1 Grundlagen

1.1 Wahrscheinlichkeitsräume

D 1.1Sigma-Algebra

Eine Sigma-Algebra ist eine Teilmenge $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ mit folgenden Eigenschaften

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$
- $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

D 1.2 Wahrscheinlichkeitsmass

Ein Wahrscheinlichkeitsmass ist ein Mapping

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$$

$$A \to \mathbb{P}[A]$$

- $\mathcal{P}[\Omega] = 1$
- $\sigma -$ Additivität $\mathcal{P}[A] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}[A_i]$
  if $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ (disjunkte Vereinigung)

D 1.3 Wahrscheinlichkeitsraum

Sei ω ein Grundraum, $\mathcal{F}$ eine σ -Algebra und $\mathcal{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmass. Wir nennen das Tripel$(\omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum.

D 1.5 Laplace Modell

- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\omega)$
- $\mathbb{P} :\to [0,1]$ ist definiert durch

$$\forall A \in \mathcal{F}\ \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{|\omega|}$$

1.2 Eigenschaften von Ereignissen

S 1.6 Für eine Sigma-Algebra $\mathcal{F}$ auf Ω gilt:

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
- $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cup B \in \mathcal{F}$
- $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$

1.3 Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmassen

S 1.7

- $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$
- $A_1, \dots A_k$ paarweise disjunkte Ereignisse,

$$\mathbb{P}[A_1 \cup \dots \cup A_k] = \mathbb{P}[A_1] + \dots \mathbb{P}[A_k]$$

- $\mathbb{P}[A^c] = 1 - \mathbb{P}[A]$
- $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$

Bem: [1.6A]

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A_i)^c$$

S 1.8 Seien $A, B \in \mathcal{F}$ dann gilt

$$A \subset B \implies \mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$$

S 1.9 Sei $A_1, A_2, \dots$ eine Folge von nicht notwendigerweise disjunkten Ereignissen, dann gilt:

$$\mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$$

1.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit

D 1.13 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Sei $(\omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien A, B zwei Ereignisse mit $\mathbb{P}[B] > 0$

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

S 1.16 Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit

Sei $B_1, \dots, B_n$ eine Partition des Grundraumes ω, so dass $\mathbb{P}[B_i] > 0$ für jedes $1 \leq i \leq n$ gilt. Dann gilt:

$$\forall A \in \mathcal{F}\ \mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A|B_i]\,\mathbb{P}[B_i]$$

Alternativ :

$$P(A) = \mathbb{P}[A \cap B] + \mathbb{P}[A \cap \overline{B}] =$$

$$\mathbb{P}[B] \cdot \mathbb{P}[A|B] + \mathbb{P}[\overline{B}] \cdot \mathbb{P}[A|\overline{B}]$$

S 1.17 Satz von Bayes

Sei $B_1 \dots B_n \in \mathcal{F}$ eine Partition von ω sodass, $\mathbb{P}[B_i] > 0$ für jedes i gilt. Für jedes Ereignis A mit $\mathbb{P}[A] > 0$ gilt

$$\forall i = 1, \dots n\ \mathbb{P}[B_i|A] = \frac{\mathbb{P}[A|B_i]\mathbb{P}[B_i]}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}[A|B_j]\mathbb{P}[B_j]}$$

Alternativ

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[B|A] \cdot \mathbb{P}[A]}{\mathbb{P}[B]}$$

1.5 Unabhängigkeit

D 1.18 Unabhängigkeit

Sei $(\omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zwei Ereignisse A und B heissen unabhängig falls

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]$$

S 1.20

Seien A,B $\in \mathcal{F}$ zwei Ereignisse mit $\mathbb{P}[A], \mathbb{P}[B] > 0$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$
2. $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]$
3. $\mathbb{P}[B|A] = \mathbb{P}[B]$

D 1.21

Sei I eine beliebige Indexmenge. Eine Familie von Ereignissen $(A_i)_{i \in I}$ heisst unabhängig falls

$$\forall J \subset I \text{endlich} \quad \mathbb{P}[\bigcap_{j \in J} A_j] = \prod_{j \in J} \mathbb{P}[A_j]$$

Bem:

Drei Ereignisse A,B und C sind unabhängig falls alle 4 folgenden Gleichungen erfüllt sind

1. $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$
2. $\mathbb{P}[A \cap C] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[C]$
3. $\mathbb{P}[B \cap C] = \mathbb{P}[B]\mathbb{P}[C]$
4. $\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]\mathbb{P}[C]$

---

2 Zufallsvariablen und Verteilungsfunktionen

2.1 Abstrakte Definition

D 2.1 Zufallsvariable

Sei $(\omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Zufallsvariable ist eine Abbildung $X : \omega \to \mathbb{R}$ so dass, für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\{w \in \omega : X(w) \leq a\} \in \mathcal{F}$$

Bem:

Für Ereignisse im Bezug auf Z:V

- $\{X \leq a\} = \{w \in \omega : X(w) \leq a\}$
- $\{a < X \leq b\} = \{w \in \omega : a < X(w) < b\}$
- $\{X \in \mathbb{Z}\} = \{w \in \omega : X(w) \in \mathbb{Z}\}$

$$\mathbb{P}[X \leq a] = \mathbb{P}[\{X \leq a\}] = \mathbb{P}[\{w \in \omega : X(w) \leq a\}]$$

2.2 Verteilungsfunktion

D 2.2 Verteilungsfunktion

Sei X eine Zufallsvariable auf einem W-Raum $(\omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Die Verteilungsfunktion von X ist eine Funtkion $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, definiert durch

$$\forall a \in \mathbb{R}\ F_X(a) = \mathbb{P}[X \leq a]$$

S 2.3 Einfache Identität

Seien $a < b$ zwei reelle Zahlen. Dann gilt

$$\mathbb{P}[a < X \leq b] = F(b) - F(a)$$

T 2.4 Eigenschaften der Verteilungsfunktion

Sei X eine Z.V aif einem Wahrscheinlichkeitsraum. Die Verteilungsfunktion $F = F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ von X erfüllt folgende Eigenschaften

- F ist monoton wachsend
- F ist rechtsstetig
- $\lim_{a \to -\infty} F(a) = 0$ und $\lim_{a \to \infty} F(a) = 1$

2.3 Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

D 2.5

Seien $X_1 \dots X_n$ Zufallsvariablen auf einem W-Raum. Dann heissen $X_1, \dots X_n$ unabhängig falls

$$\forall x_1, x_2 \dots x_n \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{P}[X_1 \leq x_1 \dots X_n \leq x_n] = \mathbb{P}[X_1 \leq x_1] \dots \mathbb{P}[X_n \leq x_n]$$

S 2.7 Gruppieren von Zufallsvariablen

Seien $X_1 \dots X_n$ n unabhängige Zufallsvariablen. Seien $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ Indizes und $\phi_1 \dots \phi_k$ Abbildungen. Dann sind

$$Y_1 = \phi_1(X_1 \dots X_{i_1}), Y_2 = \phi_2(X_{i_1+1}, \dots X_{i_2}), \dots$$

$$Y_k = \phi_k(X_{i_{k-1}+1} \dots X_{i_k})$$

unabhängig

D 2.8

2.4 Konstruktion von Zufallsvariablen

Eine Folge von Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots$ heisst

- unabhängig falls $X_1, \dots X_n$ unabhängig sind, für alle $n \in \mathbb{N}$
- unabhängig und identisch verteilt(uiv) falls sie unabhängig ist und die Zufallsvariablen dieselbe Verteilungsfunktion haben d.h

$$\forall i, j\ F_{X_i} = F_{X_j}$$

---

3 Diskrete und stetige Variablen

3.1 Unstetigkeit/Stetigkeit der Verteilungsfunktion F

S 3.1 Wahrscheinlichkeit eines Punktes

Sei $X : \omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F. Für jdedes a in $\mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{P}[X = a] = F(a) - F(-a)$$

3.2 Fast sichere Ereignisse

D 3.2

Sei $A \in \mathcal{F}$ ein Ereignis. Wir sagen A tritt fast sicher ein falls

$$\mathbb{P}[A] = 1$$

3.3 Diskrete Zufallsvariablen

D 3.4 Diskrete Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable $X : \omega \to \mathbb{R}$ hiest diskret falls eine endliche oder abzählbare Menge $W \subset \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$\mathbb{P}[X \in W] = 1$$

Bem: [3.5] Wenn der Grundraum ω endlich oder abzähbar ist, dann ist jede Zufallsvariable $X : \omega \to \mathbb{R}$ diskret.

D 3.6 Verteilung von X

Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Werten in einer endlichen oder abzähbaren Menge $W \subset \mathbb{R}$. Die Zahlenfolge $(p(x))_{x\in W}$ definiert durch

$$\forall x \in W\ p(x) := \mathbb{P}[X = x]$$

heisst Verteilung von X

S 3.7 Die Verteilung $(p(x))_{x\in W}$ einer diskreten Zufallsvariable erfüllt

$$\sum_{x\in W} p(x) = 1$$

S 3.9 Sei X eine diskrete Zufallsvariable, dessen WErte in einer endlichen oder abzähbaren Menge W liegen, und deren Verteilung p ist. Dann ist die Verteilungsfunktion von X gegeben durch

$$\forall X \in \mathbb{R}\ F_X(x) = \sum_{y\le x_{y\in W}} p(y)$$

3.4 Beispiele diskreter Zufallsvariablen

D 3.10 Bernoulli Verteilung

Es sei $0 \le p \le 1$. Eine Zufallsvariable X heisst Bernoulli Zufallsvariable mit Parameter p, wenn sie Werte in W = $\{0, 1\}$ annimt und folgendes gilt

$$\mathbb{P}[X = 0] = 1 - p \quad \text{und } \mathbb{P}[X = 1] = p$$

D 3.11 Binomialverteilung

Sei $0 \le p \le 1$, sein $n \in \mathbb{N}$. Eine Zufallsvariable X heisst binomiale Zufallsvariable mit Paramtern n und p, wenn sie werte in $W = \{0, \dots, n\}$ annimt und folgendes gilt

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}\ \mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

S 3.13 Sum von unab. Bern. und Binom. Z.V

Sei $0 \le p \le 1$, sein $n \in \mathbb{N}$. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Bernoulli Z.V mit Parameter p. Dann ist

$$S_n := X_1 + \cdots + X_n$$

eine binomialverteilte Z.V mit paramtern n und p.

Bem: [3.14]

Bin(1,p) ist gerade Ber(p) verteilt. Falls $X \sim Bin(m, p), Y \sim Bin(n, p)$ und X,Y unabhängig, dann ist $X + Y \sim Bin(m + n, p)$ verteilt.

D 3.15 Geometrische Verteilung

Es sei $0 < p \le 1$. Eine Zufallsvariable X heisst geometrische Zufallsvariable mit Parameter p, falls sie Werte in W = $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ annimt und folgendes gilt

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\ \mathbb{P}[X = k] = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

Bem: [3.16]

Für p=1 und k = 1 erscheint in der obigen Gleichung $0^0 = 1$, es gilt $\mathbb{P}[X = 1] = p$

S 3.18

Sei $X_1, X_2, \dots$ eine Folge von unendlich vielen unabhängigen Bernoulli Z.V mit Parameter p. Dann ist

$$T := \min\{n \ge 1 : X_n = 1\}$$

eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Paramter p.

Bem: [3.18A]

Sei T eine geometrische Verteilung mit Parameter p. Dann ist $T > n$, wenn die ersten n Bernoulli-Experimente fehlschlagen. Daher gilt

$$\mathbb{P}[T > n] = (1-p)^n$$

S 3.20 Gedächnislosigkeit der Geo. Vert.

Sei $T \sim Geom(p)$ für $0 < p < 1$. Dann gilt

$$\forall n \ge 0 \quad \forall k \ge 1 \quad \mathbb{P}[T \ge n + k | T > n] = P[T \ge k]$$

D 3.21

Sei $\lambda > 0$ eine positive reelle Zahl. Eine Zufallsvariable X heisst Poisson-Zufallsvariable mit Paramter λ, wenn sie Werte in $W = \mathbb{N}$ annimt und folgendes gilt

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \mathbb{P}[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} \exp^{-\lambda}$$

S 3.23 Poisson-Approx. der Binom. verteil.

Sei $\lambda > 0$. Für jedes $n \ge 1$ seien $X_n \sim Bin(n, \frac{\lambda}{n})$ Zufallsvariablen. Dann gilt

$$\forall k \in \mathbb{N} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_n = k] = \mathbb{P}[N = k]$$

3.5 Stetige Verteilungen

D 3.25 Stetig verteilte Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable $X : \omega \to \mathbb{R}$ heisst stetig, wenn ihre Verteilungsfunktion F_X wie folgt geschrieben werden kann

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx \text{ für alle a in } \mathbb{R}$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ eine nicht-negative Funktion ist. Wir nennen dann f Dichte von X. Weiter gilt für f

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

Bem: [3.25A]

$f(x)dx$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass X Werte in $[x, x + dx]$ annimmt. Die Stetigkeit von $F_X$folgt dabei aus der Definition (3.25). Ausserdem folgt aus Satz 3.1, dass

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \mathbb{P}[X = x] = 0$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten jedes einzelnen Werts der Zufallsvariablen beträgt exakt Null

Bem: [3.25B]

Von f zu F_X : Sei X eine stetige Z.V und f die Dichte. F_X können wir mit

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

Es liegt nahe, dass wir die Dichte mittels Ableiten herausfinden

T 3.26

Sei X eine Zufallsvariable. Die Verteilungsfunktion F_X sei stetig und Stückweise C^1, d.h es gibt $x_0 = -\infty < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = +\infty$, sodass F_X auf jedem Intervall (x_i, x_{i+1}) Element von C^1 ist. Dann ist X eine stetige Zufallsvariable und die Dichte f kann konstruiert werden, indem man folgendes festlegt

$$\forall x \in (x_i, x_{i+1})\ f(x) = F_X'(x)$$

3.6 Beispiele stetiger Zufallsvariablen

D 3.27 Gleichverteilung auf [a,b]

Eine stetige Zufallsvariable X heisst gleichverteilt auf $[a, b]$ falls ihre Dichte gegeben ist durch

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$

Wir schreiben $X \sim \mathcal{U}([a, b])$

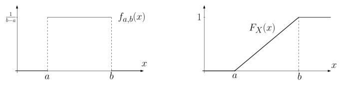


Abbildung 3.1: Dichte und Verteilungsfunktion einer gleichverteilten Zufallsvariable auf $[a, b]$.

Bem: [3.27A]

- Die Wahrscheinlichkeit in einem Interval $[c, c+\ell] \subset [a, b]$ zu fallen ist lediglich abhängig von dessen Länge ℓ

$$\mathbb{P}[X \in [c, c + \ell]] = \frac{\ell}{b-a}$$

- Die Verteilungsfunktion X ist gegeben durch

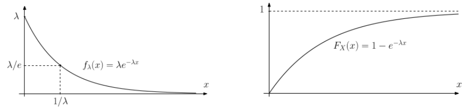
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

D 3.28 Exponentialverteilung mit $\lambda > 0$

Eine stetige Zufallsvariable T heisst exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$ falls ihre Dichte gegeben ist durch

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda \exp^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Bem: [3.28A] Die Grafik zeigt die Dichte und Verteilungsfunktion einer exponentialverteilten Zufallsvariable mit Parameter λ



T modelliert häufig die Lebensdauer oder Wartezeit eines allgemeinen Ergebnisses.

Eigenschaften:

- Die Wahrscheinlichkeit des Wartens ist exponentiell klein:

$$\forall t \ge 0\ \mathbb{P}[T > t] = \exp^{-\lambda t}$$

- T besitzt die Eigenschaft der Gedächnislosigkeit

$$\forall t, s > 0\ \mathbb{P}[T > t + s | T > t] = [T > s]$$

D 3.29

Eine stetige Zufallsvariable X heisst normal verteilt mit Parameter m und $\sigma^2 > 0$ falls ihre Dichte gegeben ist durch

$$f_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Wir schreiben $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

Bem: [3.29A]

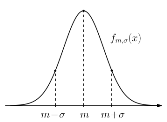


Abbildung 3.3: Dichte einer normalverteilten Zufallsvariable mit Parameter m und σ^2.

Zum Beispiel bei einer physikalischen Messung kann der parameter σ die Schwankung von X darstellen und generell zeigt ein kleines σ eine genaue Messung an und ein grosses σ eine ungenaue. Eigenschaften :

- Seien $X_1, \dots X_n$ unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen mit Parameter $(m_1, \sigma_1^2), \dots, (m_n, \sigma_n^2)$ dann ist

$$Z = m_0 + \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n$$

eine normalverteilte Zufallsvariable mit Parametern $m = m_0 + \lambda_1 m_1 + \cdots + \lambda_n m_n$ und $\sigma^2 = \lambda_1^2 \sigma_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 \sigma_n^2$

- Wir sprechen im Fall von $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, gerade von einer standardnormalverteilten Zufallsvariable. Man merke sich dann folgende Beziehung

$$Z = m + \lambda \cdot X$$

, wobei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit Parametern m und σ^2 ist.

- Falls X normalverteilt mit Parametern m und σ^2 ist, dann liegt die "meiste "Wahrscheinlichkeitsmasse der Z.V im Intervall $[m-3\sigma, m+3\sigma]$.

Es gilt gerade

$$\mathbb{P}[|X-m|\geq 3\sigma]\leq 0.0027$$

Wir können beliebige Normalverteilungen in eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable transformieren, indem wir sie in die Formel

$$Z=\frac{Y-m}{\sqrt{\sigma^2}}$$

einsetzen

---

4 Der Erwartungswert

4.1 Der allgemeine Erwartungswert

D 4.1
Sei $X:\omega\rightarrow\mathbb{R}_+$ eine Zufallsvariable mit nicht-negativen Werten. Dann heisst

$$\mathbb{E}[X]=\int_0^\infty(1-F_X(x))dx$$

der Erwartungswert von X.
Bem: [4.2]
Der Erwartungswert kann sowohl endliche als auch nicht endliche Werte annehmen. Für allgemeinen ZV. definieren wir den Erwartungswert durch Zerlegen in einen positiven und negativen Teil. Die Beiden Zufallsvariablen sind wie folgt definiert :

$$X_+(\omega)=\begin{cases}X(\omega) & \text{falls} X(\omega)\geq 0\\ 0 & \text{falls} X(\omega)<0\end{cases}$$

und

$$X_-(\omega)=\begin{cases}-X(\omega) & \text{falls} X(\omega)\leq 0\\ 0 & \text{falls} X(\omega)>0\end{cases}$$

X_+ und X_- sind nicht negative Zufallsvariablen. Zudem gilt $X=X_+-X_-$ als auch $|X|=X_++X_-$
S 4.3
Sei X eine nicht-negative Zufallsvariable. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X]\geq 0$$

D 4.4 Sei X eine Zufallsvariable. Falls $\mathbb{E}[|X|]<\infty$, dann heisst

$$\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[X_+]-\mathbb{E}[X_-]$$

Erwartungswert von X.
B 4.5
Sei X eine Bernoulli Z.V mit Parameter p

$$\mathbb{E}[X]=p$$

Sei X Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda>0$

$$\mathbb{E}[X]=\lambda$$

Sei $A\in\mathcal{F}$ ein Ereignis. Sei $\mathbb{1}_A$ die Indikatorfunktion auf A,

$$\forall\omega\in\Omega\ \mathbb{1}_A(\omega)=\begin{cases}0 & \text{falls}\omega\notin A\\ 1 & \text{falls}\omega\in A\end{cases}$$

Dann ist $\mathbb{1}_A$ eine Zufallsvariable. Per Definition gilt

$$\mathbb{P}[X=0]=1-\mathbb{P}[A] \text{ und } \mathbb{P}[X=1]=\mathbb{P}[A]$$

Somit ist $\mathbb{1}_A$ eine Bernoulli Z.V mit Paramter $\mathbb{P}[A]\implies\mathbb{E}[\mathbb{1}_A]=\mathbb{P}[A]$

4.2 Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable

S 4.6 Sei $X:\omega\rightarrow\mathbb{R}$ eine diskrete Zufallsvariable dessen Werte in W (endlich oder abzählbar) fast sicher liegen.Dann gilt

$$\mathbb{E}[X]=\sum_{x\in W}x\cdot\mathbb{P}[X=x]$$

S 4.7 Sei $X:\omega\rightarrow\mathbb{R}$ eine diskrete Zufallsvariable mit Werten in W (endlich oder abzählbar). Für jedes $\phi:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[\phi(X)]=\sum_{x\in W}\phi(x)\mathbb{P}[(X=x)]$$

4.3 Erwartungswert stetiger Zufallsvariablen

S 4.8 Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte f. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X]=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)dx$$

B 4.8A Gleichverteilung auf $[a,b]$

$$\mathbb{E}[X]=\frac{a+b}{2}$$

Exponentialverteilung mit $\lambda>0$

$$\mathbb{E}[X]=\frac{1}{\lambda}$$

T 4.9 Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte f. Sei $\phi:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ eine Abbildung, sodass $\phi(X)$ eine Zufallsvariable ist. Dann gilt

$$\mathbb{E}[\phi(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)f(x)dx$$

4.4 Rechnen mit Zufallsvariablen

T 4.10 linearität des Erwartungswert
Seien $X,Y:\omega\rightarrow\mathbb{R}$ Zufallsvariablen, sei $\lambda\in\mathbb{R}$. Falls die Erwartungswerte wohldefiniert sind gilt

- $\mathbb{E}[\lambda\cdot X]=\lambda\cdot\mathbb{E}[X]$
- $\mathbb{E}[X+Y]=\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y]$

Bem: [4.11]
Die Zufallsvariablen müssen dabei nicht unabhängig sein.
Bem: [4.12]
Anwendung1 : Der Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariable. Sei $n\geq 1$ und $0\leq p\leq 1$. Sei S eine binomialverteilte Zufallsvariable mit Parametern n und p.

$$\mathbb{E}[S]=\sum_{k=0}^{n}\cdot\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Wir können allerdings davon ausgehen, dass S die gleiche Verteilung hat wie $S_n=X_1+\cdots+X_n$ wobei $X_1,\ldots,X_n$ u.i.v Bernoulli Z.V mit Parameter p sind. Durch anwendung der linearität erhalten wir

$$\mathbb{E}[S]=\mathbb{E}[S_n]=np$$

Anwendung2 : Rechnen mit Normalverteilungen mit Parameter m und σ^2. Wenn X eine Normalverteilung mit Parametern m und σ^2 ist, dann hat sie die gleiche Verteilung wie $m+\sigma\cdot Y$, wobei Y eine standardnormalverteilte Z.V ist. Aus der Linearität des Erwartungswertes folgt

$$\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[m+\sigma\cdot Y]=m+\sigma\mathbb{E}[Y]$$

Also müssen wir nur $\mathbb{E}[Y]$ berechnen.

$$\mathbb{E}[Y]=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_{0,1}(x)dx=0$$

da $Xx\cdot f_{0,1}(x)$ eine ungerade funktion ist.

$$\mathbb{E}[X]=m$$

T 4.13 Seien X,Y zwei Zufallsvariablen. Falls X und Y unabhängig sind, dann gilt

$$\mathbb{E}[XY]=\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

4.5 Extremwert Formel

S 4.14 Stetige Extremwertformel
Sei X eine Zufallsvariable, sodass $X\geq 0$ fast sicher gilt. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X]=\int_0^\infty\mathbb{P}[X\geq x]dx$$

Bem: [4.14A] Anwedungen: Ausrechnen von Erwartungswert einer exponential-verteilten Zufallsvariable. Sei T eine exponential-verteilte Zufallsvariable mit Paramter $\lambda\geq 0$

$$\mathbb{E}[T]=\int_0^\infty\mathbb{P}[X\geq x]dx=\int_0^\infty\exp^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}$$

S 4.15 Diskrete Extremwertformel
Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$. Dann gilt folgende Identität

$$\mathbb{E}[X]=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}[X\geq n]$$

4.6 Charakterisierung der Eigenschaften von Z.V

S 4.16
Sei X eine Zufallsvariable. Sei $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}_+$ eine Abbildung, sodass $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

- X ist stetig mit Dichte f,
- Für jede stückweise stetige, beschränkte Abbildung $\phi:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[\phi(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)f(x)dx$$

T 4.17
Seien X,Y zwei diskrete Zufallsvariablen. Die folgenden Aussagen sind äquivalent

- X, Y sind unabhängig
- Für jedes $\phi:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\psi:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ beschränkt und stückweise stetig gilt

$$\mathbb{E}[\phi(X)\psi(Y)]=\mathbb{E}[\phi(X)]\mathbb{E}[\psi(Y)]$$

T 4.18
Seien $X_1,\ldots,X_n$ n Zufallsvariablen. Die folgenden Aussagen sind äquivalent

- $X_1,\ldots,X_n$ sind unabhängig
- Für jedes $\phi_1(X_1),\ldots\phi_n(X_n):\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ beschränkt gilt

$$\mathbb{E}[\phi_1(X_1),\ldots\phi_n(X_n)]=\mathbb{E}[\phi_1(X_1)]\ldots\mathbb{E}[\phi_n(X_n)]$$

4.7 Ungleichungen

S 4.19
Seien X,Y zwei Zufallsvariablen, sodass

$$X\leq Y f.s$$

gilt. Falls beide Erwartungswerte wohldefiniert sind folgt dann

$$\mathbb{E}[X]\leq\mathbb{E}[Y]f.s$$

T 4.20 Markow-Ungleichung
Sei X eine nicht-negative Zufallsvariable. Für jedes $a>0$ gilt dann

$$\mathbb{P}[X\geq a]\leq\frac{\mathbb{E}[X]}{a}$$

T 4.21 Jensen Ungleichung
Sei X eine Zufallsvariable. Sei $\phi\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Falls $\mathbb{E}[\phi(X)]$ und $\mathbb{E}[X]$ wohldefiniert sind, gilt

$$\phi(\mathbb{E}[X]\leq\mathbb{E}[\phi(X)])$$

4.8 Varianz

D 4.22 Sei X eine Zufallsvariable, sodass $\mathbb{E}[X^2]<\infty$. Wir definieren die Varianz von X durch

$$\sigma_X^2=\mathbb{E}[(X-m)^2],\ \text{wobei } m=\mathbb{E}[X]$$

DIe Wurzel aus σ_X^2 nennen wir die Standardabweichung von X
S 4.24 Chebychev Ungleichung
Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X^2]<\infty$. Dann gilt für jedes $a\geq 0$

$$\mathbb{P}[|X-m|\geq a]\leq\frac{\sigma_X^2}{a^2}, \text{wobei m} =\mathbb{E}[X]$$

S 4.25 Grundlegende Eigenschaften der Varianz

- Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Dann gilt
$$\sigma_X^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$
- Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt
$$\sigma_{\lambda X}^2 = \lambda^2 \cdot \sigma_X^2$$
- Seien $X_1, \dots, X_n$ n-viele paarweise unabhängige Zufallsvariablen und $S = X_1 + \dots + X_n$. Dann gilt
$$\sigma_S^2 = \sigma_{X_1}^2 + \dots + \sigma_{X_n}^2$$
- Var[Z + b] = Var[Z] $\forall b \in \mathbb{R}$

4.9 Kovarianz

D 4.26
Seien X,Y zwei Zufallsvariablen mit endlichen zweiten Momenten $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ und $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$. Wir definieren die Kovarianz zwischen X und Y durch
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$
Bem: [4.26A]
Es gilt X,Y unabhängig $\implies$ $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$

5 Gemeinsame Verteilung

5.1 Diskrete gemeinsame Verteilungen

D 5.1
Seien $X_1, \dots, X_n$ n diskrete Zufallsvariablen, sei $W_i \subset \mathbb{R}$ endlich oder abzählbar, wobei $X_i \in W_i$ fast sicher gilt. Die gemeinsame Verteilung von $(X_1, \dots, X_n)$ ist eine Familie $p = (p(x_1, \dots, x_n))_{x_1 \in W_1, \dots, x_n \in W_n}$, wobei jedes Mitglied definiert ist durch
$$p(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]$$
S 5.2
Eine gemeinsame Verteilung von Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ erfüllt
$$\sum_{x_1 \in W_1, \dots, x_n \in W_n} p(x_1, \dots, x_n) = 1$$

5.2 Verteilung des Bildes

S 5.3
Sei $n \geq 1$ und seien $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Abbildungen. Seien $X_1, \dots, X_n$ n diskrete Zufallsvariablen in $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, welche fast sicher Werte in endlichen oder abzählbaren Mengen $W_1, \dots, W_n$ annehmen. Dann ist $Z = \phi(X_1, \dots, X_n)$ eine diskrete Zufallsvariable, welche fast sicher Werte in W $= \phi(W_1 \times \dots \times W_n)$ annimmt. Zudem ist die Verteilung von Z gegeben durch
$$\forall z \in W \ \mathbb{P}[Z = z] =$$
$$\sum_{\substack{x_1 \in W_1, \dots, x_n \in W_n \\ \phi(x_1, \dots, x_n) = z}} \mathbb{P}[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]$$

5.3 Randverteilung

S 5.4
Seien $X_1, \dots, X_n$ n diskrete Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilung $p = (p(x_1, \dots, x_n))_{x_1 \in W_1, \dots, x_n \in W_n}$. Für jedes i gilt
$$\forall z \in W_i \ \mathbb{P}[X_i = z] =$$
$$\sum_{x_1, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_n} p(x_1, \dots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

5.4 Erwartungswert des Bildes

S 5.5
Seien $X_1, \dots, X_n$ n diskrete Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilung $p = (p(x_1, \dots, x_n))_{x_1 \in W_1, \dots, x_n \in W_n}$. Sei $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dann gilt
$$\mathbb{E}[\phi(X_1, \dots, X_n)] =$$
$$\sum_{x_1, \dots, x_n} \phi(x_1, \dots, x_n) p(x_1, \dots, x_n)$$
solange die Summe wohldefiniert ist.

5.5 Unabhängigkeit

S 5.6
Seien $X_1, \dots, X_n$ n diskrete Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilung $p = (p(x_1, \dots, x_n))_{x_1 \in W_1, \dots, x_n \in W_n}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent

- $X_1, dots, X_n$ sind unabhängig
- $p(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}[X_1 = x_1] \cdots \mathbb{P}[X_n = x_n]$ für jedes $x_1 \in W_1, \dots, x_n \in W_n$
-

5.6 Stetige Gemeinsame Verteilung

D 5.7
Sei $n \geq 1$. Wir sagen, dass die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ eine stetige gemeinsame Verteilung besitzen, falls eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ existiert, sodass
$$\mathbb{P}[X_1 \leq a_1, \dots, X_n \leq b] =$$
$$\int_{-\infty}^{a_1} \cdots \int_{-\infty}^{a_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1$$
für jedes $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt. Obige Abbildung f nennen wir gerade gemeinsame Dichte von $(X_1, \dots, X_n)$

S 5.9
Sei f die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen $(X_1, \dots, X_n)$. Dann gilt
$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1 = 1$$
Bem: [5.9a]
Nehme zum Beispiel zwei Zufallsvariablen X,Y. Intuitiv beschreibt $f(x,y)dxdy$ dabei die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zufallspunkt (X,Y) einem Rechteck $[x, x+dx] \times [y, y+dy]$ liegt.

5.7 Erwartungswert under Abbildungen

S 5.10
Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Falls $X_1, \dots, X_n$ eine gemeinsame Dichte f besitzen, dann lässt sich der Erwartungswert der Zufallsvariable Z $= \phi(X_1, \dots, X_n)$ mittels
$$\mathbb{E}[\phi(X,Y)] =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x_1, \dots, x_n) \dots f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$
berechnen (solange das Integral wohldefiniert ist)

5.8 Unabhängigkeit stetiger Zufallsvariablen

T 5.11
Seien $X_1, \dots, X_n$ Zufallsvariablen mit Dichten $f_1, \dots, f_n$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

- $X_1, \dots, X_n$ sind unabhängig
- $X_1, \dots, X_n$ sind insgesamt stetig mit gemeinsamer Dichte
$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$$

Bem: [5.12]
Somit sind zwei unabhängige stetige Zufallsvariablen automatisch gemeinsam stetig.

6 Asymphthotische Resultate

T 6.1
Sei $\mathbb{E}[|x_1|] < \infty$. Setze $m = \mathbb{E}[X_1]$ dann gilt
$$\lim_{n \to \infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = m \ \text{ a.s}$$
Bem: [6.2]
In der Aussage des Satzes mag es überraschen, dass die Annahme und die Definition von m such nur auf X_1 beziehen. Da die Zufallsvariable aber u.i.v sind, haben wir auch $\mathbb{E}[|X_i|] < \infty$ und $m = \mathbb{E}[X_i]$ für jedes i.

B 6.2A
Sei $X_1, X_2, \dots$ eine Folge von u.i.v Bernoulli Z.V mit Paramter p. Dann ist
$$\lim_{n \to \infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = p \ \text{ a.s}$$
B 6.2B
Sei $T_1, T_2, \dots$ eine u.i.v Folge von exponential verteilten Zufallsvariablen mit Paramter λ. Dann gilt
$$\lim_{n \to \infty} \frac{T_1 + \dots + T_n}{n} = \lambda \ \text{ a.s}$$
D 6.3
Seien $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und X Zufallsvariablen. Wir schreiben
$$X_n \approx X \text{ as } \to \infty$$
falls für jedes $x \in \mathbb{R}$
$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}[X_n \leq x] = \mathbb{P}[X \leq x]$$
B 6.3A
Für jedes n, sei X_n eine Bernoulli Zufallsvariable mit Parameter $p_n \in [0,1]$. Falls $\lim_{n \to \infty} p_n = p$ gilt, erhalten wir
$$X_n \approx X \text{ für } n \to \infty$$
T 6.4 ZGWS
Nehme an, dass der Erwartungswert $\mathbb{E}[X_1^2]$ wohldefiniert und endlich ist. Setze $m = \mathbb{E}[X_1]$ und $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$, dann gilt folgender Grenzwert
$$\mathbb{P}[\frac{S_n - n \cdot m}{\sqrt{\sigma^2 n}} \leq a] \to \Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2} dx$$

D 1.1
Ein Schätzer ist eine Zufallsvariable $T : \Omega \to \mathbb{R}$ der Form
$$T = t(X_1, \dots, X_n)$$
wobei $t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

D 1.2
Ein Schätzer T heisst erwartungstreu für θ, falls für alle $\theta \in \Theta$ gilt
$$\mathbb{E}[T] = \theta$$
Bem: [1.2A]
Interpretation: Im Mittel(über alle denkbaren Realisationen $\mathcal{W}$) schätzt T also richtig, und zwar unabhängig davon, welches Model $\mathbb{P}_\theta$ zu Grunde liegt.

D 1.3 Sei $\theta \in \Theta$ und T ein Schätzer. Der Bias(erwartete Schätzfehler) von T im Modell $\mathbb{P}_\theta$ ist definiert als
$$\mathbb{E}_\theta - \theta$$
Der mittlere quadratische Schätzfehler(MSE) von T im Modell $\mathbb{P}_\theta$ ist definiert als
$$\mathrm{MSE}_\theta[T] := \mathbb{E}[(T - \theta)^2]$$
Bem: [1.3A]
Man kannn den MSE zerlegen als
$$(MSE)_\theta[T] = \mathbb{E}_\theta[(T - \theta)^2] = \mathrm{Var}_\theta[T] + (\mathbb{E}_\theta[T] - \theta)^2$$
D 1.4
Die Likelihood-Funktion ist
$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) := \begin{cases} p_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_n; \theta) & \text{falls disk} \\ f_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_n; \theta) & \text{falls stet} \end{cases}$$

wobei

$$p_{\overrightarrow{X}}(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} p_X(x_i; \theta)$$

$$f_{\overrightarrow{X}}(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i; \theta)$$

D 1.5

Für jedes $x_1, \ldots, x_n$, sei $t_{ML}(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$ der Wert, der $\theta \rightarrowtail L(x_1, \ldots, x_n; \theta)$ als Funktion von θ maximiert. D.h

$$L(x_1, \ldots, x_n; t_{ML}(x_1, \ldots, x_n)) = \max_{\theta \in \Theta} L(x_1, \ldots, x_n; \theta)$$

Ein Maximum-Likelihood-Schätzer (ML-Schätzer) T_{ML} für θ wird definiert durch

$$T_{ML} = t_{ML}(X_1, \ldots, X_n)$$

D 2.1

Sei $\alpha \in [0,1]$ Ein Konfidenzintervall für θ mit Niveau $1-\alpha$ ist ein Zufallsintervall $\mathrm{I} = [A, B]$, sodass gilt

$$\forall \theta \in \Theta \; \mathbb{P}_\theta[A \leq \theta \leq B] \geq 1 - \alpha$$

wobei A,B Zufallsvariablen der Form $A = a(X_1, \ldots, X_n), B = b(X_1, \ldots, X_n)$ mittels $a, b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind. **Bem:** [2.2]
In der obigen Gleichung ist der Parameter θ deterministisch und nicht zufällig. Die stochastischen Elemente sind gerade die Schranken $A = a(X_1, \ldots, X_n)$ und $B = b(X_1, \ldots, X_n)$

D 2.3

Eine stetige Zufallsvariable X heisst χ^2- Verteilt mit m Freiheitsgraden falls ihre Dichte gegeben ist durch

$$f_X(y) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2}) y^{\frac{m}{2}-1 e^{-\frac{1}{2}y}}} \text{für y} \geq 0$$

Dabei ist die Gamma-Funktion für $v \geq 0$ definiert durch

$$\Gamma(v) := \int_0^\infty t^{v-1} e^{-t} dt$$

E gilt $\Gamma(n) = (n-1)!$ für $v = n \in \mathbb{N}$