Einführung in das Operations Research I
Netzplantechnik

Prof. Stefan Nickel

Institut für Operations Research – Diskrete Optimierung und Logistik

Gliederung

- 0. Einführung
- 1. Kernkonzepte der linearen Optimierung
- 2. Erweiterungen und Anwendungen der linearen Optimierung
- 3. Graphentheorie
- **4. Netzplantechnik**

Gliederung

- 4. Netzplantechnik
  - **Einführung und grundlegende Definitionen**
  - Vorgangsknotennetzpläne
    - Strukturplanung
    - Zeitplanung
  - Stochastische Zeitplanung
  - Vorgangspfeilnetzpläne
    - Struktur- und Zeitplanung
    - Kostenplanung

Einführung und grundlegende Definitionen

- Mit Hilfe der Netzplantechnik lassen sich große und / oder komplexe Projekte planen und kontrollieren
- Beispiele für solche Projekte
  - Projekte im Bereich Forschung und Entwicklung
  - Bauprojekte
  - Projekte der betrieblichen Organisation
  - Planung und Durchführung von Großveranstaltungen

Einführung und grundlegende Definitionen

- Rolle der Netzplantechnik im Projektablauf

Einführung und grundlegende Definitionen

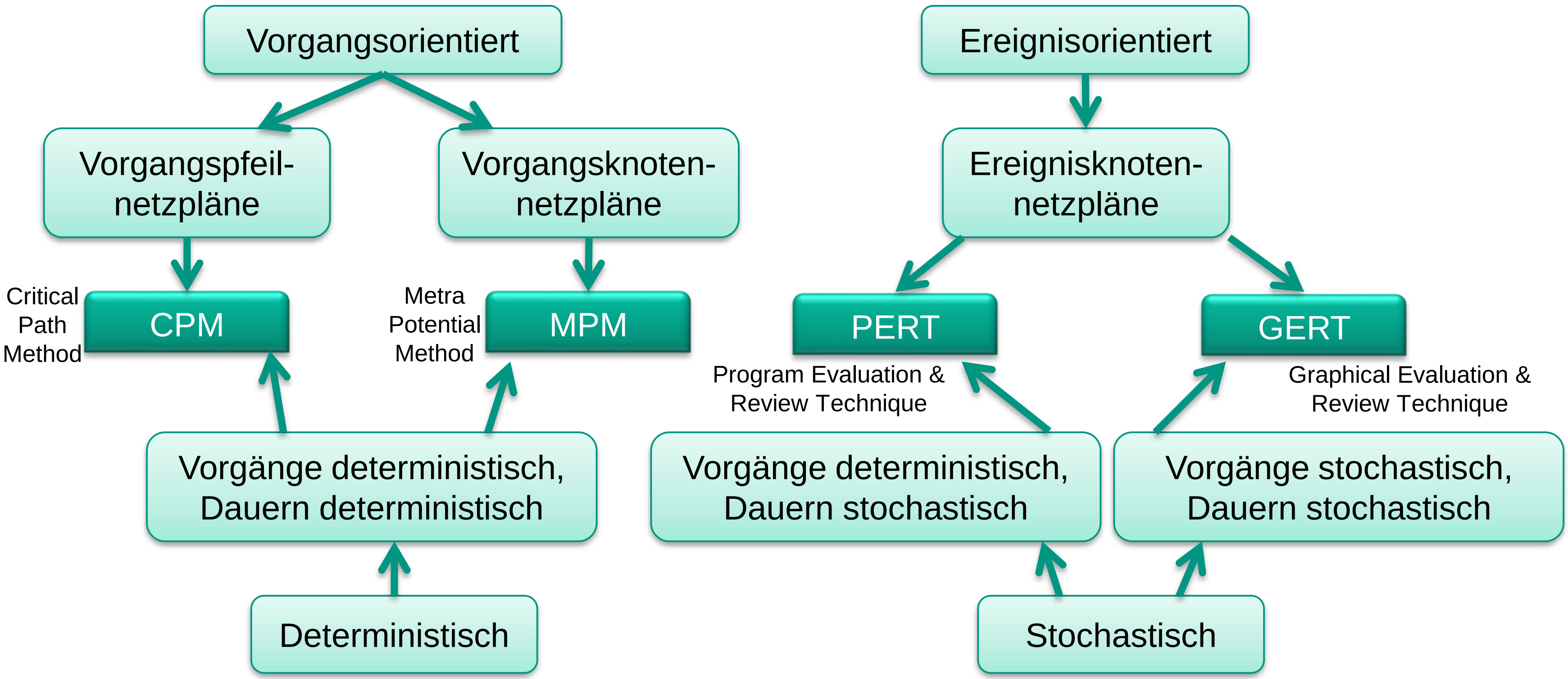
- Im Allgemeinen lassen sich Projekte, die mit der Netzplantechnik geplant werden, in einzelne Vorgänge oder Aktivitäten unterteilen
- Definitionen
  - Ein Vorgang ist ein Zeit erforderndes Geschehen mit definiertem Anfang und Ende
  - Ein Ereignis ist ein Zeitpunkt, der das Eintreten eines bestimmten Projektzustandes markiert
  - Ein Meilenstein ist ein Ereignis, dem bei der Projektdurchführung eine besondere Bedeutung zukommt

Einführung und grundlegende Definitionen

- Es gilt
  - Jeder Vorgang besitzt genau ein Anfangs- und ein Endereignis
  - Das Projekt beginnt mit einem Startereignis (Projektanfang) und endet mit einem Endereignis (Projektende)
  - Alle Ereignisse und Vorgänge des Projekts werden bei der Planung in einem Netzplan (als dessen Elemente) zusammengefasst
  - Zusätzlich zu den Elementen enthält ein Netzplan noch verschiedene Reihenfolgebeziehungen zwischen den einzelnen Vorgängen und Ereignissen

Einführung und grundlegende Definitionen

- Darstellungsarten von Netzplänen
  - Ein Netzplan (Projektstruktur) kann mit Hilfe eines gerichteten Graphen mit Kanten- und / oder Knotenbewertung dargestellt werden

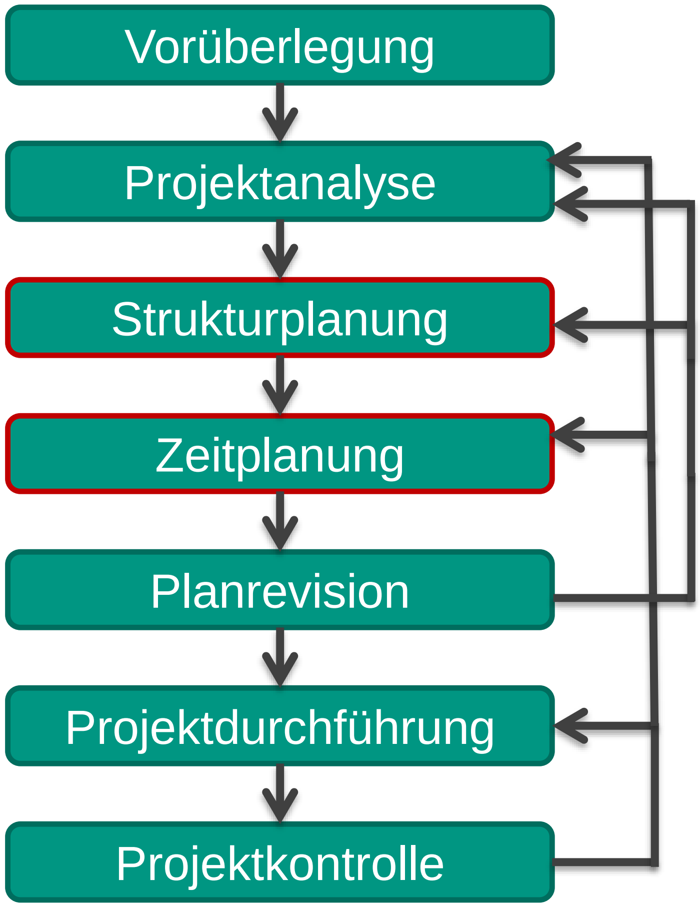


Einführung und grundlegende Definitionen

- Darstellungsarten von Netzplänen
  - Vorgangsknotenorientierte Netzpläne
    - Vorgänge werden als Knoten dargestellt
    - Reihenfolgebeziehungen werden als Pfeile dargestellt
  - Vorgangspfeilorientierte Netzpläne
    - Vorgänge werden als Pfeile dargestellt, wobei Knoten die Ereignisse des Projekts repräsentieren
    - Reihenfolgebeziehungen werden ebenfalls durch Pfeile dargestellt, wobei gegebenenfalls zusätzliche Scheinvorgänge eingeführt werden müssen

Einführung und grundlegende Definitionen

- Planungs- und Durchführungsphasen im Projektmanagement



Institut für Operations Research
Diskrete Optimierung und Logistik

Einführung und grundlegende Definitionen

- Strukturplanung
  - Phase 1
    - Zerlege das Projekt in Vorgänge und Ereignisse
    - Ermittle die Reihenfolgebeziehungen zwischen den einzelnen Vorgängen und Ereignissen
    - Damit erhält man eine sogenannte Vorgangsliste des Projekts
  - Phase 2
    - Bilde die Ablaufstruktur des Projekts durch einen Netzplan ab
    - Dabei hängt die genaue Vorgehensweise von der benutzten Netzplantechnik-Methode ab (z.B. vorgangsknoten- oder vorgangspfeilorientierte Darstellung)

Einführung und grundlegende Definitionen

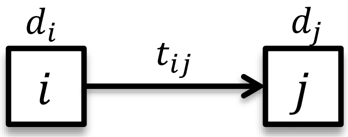
- Zeitplanung
  - Die Zeitplanung bestimmt anhand des Netzplans die folgenden Werte
    - Früheste und späteste Anfangs- und Endzeitpunkte für die einzelnen Vorgänge des Projekts
    - Projektdauer
    - Zeitreserven (Pufferzeiten)
  - Bemerkung
    - Im Anschluss an die Struktur- und Zeitplanung können weitere Phasen mit unterschiedlichem Augenmerk zum Einsatz kommen, z.B.
      - Kapazitätsplanung
      - Kostenplanung

Gliederung

- 4. Netzplantechnik
  - Einführung und grundlegende Definitionen
  - **Vorgangsknotennetzpläne**
    - Strukturplanung
    - Zeitplanung
  - Stochastische Zeitplanung
  - Vorgangspfeilnetzpläne
    - Struktur- und Zeitplanung
    - Kostenplanung

Vorgangsknotennetzpläne

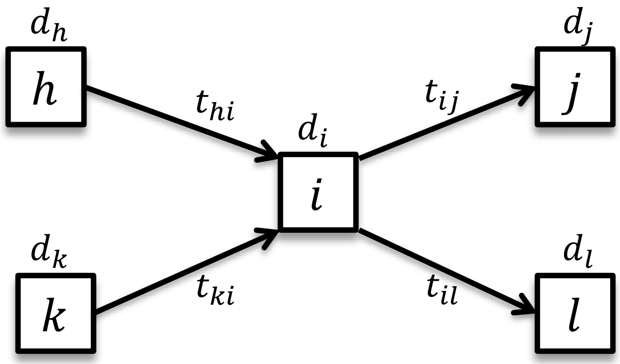
- Strukturplanung
  - Bei Vorgangskontennetzplänen werden die Vorgänge des Projekts mit Hilfe von Knoten und die Reihenfolgebeziehungen mit Hilfe von gerichteten Kanten dargestellt
    - i Vorgang
    - d_i Dauer von Vorgang i
    - t_{ij} Mindestabstand zwischen Ende von i und Anfang von j

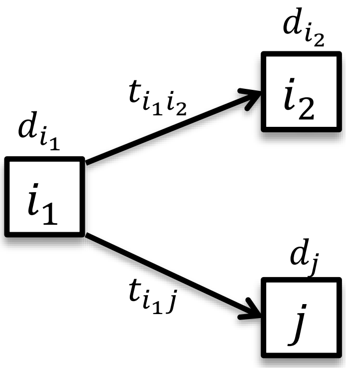


Institut für Operations Research
Diskrete Optimierung und Logistik

Vorgangsknotennetzpläne

- Strukturplanung
  - Reihenfolgebeziehungen
    - Die Vorgänge h und k sind die direkten Vorgänger von Vorgang i, d.h. $V(i) = \{h, k\}$; die Vorgänge j und l sind die direkten Nachfolger von Vorgang i, d.h. $N(i) = \{j, l\}$

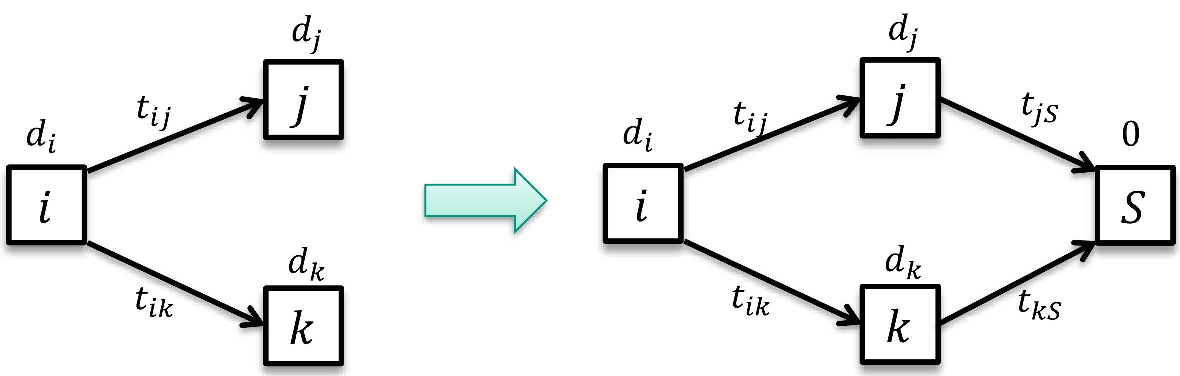




    - Ein Teil von Vorgang i ist der Vorgänger von Vorgang j (Vorgang i wird in die beiden Teilvorgänge i_1 und i_2 unterteilt)

Vorgangsknotennetzpläne

- Strukturplanung
  - Reihenfolgebeziehungen
    - Beginnt und/oder endet ein Projekt zugleich mit mehreren Vorgängen, so führen wir einen Scheinvorgang *Beginn* und/oder einen Scheinvorgang *Ende* ein



Vorgangsknotennetzpläne

- Strukturplanung
  - Zeitliche Mindest- und Maximalabstände zwischen Vorgängen

Beschreibung	Bezeichnung	Symbol
Mindestabstand von Ende i bis Anfang j Maximalabstand von Ende i bis Anfang j	Normalfolge	t_{ij} $\bar{t}_{ij}$
Mindestabstand von Anfang i bis Anfang j Maximalabstand von Anfang i bis Anfang j	Anfangsfolge	t_{ij}^A $\bar{t}_{ij}^A$
Mindestabstand von Ende i bis Ende j Maximalabstand von Ende i bis Ende j	Endfolge	t_{ij}^E $\bar{t}_{ij}^E$
Mindestabstand von Anfang i bis Ende j Maximalabstand von Anfang i bis Ende j	Sprungfolge	t_{ij}^S $\bar{t}_{ij}^S$

Vorgangsknotennetzpläne

- Strukturplanung
  - Zeitliche Mindest- und Maximalabstände zwischen Vorgängen
    - Es reicht aus sich auf Mindestabstände bei Normalfolgen zu beschränken, da alle anderen Abstände sich in solche transformieren lassen
    - Dabei gelten die folgenden Regeln (mit d_i: Dauer des Vorgangs i)

Gegeben	Transformation in Normalfolge
$\bar{t}_{ij}$	$t_{ji} = -\bar{t}_{ij} - d_i - d_j$
t_{ij}^A	$t_{ij} = t_{ij}^A - d_i$
$\bar{t}_{ij}^A$	$t_{ji} = -\bar{t}_{ij}^A - d_j$
t_{ij}^E	$t_{ij} = t_{ij}^E - d_j$
$\bar{t}_{ij}^E$	$t_{ji} = -\bar{t}_{ij}^E - d_i$
t_{ij}^S	$t_{ij} = t_{ij}^S - d_i - d_j$
$\bar{t}_{ij}^S$	$t_{ji} = -\bar{t}_{ij}^S$

Vorgangsknotennetzpläne

- Strukturplanung
  - Repräsentation von Mindest- und Maximalabständen in Netzplänen
    - Zuerst werden alle Mindest- und Maximalabstände in Mindestabstände bei Normalfolge transformiert
    - Diese Mindestabstände werden dann als Kantenbewertungen an den gerichteten Kanten, die die Reihenfolgebeziehungen repräsentieren, dargestellt
    - Somit lässt sich ein Vorgangsknotennetzplan als (knoten- und kanten-) bewerteter gerichteter Graph mit einer Quelle und einer Senke darstellen

Vorgangsknotennetzpläne

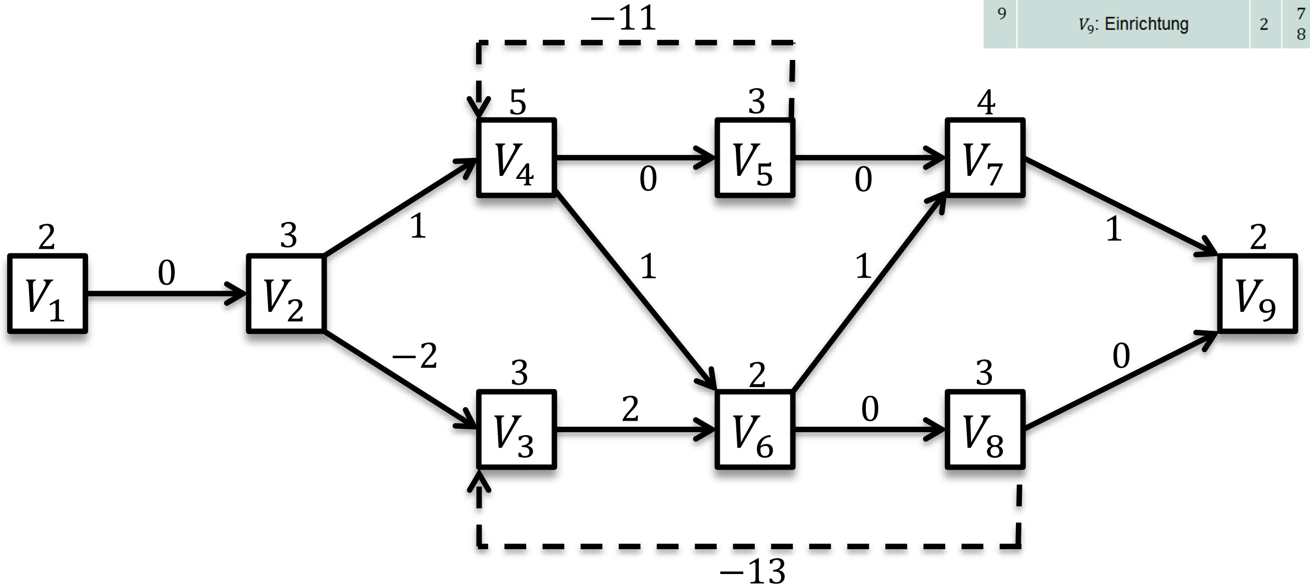
- Strukturplanung
  - Beispiel: Bau eines Hauses
    - Vorgangsliste

i	Vorgang	d_i	$V(i)$	$t_{hi}\ (h \in V(i))$	$\bar{t}_{hi}\ (h \in V(i))$
1	V_1: Baustelle einrichten	2			
2	V_2: Bodenplatte betonieren	3	1		
3	V_3: Wasseranschluss	3	2	-2	
4	V_4: Maurerarbeiten Rohbau	5	2	1	
5	V_5: Dach	3	4		3
6	V_6: Wasser- und Elektroinstallation	2	3 4	2 1	
7	V_7: Isolierung und Außenputz	4	5 6	 1	
8	V_8: Innenausbau	3	3 6		7
9	V_9: Einrichtung	2	7 8	1	

Vorgangsknotennetzpläne

- Strukturplanung
  - Beispiel: Bau eines Hauses
    - Damit ergibt sich folgender Netzplan

i	Vorgang	d_i	$V(i)$	$t_{hi}\ (h \in V(i))$	$\bar{t}_{hi}\ (h \in V(i))$
1	V_1: Baustelle einrichten	2			
2	V_2: Bodenplatte betonieren	3	1		
3	V_3: Wasseranschluss	3	2	-2	
4	V_4: Maurerarbeiten Rohbau	5	2	1	
5	V_5: Dach	3	4		3
6	V_6: Wasser- und Elektroinstallation	2	3 4	2 1	
7	V_7: Isolierung und Außenputz	4	5 6	 1	
8	V_8: Innenausbau	3	3 6		7
9	V_9: Einrichtung	2	7 8	1 	



Institut für Operations Research
Diskrete Optimierung und Logistik

Vorgangsknotennetzpläne

- Zeitplanung
  - Mit Hilfe des Netzplans, der die Struktur des Projekts wiedergibt, kann man nun eine Zeit- oder Terminplanung durchführen, die die folgenden Werte bestimmt
    - Früheste und späteste Anfangs- und Endzeitpunkte
    - Projektdauer
    - Zeitreserven (Pufferzeiten)

Vorgangsknotennetzpläne

- Zeitplanung
  - Bestimmung der frühesten und spätesten Zeitpunkte
    - Voraussetzungen
      - Netzplan mit n Knoten (Vorgängen) $i = 1, \ldots, n$
      - Knoten 1 sei die einzige Quelle und Knoten n die einzige Senke des Netzplans
    - Definitionen
      - FAZ_i Frühestmöglicher Anfangszeitpunkt von Vorgang i
      - FEZ_i Frühestmöglicher Endzeitpunkt von Vorgang i
      - $FAZ_1 := 0$ Projekt startet im Zeitpunkt 0

Vorgangsknotennetzpläne

- Zeitplanung
  - Bestimmung der frühesten und spätesten Zeitpunkte
    - Weiterhin definiert man unter der Bedingung, dass das Projekt frühestmöglich beendet sein soll (d.h. zum Zeitpunkt FEZ_n), die folgenden Zeiten
      - SAZ_i Spätestmöglicher Anfangszeitpunkt von Vorgang i
      - SEZ_i Spätestmöglicher Endzeitpunkt von Vorgang i
      - $SEZ_n \coloneqq FEZ_n$ Projekt endet frühestmöglich
  - Alle diese Werte lassen sich durch eine sogenannte Vorwärts- und eine Rückwärtsrechnung bestimmen
  - Die genaue Ausführung hängt davon ab, ob der Netzplan kreisfrei ist oder nicht

Vorgangsknotennetzpläne

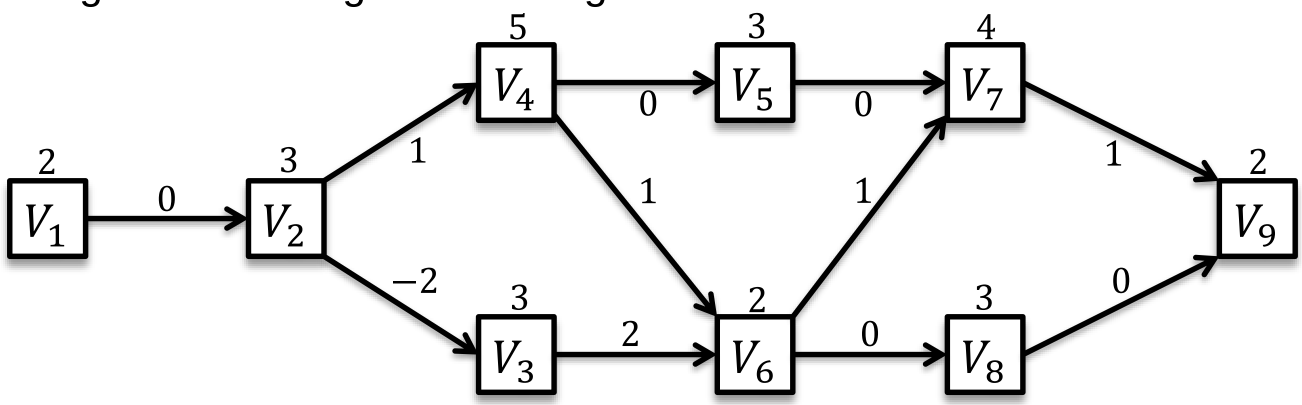
- Zeitplanung
  - Bestimmung der frühesten und spätesten Zeitpunkte: Kreisfreie Netzpläne
    - In einem kreisfreien Netzplan lassen sich die Knoten (Vorgänge) $i = 1, \ldots, n$ derart durchnummerieren, dass für alle Kanten (i, j) die Beziehung $i < j$ gilt
    - Eine solche Sortierung der Knoten nennt man topologisch und einen Netzplan mit entsprechend sortierten Knoten nennt man topologisch sortiert

Vorgangsknotennetzpläne

- Zeitplanung
  - Bestimmung der frühesten und spätesten Zeitpunkte: Kreisfreie Netzpläne
    - In einem topologisch sortierten Netzplan ergeben sich die Zeiten FAZ_i und FEZ_i somit durch folgende Vorwärtsrechnung
      - $FAZ_i \coloneqq \max\{FEZ_j + t_{ji} \mid j \in V(i)\}$
      - $FEZ_i \coloneqq FAZ_i + d_i$
    - Setzt man nun $SEZ_n := FEZ_n$ erhält man die Zeiten SAZ_i und SEZ_i durch folgende Rückwärtsrechnung
      - $SAZ_i \coloneqq SEZ_i - d_i$
      - $SEZ_i \coloneqq \min\{SAZ_j - t_{ij} \mid j \in N(i)\}$

Vorgangsknotennetzpläne

- Zeitplanung
  - Bestimmung der frühesten und spätesten Zeitpunkte: Kreisfreie Netzpläne
    - Vernachlässigt man im Netzplan des letzten Beispiels die gestrichelten Pfeile, so ergeben sich folgende Anfangs- und Endzeiten



	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9
FAZ	0	2	3	6	11	12	15	14	20
FEZ	2	5	6	11	14	14	19	17	22
SEZ	2	5	10	11	15	14	19	20	22
SAZ	0	2	7	6	12	12	15	17	20

Vorgangsknotennetzpläne

- Zeitplanung
  - Bestimmung der frühesten und spätesten Zeitpunkte: Netzpläne mit Kreisen nichtpositiver Länge
    - Zur Berechnung der Zeiten FAZ_i, FEZ_i, SAZ_i und SEZ_i in Netzplänen mit Kreisen nichtpositiver Länge kann man für die Vorwärts- und Rückwärtsrechnung jeweils eine modifizierte Form des Breadth-First-Algorithmus zur Bestimmung kürzester Wege verwenden
    - Aufgrund der Suche nach längsten Wegen, muss nun vorausgesetzt werden, dass alle Kreise keine positive Länge haben
    - Ein Netzplan mit einem Kreis positiver Länge hat keine zulässige Lösung, da er nicht realisierbar ist
    - Die Vorgänge werden in der Datenstruktur Q vom Typ Queue verwaltet

Vorgangsknotennetzpläne

- Zeitplanung
  - Bestimmung der frühesten und spätesten Zeitpunkte: Netzpläne mit Kreisen nichtpositiver Länge
    Breadth-First-Algorithmus für längste Wege von der Quelle

Input: Netzplan $G = (V, E, t, d)$ mit $V = \{1, 2, \dots, n\}$, Quelle 1, Senke n, Knotenbewertungen d_i, Kantenbewertungen t_{ij}, G hat keine Kreise positiver Länge

begin
  $Q_A \coloneqq 1$, $Q_E \coloneqq 1$, $FAZ(1) \coloneqq 0$, $FEZ(1) \coloneqq d_1$, $FAZ(i) \coloneqq -\infty$ für alle $i \neq 1$, $beendet \coloneqq \text{false}$
  repeat
    forall $j \in N(Q_A)$
      if $FAZ(j) < FEZ(Q_A) + t_{Q_A j}$
        $FAZ(j) \coloneqq FEZ(Q_A) + t_{Q_A j}$, $FEZ(j) \coloneqq FAZ(j) + d_j$
        if $j \notin Q$ **then** $S(Q_E) \coloneqq j, Q_E \coloneqq j$ **end**
      end
    end
    if $Q_A \neq Q_E$ **then** $Q_A \coloneqq S(Q_A)$ **else** $beendet \coloneqq \text{true}$ **end**
  until $beendet$
end

Output: $FAZ(i)$ und $FEZ(i)$ sind früheste Anfangs- bzw. Endzeitpunkte FAZ_i und FEZ_i von Vorgang i

Vorgangsknotennetzpläne

- Zeitplanung
  - Bestimmung der frühesten und spätesten Zeitpunkte: Netzpläne mit Kreisen nichtpositiver Länge
    Breadth-First-Algorithmus für längste Wege zur Senke

Input: Netzplan $G = (V, E, t, d)$ mit $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, Quelle 1, Senke n, Knotenbewertungen d_i, Kantenbewertungen t_{ij}, G hat keine Kreise positiver Länge, FEZ_n

begin
    $Q_A \coloneqq n$, $Q_E \coloneqq n$, $SEZ(n) \coloneqq FEZ_n$, $SAZ(n) \coloneqq SEZ(n) - d_n$, $SEZ(i) \coloneqq \infty$ für alle $i \neq n$, $beendet \coloneqq \text{false}$
    repeat
        forall $j \in V(Q_A)$
            if $SEZ(j) > SAZ(Q_A) - t_{jQ_A}$
                $SEZ(j) \coloneqq SAZ(Q_A) - t_{jQ_A}$, $SAZ(j) \coloneqq SEZ(j) - d_j$
                if $j \notin Q$ **then** $S(Q_E) \coloneqq j, Q_E \coloneqq j$ **end**
            end
        end
        if $Q_A \neq Q_E$ **then** $Q_A \coloneqq S(Q_A)$ **else** $beendet \coloneqq \text{true}$ **end**
    until $beendet$
end

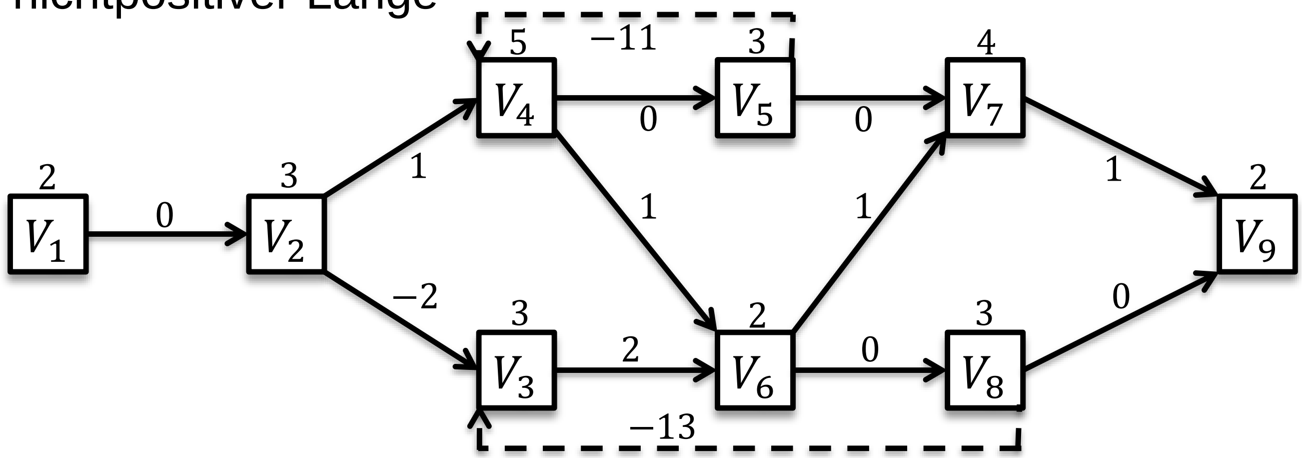
Output: $SAZ(i)$ und $SEZ(i)$ sind späteste Anfangs- bzw. Endzeitpunkte SAZ_i und SEZ_i von Vorgang i

Vorgangsknotennetzpläne

- Zeitplanung
  - Bestimmung der frühesten und spätesten Zeitpunkte: Netzpläne mit Kreisen nichtpositiver Länge
    - Nach Ausführung des Breadth-First-Algorithmus für längste Wege von der Quelle stehen in $FAZ(i)$ bzw. $FEZ(i)$ die frühesten Anfangs- bzw. Endzeitpunkte FAZ_i bzw. FEZ_i für Vorgang i
    - Nach Ausführung des Breadth-First-Algorithmus für längste Wege zur Senke stehen in $SAZ(i)$ bzw. $SEZ(i)$ die spätesten Anfangs- bzw. Endzeitpunkte SAZ_i bzw. SEZ_i für Vorgang i

Vorgangsknotennetzpläne

- Zeitplanung
  - Bestimmung der frühesten und spätesten Zeitpunkte: Netzpläne mit Kreisen nichtpositiver Länge



	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9
FAZ	0	2	4	6	11	12	15	14	20
FEZ	2	5	7	11	14	14	19	17	22
SEZ	2	5	10	11	15	14	19	20	22
SAZ	0	2	7	6	12	12	15	17	20

Vorgangsknotennetzpläne

- Zeitplanung
  - Ein Netzplan mit einem Kreis positiver Länge kann zeitlich nicht konsistent sein, was dazu führt, dass es keine Lösung gibt
  - Ob ein Kreis positiver Länge vorhanden ist oder nicht kann man durch die Häufigkeit der Wertänderung von $FAZ(1), \ldots, FAZ(n)$ bzw. $SEZ(1), \ldots, SEZ(n)$ in den Breadth-First-Algorithmen ablesen
  - Ist diese Zahl für einen Knoten größer als n, so liegt ein Kreis positiver Länge vor

Vorgangsknotennetzpläne

- Zeitplanung
  - Kritische Wege und Vorgänge
    - In einem Netzplan bezeichnet man einen längsten Weg von der Quelle zur Senke als (zeit-) kritischen Weg
    - Weiterhin heißen alle Vorgänge auf einem solchen Weg (zeit-) kritische Vorgänge
    - Für diese Vorgänge gilt $FAZ_i = SAZ_i$ und $FEZ_i = SEZ_i$
    - → Wird der Beginn eines kritischen Vorgangs verzögert oder verlängert sich die Vorgangsdauer, so erhöht sich die Projektdauer um denselben Wert

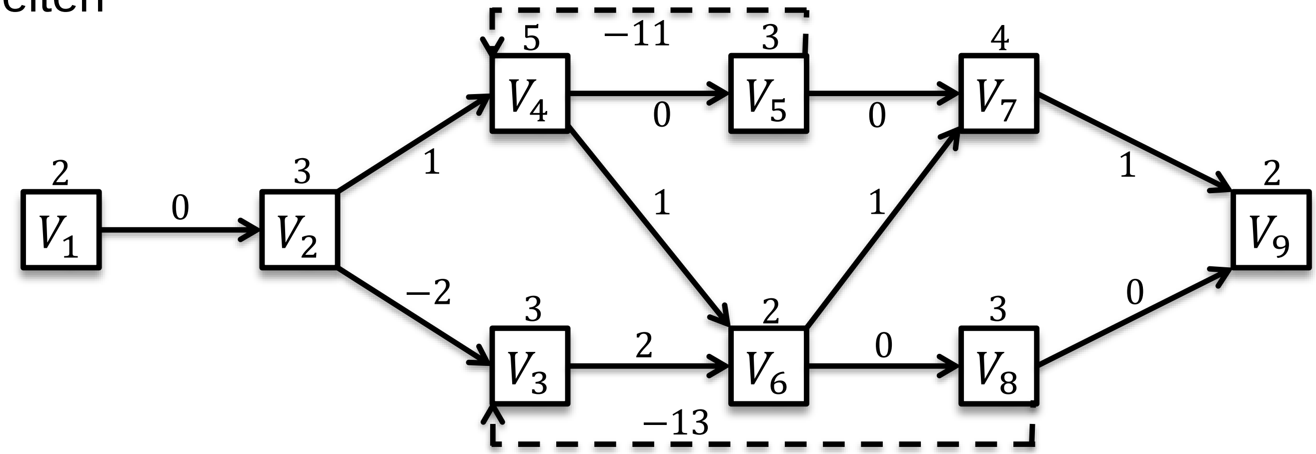
Vorgangsknotennetzpläne

- Zeitplanung
  - Pufferzeiten
    - Pufferzeiten sind Zeitspannen, um die der Anfang eines Vorgangs und damit der ganze Vorgang gegenüber einem definierten Zeitpunkt verschoben werden kann bei bestimmter Beeinflussung der zeitlichen Bewegungsmöglichkeiten umgebender Vorgänge
    - Man kann vier verschiedene Arten von Pufferzeiten unterscheiden
      - Gesamte Pufferzeit eines Vorgangs i
        $GP_i := SEZ_i - FAZ_i - d_i = SAZ_i - FAZ_i$
      - Freie Pufferzeit eines Vorgangs i
        $FP_i := \min\{FAZ_j - t_{ij} \mid j \in N(i)\} - FEZ_i$
      - Freie Rückwärtspufferzeit eines Vorgangs i
        $FRP_i := SAZ_i - \max\{SEZ_j + t_{ji} \mid j \in V(i)\}$
      - Unabhängige Pufferzeit eines Vorgangs i
        $UP_i := \max\{0, \min\{FAZ_j - t_{ij} \mid j \in N(i)\} - \max\{SEZ_k + t_{ki} \mid k \in V(i)\} - d_i\}$
    - Es gilt $GP_i \geq FP_i \geq UP_i$ und $GP_i \geq FRP_i \geq UP_i$

Institut für Operations Research
Diskrete Optimierung und Logistik

Vorgangsknotennetzpläne

- Zeitplanung
  - Pufferzeiten



	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9
GP	0	0	3	0	1	0	0	3	0
FP	0	0	3	0	1	0	0	3	0
FRP	0	0	0	0	1	0	0	3	0
UP	0	0	0	0	1	0	0	0	0

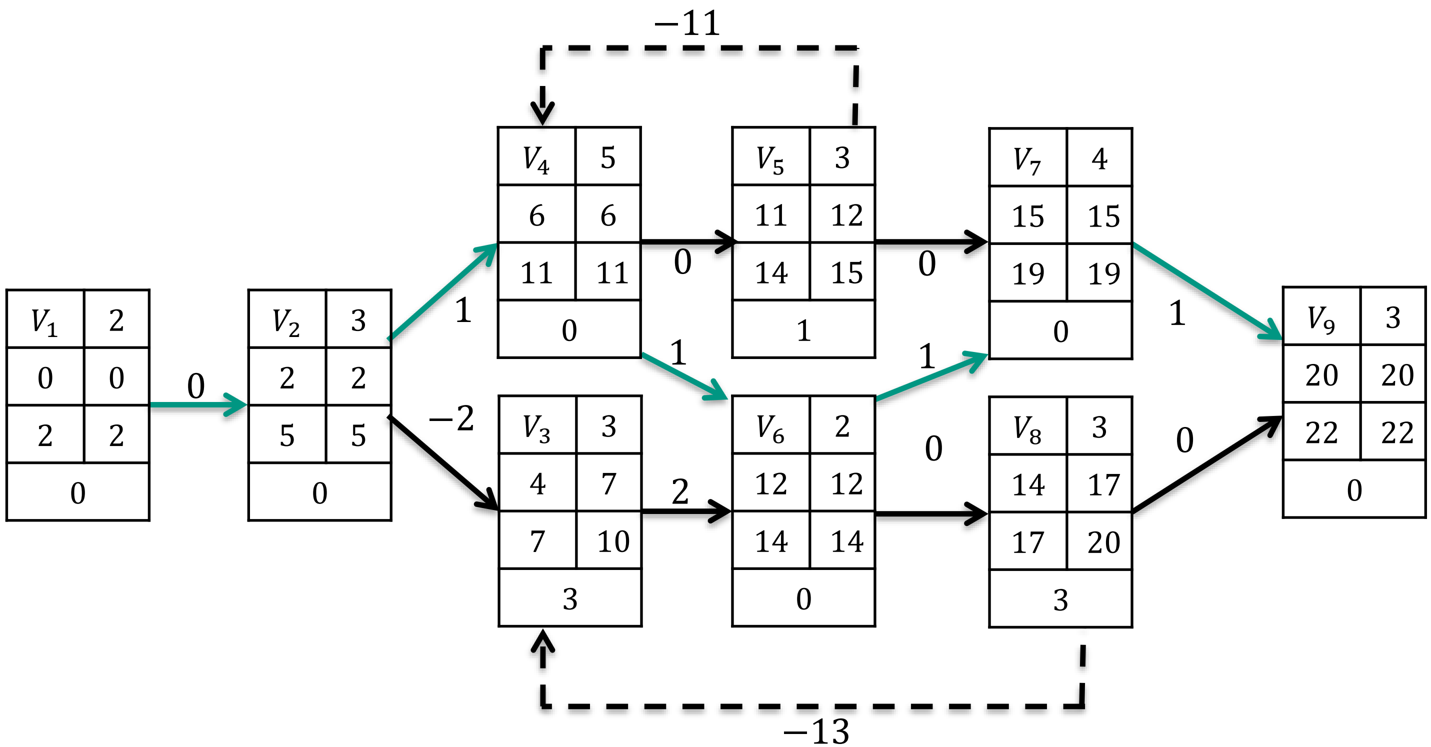
Vorgangsknotennetzpläne

- Zeitplanung
  - Um die wichtigsten Informationen der Zeitplanung im Netzplan zu repräsentieren, kann man für die Knoten in Vorgangsknotennetzplänen die Darstellungsform MPM (Metra Potential Method) wählen

<table>
<tr><td>i</td><td>d_i</td></tr>
<tr><td>FAZ_i</td><td>SAZ_i</td></tr>
<tr><td>FEZ_i</td><td>SEZ_i</td></tr>
<tr><td colspan="2">GP_i</td></tr>
</table>

Vorgangsknotennetzpläne

- Zeitplanung
  - Für das Beispiel ergibt sich der folgende MPM-Netzplan, der die Struktur- und Zeitplanung enthält mit farblich gekennzeichnetem kritischen Weg



Institut für Operations Research
Diskrete Optimierung und Logistik

Vorgangsknotennetzpläne

- Zeitplanung
  - Lineare Optimierung
    - Vorwärts- und Rückwärtsrechnung zur Bestimmung der frühest- und spätestmöglichen Anfangs- und Endzeitpunkte der einzelnen Vorgänge lassen sich auch mit Hilfe von linearen Optimierungsproblemen lösen
    - Dazu sei ein Vorgangsknotennetzplan mit n Knoten gegeben, wobei Knoten 1 die einzige Quelle und Knoten n die einzige Senke ist
    - Weiterhin seien alle Mindest- und Maximalabstände in Mindestabstände bei Normalfolge transformiert

Vorgangsknotennetzpläne

- Zeitplanung
  - Lineare Optimierung: Vorwärtsrechnung
    - Zur Ermittlung der frühesten Anfangszeitpunkte der einzelnen Vorgänge kann man das folgende lineare Problem aufstellen (Variablen FAZ_i für $i = 1, \dots, n$)

$$\min \quad F(FAZ) = \sum_{i=1}^{n} FAZ_i$$

$$\begin{array}{llllllll} \text{s.t.} & FAZ_j + d_j + t_{ji} & \leq & FAZ_i & i = 2, \dots, n, & j \in V(i) \\ & FAZ_1 & = & 0 & & \\ & FAZ_i & \geq & 0 & i = 1, \dots, n & \end{array}$$

    - Nach der Lösung dieses linearen Problems erhält man die Werte für die frühesten Endzeitpunkte FEZ_i durch $FEZ_i \coloneqq FAZ_i + d_i$

Vorgangsknotennetzpläne

- Zeitplanung
  - Lineare Optimierung: Rückwärtsrechnung
    - Zur Ermittlung der spätesten Endzeitpunkte der einzelnen Vorgänge kann man das folgende lineare Problem aufstellen (Variablen SEZ_i für $i = 1, \dots, n$)

$$\max \quad F(SEZ) = \sum_{i=1}^{n} SEZ_i$$

$$\begin{array}{llllllllll}
\text{s.t.} & SEZ_j & - & d_j & - & t_{ij} & \geq & SEZ_i & i = 1, \dots, n-1, & j \in N(i) \\
& SEZ_n & & & & & = & FEZ_n & & \\
& SEZ_i & & & & & \geq & 0 & i = 1, \dots, n &
\end{array}$$

    - Nach der Lösung dieses linearen Problems erhält man die Werte für die spätesten Anfangszeitpunkte SAZ_i durch $SAZ_i := SEZ_i - d_i$

Gliederung

- 4. Netzplantechnik
  - Einführung und grundlegende Definitionen
  - Vorgangsknotennetzpläne
    - Strukturplanung
    - Zeitplanung
  - **Stochastische Zeitplanung**
  - Vorgangspfeilnetzpläne
    - Struktur- und Zeitplanung
    - Kostenplanung

Stochastische Zeitplanung

- Für die meisten Vorgänge innerhalb eines Projekts lässt sich die exakte Vorgangsdauer nur schwer vorhersagen
  $\rightarrow$ Unsicherheit der Eingabedaten
- Aus diesem Grund wurde ein Verfahren namens PERT (Program Evaluation and Review Technique) entwickelt, welches die folgenden Werte für jeden Vorgang des Projekts benutzt
  - m Realistische Schätzung der Vorgangsdauer
    (Statistik: Schätzung des Modus)
  - a Optimistische Schätzung der Vorgangsdauer
  - b Pessimistische Schätzung der Vorgangsdauer
- Bei PERT handelt es sich um eine ereignisorientierte Netzplandarstellung (ohne weitere Details)

Stochastische Zeitplanung

- 1. Annahme
  - Die Dauer eines Vorgangs i wird mit Hilfe einer Zufallsvariablen D_i beschrieben
  - Dabei wird die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung als Beta-Verteilung angenommen
  - Aufgrund dieser Annahme kann der Erwartungswert von D_i dann wie folgt approximiert werden

$$\mu_i = \frac{1}{3}\left(2m_i + \frac{1}{2}(a_i + b_i)\right) = \frac{a_i + 4m_i + b_i}{6}$$

    - Der Modus m_i wird doppelt gewichtet
    - Der Mittelwert $\frac{a_i+b_i}{2}$ wird einfach gewichtet

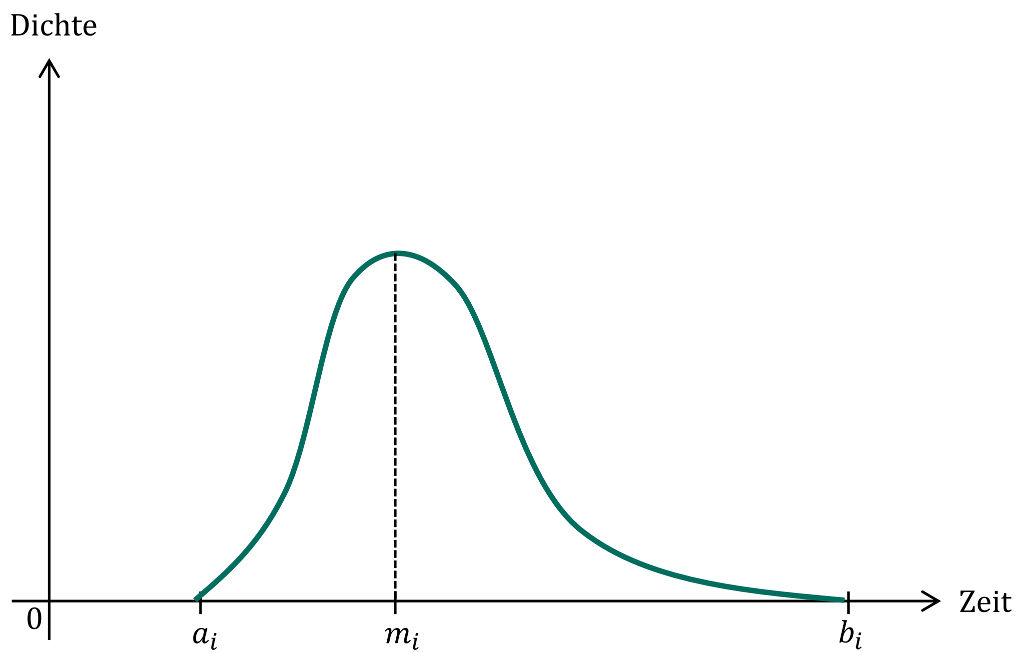
Stochastische Zeitplanung

- 2. Annahme
  - Da sich bei der Beta-Verteilung (aber z.B. auch bei der Normalverteilung), mehr oder weniger die ganze Masse der Verteilung innerhalb des Intervalls
    $$(\mu_i - 3\sigma_i, \mu_i + 3\sigma_i)$$
    befindet, kann die Varianz von D_i wie folgt approximiert werden

$$\sigma_i^2 = \left(\frac{b_i - a_i}{6}\right)^2$$

Stochastische Zeitplanung

- Beispiel: Wahrscheinlichkeitsverteilung der Dauer eines Vorgangs



Stochastische Zeitplanung

- Beispiel: Bau eines Hauses
  - Vorgangsliste

i	Vorgang	a_i	m_i	b_i	μ_i	σ_i^2
1	V_1: Baustelle einrichten	1	2	3	2	1/9
2	V_2: Bodenplatte betonieren	2	2.5	6	3	4/9
3	V_3: Wasseranschluss	2	3	4	3	1/9
4	V_4: Maurerarbeiten Rohbau	1	5.5	7	5	1
5	V_5: Dach	1.5	3	4.5	3	1/4
6	V_6: Wasser- und Elektroinstallation	1	2	3	2	1/9
7	V_7: Isolierung und Außenputz	1	4.5	5	4	4/9
8	V_8: Innenausbau	2	2	8	3	1
9	V_9: Einrichtung	2	2	2	2	0

  - Die Erwartungswerte sind dabei gleich den Vorgangsdauern im deterministischen Fall

Stochastische Zeitplanung

- Wahrscheinlichkeitsverteilung der Projektdauer
  - Mit Hilfe der Zufallsvariablen für die einzelnen Vorgänge kann nun auch die gesamte Projektdauer als Zufallsvariable D modelliert werden
  - Dabei sind folgende Fragen zu beantworten
    - Wie groß ist der Erwartungswert (μ) dieser Zufallsvariable?
    - Wie groß ist die Varianz (σ^2) dieser Zufallsvariable?
    - Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung hat diese Zufallsvariable?
  - Zur Beantwortung dieser Fragen werden weitere vereinfachende Annahmen getroffen

Stochastische Zeitplanung

- Annahme 3
  - Der erwartete zeit-kritische Weg (mean critical path) ist der längste Weg im Netzplan (egal wie lange die einzelnen Vorgänge tatsächlich dauern), wenn alle Vorgänge die Dauer μ_i haben
- Annahme 4
  - Die Zufallsvariablen D_i für die einzelnen Vorgänge sind statistisch unabhängig

Stochastische Zeitplanung

- Mit den Annahmen ergeben sich folgende Werte für μ und σ
  - μ Summe über die Erwartungswerte μ_i der Vorgänge i, die auf dem erwarteten zeit-kritischen Weg liegen
  - σ^2 Summe der Varianzen σ_i^2 der Vorgänge i, die auf dem erwarteten zeitkritischen Weg liegen
  - Beispiel: Bau eines Hauses
    - Zeit-kritischer Weg wie im deterministischen Fall
    - $\mu = 22$
    - $\sigma^2 = 2\frac{1}{9}$

Institut für Operations Research
Diskrete Optimierung und Logistik

Stochastische Zeitplanung

- Annahme 5
  - D ist normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2
  - Annahme 5 beruht auf der Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes
- Mit Hilfe dieser Annahme kann dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass D eine vorgegebene Zeit d (Deadline) einhält oder nicht, bestimmt werden

$$P(D \leq d) = \Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right)$$

  - Dabei ist $\mathcal{N}(0,1)$ die Standardnormalverteilung, deren Werte für die Verteilungsfunktion Φ anhand von Tabellen bestimmt werden können

Stochastische Zeitplanung

- Beispiel: Bau eines Hauses
  - Wahrscheinlichkeit, dass Projekt spätestens zum Zeitpunkt $d = 22$ beendet ist

$$P(D \leq 22) = \Phi\left(\frac{22-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(0) = 0.5$$

  - Wahrscheinlichkeit, dass Projekt spätestens zum Zeitpunkt $d = 20$ beendet ist

$$P(D \leq 20) = \Phi\left(\frac{20-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(-1.38) = 0.0838$$

  - Wahrscheinlichkeit, dass Projekt spätestens zum Zeitpunkt $d = 24$ beendet ist

$$P(D \leq 24) = \Phi\left(\frac{24-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(1.38) = 0.916$$

Gliederung

- 4. Netzplantechnik
  - Einführung und grundlegende Definitionen
  - Vorgangsknotennetzpläne
    - Strukturplanung
    - Zeitplanung
  - Stochastische Zeitplanung
  - **Vorgangspfeilnetzpläne**
    - Struktur- und Zeitplanung
    - Kostenplanung

Vorgangspfeilnetzpläne

Karlsruher Institut für Technologie

- Struktur- und Zeitplanung
  - In einem Vorgangspfeilnetzplan werden die Vorgänge als (gerichtete) Kanten dargestellt und die Knoten des Netzplans werden als Ereignisse interpretiert
  - Jedem Vorgang wird eine gerichtete Kante mit Anfangs- und Endknoten zugeordnet
    - i Startereignis
    - j Endereignis
    - d_{ij} Dauer des Vorgangs
    - Name Name des Vorgangs (z.B. (i, j))

$$i \xrightarrow[\text{Name}]{d_{ij}} j$$

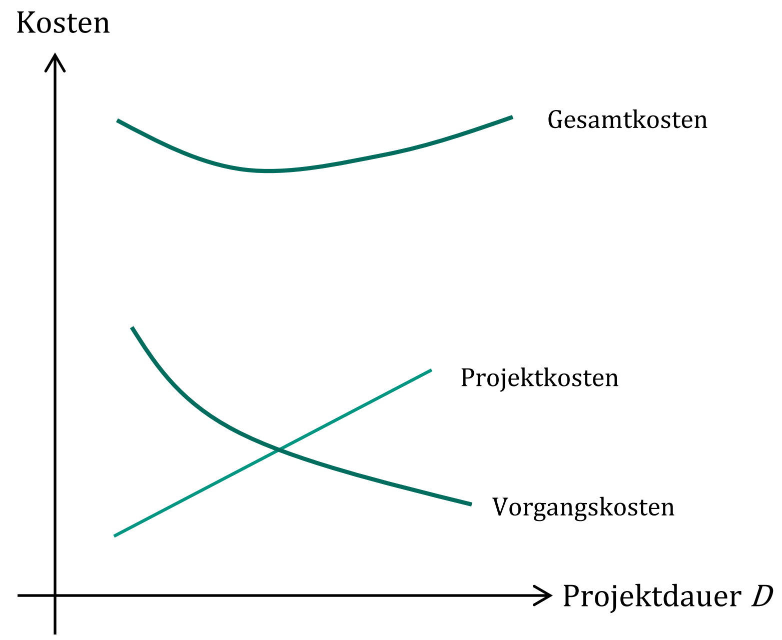
  - Es gilt: Jeder Vorgangsknotennetzplan kann in einen Vorgangspfeil-netzplan überführt werden und umgekehrt
  - Struktur- und Zeitplanung funktionieren ähnlich zu dem für Vorgangsknotennetzpläne vorgestellten Vorgehen
    $\rightarrow$ Keine weiteren Details

Vorgangspfeilnetzpläne

- Kostenplanung
  - Zusätzlich zur Struktur- und Zeitplanung kann man auch Kosten in die Planung eines Projekts mit einbeziehen
  - Dazu gehen wir von folgenden Annahmen aus
    - Das Projekt sei in der Form eines kreisfreien Vorgangspfeilnetzplans $G = (V, E)$ gegeben, der n Knoten hat und genau eine Quelle (Knoten 1) und eine Senke (Knoten n) besitzt
    - Die Dauer eines Vorgangs ist keine Konstante mehr, sondern kann in gewissen Grenzen variieren

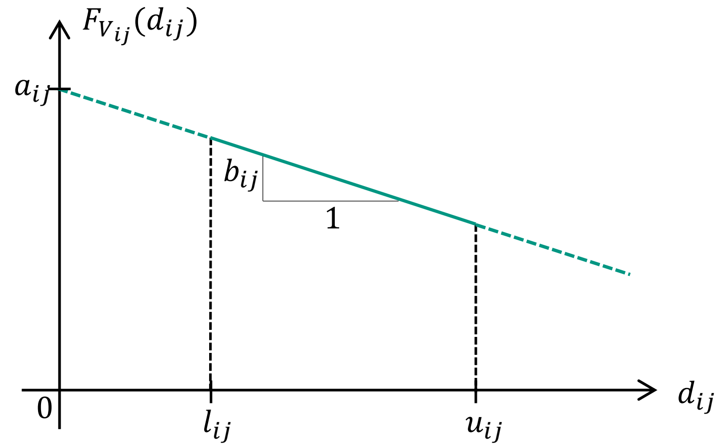
Vorgangspfeilnetzpläne

- Kostenplanung
  - Ziel ist die Bestimmung der einzelnen Vorgangsdauern, bei denen die Gesamtkosten des Projekts minimal werden
  - In diesem Zusammenhang sind zwei Kostenfaktoren gegeneinander abzuwägen
    - Vorgangskosten: Je schneller die einzelnen Vorgänge ausgeführt werden, desto höher sind die Bearbeitungskosten
    - Projektkosten: Je schneller das Projekt beendet ist, desto niedriger sind diese Kosten (z.B. Opportunitäts-kosten oder Konventionalstrafen)



Vorgangspfeilnetzpläne

- Kostenplanung
  - Minimierung der Vorgangskosten bei gegebener Projektdauer
    - Variablen
      - d_{ij} Bearbeitungsdauer von Vorgang (i, j)
      - FZ_i Eintrittszeitpunkt von Ereignis i
    - Parameter
      - l_{ij} Untergrenze für Bearbeitungsdauer von Vorgang (i, j)
      - u_{ij} Obergrenze für Bearbeitungsdauer von Vorgang (i, j)
    - Lineare Kostenfunktion für Vorgang (i, j)
      - $F_{V_{ij}}(d_{ij}) = a_{ij} - b_{ij}d_{ij}$ mit $a_{ij}, b_{ij} \geq 0$
      - Man nennt die Kosten b_{ij} die Beschleunigungskosten des Vorgangs (i, j)



Institut für Operations Research
Diskrete Optimierung und Logistik

Vorgangspfeilnetzpläne

- Kostenplanung
  - Minimierung der Vorgangskosten bei gegebener Projektdauer
    - Lineares Optimierungsproblem

$$\min \quad F(FZ,d) = \sum_{(i,j)\in E} (a_{ij} - b_{ij}d_{ij})$$

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{s.t.} & -FZ_i & + & FZ_j & - & d_{ij} & \geq & 0 & & (i,j)\in E \\
& -FZ_1 & + & FZ_n & & & = & D & & \\
& & & l_{ij} & \leq & d_{ij} & \leq & u_{ij} & & (i,j)\in E \\
& & & & & FZ_i, d_{ij} & \geq & 0 & & i\in V, (i,j)\in E
\end{array}$$

Vorgangspfeilnetzpläne

- Kostenplanung
  - Minimierung der Gesamtkosten des Projekts
    - Bei der Minimierung der Gesamtkosten des Projekts werden Vorgangs- und Projektkosten berücksichtigt
    - Dabei kann man die Projektkosten z.B. mit Hilfe der linearen Kostenfunktion $f + gD$ ausdrücken, wobei f fixe und g variable Kosten sind
    - Weiterhin ist D eine Variable für die Projektdauer
    - Die Gesamtkostenfunktion kann man dann als Zielfunktion verwenden

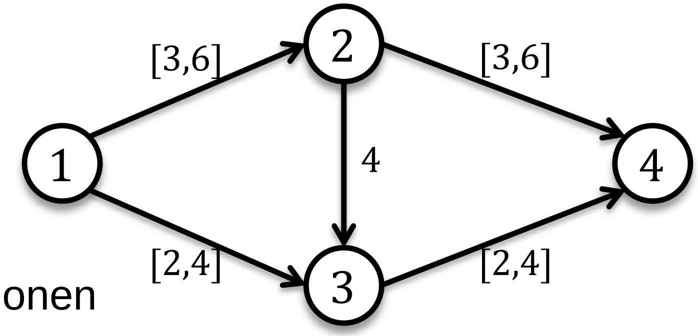
Vorgangspfeilnetzpläne

- Kostenplanung
  - Minimierung der Gesamtkosten des Projekts
    - Lineares Optimierungsproblem

$$
\begin{array}{lrcrcrcll}
\min & \multicolumn{8}{l}{F(FZ,d,D) = \sum_{(i,j)\in E} (a_{ij} - b_{ij}d_{ij}) + f + gD} \\
\text{s.t.} & -FZ_i & + & FZ_j & - & d_{ij} & \geq & 0 & (i,j)\in E \\
 & -FZ_1 & + & FZ_n & & & = & D & \\
 & & & l_{ij} & \leq & d_{ij} & \leq & u_{ij} & (i,j)\in E \\
 & & & & & FZ_i, d_{ij}, D & \geq & 0 & i\in V, (i,j)\in E
\end{array}
$$

Vorgangspfeilnetzpläne

- Kostenplanung
  - Minimierung der Gesamtkosten des Projekts – Beispiel
    - Projekt mit 5 Vorgängen
    - Kantenbewertungen $[l_{ij}, u_{ij}]$ geben die Unter- und Obergrenzen der Vorgangsdauern an



    - Vorgangsdauerabhängige Kostenfunktionen
      - Für Vorgänge (1,2) und (2,4): $7 - d_{ij}$
      - Für Vorgänge (1,3) und (3,4): $11 - 2d_{ij}$
      - Für den Vorgang (2,3) sind die Kosten immer gleich 4
    - Annahme: Projektkosten sind durch $1.5D$ gegeben
    - Gesamtkostenfunktion

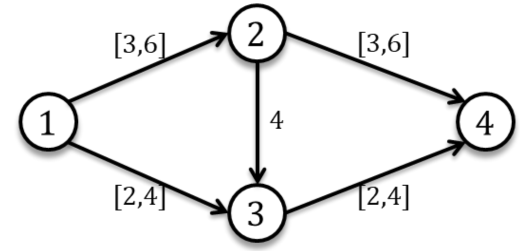
$$F(d, D) = 4 + 7 - d_{12} + 7 - d_{24} + 11 - 2d_{13} + 11 - 2d_{34} + 1.5D$$
$$= 40 - d_{12} - d_{24} - 2d_{13} - 2d_{34} + 1.5D$$

Vorgangspfeilnetzpläne

(1,2) / (2,4): $7 - d_{ij}$

(1,3) / (3,4): $11 - 2d_{ij}$

(2,3): 4



- Kostenplanung
  - Minimierung der Gesamtkosten des Projekts – Beispiel
    - Lineares Optimierungsproblem

$$
\begin{aligned}
\min\ & 40 - d_{12} - d_{24} - 2d_{13} - 2d_{34} + 1.5D \\
\text{s.t.}\ & -FZ_1 + FZ_2 - d_{12} \geq 0 \\
& -FZ_1 + FZ_3 - d_{13} \geq 0 \\
& -FZ_2 + FZ_3 - 4 \geq 0 \\
& -FZ_2 + FZ_4 - d_{24} \geq 0 \\
& -FZ_3 + FZ_4 - d_{34} \geq 0 \\
& 3 \leq d_{12}, d_{24} \leq 6 \\
& 2 \leq d_{13}, d_{34} \leq 4 \\
& -FZ_1 + FZ_4 - D = 0 \\
& FZ_1, \ldots, FZ_4, d_{12}, \ldots, d_{34}, D \geq 0
\end{aligned}
$$

    - Optimale Lösung (z.B. via CPLEX Optimization Studio):
      $D = 11, d_{12} = 3, d_{13} = 4, d_{24} = 6, d_{34} = 4, FZ_1 = 0, FZ_2 = 3, FZ_3 = 7, FZ_4 = 11$