שאלה 2)

<u>נתון: 1</u>

$$(1-\varepsilon)\|v\| \le \|f(v)\| \le (1+\varepsilon)\|v\|$$

<u>2</u>

$$(1-\varepsilon)\|v-w\| \le \|f(v-w)\| \le (1+\varepsilon)\|v-w\|$$

<u>צ"ל</u>: קיים קבוע c עבורו: $v w - c\varepsilon \le f(v)\cdot f(w) \le v\cdot w + c\varepsilon$

נשים לב שמכיוון ש JL-transform לינארית מתקיים:

$$\|f(v-w)\|^2 = \|f(v) - f(w)\|^2 = \|f(v)\|^2 - 2f(v)\cdot f(w) + \|f(w)\|^2$$

לכן: $f(v)\cdot f(w) = \dfrac{\|f(v)\|^2 + \|f(w)\|^2 - \|f(v-w)\|^2}{2}$

כעת משימוש בזה ובנתונים 1 ו-2 נקבל:

$$\frac{(1-\varepsilon)^2\cdot(\|v\|^2+\|w\|^2) - (1+\varepsilon)^2\|v-w\|^2}{2} \overset{(a)}{\le} f(v)\cdot f(w) \overset{(b)}{\le} \frac{(1+\varepsilon)^2(\|v\|^2+\|w\|^2) - (1-\varepsilon)^2\|v-w\|}{2}$$

נשים לב ש: $\|v-w\|^2 = \|v\|^2+\|w\|^2 - 2vw$ ולכן נציב את זה ונפתח את ביטויי האי-שוויון ונקבל:

(a) $\frac{1}{2}\left[(1-\varepsilon)^2(\|v\|^2+\|w\|^2) - (1+\varepsilon)^2(\|v\|^2+\|w\|^2 - 2vw)\right] \le f(v)\cdot f(w)$

$$\Downarrow$$

$$\frac{(1+\varepsilon)^2\cdot \cancel{2}vw - \cancel{4}^{2}\varepsilon(\|v\|^2+\|w\|^2)}{\cancel{2}} \le f(v)f(w)$$

(b) $f(v)\cdot f(w) \le \left[(1+\varepsilon)^2(\|v\|^2+\|w\|^2) - (1-\varepsilon)^2(\|v\|^2+\|w\|^2 - 2vw)\right]\cdot\frac{1}{2}$

$$\Downarrow$$

$$f(v)\cdot f(w) \le (1-\varepsilon)^2\cdot v\cdot w + 2\varepsilon(\|v\|^2+\|w\|^2)$$

מכאן:

$$(1+\varepsilon)^2\cdot v\cdot w - 2\varepsilon(\|v\|^2+\|w\|^2) \le f(v)\cdot f(w) \le (1-\varepsilon)^2\cdot v\cdot w + 2\varepsilon(\|v\|^2+\|w\|^2)$$

$$\Downarrow$$

$$vw - 2\varepsilon(\|v\|^2+\|w\|^2) \le f(v)f(w) \le v\cdot w + 2\varepsilon(\|v\|^2+\|w\|^2)$$

לכן: נבחר את c להיות: $c = 2(\|v\|^2+\|w\|^2)$, והטענה מתקיימת.