

Grundlagen

D 1.1 Sigma-Algebra

- $\omega \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$
- $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{F}$

D 1.2 Wahrscheinlichkeitsmass

- $\mathcal{P}[\omega] = 1$
- $\sigma$ -Additivität  $\mathcal{P}[A] = \sum_{i=1}^\infty \mathcal{P}[A_i]$   
if  $A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$  (disjunkte Vereinigung)

D 1.3 Wahrscheinlichkeitsraum

Sei  $\omega$  ein Grundraum,  $\mathcal{F}$  eine  $\sigma$ -Algebra und  $\mathcal{P}$  ein Wahrscheinlichkeitsmass. Wir nennen das Tripel  $(\omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  Wahrscheinlichkeitsraum.

D 1.5 Laplace Modell

- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\omega)$
- $\mathbb{P} : \rightarrow [0, 1]$  ist definiert durch

$$\forall A \in \mathcal{F} \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{|\omega|}$$

S 1.6 Für eine Sigma-Algebra  $\mathcal{F}$  auf  $\omega$  gilt:

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcap_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{F}$
- $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cup B \in \mathcal{F}$
- $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$

S 1.7

- $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$
- $A_1, \dots, A_k$  paarweise disjunkte Ereignisse,  
 $\mathbb{P}[A_1 \cup \dots \cup A_k] = \mathbb{P}[A_1] + \dots + \mathbb{P}[A_k]$
- $\mathbb{P}[A^c] = 1 - \mathbb{P}[A]$
- $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$

S 1.8 Seien  $A, B \in \mathcal{F}$  dann gilt

$$A \subset B \implies \mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$$

S 1.9 Sei  $A_1, A_2, \dots$  eine Folge von nicht notwendigerweise disjunkten Ereignissen, dann gilt:

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right] \leq \sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}[A_i]$$

D 1.13 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Sei  $(\omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien  $A, B$  zwei Ereignisse mit  $\mathbb{P}[B] > 0$

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

S 1.16 Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit

Sei  $B_1, \dots, B_n$  eine Partition des Grundraumes  $\omega$ , so dass  $\mathbb{P}[B_i] > 0$  für jedes  $1 \leq i \leq n$  gilt. Dann

gilt:

$$\forall A \in \mathcal{F} \mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[A|B_i] \mathbb{P}[B_i]$$

S 1.17 Satz von Bayes

Sei  $B_1 \dots B_n \in \mathcal{F}$  eine Partition von  $\omega$  sodass,  $\mathbb{P}[B_i] > 0$  für jedes  $i$  gilt. Für jedes Ereignis  $A$  mit  $\mathbb{P}[A] > 0$  gilt

$$\forall i = 1, \dots, n \mathbb{P}[B_i|A] = \frac{\mathbb{P}[A|B_i] \mathbb{P}[B_i]}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}[A|B_j] \mathbb{P}[B_j]}$$

D 1.18 Unabhängigkeit

Sei  $(\omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  heissen unabhängig falls

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \mathbb{P}[B]$$

S 1.20

Seien  $A, B \in \mathcal{F}$  zwei Ereignisse mit  $\mathbb{P}[A], \mathbb{P}[B] > 0$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \mathbb{P}[B]$
- $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]$
- $\mathbb{P}[B|A] = \mathbb{P}[B]$

D 1.21

Sei  $I$  eine beliebige Indexmenge. Eine Familie von Ereignissen  $(A_i)_{i \in I}$  heisst unabhängig falls

$$\forall J \subset I \text{ endlich} \quad \mathbb{P}\left[\bigcap_{j \in J} A_j\right] = \prod_{j \in J} \mathbb{P}[A_j]$$

Bem:

Drei Ereignisse  $A, B$  und  $C$  sind unabhängig falls alle 4 folgenden Gleichungen erfüllt sind

- $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \mathbb{P}[B]$
- $\mathbb{P}[A \cap C] = \mathbb{P}[A] \mathbb{P}[C]$
- $\mathbb{P}[B \cap C] = \mathbb{P}[B] \mathbb{P}[C]$
- $\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = \mathbb{P}[A] \mathbb{P}[B] \mathbb{P}[C]$

D 2.1 Zufallsvariable

Sei  $(\omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Zufallsvariable ist eine Abbildung  $X : \omega \rightarrow \mathbb{R}$  so dass, für alle  $a \in \mathbb{R}$  gilt

$$\{w \in \omega : X(w) \leq a\} \in \mathcal{F}$$

Bem:

Für Ereignisse im Bezug auf  $Z:V$

- $\{X \leq a\} = \{w \in \omega : X(w) \leq a\}$
- $\{a < X \leq b\} = \{w \in \omega : a < X(w) \leq b\}$
- $\{X \in \mathbb{Z}\} = \{w \in \omega : X(w) \in \mathbb{Z}\}$

$$\mathbb{P}[X \leq a] = \mathbb{P}[\{X \leq a\}] = \mathbb{P}[\{w \in \omega : X(w) \leq a\}]$$

D 2.2 Verteilungsfunktion

Sei  $X$  eine Zufallsvariable auf einem  $W$ -Raum  $(\omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Die Verteilungsfunktion von  $X$  ist eine

Funktion  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , definiert durch

$$\forall a \in \mathbb{R} F_X(a) = \mathbb{P}[X \leq a]$$

S 2.3 Einfache Identität

Seien  $a, b$  zwei reelle Zahlen. Dann gilt

$$\mathbb{P}[a < X \leq b] = F(b) - F(a)$$

T 2.4 Eigenschaften der Verteilungsfunktion

Sei  $X$  eine Z.V auf einem Wahrscheinlichkeitsraum. Die Verteilungsfunktion  $F = F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  von  $X$  erfüllt folgende Eigenschaften

- $F$  ist monoton wachsend
- $F$  ist rechtsstetig
- $\lim_{a \rightarrow -\infty} F(a) = 0$  und  $\lim_{a \rightarrow \infty} F(a) = 1$

D 2.5

Seien  $X_1 \dots X_n$  Zufallsvariablen auf einem  $W$ -Raum. Dann heissen  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig falls

$$\forall x_1, x_2 \dots x_n \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{P}[X_1 \leq x_1 \dots X_n \leq x_n] = \mathbb{P}[X_1 \leq x_1] \dots \mathbb{P}[X_n \leq x_n]$$

S 2.7 Gruppieren von Zufallsvariablen

Seien  $X_1 \dots X_n$   $n$  unabhängige Zufallsvariablen. Seien  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  Indizes und  $\phi_1 \dots \phi_k$  Abbildungen. Dann sind

$$Y_1 = \phi_1(X_{i_1} \dots X_{i_1}), Y_2 = \phi_2(X_{i_2+1} \dots X_{i_2}), \dots$$

$$Y_k = \phi_k(X_{i_{k-1}+1} \dots X_{i_k})$$

unabhängig D 2.8

Eine Folge von Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots$  heisst

- unabhängig falls  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig sind, für alle  $n \in \mathbb{N}$
- unabhängig und identisch verteilt (i.i.d.) falls sie unabhängig ist und die Zufallsvariablen dieselbe Verteilungsfunktion haben d.h

$$\forall i, j F_{X_i} = F_{X_j}$$

S 3.1 Wahrscheinlichkeit eines Punktes

Sei  $X : \omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion  $F$ . Für jedes  $a$  in  $\mathbb{R}$  gilt

$$\mathbb{P}[X = a] = F(a) - F(-a)$$

D 3.2

Sei  $A \in \mathcal{F}$  ein Ereignis. Wir sagen  $A$  tritt fast sicher ein falls

$$\mathbb{P}[A] = 1$$

D 3.4 Diskrete Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable  $X : \omega \rightarrow \mathbb{R}$  heisst diskret falls eine endliche oder abzählbare Menge  $W \subset \mathbb{R}$  existiert, sodass

$$\mathbb{P}[X \in W] = 1$$

Bem: [3.5] Wenn der Grundraum  $\omega$  endlich oder abzählbar ist, dann ist jede Zufallsvariable  $X : \omega \rightarrow \mathbb{R}$  diskret. D 3.6 Verteilung von X

Sei  $X$  eine diskrete Zufallsvariable mit Werten in einer endlichen oder abzählbaren Menge  $W \subset \mathbb{R}$ . Die Zahlenfolge  $(p(x))_{x \in W}$  definiert durch

$$\forall x \in W p(x) := \mathbb{P}[X = x]$$

heisst Verteilung von  $X$  S 3.7 Die Verteilung  $(p(x))_{x \in W}$  einer diskreten Zufallsvariable erfüllt

$$\sum_{x \in W} p(x) = 1$$

S 3.9 Sei  $X$  eine diskrete Zufallsvariable, dessen Werte in einer endlichen oder abzählbaren Menge  $W$  liegen, und deren Verteilung  $p$  ist. Dann ist die Verteilungsfunktion von  $X$  gegeben durch

$$\forall x \in \mathbb{R} F_X(x) = \sum_{y \leq x, y \in W} p(y)$$

D 3.10 Bernoulli Verteilung

Es sei  $0 \leq p \leq 1$ . Eine Zufallsvariable  $X$  heisst Bernoulli Zufallsvariable mit Parameter  $p$ , wenn sie Werte in  $W = \{0, 1\}$  annimmt und folgendes gilt

$$\mathbb{P}[X = 0] = 1 - p \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[X = 1] = p$$

D 3.11 Binomialverteilung

Sei  $0 \leq p \leq 1$ , sein  $n \in \mathbb{N}$ . Eine Zufallsvariable  $X$  heisst binomiale Zufallsvariable mit Parametern  $n$  und  $p$ , wenn sie Werte in  $W = \{0, \dots, n\}$  annimmt und folgendes gilt

$$\forall k \in \{0, \dots, n\} \mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

S 3.13 Sum von unab. Bern. und Binom. Z.V

Sei  $0 \leq p \leq 1$ , sein  $n \in \mathbb{N}$ . Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige Bernoulli Z.V mit Parameter  $p$ . Dann ist

$$S_n := X_1 + \dots + X_n$$

eine binomialverteilte Z.V mit Parametern  $n$  und  $p$ . Bem: [3.14]

$\text{Bin}(1, p)$  ist gerade  $\text{Ber}(p)$  verteilt. Falls  $X \sim \text{Bin}(m, p), Y \sim \text{Bin}(n, p)$  und  $X, Y$  unabhängig, dann ist  $X + Y \sim \text{Bin}(m + n, p)$  verteilt.

D 3.15 Geometrische Verteilung

Es sei  $0 < p \leq 1$ . Eine Zufallsvariable  $X$  heisst geometrische Zufallsvariable mit Parameter  $p$ , falls sie Werte in  $W = \mathbb{N} \setminus \{0\}$  annimmt und folgendes gilt

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mathbb{P}[X = k] = (1 - p)^{k-1} \cdot p$$

Bem: [3.16]

Für  $p=1$  und  $k = 1$  erscheint in der obigen Gleichung  $0^0 = 1$ , es gilt  $\mathbb{P}[X = 1] = p$  S 3.18

Sei  $X_1, X_2, \dots$  eine Folge von unendlich vielen unabhängigen Bernoulli Z.V mit Parameter  $p$ . Dann

ist

$$T := \min\{n \geq 1 : X_n = 1\}$$

eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Parameter  $p$ . **Bem:** [3.18A]

Sei  $T$  eine geometrische Verteilung mit Parameter  $p$ . Dann ist  $T > n$ , wenn die ersten  $n$  Bernoulli-Experimente fehlschlagen. Daher gilt

$$\mathbb{P}[T > n] = (1 - p)^n$$

### S 3.20 Gedächtnislosigkeit der Geo. Vert.

Sei  $T \sim \text{Geom}(p)$  für  $0 < p < 1$ . Dann gilt

$$\forall n \geq 0 \quad \forall k \geq 1 \quad \mathbb{P}[T \geq n + k | T > n] = \mathbb{P}[T \geq k]$$

### D 3.21

Sei  $\lambda > 0$  eine positive reelle Zahl. Eine Zufallsvariable  $X$  heisst Poisson-Zufallsvariable mit Parameter  $\lambda$ , wenn sie Werte in  $W = \mathbb{N}$  annimmt und folgendes gilt

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} \exp^{-\lambda}$$

### S 3.23 Poisson-Approx. der Binom. verteil.

Sei  $\lambda > 0$ . Für jedes  $n \geq 1$  seien  $X_n \sim \text{Bin}(n, \frac{\lambda}{n})$  Zufallsvariablen. Dann gilt

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_n = k] = \mathbb{P}[N = k]$$

### D 3.25 Stetig verteilte Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable  $X : \omega \rightarrow \mathbb{R}$  heisst stetig, wenn ihre Verteilungsfunktion  $F_X$  wie folgt geschrieben werden kann

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx \quad \text{für alle } a \text{ in } \mathbb{R}$$

wobei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine nicht-negative Funktion ist. Wir nennen dann  $f$  Dichte von  $X$ . **Bem:** [3.25A]  $f(x)dx$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $X$  Werte in  $[x, x + dx]$  annimmt. **T 3.26**

Sei  $X$  eine Zufallsvariable. Die Verteilungsfunktion  $F_X$  sei stetig und stückweise  $C^1$ , d.h es gibt  $x_0 = -\infty < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = +\infty$ , sodass  $F_X$  auf jedem Intervall  $(x_i, x_{i+1})$  Element von  $C^1$  ist. Dann ist  $X$  eine stetige Zufallsvariable und die Dichte  $f$  kann konstruiert werden, indem man folgendes festlegt

$$\forall x \in (x_i, x_{i+1}) \quad f(x) = F'_X(x)$$

### D 3.27 Gleichverteilung auf [a,b]

Eine stetige Zufallsvariable  $X$  heisst gleichverteilt auf  $[a, b]$  falls ihre Dichte gegeben ist durch

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$

Wir schreiben  $X \sim \mathcal{U}([a, b])$

**Bem:** [3.27A]

- Die Wahrscheinlichkeit in einem Intervall  $[c, c +$

$\ell] \subset [a, b]$  zu fallen ist lediglich abhängig von dessen Länge  $\ell$

$$\mathbb{P}[X \in [c, c + \ell]] = \frac{\ell}{b - a}$$

- Die Verteilungsfunktion  $X$  ist gegeben durch

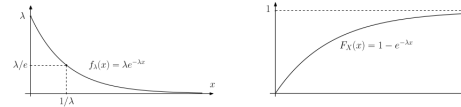
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

### D 3.28 Exponentialverteilung mit $\lambda > 0$

Eine stetige Zufallsvariable  $T$  heisst exponentialverteilt mit Parameter  $\lambda > 0$  falls ihre Dichte gegeben ist durch

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda \exp^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

**Bem:** [3.28A] Die Grafik zeigt die Dichte und Verteilungsfunktion einer exponentialverteilten Zufallsvariable mit Parameter  $\lambda$



$T$  modelliert häufig die Lebensdauer oder Wartezeit eines allgemeinen Ergebnisses.

Eigenschaften:

- Die Wahrscheinlichkeit des Wartens ist exponentiell klein:

$$\forall t \geq 0 \quad \mathbb{P}[T > t] = \exp^{-\lambda t}$$

- $T$  besitzt die Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit

$$\forall t, s > 0 \quad \mathbb{P}[T > t + s | T > t] = \mathbb{P}[T > s]$$

### D 3.29

Eine stetige Zufallsvariable  $X$  heisst normal verteilt mit Parametern  $m$  und  $\sigma^2 > 0$  falls ihre Dichte gegeben ist durch

$$f_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

**Bem:** [3.29A]

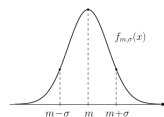


Abbildung 3.3: Dichte einer normalverteilten Zufallsvariable mit Parameter  $m$  und  $\sigma^2$ .

Zum Beispiel bei einer physikalischen Messung kann der parameter  $\sigma$  die Schwankung von  $X$  darstellen und generell zeigt ein kleines  $\sigma$  eine genaue Messung an und ein grosses  $\sigma$  eine ungenaue. Eigenschaften

:

- Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen mit Parametern  $(m_1, \sigma_1^2), \dots, (m_n, \sigma_n^2)$  dann ist

$$Z = m_0 + \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n$$

eine normalverteilte Zufallsvariable mit Parametern  $m = m_0 + \lambda_1 m_1 + \dots + \lambda_n m_n$  und  $\sigma^2 = \lambda_1^2 \sigma_1^2 + \dots + \lambda_n^2 \sigma_n^2$

- Wir sprechen im Fall von  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , gerade von einer standardnormalverteilten Zufallsvariable. Man merke sich dann folgende Beziehung

$$Z = m + \lambda \cdot X$$

, wobei  $X$  eine normalverteilte Zufallsvariable mit Parametern  $m$  und  $\sigma^2$  ist.

- Falls  $X$  normalverteilt mit Parametern  $m$  und  $\sigma^2$  ist, dann liegt die "meiste" Wahrscheinlichkeitsmasse der Z.V im Intervall  $[m - 3\sigma, m + 3\sigma]$ . Es gilt gerade

$$\mathbb{P}[|X - m| \geq 3\sigma] \leq 0.0027$$

### D 4.1

Sei  $X : \omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine Zufallsvariable mit nicht-negativen Werten. Dann heisst

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty (1 - F_X(x)) dx$$

der Erwartungswert von  $X$ . **Bem:** [4.2]

Der Erwartungswert kann sowohl endliche als auch nicht endliche Werte annehmen. **S 4.3** Sei  $X$  eine nicht-negative Zufallsvariable. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] \geq 0$$

**D 4.4** Sei  $X$  eine Zufallsvariable. Falls  $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ , dann heisst

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_+] - \mathbb{E}[X_-]$$

Erwartungswert von  $X$ . **S 4.6** Sei  $X : \omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine diskrete Zufallsvariable dessen Werte in  $W$  (endlich oder abzählbar) fast sicher liegen. Sei  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung. Dann gilt

$$\mathbb{E}[\phi(X)] = \sum_{x \in W} \phi(x) \cdot \mathbb{P}[X = x]$$

**S 4.7** Sei  $X : \omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine diskrete Zufallsvariable mit Werten in  $W$  (endlich oder abzählbar). Für jedes  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\mathbb{E}[\phi(X)] = \sum_{x \in W} \phi(x) \mathbb{P}[X = x]$$

**S 4.8** Sei  $X$  eine stetige Zufallsvariable mit Dichte

f. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^\infty x \cdot f(x) dx$$

**T 4.9** Sei  $X$  eine stetige Zufallsvariable mit Dichte  $f$ . Sei  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung, sodass  $\phi(X)$  eine Zufallsvariable ist. Dann gilt

$$\mathbb{E}[\phi(X)] = \int_{-\infty}^\infty \phi(x) f(x) dx$$

### T 4.10 Linearität des Erwartungswert

Seien  $X, Y : \omega \rightarrow \mathbb{R}$  Zufallsvariablen, sei  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Falls die Erwartungswerte wohldefiniert sind gilt

- $\mathbb{E}[\lambda \cdot X] = \lambda \cdot \mathbb{E}[X]$
- $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

**Bem:** [4.11] Die Zufallsvariablen müssen dabei nicht unabhängig sein. **T 4.13** Seien  $X, Y$  zwei Zufallsvariablen. Falls  $X$  und  $Y$  unabhängig sind, dann gilt

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y]$$

### S 4.14 Stetige Extremwertformel

Sei  $X$  eine Zufallsvariable, sodass  $X \geq 0$  fast sicher gilt. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}[X \geq x] dx$$

**Bem:** [4.14A] Anwendungen: Ausrechnen von Erwartungswert einer exponential-verteilten Zufallsvariable. Sei  $T$  eine exponential-verteilte Zufallsvariable mit Parameter  $\lambda \geq 0$

$$\mathbb{E}[T] = \int_0^\infty \mathbb{P}[X \geq x] dx = \int_0^\infty \exp^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

### S 4.15 Diskrete Extremwertformel

Sei  $X$  eine diskrete Zufallsvariable mit Werten in  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Dann gilt folgende Identität

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}[X \geq n]$$

### S 4.16

Sei  $X$  eine Zufallsvariable. Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine Abbildung, sodass  $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = 1$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent

- $X$  ist stetig mit Dichte  $f$ ,
- Für jede stückweise stetige, beschränkte Abbildung  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\mathbb{E}[\phi(X)] = \int_{-\infty}^\infty \phi(x) f(x) dx$$

### T 4.17

Seien  $X, Y$  zwei diskrete Zufallsvariablen. Die folgenden Aussagen sind äquivalent

- $X, Y$  sind unabhängig

- Für jedes  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und stückweise stetig gilt

$$\mathbb{E}[\phi(X)\psi(Y)] = \mathbb{E}[\phi(X)]\mathbb{E}[\psi(Y)]$$

#### T 4.18

Seien  $X_1, \dots, X_n$  n Zufallsvariablen. Die folgenden Aussagen sind äquivalent

- $X_1, \dots, X_n$  sind unabhängig
- Für jedes  $\phi_1(X_1), \dots, \phi_n(X_n) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt gilt

$$\mathbb{E}[\phi_1(X_1), \dots, \phi_n(X_n)] = \mathbb{E}[\phi_1(X_1)] \dots \mathbb{E}[\phi_n(X_n)]$$

#### S 4.19

Seien X,Y zwei Zufallsvariablen, sodass

$$X \leq Y \text{ f.s.}$$

gilt. Falls beide Erwartungswerte wohldefiniert sind folgt dann

$$\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y] \text{ f.s.}$$

#### T 4.20 Markow-Ungleichung

Sei X eine nicht-negative Zufallsvariable. Für jedes  $a > 0$  gilt dann

$$\mathbb{P}[X \geq a] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$$

#### T 4.21 Jensen Ungleichung

Sei X eine Zufallsvariable. Sei  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine konvexe Funktion. Falls  $\mathbb{E}[\phi(X)]$  und  $\mathbb{E}[X]$  wohldefiniert sind, gilt

$$\phi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\phi(X)]$$

**D 4.22** Sei X eine Zufallsvariable, sodass  $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ . Wir definieren die Varianz von X durch

$$\sigma_X^2 = \mathbb{E}[(X - m)^2], \text{ wobei } m = \mathbb{E}[X]$$

Die Wurzel aus  $\sigma_X^2$  nennen wir die Standardabweichung von X **S 4.24**

Sei X eine Zufallsvariable mit  $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ . Dann gilt für jedes  $a \geq 0$

$$\mathbb{P}[|X - m| \geq a] \leq \frac{\sigma_X^2}{a^2}, \text{ wobei } m = \mathbb{E}[X]$$

#### S 4.25 Grundlegende Eigenschaften der Varianz

- Sei X eine Zufallsvariable mit  $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ . Dann gilt

$$\sigma_X^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

- Sei X eine Zufallsvariable mit  $\mathbb{E}[X^2] < \infty$  und sei  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\sigma_{\lambda X}^2 = \lambda^2 \cdot \sigma_X^2$$

- Seien  $X_1, \dots, X_n$  n-viele paarweise unabhängige Zufallsvariablen und  $S = X_1 + \dots +$

$X_n$ . Dann gilt

$$\sigma_S^2 = \sigma_{X_1}^2 + \dots + \sigma_{X_n}^2$$

#### D 4.26

Seien X,Y zwei Zufallsvariablen mit endlichen zweiten Momenten  $\mathbb{E}[X^2] < \infty$  und  $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$ . Wir definieren die Kovarianz zwischen X und Y durch

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

**Bem:** [4.26A]

Es gilt X,Y unabhängig  $\implies \text{Cov}(X, Y) = 0$

#### D 5.1

Seien  $X_1, \dots, X_n$  n diskrete Zufallsvariablen, sei  $W_i \subset \mathbb{R}$  endlich oder abzählbar, wobei  $X_i \in W_i$  fast sicher gilt. Die gemeinsame Verteilung von  $(X_1, \dots, X_n)$  ist eine Familie  $p = (p(x_1, \dots, x_n))_{x_1 \in W_1, \dots, x_n \in W_n}$ , wobei jedes Mitglied definiert ist durch

$$p(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]$$

#### S 5.2

Eine gemeinsame Verteilung von Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  erfüllt

$$\sum_{x_1 \in W_1, \dots, x_n \in W_n} p(x_1, \dots, x_n) = 1$$

#### S 5.3

Sei  $n \geq 1$  und seien  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Abbildungen. Seien  $X_1, \dots, X_n$  n diskrete Zufallsvariablen in  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , welche fast sicher Werte in endlichen oder abzählbaren Mengen  $W_1, \dots, W_n$  annehmen. Dann ist  $Z = \phi(X_1, \dots, X_n)$  eine diskrete Zufallsvariable, welche fast sicher Werte in  $W = \phi(W_1 \times \dots \times W_n)$  annimmt. Zudem ist die Verteilung von Z gegeben durch

$$\forall z \in W \quad \mathbb{P}[Z = z] =$$

$$\sum_{\substack{x_1 \in W_1, \dots, x_n \in W_n \\ \phi(x_1, \dots, x_n) = z}} \mathbb{P}[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]$$

#### S 5.4

Seien  $X_1, \dots, X_n$  n diskrete Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilung  $p = (p(x_1, \dots, x_n))_{x_1 \in W_1, \dots, x_n \in W_n}$ . Für jedes i gilt

$$\forall z \in W_i \quad \mathbb{P}[X_i = z] =$$

$$\sum_{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n} p(x_1, \dots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

#### S 5.5

Seien  $X_1, \dots, X_n$  n diskrete Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilung  $p = (p(x_1, \dots, x_n))_{x_1 \in W_1, \dots, x_n \in W_n}$ . Sei  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dann gilt

$$\mathbb{E}[\phi(X_1, \dots, X_n)] =$$

$$\sum_{x_1, \dots, x_n} \phi(x_1, \dots, x_n) p(x_1, \dots, x_n)$$

solange die Summe wohldefiniert ist. **S 5.6**

Seien  $X_1, \dots, X_n$  n diskrete Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilung  $p = (p(x_1, \dots, x_n))_{x_1 \in W_1, \dots, x_n \in W_n}$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent

- $X_1, \dots, X_n$  sind unabhängig
- $p(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}[X_1 = x_1] \dots \mathbb{P}[X_n = x_n]$  für jedes  $x_1 \in W_1, \dots, x_n \in W_n$

•

#### D 5.7

Sei  $n \geq 1$ . Wir sagen, dass die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige gemeinsame Verteilung besitzen, falls eine Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  existiert, sodass

$$\mathbb{P}[X_1 \leq a_1, \dots, X_n \leq a_n] =$$

$$\int_{-\infty}^{a_1} \dots \int_{-\infty}^{a_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

für jedes  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  gilt. Obige Abbildung f nennen wir gerade gemeinsame Dichte von  $(X_1, \dots, X_n)$  **S 5.9**

Sei f die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen  $(X_1, \dots, X_n)$ . Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1$$

**Bem:** [5.9a]

Nehme zum Beispiel zwei Zufallsvariablen X,Y. Intuitiv beschreibt  $f(x, y) dx dy$  dabei die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zufallspunkt (X,Y) einem Rechteck  $[x, x+dx] \times [y, y+dy]$  liegt. **S 5.10**  
Sei  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung. Falls  $X_1, \dots, X_n$  eine gemeinsame Dichte f besitzen, dann lässt sich der Erwartungswert der Zufallsvariable Z =  $\phi(X_1, \dots, X_n)$  mittels

$$\mathbb{E}[\phi(X, Y)] =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x_1, \dots, x_n) \dots f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

berechnen (solange das Integral wohldefiniert ist)

#### T 5.11

Seien  $X_1, \dots, X_n$  Zufallsvariablen mit Dichten  $f_1, \dots, f_n$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent

- $X_1, \dots, X_n$  sind unabhängig
- $X_1, \dots, X_n$  sind insgesamt stetig mit gemeinsamer Dichte

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$$

**Bem:** [5.12]

Somit sind zwei unabhängige stetige Zufallsvariablen automatisch gemeinsam stetig.

#### T 6.1

Sei  $\mathbb{E}[|x_1|] < \infty$ . Setze  $m = \mathbb{E}[X_1]$  dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = m \text{ a.s.}$$

#### D 1.1

Ein Schätzer ist eine Zufallsvariable  $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  der Form

$$T = t(X_1, \dots, X_n)$$

wobei  $t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  **D 1.2**

Ein Schätzer T heisst erwartungstreu für  $\theta$ , falls für alle  $\theta \in \Theta$  gilt

$$\mathbb{E}[T] = \theta$$

**Bem:** [1.2A]

Interpretation: Im Mittel (über alle denkbaren Realisationen  $\omega$ ) schätzt T also richtig, und zwar unabhängig davon, welches Modell  $\mathbb{P}_\theta$  zu Grunde liegt.

**D 1.3** Sei  $\theta \in \Theta$  und T ein Schätzer. Der Bias (erwartete Schätzfehler) von T im Modell  $\mathbb{P}_\theta$  ist definiert als

$$\mathbb{E}_\theta - \theta$$

Der mittlere quadratische Schätzfehler (MSE) von T im Modell  $\mathbb{P}_\theta$  ist definiert als

$$\text{MSE}_\theta[T] := \mathbb{E}[(T - \theta)^2]$$

**Bem:** [1.3A]

Man kann den MSE zerlegen als

$$(\text{MSE})_\theta[T] = \mathbb{E}_\theta[(T - \theta)^2] = \text{Var}_\theta[T] + (\mathbb{E}_\theta[T] - \theta)^2$$

#### D 1.4

Die Likelihood-Funktion ist

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) := \begin{cases} p_x(x_1, \dots, x_n; \theta) & \text{falls disk} \\ f_x(x_1, \dots, x_n; \theta) & \text{falls stet} \end{cases}$$

#### D 1.5

Für jedes  $x_1, \dots, x_n$ , sei  $t_{ML}(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$  der Wert, der  $\theta \mapsto L(x_1, \dots, x_n; \theta)$  als Funktion von  $\theta$  maximiert. D.h

$$L(x_1, \dots, x_n; t_{ML}(x_1, \dots, x_n)) = \max_{\theta \in \Theta} L(x_1, \dots, x_n; \theta)$$

Ein Maximum-Likelihood-Schätzer (ML-Schätzer)  $T_{ML}$  für  $\theta$  wird definiert durch

$$T_{ML} = t_{ML}(X_1, \dots, X_n)$$