UNIVERSIDAD POLITÉCNICA
DE LA ZONA METROPOLITANA DE GUADALAJARA

Samuel Caleb Martínez Hernández

8-A

Ing. Mecatrónica

Dinámica y control de Robots

EV1_2_Calculo_de_masa_de_centro_de_masa_y_el_tensor_de_inercia_de_cuerpos_rigidos

Introducción

Podría decirse que lo mas fundamental en cuanto a robots se refiere, es el calculo de la posición de sus cuerpos, así como de la velocidad en la que se desplazan y la aceleración.

Cinemática de cuerpos rígidos

Relaciones entre el tiempo, posición, velocidades, y aceleraciones de partículas que forman un cuerpo sólido rígido.

Clasificación del movimiento de los sólidos rígidos

- Movimiento general

- Movimiento alrededor de un punto fijo

- Movimiento plano general

Se divide el cuerpo continuo en elementos diferenciales y el integrando se construye multiplicando la masa del elemento diferencial por el cuadrado de la distancia el elemento geométrico respecto al que se define el momento de inercia, Para obtener las componentes del tensor de inercia a partir del momento cinético, consideramos las componentes cartesianas de los vectores:

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{\imath} + \omega_y \vec{\jmath} + \omega_z \vec{k} \qquad \overrightarrow{AP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

y aplicamos que:

$$\overrightarrow{AP} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}) = (\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP})\vec{\omega} - (\overrightarrow{AP} \cdot \vec{\omega})\overrightarrow{AP}$$

Esto nos da, para la componente x del momento cinético

$$L'_{Ax} = \sum_i m_i((x_i^2+y_i^2+z_i^2)\omega_x - (x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z)x_i) = \left(\sum_i m_i(y_i^2+z_i^2)\right)\omega_x + \left(-\sum_i m_i x_i y_i\right)\omega_y + \left(-\sum_i m_i x_i z_i\right)\omega_z$$

Por otro lado, si desarrollamos la expresión matricial anterior queda, para la componente x:

$$L'_{Ax} = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$

lo que nos permite identificar las componentes buscadas, como los coeficientes de las componentes de la velocidad angular:

$$I_{xx} = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) \qquad I_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i \qquad I_{xz} = -\sum_i m_i x_i z_i$$

y análogamente para las otras dos filas:

$$I_{yx} = -\sum_i m_i x_i y_i \qquad I_{yy} = \sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2) \qquad I_{yz} = -\sum_i m_i y_i z_i$$

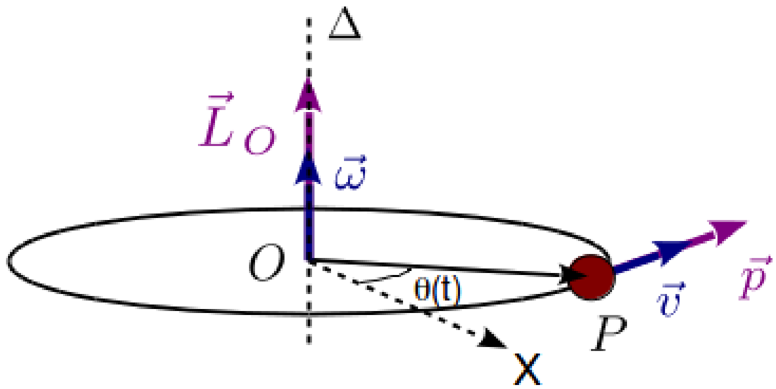
$$I_{zx} = -\sum_i m_i y_i z_i \qquad I_{zy} = -\sum_i m_i y_i z_i \qquad I_{zz} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

En forma compacta, podemos escribir el tensor de inercia como la expresión:

$$\bar{\bar{I}} = \sum_i m_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_1^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix}$$

o, de forma un poco más extensa, pero más simétrica:

$$\bar{\bar{I}} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \sum_i m_i \begin{pmatrix} x_i x_i & x_i y_i & x_i z_i \\ x_i y_i & y_i y_i & y_i z_i \\ x_i z_i & y_i z_i & z_i z_i \end{pmatrix}$$



Para un sistema de partículas (por ejemplo, un sólido rígido) el momento cinético del sistema respecto de un punto es la suma de los momentos cinéticos de cada una de las partículas que componen el sistema. Supongamos que tenemos un disco que rota con vector rotación $\vec{\omega}$ respecto a un eje perpendicular a él que pasa por su centro.

Cada elemento de superficie del disco, de masa d*m*, realiza un movimiento circular de radio *r* y con velocidad

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$