Grundlagen

D 1.1Sigma-Algebra

- $\omega \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$
- $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

D 1.2 Wahrscheinlichkeitsmass

- $\mathcal{P}[\omega] = 1$
- $\sigma -$ Additivität $\mathcal{P}[A] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}[A_i]$ if $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ (disjunkte Vereinigung)

D 1.3 Wahrscheinlichkeitsraum

Sei ω ein Grundraum, $\mathcal{F}$ eine σ -Algebra und $\mathcal{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmass. Wir nennen das Tripel$(\omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum.

D 1.5 Laplace Modell

- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\omega)$
- $\mathbb{P} :\to [0,1]$ ist definiert durch

$$\forall A \in \mathcal{F}\ \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{|\omega|}$$

S 1.6 Für eine Sigma-Algebra $\mathcal{F}$ auf ω gilt:

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
- $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cup B \in \mathcal{F}$
- $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$

S 1.7

- $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$
- $A_1, \dots A_k$ paarweise disjunkte Ereignisse,

$$\mathbb{P}[A_1 \cup \dots \cup A_k] = \mathbb{P}[A_1] + \dots \mathbb{P}[A_k]$$

- $\mathbb{P}[A^c] = 1 - \mathbb{P}[A]$
- $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$

S 1.8 Seien $A, B \in \mathcal{F}$ dann gilt

$$A \subset B \implies \mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$$

S 1.9 Sei $A_1, A_2, \dots$ eine Folge von nicht notwendigerweise disjunkten Ereignissen, dann gilt:

$$\mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]]$$

D 1.13 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Sei $(\omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien A, B zwei Ereignisse mit $\mathbb{P}[B] > 0$

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

S 1.16 Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit

Sei $B_1, \dots, B_n$ eine Partition des Grundraumes ω, so dass $\mathbb{P}[B_i] > 0$ für jedes $1 \leq i \leq n$ gilt. Dann gilt:

$$\forall A \in \mathcal{F}\ \mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A|B_i]\, \mathbb{P}[B_i]$$

S 1.17 Satz von Bayes

Sei $B_1 \dots B_n \in \mathcal{F}$ eine Partition von ω sodass, $\mathbb{P}[B_i] > 0$ für jedes i gilt. Für jedes Ereignis A mit $\mathbb{P}[A] > 0$ gilt

$$\forall i = 1, \dots n\ \mathbb{P}[B_i|A] = \frac{\mathbb{P}[A|B_i]\mathbb{P}[B_i]}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}[A|B_j]\mathbb{P}[B_j]}$$

D 1.18 Unabhängigkeit

Sei $(\omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zwei Ereignisse A und B heissen unabhängig falls

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\, \mathbb{P}[B]$$

S 1.20

Seien A,B $\in \mathcal{F}$ zwei Ereignisse mit $\mathbb{P}[A], \mathbb{P}[B] > 0$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$
2. $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]$
3. $\mathbb{P}[B|A] = \mathbb{P}[B]$

D 1.21

Sei I eine beliebige Indexmenge. Eine Familie von Ereignissen $(A_i)_{i \in I}$ heisst unabhängig falls

$$\forall J \subset I \text{endlich} \quad \mathbb{P}[\bigcap_{j \in J} A_j] = \prod_{j \in J} \mathbb{P}[A_j]$$

Bem:

Drei Ereignisse A,B und C sind unabhängig falls alle 4 folgenden Gleichungen erfüllt sind

1. $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$
2. $\mathbb{P}[A \cap C] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[C]$
3. $\mathbb{P}[B \cap C] = \mathbb{P}[B]\mathbb{P}[C]$
4. $\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]\mathbb{P}[C]$

D 2.1 Zufallsvariable

Sei $(\omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Zufallsvariable ist eine Abbildung $X : \omega \to \mathbb{R}$ so dass, für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\{w \in \omega : X(w) \leq a\} \in \mathcal{F}$$

Bem:

Für Ereignisse im Bezug auf Z:V

- $\{X \leq a\} = \{w \in \omega : X(w) \leq a\}$
- $\{a < X \leq b\} = \{w \in \omega : a < X(w) < b\}$
- $\{X \in \mathbb{Z}\} = \{w \in \omega : X(w) \in \mathbb{Z}\}$

$$\mathbb{P}[X \leq a] = \mathbb{P}[\{X \leq a\}] = \mathbb{P}[\{w \in \omega : X(w) \leq a\}]$$

D 2.2 Verteilungsfunktion

Sei X eine Zufallsvariable auf einem W-Raum $(\omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Die Verteilungsfunktion von X ist eine Funtkion $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, definiert durch

$$\forall a \in \mathbb{R}\ F_X(a) = \mathbb{P}[X \leq a]$$

S 2.3 Einfache Identität

Seien a ¡ b zwei reelle Zahlen. Dann gilt

$$\mathbb{P}[a < X \leq b] = F(b) - F(a)$$

T 2.4 Eigenschaften der Verteilungsfunktion

Sei X eine Z.V aif einem Wahrscheinlichkeitsraum. Die Verteilungsfunktion $F = F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ von X erfüllt folgende Eigenschaften

- F ist monoton wachsend
- F ist rechtsstetig
- $\lim_{a \to -\infty} F(a) = 0$ und $\lim_{a \to \infty} F(a) = 1$