

1 Grundlagen

S 1.1 Es gibt keine Gleichung der Form

x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = 0

mit a_i in Q, so dass x = pi eine Lösung ist

S 1.2 R ist ein kommutativer, angeordneter Körper, der ordnungsvollständig ist

D Axiome der Addition

A1 Assoziativität x + (y + z) = (x + y) + z

A2 Neutrales Element x + 0 = x für alle x in R

A3 Inverses Element für alle x in R existiert y in R : x + y = 0

A4 Kommutativität x + z = z + x für alle x, z in R

D Axiome der Multiplikation

M1 Assoziativität x · (y · z) = (x · y) · z für alle x, y, z in R

M2 Neutrales Element x · 1 = x für alle x in R

M3 Inverses Element für alle x in R, x ≠ 0 existiert y in R : x · y = 1

M4 Kommutativität x · z = z · x für alle x, z in R

D Distributivität

D1 Distributivität x · (y + z) = x · y + x · z

D Ordnungssaxiome

O1 Reflexivität x ≤ x für alle x in R

O2 Transitivität x ≤ y und y ≤ z impliziert x ≤ z

O3 Antisymmetrie x ≤ y und y ≤ x impliziert x = y

O4 Total für alle x, y in R gilt entweder x ≤ y oder y ≤ x

D Kompatibilität

K1 für alle x, y, z in R : x ≤ y impliziert x + z ≤ y + z

K2 für alle x ≥ 0, für alle y ≥ 0 : x · y ≥ 0

D Ordnungsvollständigkeit Seien A, B ⊆ von R

i A ≠ ∅, B ≠ ∅

ii für alle a in A und für alle b in B : a ≤ b

Dann gibt es c in R, dass für alle a in A : a ≤ c und für alle b in B : c ≤ b

K 1.6

1 Additive und multiplikate Inverse eindeutig

2 0 · x = 0 für alle x in R

3 (-1) · x = -x für alle x in R

4 y ≥ 0 äquivalent zu (-y) ≤ 0

5 y^2 ≥ 0 für alle x in R

6 x ≤ y und u ≤ v impliziert x + u ≤ y + v

7 0 ≤ x ≤ y und 0 ≤ u ≤ v impliziert x · u ≤ y · v

K 1.7(Archimedisches Prinzip)

Sei x in R mit x > 0 und y in R. Dann gibt es n in N mit y ≤ n · x

S 1.8

Für jedes t ≥ 0, t in R hat x^2 = t eine Lösung in R

D 1.9 Seien x, y in R

(i) max{x, y} = { x falls y ≤ x, y falls x ≤ y }

(ii) min{x, y} = { y falls y ≤ x, x falls x ≤ y }

(iii) Der Absolutbetrag einer Zahl x in R : |x| = max{x, -x}

S 1.10

(i) |x| ≥ 0 für alle x in R

(ii) |xy| = |x| |y| für alle x, y in R

(iii) |x + y| ≤ |x| + |y| für alle x, y in R

(iv) |x + y| ≥ |x| - |y| für alle x, y in R

S 1.11(Young'sche Ungleichung)

für alle ε > 0, für alle x, y in R:

2 |xy| ≤ εx^2 + (1/ε)y^2

1.1 Infimum und Supremum

D 1.12 Sei A ⊆ R eine Teilmenge.

1) c in R ist obere Schranke if für alle a in A : a ≤ c

2) c in R ist untere Schranke if für alle a in A : c ≤ a

3) m in R heisst ein Maximum von A if m in A und m eine obere Schranke von A ist.

4) m in R heisst ein Minimum von A if m in A und m eine untere Schranke von A ist.

S 1.15 . Sei A ⊆ R, A ≠ ∅

1) Sei A nach oben beschränkt. Dann gibt es eine kleinste obere Schranke:

c := sup A (Supremum von A)

2) Sei A nach unten beschränkt. Dann gibt es eine grösste untere Schranke:

d := inf A (Infimum von A)

Eigenschaften von Supremum und Infimum

• sup(A ∪ B) = max(sup A, sup B)

• sup(A + B) = sup A + sup B

• inf(A ∪ B) = min(inf A, inf B)

• inf(A + B) = inf A + inf B

K 1.16 Seien A ⊆ B ⊆ R Teilmengen von R

1 Falls B nach oben beschränkt ist, sup A ≤ sup B

2 Falls B nach unten beschränkt ist, inf B ≤ inf A

D 1.18 Kardinalität

(i) Zwei Mengen X, Y heissen gleichmächtig if eine Bijektion f : X → Y existiert

(ii) Eine Menge ist endlich, wenn X = ∅ or ∃ n in N so dass {1, 2, ..., n} gleichmächtig wie X

(iii) Eine Menge X ist abzählbar if endlich oder gleichmächtig wie N

S 1.20 (Cantor) R ist nicht abzählbar

2 Folgen und Reihen

D 2.1 Eine Folge ist eine Abbildung

a : N* → R (N* = N / {0})

2.1 Grenzwert einer Folge

L 2.3 (a_n)_{n ≥ 1} eine Folge, es gibt höchstens eine Zahl l in R mit der Eigenschaft:

für alle ε > 0 ist Menge {n in N : a_n nicht in [l - ε, l + ε]} endlich

D 2.4 (a_n)_{n ≥ 1} ist konvergent, falls l in R so dass für alle ε > 0 die Menge {n in N* : a_n nicht in [l - ε, l + ε]} endlich ist. Dieses l ist der Limes der Folge.

Bem: [2.5] Jede Konvergente Folge ist beschränkt

L 2.6 Folgende Aussagen sind äquivalent

1 (a_n)_{n ≥ 1} konvergiert gegen l = lim_{n → ∞} a_n

2 für alle ε > 0 ∃ N ≥ 1 that

|a_n - l| < ε für alle n ≥ N

S 2.8 Seien (a_n)_{n ≥ 1} und (b_n)_{n ≥ 1} konvergent Folgen mit a = lim_{n → ∞} a_n, b = lim_{n → ∞} b_n

1 (a_n + b_n)_{n ≥ 1} ist konvergent und lim_{n → ∞} (a_n + b_n) = a + b

2 (a_n · b_n)_{n ≥ 1} ist konvergent und lim_{n → ∞} (a_n · b_n) = a · b

3 if b_n ≠ 0 für alle n ≥ 1, b ≠ 0 ((a_n/b_n)_{n ≥ 1} konvergent, lim_{n → ∞} (a_n/b_n) = a/b

4 Falls existiert K ≥ 1 mit a_n ≤ b_n für alle n ≥ K impliziert a ≤ b

2.2 Satz von Weierstrass

D 2.10

1 (a_n)_{n ≥ 1} ist monoton wachsend if

a_n ≤ a_{n+1} für alle n ≥ 1

2 (a_n)_{n ≥ 1} ist monoton fallend if

a_{n+1} ≤ a_n für alle n ≥ 1

S 2.11 (Weierstrass)

• Sei (a_n)_{n ≥ 1} monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann konvergiert (a_n)_{n ≥ 1} nach

lim_{n → ∞} a_n = sup{a_n : n ≥ 1}

• Sei (a_n)_{n ≥ 1} monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann konvergiert (a_n)_{n ≥ 1} nach

lim_{n → ∞} a_n = inf{a_n : n ≥ 1}

Bem: [2.13] Sei (a_n)_{n ≥ 1} eine konvergente Folge mit lim_{n → ∞} a_n = a und k in N. Dann ist

b_n := a_{n+k} n ≥ 1 konvergent und lim_{n → ∞} b_n = a

L 2.16 (Bernoulli Ungleichung)

(1 + x)^n ≥ 1 + n · x für alle n in N, x > -1

2.3 Limes inferior, Limes superior

lim_{n → ∞} inf a_n = lim_{n → ∞} b_n, (b_n = inf{a_k : k ≥ n})

lim_{n → ∞} sup a_n = lim_{n → ∞} c_n, (c_n = sup{a_k : k ≥ n})

lim_{n → ∞} inf a_n ≤ lim_{n → ∞} sup a_n

2.4 Cauchy Kriterium

L 2.19 (a_n)_{n ≥ 1} konvergiert if and only if (a_n)_{n ≥ 1} beschränkt und

lim_{n → ∞} inf a_n = lim_{n → ∞} sup a_n

S 2.20 (Cauchy Kriterium) .

Die Folge (a_n)_{n ≥ 1} ist genau dann konvergent if

für alle ε > 0 ∃ N ≥ 1 so dass |a_n - a_m| < ε für alle n, m ≥ N

2.5 Satz von Bolzano-Weierstrass

D 2.21 Ein abgeschlossenes Intervall ist I ⊆ R

1 [a, b] a ≤ b, a, b in R

2 [a, +∞[a in R

3] -∞, a] a in R

4] -∞, +∞[= R

Länge L(I) ist in 1) b - a, ansonsten +∞

Bem: [2.22] I ⊆ R ist abgeschlossen if and only if für jede konvergente Folge (a_n)_{n ≥ 1} aus Elementen in I, der Grenzwert auch in I ist.

Bem: [2.23] Seien I = [a, b], J = [c, d] mit a ≤ b und c ≤ d a, b, c, d in R. Dann gilt I ⊆ J genau dann, wenn c ≤ a und b ≤ d

S 2.25 (Cauchy-Cantor) Sei $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$ eine Folge abgeschlossener Intervalle mit $\mathcal{L}(I_1) < +\infty$. Dann gilt

$$\bigcap_{n \geq 1} I_n \neq \emptyset$$

Falls zudem $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(I_n) = 0$ enthält $\bigcap_{n \geq 1} I_n$ genau einen Punkt

D 2.27 Eine Teilfolge einer Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ ist eine Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ wobei

$$b_n = a_{l(n)}$$

und $l: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ eine Abbildung ist mit

$$l(n) < l(n+1) \quad \forall n \geq 1$$

S 2.29 (Bolzano-Weierstrass) Jede beschränkte Folge besitzt eine Konvergente Teilfolge.
Bem: [2.30] Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine beschränkte Folge. Dann gilt für jede konvergente Teilfolge $(b_n)_{n \geq 1}$:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

2.6 Folgen in \mathbb{R}^d und \mathbb{C}

D 2.31 Eine Folge in \mathbb{R}^d ist eine Abbildung

$$a: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}^d$$

D 2.32 Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in \mathbb{R}^d heisst **konvergent**, falls es $a \in \mathbb{R}^d$ gibt so dass:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1 \text{ mit } \|a_n - a\| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

S 2.33 Sei $b = b_1, \dots, b_d$. 1) und 2) sind äquivalent:

- 1 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$
- 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,j} = b_j \quad \forall 1 \leq j \leq d$

S 2.36

- 1 Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergiert genau, wenn sie eine Cauchy Folge ist:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1 \text{ mit } \|a_n - a_m\| < \epsilon \quad \forall n, m \geq N$$

- 2 Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge

2.7 Reihen

D 2.7.0 Eine Reihe ist eine unendliche Summe

$$S_n := a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

D 2.37 Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

ist **konvergent**, falls die Folge $(S_n)_{n \geq 1}$ der Partialsummen konvergiert. In diesem Fall:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

S 2.40 Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ konvergent, sowie $\alpha \in \mathbb{C}$

- 1 $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = (\sum_{k=1}^{\infty} a_k) + (\sum_{j=1}^{\infty} b_j)$
- 2 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k$ konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

S 2.41 (Cauchy Kriterium)

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent if and only if:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1 \text{ mit } \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \epsilon \quad \forall m \geq n \geq N$$

S 2.42 Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert if and only if $(S_n)_{n \geq 1}$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ der Partialsummen nach oben beschränkt ist.

K 2.43 (Vergleichssatz)

Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen mit:

$$0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent}$$

Diese Implikation gilt auch, wenn

$$K \geq 1 \text{ mit } 0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq K$$

D 2.45 Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heisst **absolut konvergent**

$$\text{falls } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ konvergiert}$$

S 2.46 Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist auch konvergent und:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

S 4.8 (Leibniz 1682) Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ monoton fallend mit $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Dann konvergiert

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \text{ und es gilt } a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$$

D 2.50 Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ ist eine **Umordnung** der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, falls eine bijektive Abbildung

$$\phi: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^* \text{ mit } a'_n = a_{\phi(n)}$$

S 2.52 (Dirichlet 1837) Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, dann konvergiert jede Umordnung der Reihe und hat den selben Grenzwert

S 2.53 (Quotientenkriterium)

Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $a_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1$. Falls

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}$$

Falls

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

Bem: 2.55 Das Quotientenkriterium versagt, z.B. wenn unendliche viele Glieder der Reihe verschwinden

S 2.56 Wurzelkriterium

- 1 Falls

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut

- 2 Falls

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

dann divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

K 2.57 Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

- konvergiert absolut für alle $|z| < \rho$
- divergiert für alle $|z| > \rho$

$$\rho = \begin{cases} +\infty & \text{falls } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{falls } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$$

D 2.58 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist eine **lineare Anordnung** der Doppelreihe $\sum_{i,j \geq 0} a_{i,j}$, falls es eine Bijektion

$$\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

gibt mit $b_k = a_{\sigma(k)}$

S 2.59 (Cauchy 1821). Wir nehmen an, dass es $B \geq 0$ gibt, so dass

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m |a_{ij}| \leq B \quad \forall m \geq 0$$

Dann konvergieren die folgenden Reihen absolut:

$$S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall i \geq 0 \text{ und } U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall j \geq 0$$

sowie

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i \text{ und } \sum_{j=0}^{\infty} U_j$$

und es gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i = \sum_{j=0}^{\infty} U_j$$

Zudem konvergiert jede lineare Anordnung der Doppelreihe absolut, mit selbem Grenzwert

D 2.60 Das **Cauchy Produkt** der Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \sum_{j=0}^{\infty} b_j$$

ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n a_{n-j} b_j \right) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \dots$$

S 2.62 Falls die Reihen

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \sum_{j=0}^{\infty} b_j$$

absolut konvergieren, so konvergiert ihr Cauchy Produkt und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n a_{n-j} b_j \right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \right)$$

S 2.64 Sei $f_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge. Wir nehmen an:

- 1 $f(j) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(j)$ existiert $\forall j \in \mathbb{N}$
- 2 Es gibt eine Funktion $g: \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty[$, so dass
 - 2.1 $|f_n(j)| \leq g(j) \quad \forall j \geq 0, \forall n \geq 0$
 - 2.2 $\sum_{j=0}^{\infty} g(j)$ konvergiert

Dann folgt

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j)$$

K 2.65 Für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Folge $((1 + \frac{z}{n})^n)_{n \geq 1}$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n = \exp(z)$$

3 Stetige Funktionen

3.1 Reellwertige Funktionen

D 3.1 Sei $f \in \mathbb{R}^d$

- 1 f ist nach **oben beschränkt**, if $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt ist
- 2 f ist nach **unten beschränkt**, if $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ nach unten beschränkt ist
- 3 f ist beschränkt, if $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ b ist

D 3.2 Eine funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ ist

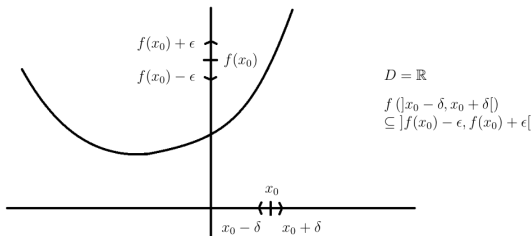
- 1 **monoton wachsend**, if $\forall x, y \in D$
 $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
- 2 **streng monoton wachsend**, if $\forall x, y \in D$
 $x < y \implies f(x) < f(y)$
- 3 **monoton fallend**, if $\forall x, y \in D$
 $x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$
- 4 **streng monoton fallend**, if $\forall x, y \in D$
 $x < y \implies f(x) > f(y)$
- 5 **monoton**, falls f monoton wachsend oder monoton fallend
- 6 **streng monoton**, falls f streng monoton wachsend/fallend

3.2 Stetigkeit

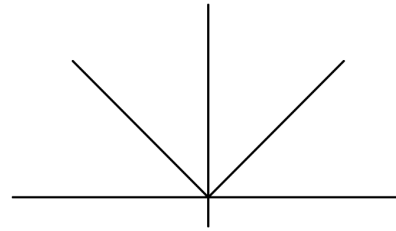
D 3.4 Sei $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$. Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist in x_0 **stetig**, falls es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ die Implikation

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

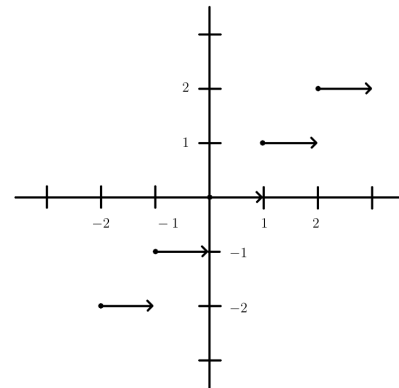
B 3.6 Sei $n \geq 0 : f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x^n$ ist stetig.



2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ ist stetig.



Die Abrundungsfunktion $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \lceil x \rceil := \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$ ist in jedem Punkt $x_0 \notin \mathbb{Z}$ stetig; sie ist in keinem Punkt $y \in \mathbb{Z}$ stetig.



Die

Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch:

D 3.5 Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist **stetig**, falls sie in jedem Punkt von D stetig ist.

S 3.7 Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Die Funktion f ist genau dann in x_0 stetig falls für jede Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in D folgende Implikation gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0)$$

K 3.8 Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ beide stetig in x_0

- 1 Dann sind $f + g, \lambda \cdot f, f \cdot g$ stetig in x_0
- 2 Falls $g(x_0) \neq 0$ dann ist

$$\frac{f}{g} : D \cap \{x \in D : g(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$$

stetig in x_0

D 3.9 Eine **polynomiale Funktion** $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Funktion der Form

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$$

wobei $a_n \dots a_0 \in \mathbb{R}$. Falls $a_n \neq 0$ ist n der **Grad** von P

K 3.10 Polynomiale Funktionen sind auf ganz \mathbb{R} stetig

K 3.11 Seien P, Q , polynomiale Funktionen auf \mathbb{R} mit $Q \neq 0$. Seien $x_1 \dots x_m$ die Nullstellen von Q . Dann ist

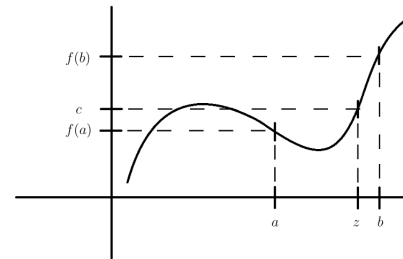
$$\frac{P}{Q} : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_m\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)}$$

stetig

3.3 Der Zwischenwertsatz

S 3.12 (Bolzano 1817). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b \in I$. Für jedes c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein z zwischen a und b mit $f(z) = c$



K 3.13 Sei $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ ein Polynom mit $a_n \neq 0$ und n ungerade. Dann besitzt P mindestens eine Nullstelle in \mathbb{R}

Bem: [3.14] für $c > 0$ besitzt $Q(x) = x^2 + c$ keine Nullstelle in \mathbb{R}

3.4 Der Min-Max Satz

D 3.16 Ein Intervall $\subseteq \mathbb{R}$ ist **kompakt**, falls es von Form

$$I = [a, b], \quad a \leq b$$

ist

L 3.17 Sei $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$ und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in x_0 . Dann sind

$$|f|, \max(f, g), \min(f, g)$$

stetig in x_0

L 3.18 Sei $(x_n)_{n \geq 1}$ eine konvergente Folge in \mathbb{R} mit Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}$$

sei $a \leq b$. Falls $\{x_n : n \geq 1\} \subseteq [a, b]$ folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in [a, b]$$

S 3.19 Sei $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem kompakten Intervall I . Dann gibt es $u \in I$ und $v \in I$

mit

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall x \in I$$

Insbesondere ist f beschränkt

3.5 Der Satz über Umkehrabbildung

S 3.20 Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$ zwei Teilmengen, $f : D_1 \rightarrow D_2, g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, sowie $x_0 \in D_1$. Falls f in x_0 und g in $f(x_0)$ stetig sind

$$g \circ f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$$

in x_0 stetig

K 3.21 Falls in Satz 3.20 f auf D_1 und g auf D_2 stetig sind, so ist $g \circ f$ auf D_1 stetig

S 3.22 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, streng monoton. Dann ist $J := f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f^{-1} : J \rightarrow I$ ist stetig, streng monoton.

3.6 Die reelle Exponentialfunktion

D Exponentialfunktion

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

S 3.24 $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv

K 3.25

$$\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\exp(x) > 1 \quad \forall x > 0$$

K 3.26

$$\exp(z) > \exp(y) \quad \forall z > y$$

K 3.27

$$\exp(x) \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

K 3.28 Der natürliche Logarithmus

$$\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

ist eine streng monoton wachsende, stetige, bijektive Funktion. Des Weiteren gilt:

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b \quad \forall a, b \in]0, +\infty[$$

Wir können den Logarithmus und die Exponentialfunktion benutzen, um allgemeine Potenzen zu definieren. Für $x > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ beliebig definieren wir:

$$x^a := \exp(a \ln x)$$

Insbesondere $x^0 = 1 \quad \forall x > 0$

K 3.29

1 Für $a > 0$ ist

$$]0, +\infty[\xrightarrow{f}]0, +\infty[$$

$$x \mapsto x^a$$

eine stetige, streng monoton wachsende Bijektion

2 Für $a < 0$ ist

$$]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$$

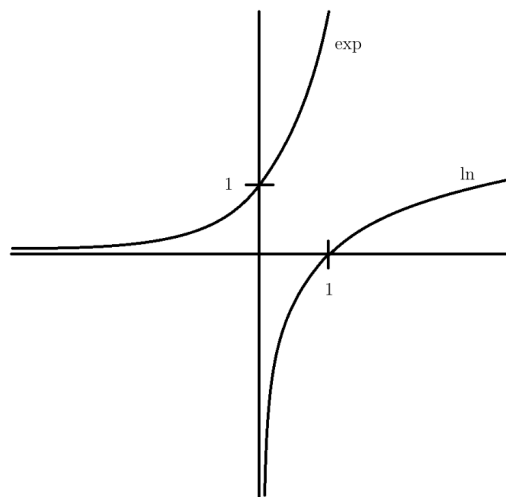
$$x \rightarrow x^a$$

eine stetige, streng monoton fallende Bijektion

$$3 \ln(x^a) = a \ln(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall x > 0$$

$$4 x^a \cdot x^b = x^{a+b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$$

$$5 (x^a)^b = x^{a \cdot b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$$



3.7 Konvergenz v. Funktionenfolgen

Eine Funktionenfolge ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^D$$

$$n \rightarrow f_n(x)$$

D 3.30 Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 0}$ **konvergiert punktweise** gegen eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, falls für alle $x \in D$:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

D 3.32 (Weierstrass 1841) Die Folge

$$f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$$

konvergiert gleichmäßig in D gegen

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

falls gilt $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \geq 1$, so dass

$$\forall n \geq N, \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

In dieser Definition ist es wichtig, dass N nur von ϵ

abhängig ist und nicht von $x \in D$. Deswegen kommt die Bedingung $\forall x \in D$ nach der Bedingung $\exists N \geq 1$

S 3.33 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge bestehend aus (in D) stetigen Funktionen die (in D) gleichmäßig gegen eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f (in D) stetig

D 3.34 Eine Funktionenfolge

$$f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$$

ist **gleichmäßig konvergent**, falls für alle $x \in D$ der Grenzwert

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

existiert und die Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ gleichmäßig gegen f konvergiert

K 3.35 Die Funktionenfolge

$$f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$$

konvergiert genau dann gleichmäßig in D , falls

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \geq 1$, so dass $\forall n, m \geq N$ und $\forall x \in D$:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

K 3.36 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Falls $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen ist, dann ist die Funktion

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

stetig

D 3.37 $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmäßig (in D), falls die durch

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

definierte Funktionenfolge gleichmäßig konvergiert

S 3.38 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und

$$f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$$

eine Folge stetiger Funktionen. Wir nehmen an

$$|f_n(x)| < c_n \quad \forall x \in D$$

und, dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

gleichmäßig in D und deren Grenzwert

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

ist eine in D stetige Funktion

D 3.39 Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

hat **positiven Konvergenzradius**, falls $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$ existiert. Der Konvergenzradius ist dann definiert als:

$$\rho = \begin{cases} +\infty & \text{falls } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{falls } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$$

S 3.40 Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$ und sei

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, |x| < \rho$$

Dann gilt: $\forall 0 \leq r < \rho$ konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

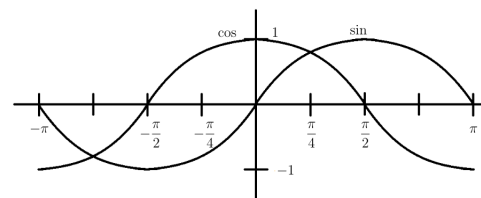
gleichmäßig auf $[-r, r]$, insbesondere ist $f :]-\rho, \rho[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig

3.8 Trigonometrische Funktionen

D Sinus&Cosinus

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n)!}$$

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$



S 3.41 $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetige Funktionen

S 3.42

$$1 \exp iz = \cos(z) + i \sin(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$2 \cos(z) = \cos(-z) \text{ und } \sin(-z) = -\sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$3 \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$4 \sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w) \\ \cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$$

$$5 \cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

K 3.34

$$\sin(2z) = 2 \sin(z) \cos(z)$$

$$\cos(2z) = \cos(z)^2 - \sin(z)^2$$

3.9 Die Kreiszahl π

S 3.44 Die Sinusfunktion hat auf $]0, +\infty[$ mindestens eine Nullstelle

$$\pi := \inf\{t > 0 : \sin t = 0\}$$

Dann gilt:

$$1 \sin \pi = 0, \quad \pi \in]2, 4[$$

$$2 \forall x \in]0, \pi[: \sin x > 0$$

$$3 e^{i\pi/2} = i$$

K 3.45

$$x \geq \sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} \quad \forall 0 \leq x \leq \sqrt{6}$$

K 3.46

$$1 e^{i\pi} = -1, \quad e^{2i\pi} = 1$$

$$2 \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x), \\ \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$3 \sin(x + \pi) = -\sin(x), \\ \sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$4 \cos(x + \pi) = -\cos(x), \\ \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$5 \text{ Nullstellen von Sinus} = \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\sin(x) > 0 \quad \forall x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(x) < 0 \quad \forall x \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$6 \text{ Nullstellen von Cosinus} = \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\cos(x) > 0 \\ \forall x \in]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \cos(x) < 0 \\ \forall x \in [-\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+2)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Für $z \notin \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}$ definieren wir:

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$$

und für $z \notin \pi \cdot \mathbb{Z}$:

$$\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$$

3.10 Grenzwerte von Funktionen

D 3.47 $x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein **Häufungspunkt** der Menge D falls $\forall \delta > 0$:

$$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\} \cap D \neq \emptyset$$

D 3.49 Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D . Dann ist $A \in \mathbb{R}$ der Grenz-

wert von $f(x)$ für $x \rightarrow x_0$ bezeichnet mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

falls $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ so dass

$$\forall x \in D \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}) : |f(x) - A| < \epsilon$$

Bem: 3.50

- 1 Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D . Dann gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ genau dann wenn für alle Folgen $(a_n)_{n \geq 1}$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$$

folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A$$

- 2 Sei $x_0 \in D$. Dann ist f stetig in x_0 genau dann, falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

- 3 Falls $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ existieren, so folgt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

- 4 Sei $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \leq g$. Dann folgt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

falls beide Grenzwerte existieren

- 5 Falls $g_1 \leq f \leq g_2$ und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g_2(x)$$

dann existiert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x)$$

S 3.52 Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$, x_0 Häufungspunkt von D , $f : D \rightarrow E$ eine Funktion. Wir nehmen an, dass

$$y_0 := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

existiert und $y_0 \in E$. Falls $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in y_0 folgt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0)$$

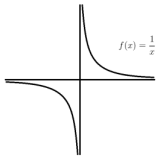
3.11 Linksseitige und rechtsseitige Grenzwerte

Betrachten wir zum Beispiel

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \frac{1}{x}$$

Dann wird für $x > 0$, x beliebig nahe an 0, $\frac{1}{x}$ beliebig positiv gross und für $x < 0$, x beliebig nahe an 0, $\frac{1}{x}$ beliebig negativ "gross". In beiden Fällen hat $\frac{1}{x}$ ein einfaches Verhalten.



Im Fall $a \in \mathbb{R}$,

$$f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow x^a$$

ist f auf $]0, \infty[$ definiert. Falls $a > 0$ werden wir sehen, dass

$$\lim_{x \in]0, \infty[\rightarrow 0} f(x) = 0$$

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, x_0 ist Häufungspunkt von $D \cap]x_0, +\infty[$; das heisst ein rechtsseitiger Häufungspunkt. Falls der Grenzwert der eingeschränkten Funktion

$$f|_{D \cap]x_0, +\infty[}$$

für $x \rightarrow x_0$ existiert, wird er mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

bezeichnet und nennt sich rechtsseitiger Grenzwert von f bei x_0 .

Wir erweitern diese Definition auf:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x \in D \cap]x_0, x_0 + \delta[: f(x) > \frac{1}{\epsilon}$$

und analog:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$

falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x \in D \cap]x_0, x_0 + \delta[: f(x) < -\frac{1}{\epsilon}$$

Linksseitige Häufungspunkt und Grenzwerte werden analog definiert. Mit diesen Definitionen gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

4 Differenzierbare Funktionen

D 4.1 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D

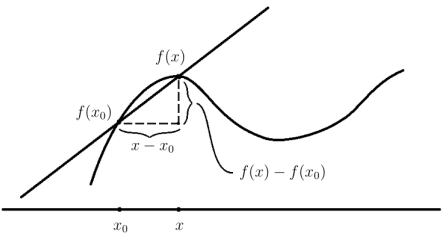
f ist in x_0 **Differenzierbar**, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Ist dies der Fall, wird der Grenzwert mit $f'(x_0)$ bezeichnet

Bem: 4.2: Es ist oft von Vorteil in der Definition von $f'(x_0)$, $x = x_0 + h$ zu setzen

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ist die Steigung der Gerade durch $(x_0, f(x_0)), (x, f(x))$. Falls $f'(x_0)$ existiert ist die Intuition, dass die Familien der Geraden durch $(x_0, f(x_0)), (x, f(x))$ für $x \neq x_0, x \rightarrow x_0$ als "Grenzwert" die Tangente zum Graphen von f in $(x_0, f(x_0))$ annimmt.

4.1 Die Ableitung

S 4.3 (Weierstrass 1861). Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in D$ Häufungspunkt von D . Folgende Aussagen sind äquivalent:

- 1 f ist in x_0 differenzierbar.
- 2 Es gibt $c \in \mathbb{R}$ und $r : D \rightarrow D$ mit:

$$2.1 \quad f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$$

$$2.2 \quad r(x_0) = 0 \text{ und } r \text{ ist stetig in } x_0$$

Falls dies zutrifft ist $c = f'(x_0)$ eindeutig bestimmt. Die Formulierung der Differenzierbarkeit von f mittels

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$$

und der Stetigkeit von r in x_0 hat den Vorteil, dass sie keinen Limes enthält. Ausserdem ist dann

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

die Gleichung der Tangente zum Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Wir können die Charakterisierung der Differenzierbarkeit noch vereinfachen in

dem wir in Satz 4.3(2.1)

$$\phi(x) = f'(x_0) + r(x)$$

setzen. Wir erhalten:

S 4.4 Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann in x_0 differenzierbar, falls es eine Funktion $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ gibt die stetig in x_0 ist und so, dass

$$f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0) \quad \forall x \in D$$

In diesem Fall gilt $\phi(x_0) = f'(x_0)$

K 4.5 Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D . Falls f in x_0 differenzierbar ist, so ist f stetig in x_0

B 4.6

1. $f = 1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dann ist $f'(x) = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$
Folgt aus $f(x) - f(x_0) = 1 - 1 = 0$
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$. Dann ist $f'(x_0) = 1$
Folgt aus $f(x) - f(x_0) = 1 \cdot (x - x_0)$
3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$. Dann ist $f'(x_0) = 2x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$
Folgt aus:

$$f(x) - f(x_0) = x^2 - x_0^2 = (x - x_0)(x + x_0)$$

Also für $x \neq x_0$:

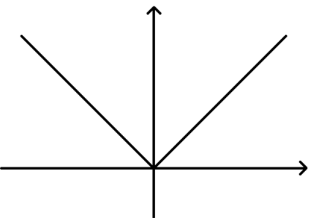
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = x + x_0$$

woraus

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

folgt.

4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$



Ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar:
Für $x < 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = -1$$

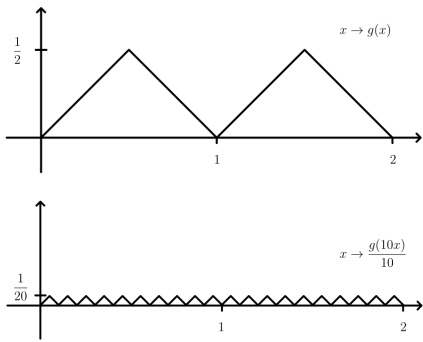
Für $x > 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = 1$$

Also hat für $x \rightarrow 0, \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ keinen Grenzwert. Für alle $x_0 \neq 0$ ist f in x_0 differenzierbar.

5. (Van der Waerden) Sei für $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \min\{|x - m| : m \in \mathbb{Z}\}$$



Sei

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(10^n x)}{10^n}$$

Dann ist nach Satz 3.38 diese Reihe auf ganz \mathbb{R} gleichmässig konvergent und f ist deswegen stetig. Mittels Dezimalentwicklung kann man zeigen, dass f in keinem Punkt von \mathbb{R} differenzierbar ist.

D 4.7 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist in **D** differenzierbar, falls für jeden Häufungspunkt $x_0 \in D$, f in x_0 differenzierbar ist.

B 4.8

1. $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist in \mathbb{R} differenzierbar und $\exp' = \exp$ Seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und $h \neq 0$:

$$\frac{\exp(x_0 + h) - \exp(x_0)}{h} =$$

$$\frac{\exp(x_0) \exp(h) - \exp(x_0)}{h} =$$

$$\exp(x_0) \left[\frac{\exp(h) - 1}{h} \right]$$

Also:

$$\exp'(x_0) = \exp(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\exp(h) - 1}{h} \right]$$

Aus $\exp(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \dots$ folgt für $h \neq 0$:

$$\frac{\exp(h) - 1}{h} = 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \dots$$

und für $h \in [-1, 1]$, $h \neq 0$:

$$\left| \frac{\exp(h) - 1}{h} - 1 \right| \leq |h| \left[\frac{1}{2!} + \frac{|h|}{3!} + \dots \right] \leq 2|h|$$

woraus

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\exp(h) - 1}{h} \right) - 1 = 0$$

folgt.

$$2. \sin' = \cos \text{ und } \cos' = -\sin$$

S 4.9 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar. Dann gelten

1. $f + g$ ist in x_0 differenzierbar und

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2. $f \cdot g$ ist in x_0 differenzierbar und $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

3. Falls $g(x_0) \neq 0$ ist $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

D Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heisst **gerade**(resp. **ungerade**), falls $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$) gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

B 4.10

1. $n \geq 1 : (x^n)' = nx^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2. Die Tangensfunktion

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$$

ist auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar und

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

3. Die Cotangensfunktion

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, x \notin \pi\mathbb{Z}$$

ist auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar und

$$\cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

S 4.11 Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ und sei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt. Sei $f : D \rightarrow E$ eine in x_0 differenzierbare Funktion so dass $y_0 := f(x_0)$ ein Häufungspunkt von E ist, und sei $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ eine in y_0 differenzierbare Funktion. Dann ist $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

K 4.12 Sei $f : D \rightarrow E$ eine bijektive Funktion, $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt; wir nehmen an f ist in x_0 differenzierbar und $f'(x) \neq 0$; zudem nehmen wir an f^{-1} ist in $y_0 = f(x_0)$ stetig. Dann ist y_0 Häufungspunkt von E , f^{-1} ist in y_0 differenzierbar und

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

B 4.13

1. Die Ableitung von $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ist

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\ln(\exp(x)) = x$$

S4.11 für $f(x) = \exp x$ und $g(y) = \ln y$

$$\ln'(\exp x) \exp'(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

und da $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ bijektiv ist, folgt:

$$\forall y \in]0, \infty[: \ln'(y) \cdot y = 1$$

4.2 Erste Ableitung

D 4.14 Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$

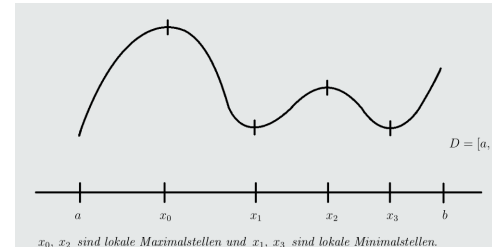
1. f besitzt ein lokales Maximum in x_0 falls es $\delta > 0$ gibt mit:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D$$

2. f besitzt ein lokales Minimum in x_0 falls es $\delta > 0$ gibt mit:

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D$$

3. f besitzt ein lokales Extremum in x_0 falls es entweder ein lokales Minimum oder Maximum von f ist.



S 4.15 Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in]a, b[$. Wir nehmen an, f ist in x_0 differenzierbar

1. Falls $f'(x_0) > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit

$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$$

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$$

2. Falls $f'(x_0) < 0$ gibt es $\delta > 0$ mit

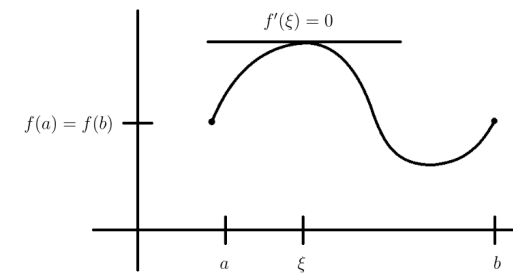
$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$$

$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$$

3. Falls f in x_0 ein lokales Extremum besitzt, folgt $f'(x_0) = 0$

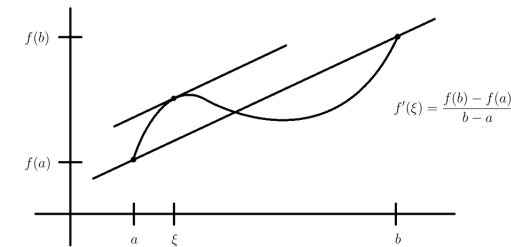
S 4.16 (Rolle 1690). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Erfüllt sie $f(a) = f(b)$ so gibt es $\xi \in]a, b[$ mit

$$f'(\xi) = 0$$



S 4.17 (Lagrange 1797) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit f in $]a, b[$ differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in]a, b[$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$



K 4.18 Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar

1. Falls

$$f'(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in]a, b[\text{ ist } f \text{ konstant}$$

2. Falls $f'(\xi) = g'(\xi) \quad \forall \xi \in]a, b[$ gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x) + c \quad \forall x \in [a, b]$.

3. Falls $f'(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in]a, b[$ ist f auf $[a, b]$ monoton wachsend

4. Falls $f'(\xi) > 0 \quad \forall \xi \in]a, b[$ ist f auf $[a, b]$ strikt monoton wachsend

5. Falls $f'(\xi) \leq 0 \quad \forall \xi \in]a, b[$ ist f auf $[a, b]$ monoton fallend

6. Falls $f'(\xi) < 0 \quad \forall \xi \in]a, b[$ ist f auf $[a, b]$ strikt monoton fallend

7. Falls es $M \geq 0$ gibt mit

$$|f'(\xi)| \leq M \quad \forall \xi \in]a, b[$$

dann folgt $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M |x_1 - x_2|$$

B 4.19

1. **arcsin**: Da $\sin' = \cos$ und $\cos(x) > 0 \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ folgt aus K4.18, dass die Sinusfunktion auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ strikt monoton wach-

send ist, also ist

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

bijektiv. Wir definieren

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

als die Umkehrfunktion von \sin . Nach 4.12 ist sie auf $] -1, 1[$ differenzierbar und für $y = \sin x$, $x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ folgt nach 4.12

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos x}$$

Nun benützen wir:

$$y^2 = \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

woraus mit $\cos x > 0$ folgt:

$$\cos x = \sqrt{1 - y^2}$$

Wir erhalten also $\forall y \in] -1, 1[$

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

2. **arccos**: Eine analoge Diskussion zeigt, dass $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ strikt monoton fallend ist, und $[0, \pi]$ auf $[-1, 1]$ bijektiv abbildet. Sei:

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

die Umkehrfunktion. Sie ist auf $] -1, 1[$ differenzierbar und:

$$\arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}} \quad \forall y \in] -1, 1[$$

3. **arctan**: Für $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Also ist \tan auf $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ streng monoton wachsend mit

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$$

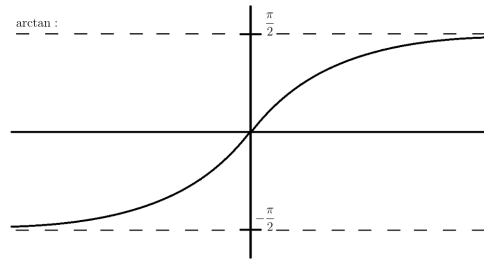
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$$

Also ist $\tan :] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow] -\infty, \infty[$ bijektiv. Sei

$$\arctan :] -\infty, \infty[\rightarrow] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

die Umkehrfunktion. Dann ist \arctan differenzierbar und für $y = \tan x$:

$$\arctan'(y) = \cos^2 x = \frac{1}{1 + y^2}$$



4. **arccot**: Für $x \notin \pi \cdot \mathbb{Z}$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Die Cotangensfunktion ist auf $]0, \pi[$ streng monoton fallend und bildet $]0, \pi[$ bijektiv auf $] -\infty, \infty[$ ab. Sei:

$$\operatorname{arccot} :] -\infty, \infty[\rightarrow]0, \pi[$$

die Umkehrfunktion. Dann folgt:

$$\operatorname{arccot}'(y) = -\frac{1}{1 + y^2}, \quad y \in] -\infty, \infty[$$

B 4.20 (Hyperbel und Areafunktionen)

Als Hyperbelfunktionen bezeichnet man die Funktionen $\cosh x$, $\sinh x$, $\tanh x$ definiert $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\cosh'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$\sinh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

Offensichtlich gilt $\cosh x \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $\sinh x \geq 0 \quad \forall x \in [0, +\infty[$, $\sinh(0) = 0$. Daraus folgt: \cosh ist auf $[0, \infty[$ strikt monoton wachsend, $\cosh(0) = 1$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = +\infty$.

$$\cosh : [0, \infty[\rightarrow [1, \infty[$$

bijektiv. Deren Umkehrfunktion wird mit

$$\operatorname{arcosh} : [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$$

bezeichnet. Unter benützung von

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

folgt:

$$\operatorname{arcosh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} \quad \forall y \in]1, \infty[$$

Analog:

$$\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

streng monoton wachsend und bijektiv. Die Umkehrfunktion wird mit

$$\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

bezeichnet und es gilt:

$$\operatorname{arsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Für \tanh folgt:

$$\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} > 0$$

Also ist \tanh auf \mathbb{R} streng monoton wachsend und man zeigt, dass

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh(x) = -1$$

Die Funktion $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow] -1, 1[$ ist bijektiv. Ihre Umkehrabbildung wird mit

$$\operatorname{artanh} :] -1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$$

bezeichnet. Es gilt dann:

$$\operatorname{artanh}'(y) = \frac{1}{1 - y^2} \quad \forall y \in] -1, 1[$$

S 4.22 (Cauchy). Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in]a, b[$ mit

$$g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a))$$

Falls $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$ folgt

$$g(a) \neq g(b)$$

und

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Randnotiz: Man erhält den Satz von Lagrange mit $g(x) = x$

S 4.23 (l'Hospital 1696) Seien $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$ Falls

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$$

und

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$$

existiert, folgt

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Bem: 4.24 Der Satz gilt auch

- falls $b = +\infty$
- falls $\lambda = +\infty$
- falls $x \rightarrow a^+$

B 4.25

1. Für $a > 0$ folgt aus S4.13 (1), (2) und l'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\frac{1}{x})}{ax^{a-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{ax^a} = 0$$

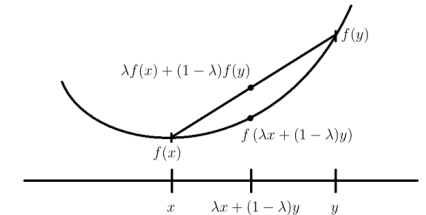
- 2.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

D 4.26 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

- 1 f ist **konvex** (auf I) falls es für alle $x \leq y$, $x, y \in I$ und $\lambda \in [0, 1]$ $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ gilt
- 2 f ist **streng konvex** falls für alle $x < y$, $x, y \in I$ und $\lambda \in]0, 1[$ $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$



Bem: 4.27 Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Ein einfacher Induktionsbeweis zeigt, dass für alle $n \geq 1$, $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq I$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ in $[0, 1]$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

L 4.28 Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Die Funktion f ist genau dann konvex, falls für alle $x_0 < x < x_1$ in I

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

gilt.

f ist streng konvex wenn $<$ gilt

S 4.29 Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ in $]a, b[$ differenzierbar. Die Funktion f ist genau dann (streng) konvex, falls f' (streng) monoton wachsend ist.

K 4.30 Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar in $]a, b[$. Die Funktion f ist (streng) konvex, falls $f'' \leq 0$ (bzw $f'' > 0$) auf $]a, b[$

B 4.31 Für alle $n \geq 1$ und $x_1 \dots x_n$ in $]0, \infty[$ gilt

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

Wir betrachten $f(x) = -\ln x$, dann ist

$$f'(x) = -\frac{1}{x}$$

und

$$f''(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x \in]0, \infty[$$

Folglich ist f konvex und aus Bem. 4.27 mit

$I =]0, \infty[$ und $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ folgt:

$$-\ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n -\frac{1}{n} \ln x_i = -\frac{1}{n} \ln(x_1, \dots, x_n)$$

4.3 Höhere Ableitungen

D 4.32 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, so dass jedes $x_0 \in D$ Häufungspunkt der Menge D ist. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in D und f' ihre Ableitung; wir setzen $f^{(1)} = f'$

- 1 Für $n \geq 2$ ist f **n-mal differenzierbar in D** falls $f^{(n-1)}$ in D differenzierbar ist. Dann ist $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ und nennt sich die n -te Ableitung von f
- 2 Die Funktion f ist **n-mal stetig differenzierbar in D** , falls sie n -mal differenzierbar ist und falls $f^{(n)}$ in D stetig ist
- 3 Die Funktion f ist in D **glatt**, falls sie $\forall n \geq 1$, n -mal differenzierbar ist.

Bem: 4.33 Es folgt aus Korollar 4.5, dass für $n \geq 1$, eine n -mal differenzierbare Funktion $(n-1)$ -mal differenzierbar ist.

S 4.34 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ wie in Def. 4.32, $n \geq 1$ und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar in D

- 1 $f + g$ ist n -mal differenzierbar und

$$(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

- 2 $f \cdot g$ ist n -mal differenzierbar und

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

B 4.35

1. Die Funktionen $\exp, \sin, \cos, \sinh, \cosh, \tanh$ sind glatt auf ganz \mathbb{R}
2. Polynome sind auf ganz \mathbb{R} glatt.
3. $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ist glatt;

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad (\ln)''(x) = (-1)x^{-2}, \dots$$

$$\ln^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n}, \quad n \geq 1$$

S 4.36 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ wie in Def. 4.32, $n \geq 1$ und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar in D . Falls $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$, ist $\frac{f}{g}$ in D n -mal differenzierbar

S 4.37 Seien $E, D \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen für die jeder Punkt Häufungspunkt ist. Seien $f : D \rightarrow E$ und $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ n -mal differenzierbar und

$$(g \circ f)^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n A_{n,k}(x) (g^{(k)} \circ f)(x)$$

wobei $A_{n,k}$ ein Polynom in den Funktionen $f', f^{(2)}, \dots, f^{(n+1-k)}$ ist

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$$

$$(g \circ f)^{(2)} = (g^{(2)} \circ f) (f')^2 + (g' \circ f) \cdot f^{(2)}$$

$$(g \circ f)^{(3)} =$$

$$(g^{(3)} \circ f) (f')^3 + 3(g^{(2)} \circ f) f' f^{(2)} + (g' \circ f) f^{(3)}$$

4.4 Potenzreihen & Taylor Approx.

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass grob gesagt, konvergente Potenzreihen glatte Funktionen ergeben. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht und wird durch eine schwächere Aussage (Taylor Approximation) ersetzt.

S 4.39 Seien $f_n :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktionsfolge wobei f_n einmal in $]a, b[$ stetig differenzierbar ist $\forall n \geq 1$. Wir nehmen an, dass sowohl die Folge $(f_n)_{n \geq 1}$ wie $(f_n')_{n \geq 1}$ gleichmässig in $]a, b[$ konvergieren (Def. 3.34) mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n =: f$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n' =: p$.

Dann ist f stetig differenzierbar und $f' = p$

S 4.40 Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius (3.39) $\rho > 0$. Dann ist

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

auf $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ differenzierbar und

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (x - x_0)^{k-1}$$

für alle $x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$

K 4.41 Unter der Voraussetzung von Satz 4.39 ist f auf $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ glatt und

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} c_k \frac{k!}{(k-j)!} (x - x_0)^{k-j}$$

Insbesondere ist

$$c_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}$$

B 4.42 (Cauchy 1823)

Das nicht jede glatte Funktion Summe einer Potenzreihe ist, folgt aus diesem Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Diese Funktion ist auf ganz \mathbb{R} glatt und

$$f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \geq 0. \text{ Da andererseits}$$

$f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$, gibt es keine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius ρ , die in $] - \rho, \rho[$ gegen f konvergiert.

Aus Satz 4.37 folgt, dass $\forall k \geq 0$

$$f^{(k)}(x) = \mathcal{P}_k \left(\frac{1}{x} \right) \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) \quad \forall x \neq 0$$

wobei \mathcal{P}_k ein Polynom ist. Unter Benützung von:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^m} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) = 0 \quad \forall m \geq 0$$

folgt mit $f^{(k)}(0) = 0$:

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(x)}{x} = 0$$

S 4.43 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ $(n+1)$ -mal differenzierbar. Für jedes $a < x \leq b$ gibt es $\mathcal{E} \in]a, x[$ mit:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\mathcal{E})}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

K 4.44 (Taylor Approximatio) Sei $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]c, d[$ $(n+1)$ -mal differenzierbar. Sei $c < a < d$. Für alle $x \in [c, d]$ gibt es \mathcal{E} zwischen x und a so dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\mathcal{E})}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

Anhand dieses Korollars können wir eine präzisere Aussage über lokale Extremalstellen einer $(n+1)$ -mal differenzierbaren Funktion machen.

K 4.45 Sei $n \geq 0, a < x_0 < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in $]a, b[$ $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar. Annahme: $f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$

- 1 Falls n gerade ist und x_0 lokale Extremalstelle, folgt $f^{(n+1)}(x_0) = 0$
- 2 Falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ so ist x_0 eine strikt lokale Minimalstelle
- 3 Falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ so ist x_0 eine strikt lokale Maximalstelle

K 4.46 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ zweimal stetig differenzierbar. Sei $x < x_0 < b$. Annahme: $f'(x) = 0$

- 1 Falls $f^{(2)}(x_0) > 0$ ist x_0 strikte lokale Minimalstelle
- 2 Falls $f^{(2)}(x_0) < 0$ ist x_0 strikte lokale Maximalstelle

B 4.47 Sei $f(x) = x^4 - x^2 + 1$. Wir bestimmen die lokalen Extremalstellen von f . Sei x_0 eine solche; dann folgt nach Satz 4.15(3):

$$f'(x_0) = 0,$$

das heisst

$$4x_0^3 - 2x_0 = 0.$$

Also gilt $x_0 \in \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$. Nun ist

$$f^{(2)}(x) = 12x^2 - 2;$$

$$f^{(2)}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f^{(2)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4 > 0$$

$$f^{(2)}(0) = -2 < 0$$

Also sind $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}$ strikte lokale Minimalstellen, und 0 strikte lokale Maximalstelle.

5 Das Riemann Integral

5.1 Integrabilitätskriterien

D 5.1 Eine **Partition** von I ist eine endliche Teilmenge $P \subseteq [a, b]$ wobei $\{a, b\} \subseteq P$ **L 5.2**

- 1 Sei P' eine Verfeinerung von P , dann gilt:

$$s(f, P) \leq s(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P)$$

- 2 Für beliebige Partitionen P_1, P_2 gilt:

$$s(f, P_1) \leq S(f, P_2)$$

D 5.3 Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist **Riemann integrierbar** falls

$$s(f) = S(f)$$

In diesem Fall bezeichnen wir den gemeinsamen Wert von $s(f)$ und $S(f)$ mit

$$\int_a^b f(x) dx$$

S 5.4 Eine beschränkte Funktion ist genau dann integrierbar, falls

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P \in \mathcal{P}(I)$$

mit $S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$ **S 5.8** (Du Bois-Reymond 1875) Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, falls $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ so dass

$$\forall P \in \mathcal{P}_\delta(I), S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$$

K 5.9 Die beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar mit $A := \int_a^b f(x) dx$ falls: $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ so dass $\forall P \in \mathcal{P}(I)$ Partition mit $\delta(P) < \delta$ und $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ mit $\mathcal{E}_i \in [x_{i-1}, x_i], P = \{x_0, \dots, x_n\}$

$$\left| A - \sum_{i=1}^n f(\mathcal{E}_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \epsilon$$

5.2 Integrierbare Funktionen

S 5.10 Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $f + g, \lambda \cdot f, f \cdot g, |f|, \max(f, g), \min(f, g)$ und $\frac{f}{g}$ (falls $|g(x)| \geq \beta > 0 \quad \forall x \in [a, b]$) integrierbar. **Bem:** 5.11 Sei $\phi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann ist

$$\sup_{x, y \in [c, d]} |\phi(x) - \phi(y)| = \sup_{x \in [c, d]} \phi(x) - \inf_{x \in [c, d]} \phi(x)$$

K 5.12 Seien P_i Polynome und $[a, b]$ ein Intervall in dem Q keine Nullstelle besitzt. Dann ist

$$[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)}$$

integrierbar. **D** 5.13 Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ ist in D **gleichmässig stetig**, falls $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in D :$

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

S 5.15 (Heine 1872). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in dem kompakten Intervall $[a, b]$. Dann ist f in $[a, b]$ gleichmässig stetig. **S** 5.16 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann ist f integrierbar. **S** 5.17 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton. Dann ist f integrierbar. **Bem:** 5.18 Seien $a < b < c$ und $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt mit $f|_{[a, b]}$ und $f|_{[b, c]}$ integrierbar. Dann ist f integrierbar und

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

S 5.19 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit Endpunkten a, b sowie $f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x) dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x) dx$$

5.3 Ungleichungen und Mittelwertsatz

S 5.20 Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar, und

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Dann folgt:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

K 5.21 Falls $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar, folgt

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

S 5.22 (Cauchy-Schwarz Ungleichung 1821) Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar. Dann gilt:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}$$

S 5.23 (Mittelwertsatz, Cauchy 1821) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $\mathcal{E} \in [a, b]$ mit:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\mathcal{E})(b - a)$$

S 5.25 (Cauchy 1821) Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wobei f stetig, g beschränkt integrierbar mit $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$. Dann gibt es $\mathcal{E} \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\mathcal{E}) \int_a^b g(x) dx$$

5.4 Fundamentalsatz

S 5.26 Seien $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad a \leq x \leq b$$

ist in $[a, b]$ stetig differenzierbar und

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

D 5.27 Sei $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Eine Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heisst **Stammfunktion** von f , falls F (stetig) differenzierbar in $[a, b]$ ist und $F' = f$ in $[a, b]$ gilt. **S** 5.28 (Fundamentalsatz der Differentialrechnung) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine Stammfunktion F von f , die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist und es gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

S 5.30 (Partielle Integration) Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

S 5.31 (Substitution) Sei $a < b, \phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $\phi([a, b]) \subseteq I$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t) dt$$

K 5.33 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

1 Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ so dass das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten $a+c, b+c$ in I ent-

halten ist. Dann gilt:

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x) dx = \int_a^b f(t+c) dt$$

2 Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $c \neq 0$ so dass das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten ac, bc in I enthalten ist. Dann gilt:

$$\int_a^b f(ct) dt = \frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} f(x) dx$$

5.5 Integration konvergenter Reihen

S 5.34 Sei $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge von beschränkten, integrierbaren Funktionen die gleichmässig gegen eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f beschränkt integrierbar und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

K 5.35 Sei $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge beschränkter integrierbarer Funktionen so dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

auf $[a, b]$ gleichmässig konvergiert. Dann gilt :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx$$

K 5.36 Sei

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist für jedes $0 \leq r < \rho$, f auf $[-r, r]$ integrierbar und es gilt $\forall x \in]-\rho, \rho[$:

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$$

5.6 Euler-McLaurin Summationsformel

D 5.40 $\forall k \geq 0$ ist das k 'te Bernoulli Polynom

$B_k(x) = k!P_k(x)$ **D** 5.41 Sei $B_0 = 1$ für alle $k \geq 2$ definieren wir B_{k-1} rekursiv:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} B_i = 0$$

S 5.42

$$B_k(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B_i x^{k-i}$$

Bem: 5.43 Für $k \geq 2$:

$$B_k(1) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B_i = B_k \quad (\text{nach 5.41}) \\ = B_k(0) \quad (\text{nach Satz 5.42}).$$

Zur Aussage der Summationsformel definieren wir für $k \geq 1$

$$\tilde{B}_k : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

als

$$\tilde{B}_k(x) = \begin{cases} B_k(x) & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ B_k(x-n) & \text{für } n \leq x < n+1 \end{cases} \text{ wobei } n \geq 1$$

S 5.44 Sei $f : [0, n] \rightarrow \mathbb{R}$ k -mal stetig differenzierbar, $k \geq 1$. Dann gilt :

1 Für $k = 1$:

$$\sum_{i=1}^n f(i) = \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \int_0^n \tilde{B}_1(x) f'(x) dx$$

2 Für $k \geq 2$:

$$\sum_{i=1}^n f(i) = \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \sum_{j=2}^k \frac{(-1)^j B_j}{j!} f^{(j)}(0) + \int_0^n \tilde{B}_k(x) f^{(k)}(x) dx$$

wobei

$$\tilde{B}_k(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^n \tilde{B}_k(x) f^{(k)}(x) dx$$

5.7 Stirling'sche Formel

S 5.47

$$n! = \frac{\sqrt{2\pi n} n^n}{e^n} \cdot \exp\left(\frac{1}{12n} + R_3(n)\right)$$

wobei

$$|R_3(n)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216 \cdot \frac{1}{n^2}} \quad \forall n \geq 1$$

L 5.48 $\forall m \geq n+1 \geq 1$:

$$|R_3(m, n)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

5.8 Uneigentliche Integrale

D 5.49 Sei $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b]$ für alle $b > a$. Falls

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

existiert, bezeichnen wir den Grenzwert mit

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

und sagen, dass f auf $[a, +\infty[$ integrierbar ist.

L 5.51 Sei $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b]$ $\forall b > a$

- 1 Falls $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \geq a$ und $g(x)$ ist auf $[a, \infty[$ integrierbar, so ist f auf $[a, \infty[$ integrierbar
- 2 Falls $0 \leq g(x) \leq f(x)$ und \int_a^∞ divergiert, so divergiert auch $\int_a^\infty f(x) dx$

S 5.53 (McLaurin 1742) Sei $f : [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ monoton fallend. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^\infty f(n)$$

konvergiert genau dann, wenn

$$\int_1^\infty f(x) dx$$

konvergiert **D** 5.56 In dieser Situation ist $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar falls

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$$

existiert; in diesem Fall wird der Grenzwert mit $\int_a^b f(x) dx$ bezeichnet

5.9 Die Gamma Funktion

D 5.59 Für $s \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$$

S 5.60(Bohr-Mollerup)

- 1 Die Gamme Funktion erfüllt die Relationen

- (a) $\Gamma(1) = 1$
- (b) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \forall s > 0$
- (c) Γ ist logarithmisch, das heisst

$$\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}$$

für alle $x, y > 0$ und $0 \leq \lambda \leq 1$

- 2 Die Gamme Funktion ist die einzige Funktion $0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ die (a), (b) und (c) erfüllt. Darüber hinaus gilt:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)} \quad \forall x > 0$$

L 5.61 Sei $\rho > 1$ und $q > 1$ mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Dann gilt $\forall a, b \geq 0$

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

S 5.62(Hölder Ungleichung). Seien $\rho > 1$ und $q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für alle $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig gilt:

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

5.10 Das unbestimmte Integral