Grundlagen

D 1.1Sigma-Algebra

- $\omega \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$
- $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

D 1.2 Wahrscheinlichkeitsmass

- $\mathcal{P}[\omega] = 1$
- $\sigma -$ Additivität $\mathcal{P}[A] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}[A_i]$
  if $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ (disjunkte Vereinigung)

D 1.3 Wahrscheinlichkeitsraum
Sei ω ein Grundraum, $\mathcal{F}$ eine σ -Algebra und $\mathcal{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmass. Wir nennen das Tripel$(\omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum.

D 1.5 Laplace Modell

- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\omega)$
- $\mathbb{P} :\to [0,1]$ ist definiert durch

$$\forall A \in \mathcal{F} \ \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{|\omega|}$$

S 1.6 Für eine Sigma-Algebra $\mathcal{F}$ auf ω gilt:

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
- $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cup B \in \mathcal{F}$
- $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$

S 1.7

- $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$
- $A_1, \dots A_k$ paarweise disjunkte Ereignisse,

$$\mathbb{P}[A_1 \cup \dots \cup A_k] = \mathbb{P}[A_1] + \dots \mathbb{P}[A_k]$$

- $\mathbb{P}[A^c] = 1 - \mathbb{P}[A]$
- $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$

S 1.8 Seien $A, B \in \mathcal{F}$ dann gilt

$$A \subset B \implies \mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$$

S 1.9 Sei $A_1, A_2, \dots$ eine Folge von nicht notwendigerweise disjunkten Ereignissen, dann gilt:

$$\mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]]$$

D 1.13 Bedingte Wahrscheinlichkeit
Sei $(\omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien A, B zwei Ereignisse mit $\mathbb{P}[B] > 0$

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

S 1.16 Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit
Sei $B_1, \dots, B_n$ eine Partition des Grundraumes ω, so dass $\mathbb{P}[B_i] > 0$ für jedes $1 \leq i \leq n$ gilt. Dann gilt:

$$\forall A \in \mathcal{F} \ \mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A|B_i] \mathbb{P}[B_i]$$

S 1.17 Satz von Bayes
Sei $B_1 \dots B_n \in \mathcal{F}$ eine Partition von ω sodass, $\mathbb{P}[B_i] > 0$ für jedes i gilt. Für jedes Ereignis A mit $\mathbb{P}[A] > 0$ gilt

$$\forall i = 1, \dots n \ \mathbb{P}[B_i|A] = \frac{\mathbb{P}[A|B_i]\mathbb{P}[B_i]}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}[A|B_j]\mathbb{P}[B_j]}$$

D 1.18 Unabhängigkeit
Sei $(\omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zwei Ereignisse A und B heissen unabhängig falls

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \mathbb{P}[B]$$

S 1.20
Seien A,B $\in \mathcal{F}$ zwei Ereignisse mit $\mathbb{P}[A], \mathbb{P}[B] > 0$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$
2. $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]$
3. $\mathbb{P}[B|A] = \mathbb{P}[B]$

D 1.21
Sei I eine beliebige Indexmenge. Eine Familie von Ereignissen $(A_i)_{i \in I}$ heisst unabhängig falls

$$\forall J \subset I \text{endlich} \quad \mathbb{P}[\bigcap_{j \in J} A_j] = \prod_{j \in J} \mathbb{P}[A_j]$$

Bem:
Drei Ereignisse A,B und C sind unabhängig falls alle 4 folgenden Gleichungen erfüllt sind

1. $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$
2. $\mathbb{P}[A \cap C] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[C]$
3. $\mathbb{P}[B \cap C] = \mathbb{P}[B]\mathbb{P}[C]$
4. $\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]\mathbb{P}[C]$

D 2.1 Zufallsvariable
Sei $(\omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Zufallsvariable ist eine Abbildung $X : \omega \to \mathbb{R}$ so dass, für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\{w \in \omega : X(w) \leq a\} \in \mathcal{F}$$

Bem:
Für Ereignisse im Bezug auf Z:V

- $\{X \leq a\} = \{w \in \omega : X(w) \leq a\}$
- $\{a < X \leq b\} = \{w \in \omega : a < X(w) < b\}$
- $\{X \in \mathbb{Z}\} = \{w \in \omega : X(w) \in \mathbb{Z}\}$

$$\mathbb{P}[X \leq a] = \mathbb{P}[\{X \leq a\}] = \mathbb{P}[\{w \in \omega : X(w) \leq a\}]$$

D 2.2 Verteilungsfunktion
Sei X eine Zufallsvariable auf einem W-Raum $(\omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Die Verteilungsfunktion von X ist eine Funtkion $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, definiert durch

$$\forall a \in \mathbb{R} \ F_X(a) = \mathbb{P}[X \leq a]$$

S 2.3 Einfache Identität
Seien a ¡ b zwei reelle Zahlen. Dann gilt

$$\mathbb{P}[a < X \leq b] = F(b) - F(a)$$

T 2.4 Eigenschaften der Verteilungsfunktion
Sei X eine Z.V aif einem Wahrscheinlichkeitsraum. Die Verteilungsfunktion $F = F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ von X erfüllt folgende Eigenschaften

- F ist monoton wachsend
- F ist rechtsstetig
- $\lim_{a \to -\infty} F(a) = 0$ und $\lim_{a \to \infty} F(a) = 1$

D 2.5
Seien $X_1 \dots X_n$ Zufallsvariablen auf einem W-Raum. Dann heissen $X_1, \dots X_n$ unabhängig falls

$$\forall x_1, x_2 \dots x_n \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{P}[X_1 \leq x_1 \dots X_n \leq x_n] = \mathbb{P}[X_1 \leq x_1] \dots \mathbb{P}[X_n \leq x_n]$$

S 2.7 Gruppieren von Zufallsvariablen
Seien $X_1 \dots X_n$ n unabhängige Zufallsvariablen. Seien $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ Indizes und $\phi_1 \dots \phi_k$ Abbildungen. Dann sind

$$Y_1 = \phi_1(X_1 \dots X_{i_1}), Y_2 = \phi_2(X_{i_1+1}, \dots X_{i_2}), \dots$$

$$Y_k = \phi_k(X_{i_{k-1}+1} \dots X_{i_k})$$

unabhängig **D 2.8**
Eine Folge von Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots$ heisst

- unabhängig falls $X_1, \dots X_n$ unabhängig sind, für alle $n \in \mathbb{N}$
- unabhängig und identisch verteilt(uiv) falls sie unabhängig ist und die Zufallsvariablen dieselbe Verteilungsfunktion haben d.h

$$\forall i, j \ F_{X_i} = F_{X_j}$$

S 3.1 Wahrscheinlichkeit eines Punktes
Sei $X : \omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F. Für jdedes a in $\mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{P}[X = a] = F(a) - F(-a)$$

D 3.2
Sei $A \in \mathcal{F}$ ein Ereignis. Wir sagen A tritt fast sicher ein falls

$$\mathbb{P}[A] = 1$$

D 3.4 Diskrete Zufallsvariable
Eine Zufallsvariable $X : \omega \to \mathbb{R}$ hiest diskret falls eine endliche oder abzählbare Menge $W \subset \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$\mathbb{P}[X \in W] = 1$$

Bem: [3.5] Wenn der Grundraum ω endlich oder abzähbar ist, dann ist jede Zufallsvariable $X : \omega \to \mathbb{R}$ diskret. **D 3.6 Verteilung von X**
Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Werten in einer endlichen oder abzähbaren Menge $W \subset \mathbb{R}$. Die Zahlenfolge $(p(x))_{x \in W}$ definiert durch

$$\forall x \in W \ p(x) := \mathbb{P}[X = x]$$

heisst Verteilung von X **S 3.7** Die Verteilung $(p(x))_{x \in W}$ einer diskreten Zufallsvariable erfüllt

$$\sum_{x \in W} p(x) = 1$$

S 3.9 Sei X eine diskrete Zufallsvariable, dessen WErte in einer endlichen oder abzähbaren Menge W liegen, und deren Verteilung p ist. Dann ist die Verteilungsfunktion von X gegeben durch

$$\forall X \in \mathbb{R} \ F_X(x) = \sum_{y \leq x_{y \in W}} p(y)$$

D 3.10 Bernoulli Verteilung
Es sei $0 \leq p \leq 1$. Eine Zufallsvariable X heisst Bernoulli Zufallsvariable mit Parameter p, wenn sie Werte in W $= \{0,1\}$ annimt und folgendes gilt

$$\mathbb{P}[X = 0] = 1 - p \quad \text{und } \mathbb{P}[X = 1] = p$$

D 3.11 Binomialverteilung
Sei $0 \leq p \leq 1$, sein $n \in \mathbb{N}$. Eine Zufallsvariable X heisst binomiale Zufallsvariable mit Paramtern n und p, wenn sie werte in $W = \{0, \dots, n\}$ annimt und folgendes gilt

$$\forall k \in \{0, \dots, n\} \ \mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

S 3.13 Sum von unab. Bern. und Binom. Z.V
Sei $0 \leq p \leq 1$, sein $n \in \mathbb{N}$. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Bernoulli Z.V mit Parameter p. Dann ist

$$S_n := X_1 + \dots + X_n$$

eine binomialverteilte Z.V mit paramtern n und p.
Bem: [3.14]
Bin(1,p) ist gerade Ber(p) verteilt. Falls $X \sim Bin(m,p), Y \sim Bin(n,p)$ und X,Y unabhängig, dann ist $X + Y \sim Bin(m+n, p)$ verteilt.

D 3.15 Geometrische Verteilung
Es sei $0 < p \leq 1$. Eine Zufallsvariable X heisst geometrische Zufallsvariable mit Parameter p, falls sie Werte in W $= \mathbb{N} \setminus \{0\}$ annimt und folgendes gilt

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \ \mathbb{P}[X = k] = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

Bem: [3.16]
Für p=1 und k $= 1$ erscheint in der obigen Gleichung $0^0 = 1$, es gilt $\mathbb{P}[X = 1] = p$ **S 3.18**
Sei $X_1, X_2, \dots$ eine Folge von unendlich vielen unabhängigen Bernoulli Z.V mit Parameter p. Dann

ist

$$T := \min\{n \geq 1 : X_n = 1\}$$

eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Paramter p. **Bem:** [3.18A]
Sei T eine geometrische Verteilung mit Parameter p. Dann ist $T > n$, wenn die ersten n Bernoulli-Experimente fehlschlagen. Daher gilt

$$\mathbb{P}[T > n] = (1-p)^n$$

S 3.20 Gedächnislosigkeit der Geo. Vert.

Sei $T \sim Geom(p)$ für $0 < p < 1$. Dann gilt

$$\forall n \geq 0 \quad \forall k \geq 1 \quad \mathbb{P}[T \geq n + k | T > n] = P[T \geq k]$$

D 3.21

Sei $\lambda > 0$ eine positive reelle Zahl. Eine Zufallsvariable X heisst Poisson-Zufallsvariable mit Paramter λ, wenn sie Werte in $W = \mathbb{N}$ annimt und folgendes gilt

$$\forall k \in \mathbb{N} \; \mathbb{P}[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} \exp^{-\lambda}$$

S 3.23 Poisson-Approx. der Binom. verteil.

Sei $\lambda > 0$. Für jedes $n \geq 1$ seien $X_n \sim Bin(n, \frac{\lambda}{n})$ Zufallsvariablen. Dann gilt

$$\forall k \in \mathbb{N} \; \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}[X_n = k] = \mathbb{P}[N = k]$$

D 3.25 Stetig verteilte Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable $X : \omega \to \mathbb{R}$ heisst stetig, wenn ihre Verteilungsfunktion F_X wie folgt geschrieben werden kann

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx \text{ für alle a in } \mathbb{R}$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ eine nicht-negative Funktion ist. Wir nennen dann f Dichte von X. **Bem:** [3.25A] $f(x)dx$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass X Werte in $[x, x + dx]$ annimmt. **T 3.26**

Sei X eine Zufallsvariable. Die Verteilungsfunktion F_X sei stetig und Stückweise C^1, d.h es gibt $x_0 = -\infty < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = +\infty$, sodass F_X auf jedem Intervall (x_i, x_{i+1}) Element von C^1 ist. Dann ist X eine stetige Zufallsvariable und die Dichte f kann konstruiert werden, indem man folgendes festlegt

$$\forall x \in (x_i, x_{i+1}) \; f(x) = F'_X(x)$$

D 3.27 Gleichverteilung auf [a.b]

Eine stetige Zufallsvariable X heisst gleichverteilt auf $[a, b]$ falls ihre Dichte gegeben ist durch

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}$$

Wir schreiben $X \sim \mathcal{U}([a, b])$
Bem: [3.27A]

- Die Wahrscheinlichkeit in einem Interval $[c, c + \ell] \subset [a, b]$ zu fallen ist lediglich abhängig von dessen Länge ℓ

$$\mathbb{P}[X \in [c, c + \ell]] = \frac{\ell}{b-a}$$

-
- Die Verteilungsfunktion X ist gegeben durch

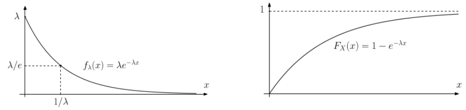
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

D 3.28 Exponentialverteilung mit $\lambda > 0$

Eine stetige Zufallsvariable T heisst exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$ falls ihre Dichte gegeben ist durch

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda \exp^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Bem: [3.28A] Die Grafik zeigt die Dichte und Verteilungsfunktion einer exponentialverteilten Zufallsvariable mit Parameter λ



T modelliert häufig die Lebensdauer oder Wartezeit eines allgemeinen Ergebnisses.
Eigenschaften:

- Die Wahrscheinlichkeit des Wartens ist exponentiell klein:

$$\forall t \geq 0 \; \mathbb{P}[T > t] = \exp^{-\lambda t}$$

- T besitzt die Eigenschaft der Gedächnislosigkeit

$$\forall t, s > 0 \; \mathbb{P}[T > t + s | T > t] = [T > s]$$

D 3.29

Eine stetige Zufallsvariable X heisst normal verteilt mit Parametern m und $\sigma^2 > 0$ falls ihre Dichte gegeben ist durch

$$f_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Bem: [3.29A]

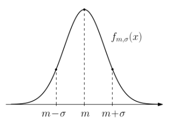


Abbildung 3.3: Dichte einer normalverteilten Zufallsvariable mit Parameter m und σ^2.

Zum Beispiel bei einer physikalischen Messung kann der parameter σ die Schwankung von X darstellen und generell zeigt ein kleines σ eine genaue Messung an und ein grosses σ eine ungenaue. Eigenschaften :

- Seien $X_1, \ldots X_n$ unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen mit Parametern $(m_1, \sigma_1^2), \ldots, (m_n, \sigma_n^2)$ dann ist

$$Z = m_0 + \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n$$

eine normalverteilte Zufallsvariable mit Parametern $m = m_0 + \lambda_1 m_1 + \cdots + \lambda_n m_n$ und $\sigma^2 = \lambda_1^2 \sigma_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 \sigma_n^2$