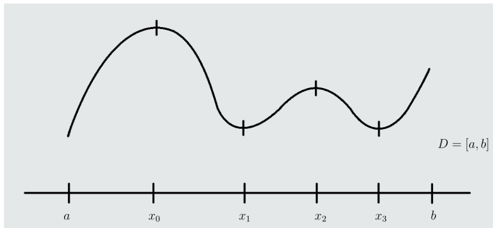
4.2 Erste Ableitung

D 4.14 Sei $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$

1 f besitzt ein lokales Maximum in x_0 falls es $\delta > 0$ gibt mit:
$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D$$

2 f besitzt ein lokales Minimum in x_0 falls es $\delta > 0$ gibt mit:
$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D$$

3 f besitzt ein lokales Extremum in x_0 falls es entweder ein lokales Minimum oder Maximum von f ist.



x_0, x_2 sind lokale Maximalstellen und x_1, x_3 sind lokale Minimalstellen.

S 4.15 Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}, x_0 \in]a, b[$. Wir nehmen an, f ist in x_0 differenzierbar

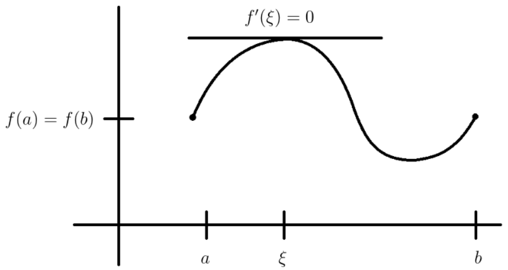
1 Falls $f'(x) > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit
$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$$
$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$$

2 Falls $f'(x_0) < 0$ gibt es $\delta > 0$ mit
$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$$
$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$$

3 Falls f in x_0 ein lokales Extremum besitzt, folgt $f'(x_0) = 0$

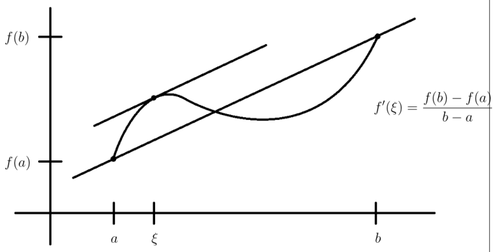
S 4.16 (Rolle 1690). Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Erfüllt sie $f(a) = f(b)$ so gibt es $\mathcal{E} \in]a, b[$ mit

$$f'(\mathcal{E}) = 0$$



S 4.17 (Lagrange 1797) Sei $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ stetig mit f in $]a, b[$ differenzierbar. Dann gibt es $\mathcal{E} \in]a, b[$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\mathcal{E})(b - a)$$



K 4.18 Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar

1 Falls

$$f'(\mathcal{E}) = 0 \quad \forall \mathcal{E} \in]a, b[\text{ ist f konstant}$$

2 Falls $f'(\mathcal{E}) = g'(\mathcal{E}) \quad \forall \mathcal{E} \in]a, b[$
gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x) + c \quad \forall x \in [a, b]$.

3 Falls $f'(\mathcal{E}) \geq 0 \quad \forall \mathcal{E} \in]a, b[$
ist f auf $[a, b]$ monoton wachsend

4 Falls $f'(\mathcal{E}) > 0 \quad \forall \mathcal{E} \in]a, b[$
ist f auf $[a, b]$ strikt monoton wachsend

5 Falls $f'(\mathcal{E}) \leq 0 \quad \forall \mathcal{E} \in]a, b[$
ist f auf $[a, b]$ monoton fallend

6 Falls $f'(\mathcal{E}) < 0 \quad \forall \mathcal{E} \in]a, b[$
ist f auf $[a, b]$ strikt monoton fallend

7 Falls es $M \geq 0$ gibt mit

$$|f'(\mathcal{E})| \leq M \quad \forall \mathcal{E} \in]a, b[$$

dann folgt $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M\, |x_1 - x_2|$$

B 4.19

1. arcsin: Da $\sin' = cos$ und $\cos(x) > 0$ $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ folgt aus K4.18, dass die Sinusfunktion auf $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ strikt monoton wachsend ist, also ist

$$sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

bijektiv. Wir definieren

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

als die Umkehrfunktion von sin. Nach 4.12 ist sie auf $]-1, 1[$ differenzierbar und für $y = \sin x,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ folgt nach 4.12

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos x}$$

Nun benützen wir:

$$y^2 = \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

woraus mit $\cos x > 0$ folgt:

$$\cos x = \sqrt{1 - y^2}$$

Wir erhalten also $\forall y \in]-1, 1[$

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

2. arccos: Eine analoge Diskussion zeigt, dass $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ strikt monoton fallend ist, und $[0, \pi]$ auf $[-1, 1]$ bijektiv abbildet. Sei:

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

die Umkehrfunktion. Sie ist auf $]-1, 1[$ differenzierbar und:

$$\arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}} \quad \forall y \in]-1, 1[$$

3. arctan: Für $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Also ist tan auf $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ streng monoton wachsend mit

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \tan x = +\infty,$$

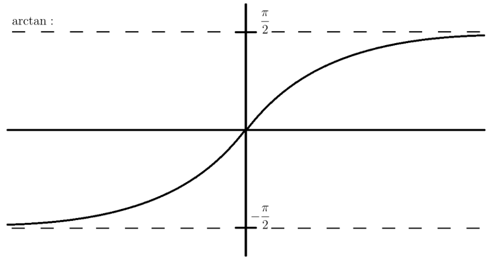
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} \tan x = -\infty,$$

Also ist $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to]-\infty, \infty[$ bijektiv. Sei

$$\arctan :]-\infty, \infty[\to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

die Umkehrfunktion. Dann ist arctan differenzierbar und für $y = \tan x$:

$$\arctan'(y) = \cos^2 x = \frac{1}{1 + y^2}$$



4. arccot: Für $x \notin \pi \cdot \mathbb{Z}$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Die Cotangensfunktion ist auf $]0, \pi[$ streng monoton fallend und bildet $]0, \pi[$ bijektiv auf $]-\infty, \infty[$ ab. Sei:

$$\text{arccot} :]-\infty, \infty[\to]0, \pi[$$

die Umkehrfunktion. Dann folgt:

$$\text{arccot}'(y) = -\frac{1}{1 + y^2}, \quad y \in]-\infty, \infty[$$

B 4.20 (Hyperbel und Areafunktionen)
Als Hyperbelfunktionen bezeichnet man die Funktionen $\cosh x, \sinh x, \tanh x$ definiert $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\cosh'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$\sinh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

Offensichtlich gilt $\cosh x \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \sinh x \geq 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[, \sinh(0) = 0$. Daraus folgt: cosh ist auf $[0, \infty[$ strikt monoton wachsend, $\cosh(0) = 1$ und $\lim_{x \to +\infty} \cosh x = +\infty$.

$$\cosh : [0, \infty[\to [1, \infty[$$

bijektiv. Deren Umkehrfunktion wird mit

$$\text{arcosh} : [1, \infty[\to [0, \infty[$$

bezeichnet. Unter benützung von

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

folgt:

$$\text{arcosh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} \quad \forall y \in]1, \infty[$$

Analog:

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

streng monoton wachsend und bijektiv. Die Umkehrfunktion wird mit

$$\text{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

bezeichnet und es gilt:

$$\text{arsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Für tanh folgt:

$$\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} > 0$$

Also ist tanh auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend und man zeigt, dass

$$\lim_{x \to +\infty} \tanh(x) = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \tanh(x) = -1$$

Die Funktion $\tanh : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ ist bijektiv. Ihre Umkehrabbildung wird mit

$$\text{artanh} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$$

bezeichnet. Es gilt dann:

$$\text{artanh}'(y) = \frac{1}{1 - y^2} \quad \forall y \in]-1, 1[$$

S 4.22 (Cauchy). Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Dann gibt es $\mathcal{E} \in]a.b[$ mit

$$g'(\mathcal{E})(f(b) - f(a)) = f'(\mathcal{E})(g(b) - g(a))$$

Falls $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$ folgt

$$g(a) \neq g(b)$$

und

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\mathcal{E})}{g'(\mathcal{E})}$$

Randnotiz: Man erhält den Satz von Lagrange mit $g(x) = x$

S 4.23 (l'Hospital 1696) Seien $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$
Falls

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = 0, \lim_{x \to b^-} g(x) = 0$$

und

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$$

existiert, folgt
$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$
Bem: 4.24 Der Satz gilt auch

- falls $b=+\infty$
- falls $\lambda=+\infty$
- falls $x\to a^+$

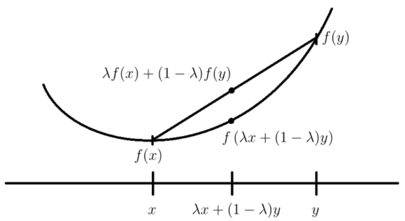
B 4.25

1. Für $a>0$ folgt aus S4.13 (1), (2) und l'Hospital:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^a} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\frac{1}{x})}{ax^{a-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{ax^a}=0$$
2.
$$\lim_{x\to0^+} x\cdot\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{(\frac{1}{x})} =$$
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+}(-x)=0$$

D 4.26 Sei $I\subseteq\mathbb{R}$ ein Intervall und $f:I\to\mathbb{R}$ eine Funktion.

1 f ist **konvex** (auf I) falls es für alle $x\le y,\quad x,y\in I$ und $\lambda\in[0,1]$ $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ gilt

2 f ist **streng konvex** falls für alle $x<y,\quad x,y\in I$ und $\lambda\in]0,1[$ $f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$



Bem: 4.27 Sei $f:I\to\mathbb{R}$ konvex. Ein einfacher Induktionsbeweis zeigt, dass für alle $n\ge1$, $\{x_1,\dots x_n\}\subseteq I$ und $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ in $[0,1]$ mit $\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$
$$f\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i\right)\le\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i)$$

L 4.28 Sei $f:I\to\mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Die Funktion f ist genau dann konvex, falls für alle $x_0<x<x_1$ in I
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$$
gilt.
f ist streng konvex wenn < gilt

S 4.29 Sei $f\ :]a,b[\to\mathbb{R}$ in $]a,b[$ differenzierbar. Die Funktion f ist genau dann (streng) konvex, falls f' (streng) monoton wachsend ist.

K 4.30 Sei $f\ :]a,b[\to\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar in $]a.b[$. Die Funktion f ist (streng) konvex, falls $f''\le 0$ (bzw $f''>0$) auf $]a,b[$

B 4.31 Für alle $n\ge1$ und $x_1\dots x_n$ in $]0,\infty[$ gilt
$$\sqrt[n]{x_1\dots x_n}\le\frac{x_1+\dots+x_n}{n}$$
Wir betrachten $f(x)=-\ln x$, dann ist
$$f'(x)=-\frac{1}{x}$$
und
$$f''(x)=\frac{1}{x^2},\ x\in]0,\infty[$$
Folglich ist f konvex und aus Bem. 4.27 mit $I=]0,\infty[$ und $\lambda_1=\dots=\lambda_n=\frac1n$ folgt:
$$-\ln\left(\frac1n\sum_{i=1}^n x_i\right)\le\sum_{i=1}^n-\frac1n\ln x_i = -\frac1n\ln(x_1,\dots x_n)$$

4.3 Höhere Ableitungen

D 4.32 Sei $D\subseteq\mathbb{R}$, so dass jedes $x_0\in D$ Häufungspunkt der Menge D ist. Sei $f:D\to\mathbb{R}$ differenzierbar in D und f' ihre Ableitung; wir setzen $f^{(1)}=f'$

1 Für $n\ge2$ ist f **n-mal differenzierbar in D** falls $f^{(n-1)}$ in D differenzierbar ist. Dann ist $f^{(n)}:=(f^{(n-1)})'$ und nennt sich die n-te Ableitung von f

2 Die Funktion f ist **n-mal stetig differenzierbar in D**, falls sie n-mal differenzierbar ist und falls $f^{(n)}$ in D stetig ist

3 Die Funktion f ist in D **glatt**, falls sie $\forall n\ge1$, n-mal differenzierbar ist.

Bem: 4.33 Es folgt aus Korollar 4.5, dass für $n\ge1$, eine n-mal differenzierbare Funktion $(n-1)$-mal differenzierbar ist.

S 4.34 Sei $D\subseteq\mathbb{R}$ wie in Def. 4.32, $n\ge1$ und $f,g:D\to\mathbb{R}$ n-mal differenzierbar in D

1 $f+g$ ist n-mal differenzierbar und
$$(f+g)^{(n)}=f^{(n)}+g^{(n)}$$

2 $f\cdot g$ ist n-mal differenzierbar und
$$(f\cdot g)^{(n)}=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}$$

B 4.35

1. Die Funktionen exp, sin, cos, sinh, cosh, tanh sind glatt auf ganz $\mathbb{R}$
2. Polynome sind auf ganz $\mathbb{R}$ glatt.
3. $\ln:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ ist glatt;
$$(\ln)'(x)=\frac1x=x^{-1},\ (\ln)''(x)=(-1)x^{-2},\dots$$
$$\ln^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n},\ n\ge1$$

S 4.36 Sei $D\subseteq\mathbb{R}$ wie in Def. 4.32, $n\ge1$ und $f,g:D\to\mathbb{R}$ n-mal differenzierbar in D Falls $g(x)\neq0\quad\forall x\in D$, ist $\frac fg$ in D n-mal differenzierbar

S 4.37 Seien $E,D\subseteq\mathbb{R}$ Teilmengen für die jeder Punkt Häufungspunkt ist. Seien $f:D\to E$ und $g:E\to\mathbb{R}$ n-mal differenzierbar. Dann ist $g\circ f$ n-mal differenzierbar und
$$(g\circ f)^{(n)}(x)=\sum_{k=1}^n A_{n,k}(x)(g^{(k)}\circ f)(x)$$
wobei $A_{n,k}$ ein Polynom in den Funktionen $f',f^{(2)},\dots,f^{(n+1-k)}$ ist
$$(g\circ f)'=(g'\circ f)\cdot f'$$
$$(g\circ f)^{(2)}=(g^{(2)}\circ f)(f')^2+(g'\circ f)\cdot f^{(2)}$$
$$(g\circ f)^{(3)}=$$
$$(g^{(3)}\circ f)(f')^3+3(g^{(2)}\circ f)f'f^{(2)}+(g'\circ f)f^{(3)}$$

4.4 Potenzreihen & Taylor Approx.

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass grob gesagt, konvergente Potenzreihen glatte Funktionen ergeben. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht und wird durch eine schwächere Aussage (Taylor Approximation) ersetzt.

S 4.39 Seien $f_n\ :]a,b[\to\mathbb{R}$ eine Funktionsfolge wobei f_n einmal in $]a,b[$ stetig differenzierbar ist $\forall n\ge1$. Wir nehemen an, dass sowohl die Folge $(f_n)_{n\ge1}$ wie $(f'_n)_{n\ge1}$ gleichmässig in $]a,b[$ konvergieren (Def. 3.34) mit $\lim_{n\to\infty}f_n=:f$ und $\lim_{n\to\infty}f'_n=:p$.
Dann ist f stetig differenzierbar und $f'=p$

S 4.40 Sei $\sum_{k=0}^\infty c_kx^k$ eine Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius (3.39) $\rho>0$. Dann ist
$$f(x)=\sum_{k=0}^\infty c_k(x-x_0)^k$$
auf $]x_0-\rho,x_0+\rho[$ differenzierbar und
$$f'(x)=\sum_{k=1}^\infty kc_k(x-x_0)^{k-1}$$
für alle $x\in]x_0-\rho,x_0+\rho[$

K 4.41 Unter der Voraussetzung von Satz 4.39 ist f auf $]x_0-\rho,x_0+\rho[$ glatt und
$$f^{(j)}(x)=\sum_{k=j}^\infty c_k\frac{k!}{(k-j)!}(x-x_0)^{k-j}$$
Insbesondere ist
$$c_j=\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}$$

B 4.42 (Cauchy 1823)
Das nicht jede glatte Funktion Summe einer Potenzreihe ist, folgt aus diesem Beispiel
$$f(x)=\begin{cases}\exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$$
Diese Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ glatt und $f^{(k)}(0)=0\quad\forall k\ge0$. Da andererseits $f(x)>0\quad\forall x\neq0$, gibt es keine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius ρ, die in $]-\rho,\rho[$ gegen f konvergiert.
Aus Satz 4.37 folgt, dass $\forall k\ge0$
$$f^{(k)}(x)=\mathcal{P}_k\left(\frac1x\right)\exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)\quad\forall x\neq0$$
wobei $\mathcal{P}_k$ ein Polynom ist. Unter Benützung von:
$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^m}\exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)=0\quad\forall m\ge0$$
folgt mit $f^{(k)}(0)=0$:
$$f^{(k+1)}(0)=\lim_{x\to0}\frac{f^k(x)-f^{(k)}(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f^{(k)}(x)}{x}=0$$

S 4.43 Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ (n+1)-mal differenzierbar. Für jedes $a<x\le b$ gibt es $\mathcal{E}\in]a,x[$ mit:
$$f(x)=\sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(\mathcal{E})}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

K 4.44 (Taylor Approximatio) Sei $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ stetig und in $]c,d[$ (n+1)-mal differenzierbar. Sei $c<a<d$. Für alle $x\in[c,d]$ gibt es $\mathcal{E}$ zwischen x und a so dass
$$f(x)=\sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(\mathcal{E})}{(n+1)}(x-a)^{n+1}$$
Anhand dieses Korollars können wir eine präzisere Aussage über lokale Extremalstellen einer $(n+1)$-mal differenzierbaren Funktion machen.

K 4.45 Sei $n\ge0,a<x_0<b$ und $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ in $]a,b[$ (n+1)-mal stetig differenzierbar. Annahme: $f'(x_0)=f^{(2)}(x_0)=\dots=f^{(n)}(x_0)=0$

1 Falls n gerade ist und x_0 lokale Extremalstelle, folgt $f^{(n+1)}(x_0)=0$

2 Falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0)>0$ so ist x_0 eine strikt lokale Minimalstelle

3 Falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0)<0$ so ist x_0 eine strikt lokale Maximalstelle

K 4.46 Sei $f:[a.b]\to\mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ zweimal stetig differenzierbar. Sei $x<x_0<b$. Annahme: $f'(x)=0$

1 Falls $f^{(2)}(x_0) > 0$ ist x_0 strikte lokale Minimalstelle

2 Falls $f^{(2)}(x_0) < 0$ ist x_0 strikte lokale Maximalstelle

B 4.47 Sei $f(x) = x^4 - x^2 + 1$. Wir bestimmen die lokalen Extremalstellen von f. Sei x_0 eine solche; dann folgt nacht Satz 4.15(3):

$$f'(x_0) = 0,$$

das heisst

$$4x_0^3 - 2x_0 = 0.$$

Also gilt $x_0 \in \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. Nun ist $f^{(2)}(x) = 12x^2 - 2$;

$$f^{(2)}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f^{(2)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4 > 0$$

$$f^{(2)}(0) = -2 < 0$$

Also sind $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}$ strikte lokale Minimalstellen, und 0 strikte lokale Maximalstelle.

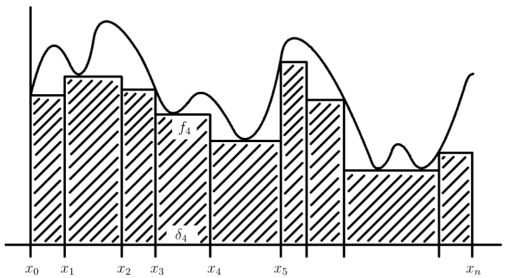
5 Das Riemann Integral

5.1 Integrabilitätskriterien

D 5.1 Eine **Partition** von I ist eine endliche Teilmenge $P \subsetneq [a,b]$ wobei $\{a,b\} \subseteq P$ Eine Partition P' ist eine Verfeinerung von P falls $P \subseteq P'$. Offensichtlich ist die Vereinigung $P_1 \cup P_2$ zweier Partitionen wieder eine Partition, insbesondere haben zwei Partitionen immer eine gemeinsame Verfeinerung. Sei nun $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion(Def3.1(3)), das heisst es gibt $M \geq 0$ mit $|f(x)| \leq M \ \forall x \in [a,b]$. Sei auch $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ eine Partition von I. Insbesondere gilt:

$$x_0 = a < a_1 < \dots < x_n = b$$

Wir bezeichnen mit $\delta_i := x_i - x_{i-1}, \ i \geq 1$, die Länge des Teilintervalls $[x_{i-1,}x_i]$

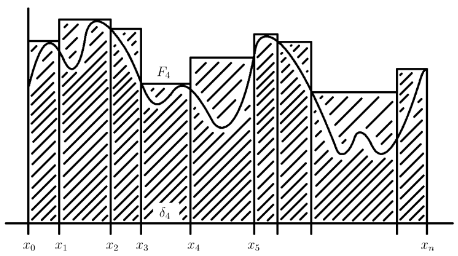


Wir definieren die Untersumme

$$s(f,P) := \sum_{i=1}^{n} f_i\delta_i, \quad f_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

und die Obersumme

$$S(f,P) := \sum_{i=1}^{n} F_i\delta_i, \quad F_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$



Bemerke, dass

$$-M \leq f_i \leq F_i \leq M$$

somit sind $s(f,P)$ und $S(f,P)$ wohldefiniert und es gilt:

$$-M(b-a) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq M(b-a)$$

L 5.2

1 Sei $P^{'}$ eine Verfeinerung von P, dann gilt:

$$s(f.P) \leq s(f,P^{'}) \leq S(f,P^{'}) \leq S(f,P)$$

2 Für beliebige Partitionen P_1, P_2 gilt:

$$s(f,P_1) \leq S(f,P_2)$$

D 5.3 Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist **Riemann integrierbar** falls

$$s(f) = S(f)$$

In diesem Fall bezeichnen wir den gemeinsamen Wert von $s(f)$ und $S(f)$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

S 5.4 Eine beschränkte Funtkion ist genau dann integrierbar, falls

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists P \in \mathcal{P}(I) \text{ mit } S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$$

S 5.8 (Du Bois-Reymond 1875) Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, falls $\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0$ so dass

$$\forall P \in P_\delta(I), S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$$

Hier bezeichnet $P_\delta(I)$ die Menge der Partitionen P für welche $\max_{1 \leq i \leq n} \delta_i \leq \delta$

K 5.9 Die beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar mit $A := \int_a^b f(x)\,dx$ falls: $\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0$ so dass $\forall P \in p(I)$ Partition mit $\delta(P) < \delta$ und $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ mit $\mathcal{E}_i \in [x_{i-1}, x_i], P = \{x_0, \dots, x_n\}$

$$\left|A - \sum_{i=1}^{n} f(\mathcal{E}_\rangle)(x_i - x_{i-1})\right| < \epsilon$$

5.2 Integrierbare Funktionen

Bis jetzt haben wir gesehen, dass konstante Funktionen sowie die Funktion $f(x) = x$ auf jedem kompakten Intervall integrierbar sind.

S 5.10 Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $f+g, \lambda \cdot f, f \cdot g, |f|, \max(f,g), \min(f,g)$ und $\frac{f}{g}$ (falls $|g(x)| \geq \beta > 0 \quad \forall x \in [a,b]$) integrierbar

Bem: 5.11 Sei $\phi : [c,d] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann ist

$$\sup_{x,y \in [c,d]} |\phi(x) - \phi(y)| = \sup_{x \in [c,d]} \phi(x) - \inf_{x \in [c,d]} \phi(x)$$

K 5.12 Seien P,Q Polynome und $[a,b]$ ein Intervall in dem Q keine Nullstelle besitzt. Dann ist

$$[a,b] \to \mathbb{R}$$

$$x \to \frac{P(x)}{Q(x)}$$

integrierbar

D 5.13 Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}$ ist in D **gleichmässig stetig**, falls

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x, y \in D :$$

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

B 5.14 Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \to x^2$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig aber nicht gleichmässig stetig.

S 5.15 (Heine 1872). Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in dem kompakten Intervall $[a,b]$. Dann ist f in $[a,b]$ gleichmässig stetig.

S 5.16 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar

S 5.17 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton. Dann ist f integrierbar

Bem: [5.18] Seien $a < b < c$ und $f : [a.c] \to \mathbb{R}$ beschränkt mit $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ integrierbar. Dann ist f integrierbar und

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

D Wir erweitern unsere Definiton von Integralen

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \text{ und falls } a < b$$

$$\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$$

S 5.19 Sei $I \subsetneq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit Endpunkten a,b sowie $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))\,dx =$$

$$\lambda_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)\,dx$$

5.3 Ungleichungen und Mittelwertsatz

Nebst Linearität(S5.19) hat das Riemann Integral auch eine Monotonieeigenschaft; diese wiederum führt zum Mittelwertsatz der die basis des Fundamentalsatzes der Differentialrechnung bildet.

S 5.20 Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar, und

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

Dann folgt:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

K 5.21 Falls $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar, folgt

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

S 5.22 (Cauchy-Schwarz Ungleichung 1821) Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar. Dann gilt:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}$$

S 5.23 (Mittelwertsatz, Cauchy 1821) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $\mathcal{E} \in [a,b]$ mit:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\mathcal{E})(b-a)$$

B 5.24 Die Stetigkeit ist eine wichtige Voraussetzung: Sei

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{3}$$

Dann ist

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 0\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 1\,dx = \frac{1}{2}$$

S 5.25 (Cauchy 1821) Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ wobei f stetig, g beschränkt integrierbar mit $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$. Dann gibt es $\mathcal{E} \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\mathcal{E}) \int_a^b g(x)\,dx$$

5.4 Fundamentalsatz

Dieser Satz, auch Fundamentalsatz der Analysis genannt, besagt, dass die Ableitung die Umkehrung des Integrals ist. Dieser Satz hat vielseitige Anwendungen, unter anderem die Berechnung von Flächeninhalten und Längen von Kurven

S 5.26 Seien $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad a \le x \le b$$

ist in $[a, b]$ stetig differenzierbar und

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

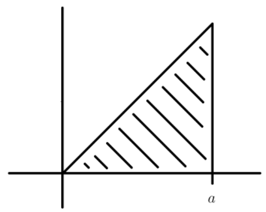
D 5.27 Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Eine Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ heisst **Stammfunktion** von f, falls F (stetig) differenzierbar in $[a, b]$ ist und $F' = f$ in $[a, b]$ gilt

S 5.28 (Fundamentalsatz der Differentialrechnung) Sei $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine Stammfunktion F von f, die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist und es gilt:

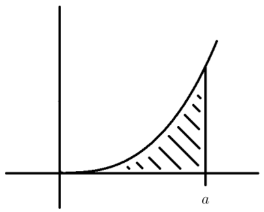
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

B 5.29

1. $f(x) = x$:



1. $f(x) = x$
   Dann ist $\frac{x^2}{2}$ eine Stammfunktion von f und folglich:
   $$\int_0^a x\,dx = \frac{a^2}{2}$$



2. $f(x) = x^2$
   Dann ist $\frac{x^3}{3}$ Stammfunktion von f und folglich
   $$\int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}$$

Zur Berechnung von Integralen und Stammfunktionen werden wir zwei Rechenregeln aus dem Fundamentalsatz herleiten. Es handelt sich um Partielle Integration und Substitution.

S 5.30 (Partielle Integration) Seien $a < b$ reele Zahlen und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx =$$

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

S 5.31 (Substitution) Sei $a < b, \phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $\phi([a, b]) \subseteq I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$$

K 5.33 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig.

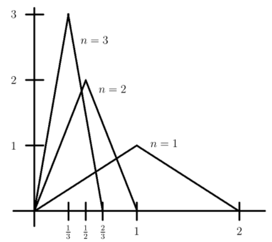
1 Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ so dass das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten a+c, b+c in I enthalten ist. Dann gilt:
$$\int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx = \int_a^b f(t+c)\,dt$$

2 Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $c \neq 0$ so dass das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten ac, bc in I enthalten ist. Dann gilt:
$$\int_a^b f(ct)\,dt = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x)\,dx$$

5.5 Integration konvergenter Reihen

Wir beginnen mit folgendem Beispiel:
Für $n \ge 1$ sei:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 2n - n^2x & \frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \le x \le 2 \end{cases}$$



Dann gilt:

1. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 2]$
2. $\int_0^2 f_n(x)\,dx = 1 \quad \forall n \ge 1.$

Also folgt:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^2 f_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_0^2 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Beachte, dass f_n punktweise aber nicht gleichmässig gegen 0 konvergiert.

S 5.34 Sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von beschränkten, integrierbaren Funktionen die gleichmässig gegen eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f beschränkt integrierbar und

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

K 5.35 Sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Folge beschränkter integrierbarer Funktionen so dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

auf $[a.b]$ gleichmässig konvergiert. Dann gilt :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)dx$$

K 5.36 Sei

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_k x^k$$

eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist für jedes $0 \le r < \rho$, f auf $[-r, r]$ integrierbar und es gilt $\forall x \in] - \rho, \rho[$:

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}x^{n+1}$$

5.6 Euler-McLaurin Summationsformel

Diese Formel, ist ein sehr nützliches Instrument um Summen wie $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ oder $\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n = \ln n!$ abzuschätzen

D 5.40 $\forall k \ge 0$ ist das k'te Bernoulli Polynom $B_k(x) = k!P_k(x)$ Mit dieser Definition folgt: $B_0(x) = 1, B_1(x) = x - \frac{1}{2}, B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$

D 5.41 Sei $B_0 = 1$ für alle $k \ge 2$ definieren wir B_{k-1} rekursiv:

$$\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}B_i = 0$$

Also: $B_0 = 1, B_0 + 2B_1 = 0, B_0 + 3B_1 + 3B_2 = 0$

S 5.42

$$B_k(x) = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}B_i x^{k-i}$$

Bem: 5.43 Für $k \ge 2$:

$$\begin{aligned} B_k(1) &= \sum_{i=0}^{k}\left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array}\right)B_i = \sum_{i=0}^{k-1}\left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array}\right)B_i + B_k \\ &= B_k \quad (\text{ nach } 5.41) \\ &= B_k(0) \quad (\text{ nach Satz } 5.42) \end{aligned} \tag{4}$$

Zur Aussage der Summationsformel definieren wir für $k \ge 1$

$$\widetilde{B}_k : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

als

$$\widetilde{B}_k(x) = \begin{cases} B_k(x) & \text{für} \quad 0 \le x < 1 \\ B_k(x-n) & \text{für } n \le x < n+1 \text{ wobei } n \ge \end{cases}$$

S 5.44 Sei $f : [0, n] \to \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar, $k \ge 1$. Dann gilt :

1 Für k = 1:
$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0))$$
$$+ \int_0^n \tilde{B}_1(x)f'(x)\,dx$$

2 Für $k \ge 2$:
$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) +$$
$$\sum_{J=2}^{k} \frac{(-1)^j B_j}{j!}(f^{(j-1)}(n) - f^{(j-1)}(0)) + \tilde{R}_k$$
wobei
$$\tilde{R}_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\int_0^n \tilde{B}_k(x)f^{(k)}(x)\,dx$$

5.7 Stirling'sche Formel

Die Stirling'sche Formel ist eine qualitative Aussage über das Verhalten der Fakultät Nämlich:

$$n! \approx \frac{\sqrt{2\pi n}n^n}{e^n}$$

S 5.47

$$n! = \frac{\sqrt{2\pi n}n^n}{e^n}\cdot\exp\left(\frac{1}{12n} + R_3(n)\right)$$

wobei

$$|R_3(n)| \le \frac{\sqrt{3}}{216\cdot\frac{1}{n^2}} \quad \forall n \ge 1$$

L 5.48 $\forall m \ge n + 1 \ge 1$:

$$|R_3(m, n)| \le \frac{\sqrt{3}}{216}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

5.8 Uneigentliche Integrale

Der Begriff des Riemann Integrals setzt voraus, dass $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt ist. Unter gewissen Vouraussetzungen kann man diese Einschränkung umgehen.

D 5.49 Sei $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b]$ für alle $b > a$. Falls

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

existiert, bezeichnen wir den Grenzwert mit

$$\int_a^\infty f(x\,dx)$$

und sagen, dass f auf $[a, +\infty[$ integrierbar ist.

B 5.50

1. $\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} \left(1 - e^{-b}\right) = 1.$
2. $\int_1^b \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \ln b & \alpha = 1 \\ \frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{sonst.} \end{cases}$

Somit: $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \text{divergiert,} & \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \end{cases}$

L 5.51 Sei $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b] \quad \forall b > a$

1 Falls $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \geq a$ und $g(x)$ ist auf $[a, \infty[$ integrierbar, so ist f auf $[a, \infty[$ integrierbar

2 Falls $0 \leq g(x) \leq f(x)$ und $\int_a^\infty g(x)$ divergiert, so divergiert auch $\int_a^\infty f(x)\,dx$

S 5.53 (McLaurin 1742) Sei $f : [1, \infty[\to [0, \infty[$ monoton fallend. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^\infty f(n)$$

konvergiert genau dann, wenn

$$\int_1^\infty f(x)\,dx$$

konvergiert **D** 5.56 In dieser Siutation ist $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ integrierbar falls

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx$$

existiert; in diesem Fall wird der Grenzwert mit $\int_a^b f(x)\,dx$ bezeichnet

5.9 Die Gamma Funktion

D 5.59 Für s ¿ 0 definieren wir

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$$

S 5.60(Bohr-Mollerup)

1 Die Gamme Funktion erfüllt die Relationen

(a) $\Gamma(1) = 1$

(b) $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s) \quad \forall s > 0$

(c) Γ ist logarithmisch, das heisst

$$\Gamma(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}$$

für alle $x, y > 0$ und $0 \leq \lambda \leq 1$

2 Die Gamme Funktion ist die einzige Funktion $0, \infty[\to]0, \infty[$ die (a), (b) und (c) erfüllt. Darüber hinaus gilt:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x + 1)\ldots(x + n)} \qquad \forall x > 0$$

L 5.61 Sei $\rho > 1$ und $q > 1$ mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Dann gilt $\forall a, b \geq 0$

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

S 5.62(Hölder Ungleichung). Seien $\rho > 1$ und $q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für alle $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig gilt:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\;dx \leq ||f||_p\,||g||_q$$

5.10 Das unbestimmte Integral