Intersecção de caminhos mais longos em um grafo *

Susanna Figueiredo de Rezende†
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo, Brasil
susanna@ime.usp.br

28 de setembro de 2010

Resumo

Em teoria dos grafos, problemas sobre caminhos são um dos mais fundamentais. Dentre estes, destaca-se o problema da existência e busca de caminhos de certos comprimentos.

Neste trabalho apresentamos uma resenha sobre problemas de enfoque mais estrutural relativos à intersecção de caminhos mais longos em um grafo. Mais precisamente, investigamos a questão levantada por Gallai [5] em 1966: *em um grafo conexo, existe um vértice comum a todos os seus caminhos mais longos?* Estudamos o caso em que se considera a intersecção de todos os caminhos mais longos, e também o caso em que se considera apenas um número fixo de caminhos mais longos. Além disso, investigamos essas questões em grafos arbitrários, e também em certas classes especiais de grafos. Mencionamos alguns resultados conhecidos, e apresentamos a prova de alguns deles.

Além da resenha, apresentamos um resultado sobre a seguinte conjectura, motivada pela pergunta de Gallai: *em um grafo conexo, quaisquer* 3 *caminhos mais longos têm intersecção não-vazia*. Em 2009, Axenovich [1] provou que esta conjectura é verdadeira quando se considera 3 caminhos mais longos cuja união é um grafo exoplanar. Apresentamos uma prova mais simples e também uma generalização deste resultado. Mais precisamente, provamos que se G é um grafo exoplanar conexo, então existe em G um vértice comum a todos os seus caminhos mais longos.

1 Introdução

Nesta monografia, estudamos vários problemas sobre intersecção de caminhos mais longos em um grafo. A questão central investigada é sobre a existência ou não de um vértice comum a tais caminhos. Apresentamos alguns resultados sobre o caso em que se considera a

*apoiado pelo CNPq PIBIC Proc. no. 123740/2010-0.
†Orientadora: Y. Wakabayashi (yw@ime.usp.br)

intersecção de todos os caminhos mais longos, e sobre o caso em que se considera um número fixo de caminhos mais longos.

Enquanto é relativamente fácil provar que em um grafo conexo quaisquer 2 caminhos mais longos têm um vértice em comum, quando perguntamos se o mesmo pode ser dito sobre a intersecção de 3 caminhos mais longos, a resposta é desconhecida. É intrigante notar que uma questão tão natural, aparentemente simples, esteja ainda sem uma resposta definitiva. Conjectura-se qua a resposta seja afirmativa.

Veremos nesta monografia alguns resultados que são conhecidos a respeito de intersecção de caminhos mais longos. Depois mencionaremos um caso especial de 3 caminhos mais longos, sobre o qual Axenovich [1] recentemente obteve um resultado, e que motivou este estudo, dando origem a uma prova mais simples e um resultado um pouco mais geral do que o de Axenovich.

O material a ser apresentado aqui está organizado da seguinte forma. Na Seção 2 apresentamos os conceitos básicos e a notação utilizada nesta monografia. Também definimos várias classes de grafos que mencionamos neste trabalho. Na Seção 3 mencionamos o problema de encontrar um caminho mais longo num grafo. Discutimos sua complexidade computacional, e apresentamos um algoritmo, proposto por Dijkstra, que resolve este problema para árvores. Também mencionamos outras classes de grafos para as quais existe algoritmo polinomial que encontra um caminho mais longo no grafo. Na Seção 4 tratamos da intersecção de todos os caminhos mais longos em um grafo. A pergunta, formulada por Gallai [5] em 1966, é se esta intersecção é sempre não vazia. Apresentamos exemplos que mostram que isso não é sempre verdade, nem sequer quando impomos algumas restrições nos grafos. Ainda nessa seção mencionamos as classes de grafos para os quais sempre existe um vértice comum a todos os caminhos mais longos. Na Seção 5 mencionamo os resultados conhecidos sobre a intersecção de um número fixo de caminhos mais longos, dentre eles o resultado de Axenovich. Finalmente, na Seção 6, apresentamos um resultado, mais geral que o de Axenovich, que prova que todos os caminhos mais longos de um grafo exoplanar têm um vértice em comum.

2 Preliminares

Vamos apresentar algumas definições que serão usadas ao longo do artigo. Para maiores detalhes, recomendamos consultar o livro *Graph Theory*, de Bondy e Murty [3].

Um **grafo** é um par ordenado (V, E), onde V e E são conjuntos disjuntos, e cada elemento de E corresponde a um par não-ordenado de elementos necessariamente distintos de V. Os elementos do conjunto V são chamados **vértices** e os elementos do conjunto E são chamados **arestas**. Observamos que os objetos definidos como grafos, em muitos textos, são chamados de grafos simples. Trataremos apenas de grafos **finitos**: aqueles que têm um número finito de vértices e de arestas.

Se G é um grafo, então também denotamos o seu conjunto de vértices por $V(G)$, e o seu conjunto de arestas por $E(G)$. Assim, tendo o nome de um grafo, ainda que os nomes do seu conjunto de vértices e do seu conjunto de arestas não sejam explicitados, podemos sempre nos referir a esses objetos.

Quando uma aresta a corresponde a um par $\{u, v\}$ de vértices, denotamos isso escrevendo $a = uv$ e dizemos que a **vai de** u **para** v, ou **liga** os vértices u e v, ou **incide em** u (e em v). Também dizemos que u e v são os **extremos** (ou as **pontas**) de a; que u e v são **adjacentes** (ou **vizinhos**), e que u é **adjacente** a v.

Um vértice é dito **isolado** se não tem vizinhos no grafo. Um vértice é dito **dominante** se é vizinho de todos os demais vértices do grafo. Pares de vértices não-adjacentes são ditos **independentes**. Um conjunto de vértices é chamado **independente** se forem dois a dois independentes.

Sejam G e H dois grafos. Dizemos que G é **isomorfo** a H se existe uma bijeção $\varphi : V(G) \to V(H)$ tal que $uv \in E(G) \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E(H)$ para todo $u, v \in V(G)$. A bijeção φ é chamada um **isomorfismo**.

Um grafo H é um **subgrafo** de um grafo G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$; escrevemos $H \subseteq G$. Neste caso, também dizemos que H **está contido** em G, ou que G **contém** H, ou que G é um **supergrafo** de H. Se $H \subseteq G$, mas $H \neq G$ então dizemos que H é um **subgrafo próprio** de G, e escrevemos $H \subset G$.

Se G é um grafo e $\emptyset \neq X \subseteq V(G)$ então o subgrafo de G **induzido** (ou **gerado**) por X é o subgrafo H de G tal que $V(H) = X$ e $E(H)$ é precisamente o conjunto das arestas de G que têm ambos os extremos em X. Denotamos por $G - X$ o subgrafo induzido por $V(G) \setminus X$; é o subgrafo obtido de G removendo-se todos os vértices em X e todas as arestas que incidem neles.

Se G é um grafo e $\emptyset \neq F \subseteq E(G)$ então denotamos por $G - F$ o subgrafo de G obtido removendo-se as arestas em F. Para simplificar, em vez de $G - \{a\}$ escrevemos $G - a$, onde a é um vértice ou uma aresta de G.

Um grafo **completo** é um grafo em que quaisquer dois de seus vértices distintos são adjacentes. Uma **clique** é um subgrafo de G que é um grafo completo.

Um **passeio** em um grafo é uma seqüência finita não vazia $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$, onde $v_{i-1}v_i \in E(G)$ para todo $1 \leq i \leq k$. Dizemos que P é um passeio **de** v_0 **a** (**para**) v_k, e P **passa** pelos vértices v_i e pelas arestas $v_{i-1}v_i$. Os vértices v_0 e v_k são a **origem** e o **término** de P, respectivamente; e os vértices $v_1, \ldots, v_{k-1}$ são chamados **vértices internos** de P. O conjunto dos vértices e das arestas que definem P é denotado por $V(P)$ e $E(P)$, respectivamente. O **comprimento** de P, denotado por $\|P\|$, é o número de arestas de P.

Um **caminho** é um passeio sem vértices repetidos. Um **circuito** é um passeio em que, a menos da origem e do término, que necessariamente coincidem, todos os vértices são distintos. Um **caminho hamiltoniano** em um grafo G é um caminho que passa por todos os vértices de G.

O **inverso** de um caminho $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$, denotado por P^{-1}, é o caminho $(v_k, \ldots, v_1, v_0)$. A **concatenação** de dois caminhos $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ e $Q = (u_0, u_1, \ldots, u_n)$, definida se $v_k = u_0$, é o passeio $(v_0, v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_n)$. Denotamos esta operação por $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$. Note que $P \cdot Q$ forma um caminho se, a menos de v_k e u_0 que necessariamente coincidem, os demais vértices de P são distintos dos demais vértices de Q.

A **união** (a **intersecção**) de dois grafos G e G' forma um grafo H tal que $V(H) = V(G) \cup V(G')$ $(= V(G) \cap V(G'))$ e $E(H) = E(G) \cup E(G')$ $(= E(G) \cap E(G'))$. Dizemos que dois grafos se **intersectam** se têm intersecção não vazia. Dizemos que dois grafos são **disjuntos** se têm intersecção vazia.

O termo passeio (respectivamente caminho, circuito) também será usado para denotar um grafo ou subgrafo cujos vértices e arestas são os termos de um passeio (respectivamente caminho, circuito).

Um grafo G é **conexo** se, para todo par de vértices distintos u, v, existe em G um caminho de u a v. Um grafo G é k-**conexo** ($k \geq 1$) se, para todo par de vértices distintos u, v, existem em G k caminhos disjuntos de u a v. Se um grafo G é k-conexo e outro grafo H é l-conexo e $k > l$ dizemos que G tem maior conectividade que H.

Um (sub)grafo G é dito **maximal** (respectivamente **minimal**) em relação a uma certa propriedade $\mathcal{P}$ (por exemplo, ser conexo) se G tem a propriedade $\mathcal{P}$, mas nenhum supergrafo (respectivamente subgrafo) próprio de G tem a propriedade $\mathcal{P}$. Por exemplo, dizer que *H é um subgrafo conexo maximal de G* equivale a dizer que *H é um subgrafo conexo de G e além disso, não existe nenhum supergrafo próprio de H que é um subgrafo conexo de G.* Note que, nada impede que G tenha um outro subgrafo conexo de tamanho maior ou igual ao de H.

Um subgrafo conexo maximal de um grafo é chamado **componente**. Dizemos que um vértice v de um grafo G é um **vértice-de-corte** se o número de componentes de $G - v$ é maior do que o número de componentes de G. Uma aresta e tal que $G - e$ tem mais componentes que G é chamada **ponte** ou **aresta-de-corte**.

Um **bloco** é um subgrafo 2-conexo maximal ou uma ponte ou um vértice isolado. Um **bloco trivial** é uma ponte ou um vértice isolado.

2.1 Classes de grafos

Uma classe de grafos é um conjunto de grafos que satisfazem determinadas propriedades. Definimos algumas classes que serão usadas mais adiante.

- Um grafo é **planar** se é possível desenhá-lo no plano sem cruzamento de arestas.

- Um grafo é uma **árvore** se é conexo e não contém circuitos.

- Um grafo G é **bipartido** se $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos X e Y ($X \cup Y = V(G)$ e $X \cap Y = \emptyset$) de modo que cada aresta de G tenha um extremo em X e outro em Y. Uma tal partição é chamada uma **bipartição** do grafo.

- Um grafo é um **grafo dividido** (ou um grafo split) se o conjunto de seus vértices pode ser particionado em dois conjuntos X e Y, tais que X induz uma clique e Y um conjunto independente.

- Um grafo é **hamiltoniano-conexo** se, para todo par de vértices distintos u, v, existe em G um caminho hamiltoniano de u a v.

  Vamos introduzir aqui duas classes de grafos que têm uma estrutura semelhante a árvores.

- Um grafo G é um **grafo de blocos** se G é conexo e todo subgrafo 2-conexo maximal é uma clique. Grafos de blocos podem ser obtidos a partir de uma árvore substituindo cada aresta da árvore por uma clique e de modo que as cliques tenham no máximo um vértice em comum.

- Um grafo G é um **cactus** se cada aresta pertence a no máximo um circuito em G. Um cactus pode ser obtido a partir de uma árvore, substituindo cada aresta da árvore por um circuito e de modo que os circuitos tenham no máximo um vértice em comum. (Ou seja, um catus é composto por blocos que são circuitos ou caminhos).

- Um grafo é **exoplanar** se é possível desenhá-lo no plano sem cruzamento de arestas de forma que todos os seus vértices estejam na face externa do desenho. Observe que todo cactus é um grafo exoplanar.

- Para uma coleção de conjuntos, o **grafo intersecção** é o grafo com um vértice para cada conjunto, em que vértices são adjacentes se os conjuntos se intersectam.

- Dada uma permutação $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, ..., \sigma_n)$ dos números $1, 2, 3, ..., n$, um **grafo permutação** tem um vértice para cada número $1, 2, 3, ..., n$ e uma aresta entre dois números que estão em ordem invertida na permutação. Também é possível representar um grafo de permutação como um grafo intersecção de segmentos retas entre duas retas paralelas.

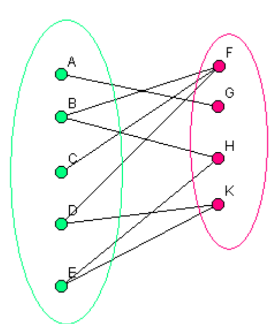
- Um grafo é um **grafo intervalo** se for um grafo intersecção de conjuntos de intervalos na reta real. Ele possui um vértice para cada intervalo na reta e um aresta entre quaisquer dois pares de vértices correspondentes a intervalos que se intersectam.

- Um grafo G é um **grafo arco-circular** se ele for o grafo intersecção de arcos em um círculo. Ele possui um vértice para cada arco no círculo e um aresta entre quaisquer dois pares de vértices correspondentes a arcos que se intersectam.

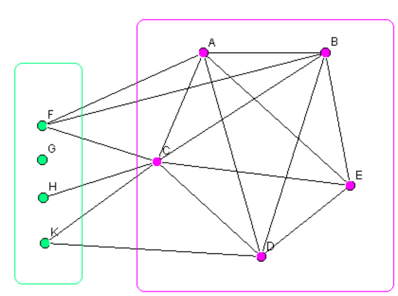
- Um grafo é **limiar** se pode ser contruído a partir de um grafo com apenas um vértice através de repetições das seguintes operações:

  1. Adição de um único vértice isolado no grafo.
  2. Adição de um único vértice dominante no grafo.

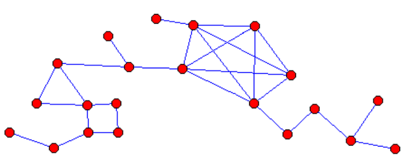
- Grafos **ptolemaicos** são grafos que, para cada quatro vértices u, v, w, x, vale a desigualdade ptolemaica: $d(u, v)d(w, x) \leq d(u, w)d(v, x) + d(u, x)d(v, w)$.



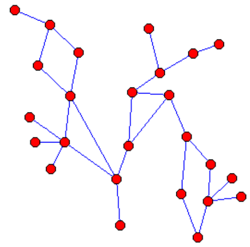
Grafo bipartido



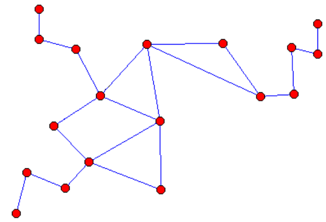
Grafo dividido



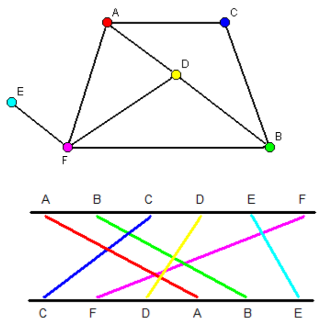
Grafo de blocos



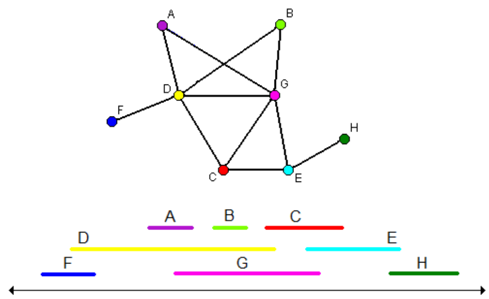
Cactus



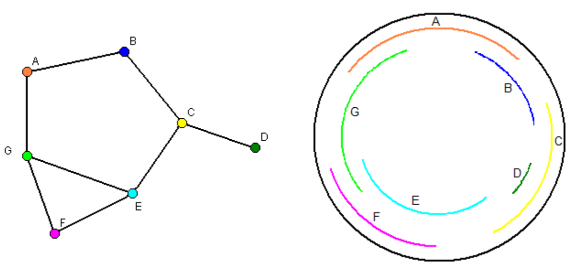
Grafo exoplanar



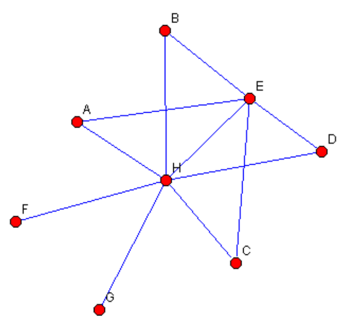
Grafo permutação



Grafo intervalo



Grafo arco-circular



Grafo limiar

3 O problema do caminho mais longo

Em teoria dos grafos, "o problema do caminho mais longo" se refere, usualmente, ao problema de encontrar um caminho de comprimento máximo em um dado grafo. Vamos tratar deste problema para nos acostumar com o conceito de caminho mais longo e para entendermos sua complexidade.

A versão deste problema que pode ser chamada de problema de decisão é a seguinte:

Problema Caminho(k, G): *Dado um grafo G e um natural k, decidir se existe em G um caminho de comprimento maior ou igual a k.*

Se houvesse um algoritmo polinomial para resolver este problema de decisão, então haveria um algoritmo polinomial para resolver o problema do caminho mais longo (e, como provaremos a seguir, para resolver todos os problemas $\mathcal{NP}$-completos). Suponha que a função CAMINHO(k, G) receba um inteiro k e um grafo G e devolva *sim* se existe um caminho de comprimento maior ou igual a k em G e devolva *não*, caso contrário. Se esta função fosse polinomial, então o seguinte algoritmo, que encontra um caminho de comprimento máximo em um grafo G, seria polinomial.

CAMINHO MAIS LONGO(G)
$k \leftarrow \|V(G)\| - 1$
enquanto (CAMINHO$(k, G) =$ *não*)
  $k \leftarrow k - 1$
$H \leftarrow G$
para i **em** $E(H)$
  remova i de H
  se (CAMINHO$(k, H) =$ *não*)
    insira i de volta em H
devolva H

Proposição 1 *O problema* **Caminho**(k, G) *é $\mathcal{NP}$-completo.*

Prova. A $\mathcal{NP}$-completude do problema de decisão pode ser provada através da redução do problema do caminho hamiltoniano (que é conhecidamente $\mathcal{NP}$-completo, veja [6]). Além disso, é necessário provar que o problema está em $\mathcal{NP}$. Mas isto é trivial, pois um certificado para a instância *sim* do problema é a descrição de um caminho de comprimento maior ou igual a k. ■

3.1 Casos particulares

Como acabamos de ver, o problema de encontrar um caminho mais longo de um grafo é $\mathcal{NP}$-difícil para o caso geral. No entanto, para algumas classes especiais de grafos, existem algoritmos polinomiais que resolvem o problema. Por exemplo, se o grafo for uma árvore, é possível fazê-lo em tempo linear. Este algoritmo foi proposto por Dijkstra por volta de 1960. A prova formal foi dada por Bulterman e outros [4].

CAMINHO MAIS LONGO EM ÁRVORE (G)
1 Escolha qualquer folha da árvore G e nomeie-a F_1
2 Encontre um caminho mais longo em G com início F_1.
3 Chame a outra extremidade deste caminho de F_2.
4 Encontre um caminho mais longo em G com início F_2.
5 Devolva este caminho. Este é um caminho mais longo em G.

A complexidade do passo 2 é $\theta(c * n)$, onde $(0.5 \leq c \leq 1)$. E a complexidade do passo 3 é $\theta(n)$. Portanto a complexidade do algoritmo inteiro é $\theta(n)$.

Existem outras classes de grafos para os quais já se conhece algoritmo polinomial para resolver o problema. Em 2005, Uehara e Uno [14, 15] provaram isso para grafos de blocos, grafos ptolomaicos, cactus, grafos de permutação bipartido e, como corolário, para grafos limiares. Estes autores estavam trabalhando em subclasses de grafos intervalo, mas finalmente, em 2010, Ioannidou, Mertzios, e Nikolopoulos [10] provaram que para os grafos intervalo, existe um algoritmo polinomial que encontra um caminho mais longo.

4 Intersecção de todos os caminhos mais longos

Agora vamos tratar de outro problema sobre caminhos mais longos. Obviamente, um grafo pode ter mais de um caminho mais longo. O que podemos afirmar sobre a intersecção destes caminhos?

Em 1966, em um colóquio sobre teoria dos grafos, Gallai [5] perguntou:

Problema $\mathcal{P}_\infty$: *Seja G um grafo conexo qualquer. Existe um vértice em G comum a todos os caminhos mais longos?*

Em outras palavras, Gallai perguntava se a intersecção de todos os caminhos mais longos é sempre não-vazia.

4.1 Primeiro exemplo

Pouco tempo depois, em 1969, Walther [16] construiu um grafo provando que isto não é sempre verdade. O grafo, reproduzido abaixo, tem 25 vértices e é planar.

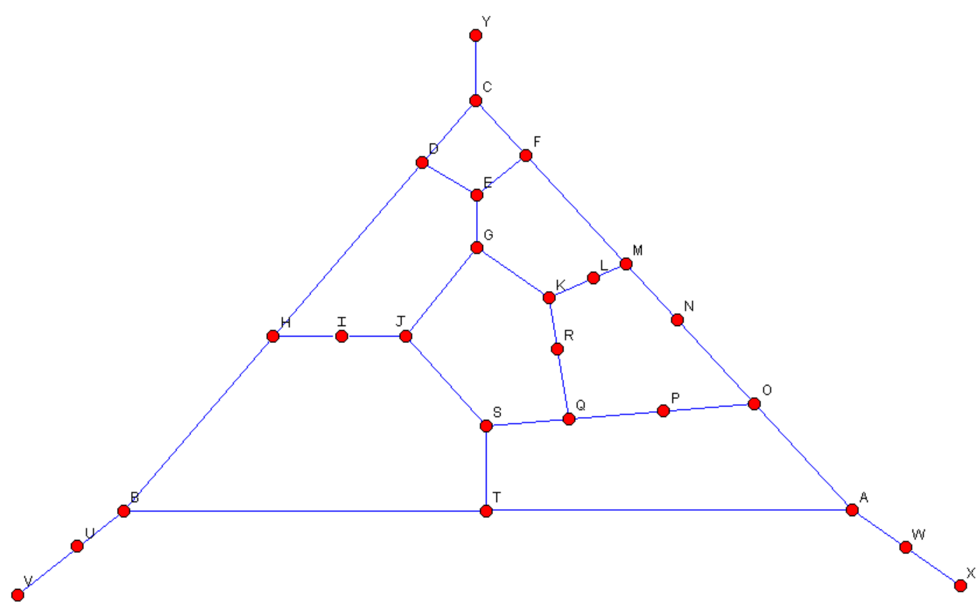


Figura 1: Primeiro grafo, encontrado por Walther, que não tem vértice comum a todos os caminhos mais longos

Neste grafo, existem muitos caminhos mais longos distintos, porém os 13 apresentados abaixo são suficientes para provar que a intersecção dos caminhos mais longos é vazia:

1. V-U-B-H-I-J-G-E-D-C-F-M-L-K-R-Q-P-O-A-W-X
2. V-U-B-T-S-J-I-H-D-C-F-M-L-K-R-Q-P-O-A-W-X
3. V-U-B-T-S-J-I-H-D-E-F-M-L-K-R-Q-P-O-A-W-X
4. V-U-B-T-S-J-I-H-D-C-F-E-G-K-R-Q-P-O-N-M-L
5. X-W-A-T-S-Q-P-O-N-M-L-K-G-J-I-H-D-E-F-C-Y
6. V-U-B-T-S-J-G-E-D-C-F-M-L-K-R-Q-P-O-A-W-X
7. V-U-B-T-S-J-I-H-D-C-F-E-G-K-L-M-N-O-A-W-X
8. V-U-B-T-S-J-I-H-D-C-F-E-G-K-R-Q-P-O-A-W-X
9. V-U-B-H-D-C-F-E-G-K-L-M-N-O-P-Q-S-T-A-W-X
10. V-U-B-H-I-J-G-E-D-C-F-M-L-K-R-Q-S-T-A-W-X
11. V-U-B-H-I-J-G-E-D-C-F-M-N-O-P-Q-S-T-A-W-X
12. X-W-A-O-N-M-L-K-R-Q-S-T-B-H-I-J-G-E-D-C-Y
13. X-W-A-O-N-M-L-K-R-Q-S-T-B-H-I-J-G-E-F-C-Y

De fato, note que cada vértice tem pelo menos um desses caminhos que não passa por ele. Na tabela abaixo indicamos, para cada vértice do grafo, um dos caminhos que não passa por ele.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
4	5	3	13	2	12	2	6	6	9	11	8	8	1	10	7	7	7	1	1	5	5	4	4	1

Deste resultado surgiram novas perguntas:

Este exemplo é minimal? E se impusermos restrições nos grafos (planaridade, maior conectividade)? E se em vez de tomarmos a intersecção de todos os caminhos mais longos, tomarmos apenas a de alguns deles?

Algumas destas perguntas foram levantadas por Zamfirescu [18] em 1972, pedindo explicitamente por exemplos de ordem minimal. Vamos tratar aqui do que se sabe sobre estas perguntas.

Chamaremos de $\mathcal{P}_\infty$ o problema original de Gallai e de $\mathcal{P}_n$, para $n \geq 2$, o problema análogo mas olhando a intersecção de apenas n caminhos mais longos. Em qualquer um dos casos, se tivermos considerando alguma restrição no problema, escreveremos $\mathcal{P}\{\alpha\}$, onde α é a restrição imposta.

4.2 Exemplo minimal

Alguns anos depois do primeiro exemplo que resolve $\mathcal{P}_\infty$ ser apresentado, Walther [17] e Zamfirescu [19], independentemente, encontraram um exemplo menor com 12 vértices.

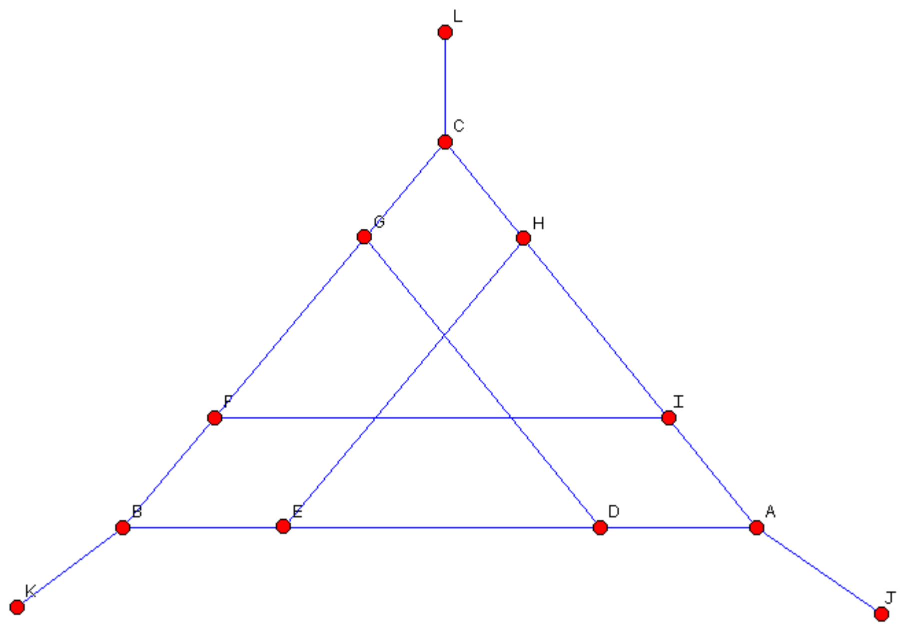


Figura 2: Menor grafo conhecido cuja interseção de todos os caminhos mais longos é vazia

Indicamos abaixo 9 caminhos mais longos do grafo da Figura 2. Não é difícil verificar que eles têm intersecção vazia.

1. L-C-G-D-E-H-I-F-B-K
2. J-A-I-F-G-D-E-H-C-L
3. K-B-E-H-I-F-G-D-A-J
4. K-B-E-H-C-G-F-I-A-J
5. J-A-D-G-C-H-I-F-B-K
6. L-C-G-D-A-I-H-E-B-K
7. K-B-F-I-A-D-E-H-C-L
8. J-A-I-F-B-E-D-G-C-L
9. L-C-H-E-B-F-G-D-A-J

Os 3 primeiros caminhos são simétricos e não passam por: A e J; B e K; C e L, nesta ordem. Os 6 últimos também são simétricos e não passam por: D; E; F; G; H; I, nesta ordem.

4.3 Grafos planares

O primeiro exemplo obtido que resolve $\mathcal{P}_\infty$ tem 25 vértices e é planar, mas o menor exemplo planar conhecido, encontrado por Schmitz [12] em 1975, possui 17 vértices.

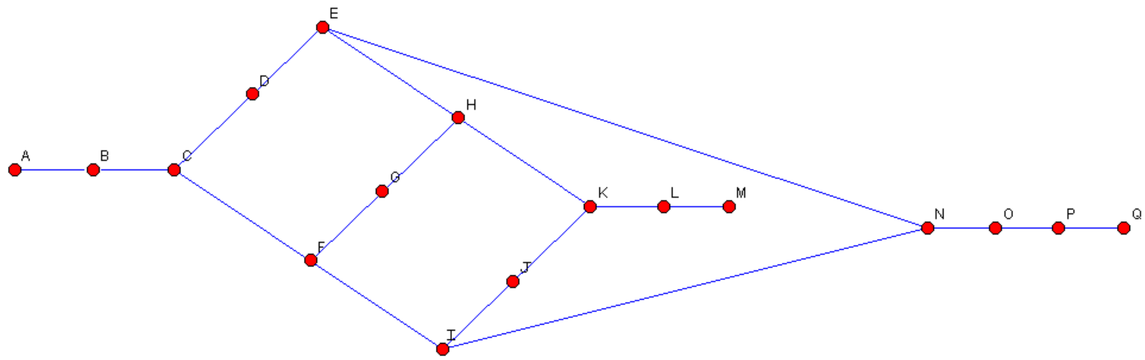


Figura 3: Menor grafo planar cuja intersecção de todos os caminhos mais longos é vazia

Exibimos abaixo 7 caminhos mais longos do grafo da Figuta 3 cuja intersecção é vazia:

1. A-B-C-D-E-H-G-F-I-J-K-L-M
2. A-B-C-D-E-H-G-F-I-N-O-P-Q
3. M-L-K-H-G-F-C-D-E-N-O-P-Q
4. M-L-K-J-I-F-C-D-E-N-O-P-Q
5. M-L-K-J-I-F-G-H-E-N-O-P-Q
6. A-B-C-F-G-H-K-J-I-N-O-P-Q
7. A-B-C-D-E-H-K-J-I-N-O-P-Q

Na tabela abaixo indicamos, para cada vértice do grafo, um caminho que não passa por ele.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
3	3	5	5	6	7	4	4	3	2	2	2	2	1	1	1	1

Conjectura-se que o grafo da Figura 2 e o grafo da Figura 3 são minimais para os problemas $\mathcal{P}_\infty$ e $\mathcal{P}_\infty\{planar\}$, respectivamente.

4.4 Grafos 2-conexos

A seguinte pergunta surge de maneira natural: “Será que para grafos 2-conexos também existe um exemplo em que a intersecção dos caminhos mais longos é vazia?” Exigindo-se maior conectividade, é de se esperar que o tamanho do grafo exemplo seja maior. O primeiro exemplo foi construido em 1972 por Zamfirescu [18], tem 82 vértices e é planar. Quatro anos mais tarde o próprio Zamifrescu [19] descobriu os menores exemplos conhecidos até hoje, tanto para o problema $\mathcal{P}_\infty\{2\text{-}conexo\}$ quanto para o $\mathcal{P}_\infty\{2\text{-}conexo,\ planar\}$, com 26 [Figura 4] e 32 [Figura 5] vértices respectivamente.

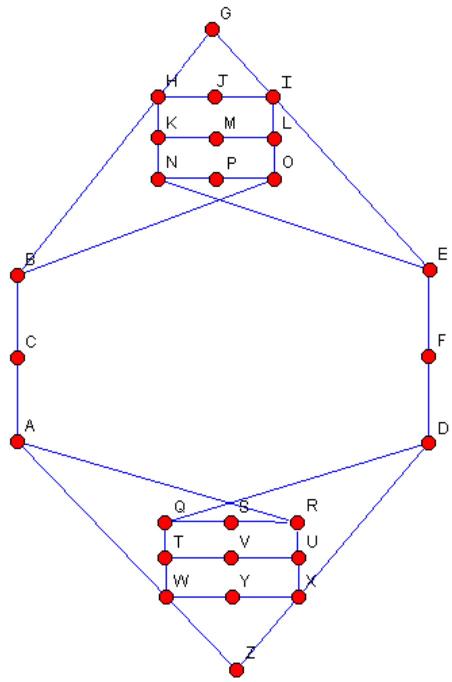


Figura 4

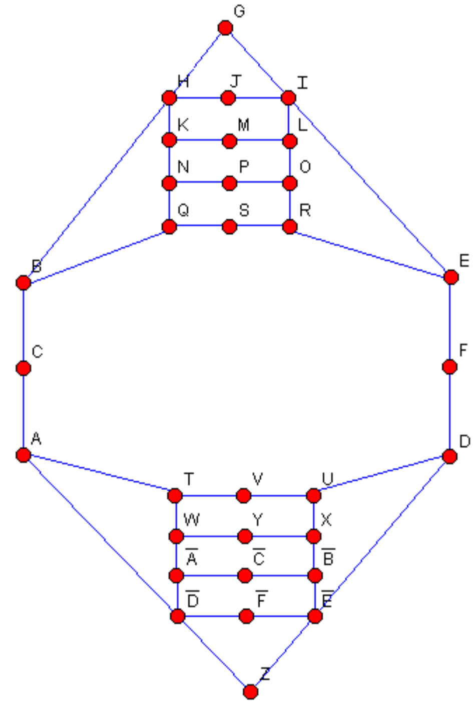


Figura 5

Figura 4: Menor grafo 2-conexo conhecido que não possui vértice comum a todos os caminhos mais longos.

Figura 5: Menor grafo 2-conexo planar conhecido que não possui vértice comum a todos os caminhos mais longos.

4.5 Grafos 3-conexos

Para grafos 3-conexos, o primeiro exemplo foi construido por Grünbaum [7] em 1974 e tem 484 vértices. Mas Zamfirescu [19] produziu uma resposta melhor, sem exigir planaridade, com 36 vértices (veja Figura 6).

Exigindo-se planaridade, o melhor exemplo foi obtido por Hatzel [8], em 1979, com 224 vértices.

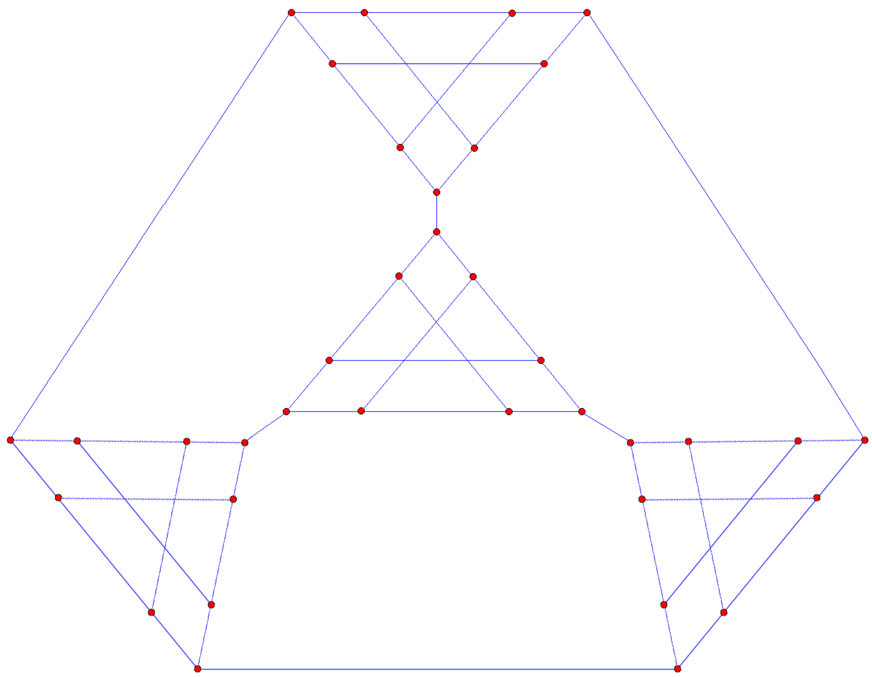


Figura 6: Menor grafo 3-conexo conhecido cuja intersecção de todos os caminhos mais longos é vazia

4.6 Grafos 4-conexos

Para grafos 4-conexos a pergunta correspondente continua em aberto:

Existe um grafo 4-conexo cuja intersecção de todos os caminhos mais longos é vazia? [20]

4.7 Alguns resultados positivos

Apesar de termos visto vários exemplos de grafos nos quais a intersecção dos caminhos mais longos é vazia, podemos impor algumas condições aos grafos para garantir que exista pelo menos um vértice nesta intersecção.

Um primeiro resultado, fácil de se provar, é que em árvores todos os caminhos mais longos têm um vértice em comum. De fato, basta observar que, como dois-a-dois os caminhos mais longos se intersectam, então, se não houvesse vértice comum a todos os caminhos mais longos no grafo, a união dos caminhos mais longos formaria um circuito.

Havet [9] provou que grafos divididos têm pelo menos um mesmo vértice na intersecção de todos os caminhos mais longos. Balister e outros [2] provaram o mesmo fato para grafos arco-circulares.

Em 1990 Klavžar e Petkovšek [11] provaram o seguinte resultado:

Proposição 2 *Seja G um grafo conexo. Então existe um vértice comum a todos os caminhos mais longos em G se e somente se para todo bloco B de G, todos os caminhos mais longos em G que têm pelo menos uma aresta em B têm um vértice em comum.*

Portanto, se todo bloco de um grafo G é hamiltoniano-conexo ou um circuito, então todos os caminhos mais longos em G têm um vértice em comum.

5 Número fixo de caminhos mais longos

O que sabemos do problema $\mathcal{P}_n$ para n fixo? O grafo da Seção 4.3 mostra que $\mathcal{P}_7$ não é sempre verdade. Skupień [13] obteve, para $n \geq 7$, um grafo conexo no qual existem n caminhos mais longos cuja interseção é vazia, mas quaisquer $n-1$ caminhos mais longos têm um vértice em comum. Até hoje, esta é a maior cota inferior para n tal que se sabe que $\mathcal{P}_n$ não é sempre verdade.

5.1 Dois caminhos mais longos

Além disso, para $n < 7$, só sabemos que:

Asserção 3 *Se G é um grafo conexo, então quaisquer 2 caminhos mais longos de G têm um vértice em comum.*

Prova. Seja G um grafo conexo e suponha, por contradição, que P_1 e P_2 sejam dois caminhos mais longos de comprimento L cuja intersecção é vazia. Como G é conexo, existe um caminho de P_1 a P_2. Escolha um caminho minimal M que liga P_1 a P_2, ou seja, escolha M tal que sua origem, x, esteja em P_1, o seu término, y, em P_2 e nenhum vértice interno de M pertença a P_1 ou a P_2 (veja Figura 7).

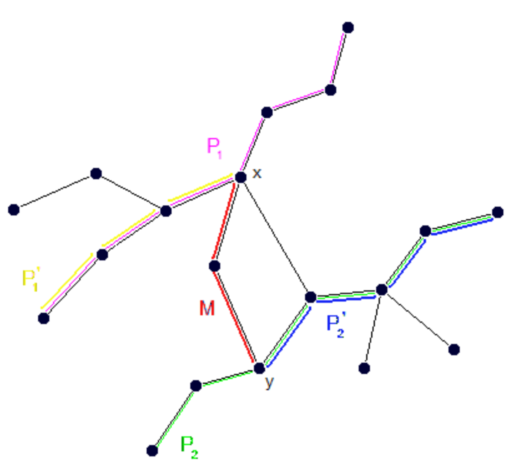


Figura 7:

O vértice x divide P_1 em dois caminhos. Seja P_1' o maior desses caminho. Analogamente, y divide P_2 em dois caminhos. Seja P_2' o maior desses caminhos. Agora, seja P o caminho $P_1' \cdot M \cdot P_2'$. Como $\|M\| \geq 1$, $\|P_1'\| \geq \frac{1}{2}L$ e $\|P_2'\| \geq \frac{1}{2}L$, então $\|P\| \geq L+1$, o que contradiz o fato de P_1 e P_2 serem caminhos mais longos. ■

Portanto, para $3 \leq n \leq 6$ o problema $\mathcal{P}_n$ continua em aberto.

Vimos que dois caminhos mais longos sempre se intersectam. Mas em quantos vértices? Isto obviamente depende da conectividade do grafo.

Se o grafo for 2-conexo, então é fácil ver que existem pelo menos 2 vértices nesta intersecção. De fato, a prova disto seria semelhante à prova da Asserção 3. Em um grafo 3-conexo, são pelo menos 3 vértices. Será que em um grafo k-conexo, quaisquer 2 caminhos mais longos têm pelo menos k vértices em comum? Esta é uma questão que ainda está em aberto. Tudo o que se sabe é que a afirmação é válida para $k \leq 6$; para $k \geq 7$ só se sabe que o número de vértices em comum é $O(\sqrt{k})$. [20]

5.2 Três caminhos mais longos

Como vimos anteriormente, a seguinte conjectura continua em aberto:

Conjectura 4 *Para quaisquer três caminhos mais longos em um grafo conexo, existe um vértice comum aos três.*

Em 2009, Axenovich [1] provou esta conjectura para uma classe especial de grafos, mais especificamente para triplas de caminhos mais longos cuja união pertence a uma classe especial de grafos, os exoplanares. Mais formalmente, o resultado provado por Axenovich é o seguinte:

Teorema 5 *Seja G um grafo conexo e P_1, P_2, P_3 seus caminhos mais longos. Se $P_1 \cup P_2 \cup P_3$ forma um grafo exoplanar, então existe um vértice v pertencente a $V(P_1) \cap V(P_2) \cap V(P_3)$.*

Não reproduziremos aqui toda a prova de Axenovich, pois é muito extensa. Veremos que este teorema segue como um corolário do Teorema 8 que provaremos na próxima seção.

6 Um novo resultado

Apresentamos aqui um novo resultado que permitiu tanto a simplificação da prova do Teorema 5 quanto sua generalização.

6.1 O caso em que o grafo contém exatamente um bloco não-trivial

Lema 6 *Seja G um grafo exoplanar conexo. Se G contém exatamente um bloco não-trivial, então existe um vértice comum a todos os caminhos mais longos em G.*

Prova. Seja B o bloco não-trivial de G. Se G não contém blocos triviais, então existe um caminho hamiltoniano em G e, portanto, a intersecção de todos os caminhos mais longos de G contém todos os vértices. Suponha, então, que G tem ao menos um bloco trivial.

Chamaremos de **caminho pendente** um caminho de G que intersecta B em um único vértice que é sua origem. Obviamente, as arestas de um caminho pendente pertencem a blocos triviais de G.

Sejam C um circuito hamiltoniano em B, $R^\star$ um caminho pendente de maior comprimento e v o vértice comum a $R^\star$ e B.

Asserção 7 *Todos os caminhos mais longos passam pelo vértice v.*

Para vértices x e y em C, denote por $C_{x,y}$ o caminho em sentido horário de x a y em C.

Suponha, por contradição que P seja um caminho mais longo que não passa por v. Como P tem vértices em B, sejam $x \in V(P) \cap V(B)$ o vértice com $\|C_{x,v}\|$ mínimo e $y \in V(P) \cap V(B)$ o vértice com $\|C_{v,y}\|$ mínimo.

Se $x = y$, então o caminho P tem apenas um vértice em B (veja Figura 8). Sejam R_1 e R_2 dois caminhos pendentes maximais de P tal que $P = R_1^{-1} \cdot R_2$. Considere o caminho $P' = R_1 \cdot C_{x,v} \cdot R^\star$. Então $\|P'\| = \|R_1\| + \|C_{x,v}\| + \|R^\star\| = \|P\| - \|R_2\| + \|C_{x,v}\| + \|R^\star\|$. Como $\|R^\star\| \geq \|R_2\|$ e $\|C_{x,v}\| > 0$, isto implica que $\|P'\| > \|P\|$, o que contradiz o fato de P ser um caminho mais longo.

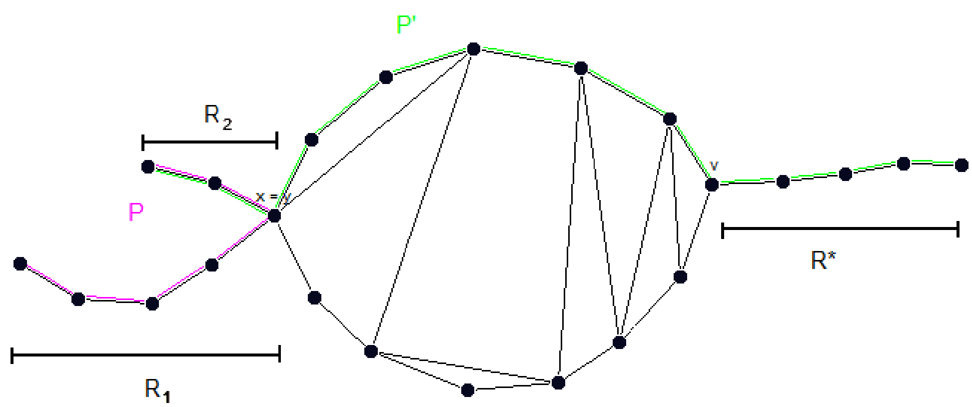


Figura 8:

Se $x \neq y$, então ao menos uma aresta de P que incide em x pertence a $E(B)$. Seja z tal que $xz \in E(P) \cap E(B)$ e $\|C_{y,z}\|$ é mínimo. Possívelmente $y = z$ (veja Figura 9). Neste caso, considere o caminho P' obtido de P através da substituição da aresta xy pelo caminho $C_{x,y}$, ou seja, $P' = (P - xy) \cup C_{x,y}$. Note que P' é de fato um caminho pois $C_{x,y}$ só intersecta P nos vértices x e y. Assim $\|P'\| = \|P - xy\| + \|C_{x,y}\| = \|P\| - 1 + \|C_{x,v}\| + \|C_{v,y}\|$. Mas $\|C_{x,v}\| \geq 1$ e $\|C_{v,y}\| \geq 1$. Portanto, $\|P'\| \geq \|P\| + 1$, o que contradiz a maximalidade de P.

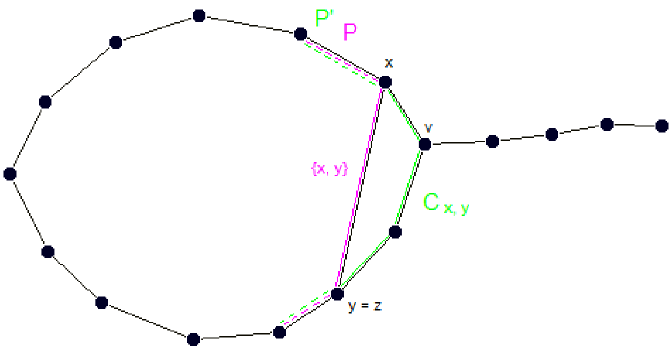


Figura 9:

Então suponha que $y \neq z$. Chamemos de P_1 e P_2 os dois caminhos de P tais que $P = P_1 \cdot P_2$, $V(P_1) \cap V(P_2) = z$ e $x \in V(P_1)$ e $y \in V(P_2)$ (veja Figura 10). Como G é planar, P_2 só usa vértices de $C_{y,z}$ e possivelmente de um caminho pendente, digamos R. Agora, considere o caminho $P' = P_1 \cdot C_{v,z}^{-1} \cdot R^{\star}$.

Então $\|P'\| = \|P_1\| + \|C_{v,z}\| + \|R^{\star}\| = \|P_1\| + \|C_{v,y}\| + \|C_{y,z}\| + \|R^{\star}\|$. Como $\|C_{y,z}\| \geq \|P_2\| - \|R\|$, $\|R^{\star}\| \geq \|R\|$ e $\|C_{v,y}\| > 0$, então $\|P'\| > \|P_1\| + \|P_2\| - \|R\| + \|R\| = \|P_1\| + \|P_2\| = \|P\|$.

Mas isto contradiz a maximalidade de P. Portanto, todos os caminhos de comprimento máximo passam por v. ■

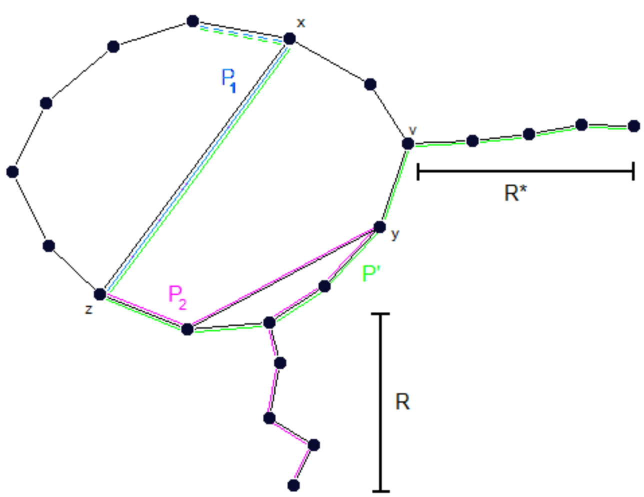


Figura 10:

6.2 O teorema principal

Teorema 8 *Se G é um grafo exoplanar conexo, então existe um vértice comum a todos os caminhos mais longos em G.*

Prova. Se G não contém nehum bloco não-trivial, então, G é uma árvore, e, como vimos na Seção 4.7, em árvores todos os caminhos mais longo têm um vértice em comum. Se G tem apenas um bloco não-trivial, então o resultado segue do Lema 6. Suponha então que G tenha pelo menos dois blocos não-triviais. Seja B um bloco não-trivial de G, e sejam $x, \ldots, v_k$ os vértices-de-corte de G que pertencem a B. Para $i = 1, \ldots, k$, seja G_i o subgrafo maximal de G tal que $G_i \cap B = \{v_i\}$.

Seja $\mathcal{P}_B$ o conjunto dos caminhos mais longos em G que têm pelo menos uma aresta em B. Pelo Lema 2, é suficiente provar que existe um vértice comum a todos os caminhos em $\mathcal{P}_B$.

Seja P um caminho em $\mathcal{P}_B$. Como B é hamiltoniano, é imediato que P contém (propriamente) um caminho mais longo em algum G_i, digamos P_i, que termina em v_i. Considere agora o conjunto I de todos os índices i tais que G_i contém um caminho máximo como P_i. Para cada tal i, escolha apenas um representante de tais tipos de caminhos, doravante referidos como P_i.

Seja H_B o grafo definido como a união do bloco B e dos caminhos P_i, onde $i \in I$. Então H_B é um grafo exoplanar conexo que contém exatamente um bloco não-trivial. Pela Proposição 2, existe um vértice comum a todos os caminhos mais longos em H_B. Esse resultado implica que existe um vértice comum a todos os caminhos de $\mathcal{P}_B$. Com isso, fica completa a prova do teorema. ■

7 Conclusões

Apresentamos aqui alguns dos tópicos que estudamos sobre intersecção de caminhos mais longos em grafos. Não se trata aqui de uma resenha completa sobre esse assunto, que é bem vasto, e sobre o qual há mais resultados. Concentramo-nos na questão da existência ou não de um vértice comum a tais tipos de caminhos. As variantes sobre este tópico consideram todos os caminhos mais longos, ou um certo número fixo deles; também consideram a mesma pergunta para diferentes classes de grafos.

Estes estudos tiveram como ponto de partida a leitura do artigo de Axenovich [1], sobre intersecção de 3 caminhos mais longos, no caso especial em que a união deles é um grafo exoplanar. Essa leitura, feita com o objetivo de ter um primeiro contato com artigos especializados (até então nossos estudos concentraram-se em livros), trouxe um grande aprendizado. Vimos que nem todas as passagens são fáceis de serem entendidas, e além disso, algumas afirmações nem são provadas. No final, o esforço em tentar 'completar' essas lacunas foi muito proveitoso. Acabamos percebendo que a prova apresentada neste artigo (com análise de casos) podia ser bem simplificada. A simplificação que conseguimos é a que apresentamos na Seção 6. Mais surpreendente foi ter conseguido obter um resultado um pouco mais geral, desta vez, contemplando todos os caminhos mais longos, conforme apresentamos na Seção 6.2.

Os estudos que começaram com a leitura de um artigo, levaram-nos ao estudo de vários outros, e ao aprendizado de diversos conceitos sobre grafos, algoritmos, redutibilidade e complexidade de problemas. No final, foi esse aprendizado que nos permitiu fazer a generalização que apresentamos na Seção 6.2.

A preparação desta monografia foi um outro desafio: como preparar um documento utilizando um formator de texto adequado para o trabalho? Tivemos que aprender a usar o LaTeX, a fazer figuras, etc. Além disso, foi preciso pensar no resumo, na subdivisão em seções, o que colocar, o que omitir, que notação utilizar, etc.

A conclusão final é que fazer esta monografia foi um grande aprendizado!

NOTA: As figuras deste texto são coloridas. Caso a impressão deste texto não seja colorida, o texto pode ser visualizado em cores em:
`http://www.ime.usp.br/~susanna/IMPA/longest-paths.pdf`

Referências

[1] M. Axenovich. When do three longest paths have a common vertex? *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, 1:115–120, 2009.

[2] P.N. Balister, E. Györi, J. Lehel, and R.H. Schelp. Longest paths in circular arc graphs. *Combin. Probab. Comput.*, 13(3):311–317, 2004.

[3] J.A. Bondy and U.S.R. Murty. *Graph theory*, volume 244 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2008.

[4] R.W. Bulterman, F.W. van der Sommen, G. Zwaan, T. Verhoeff, A.J.M. van Gasteren, and W.H.J. Feijen. On computing a longest path in a tree. *Inform. Process. Lett.*, 81(2):93–96, 2002.

[5] T. Gallai. Problem 4. In *Theory of Graphs*, page 362, Proccedings of the coloquiem held at Tihany Hungary (ed: Erdös, P. and Katona, G.), 1968. Academic Press, New York.

[6] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computers and intractability*. W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1979. A guide to the theory of NP-completeness, A Series of Books in the Mathematical Sciences.

[7] B. Grünbaum. Vertices missed by longest paths or circuits. *J. Combinatorial Theory Ser. A*, 17:31–38, 1974.

[8] W. Hatzel. Ein planarer hypohamiltonscher Graph mit 57 Knoten. *Math. Ann.*, 243(3):213–216, 1979.

[9] F. Havet. Stable set meeting every longest path. *Discrete Math.*, 289(1-3):169–173, 2004.

[10] K. Ioannidou, G.B. Mertzios, and S.D. Nikolopoulos. The longest path problem has a polynomial solution on interval graphs. *Algorithmica*, 2010.

[11] S. Klavžar and M. Petkovšek. Graphs with non empty intersection of longest paths. *Ars. Combin.*, 29:13–52, 1990.

[12] W. Schmitz. Über längste Wege und Kreise in Graphen. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 53:97–103, 1975.

[13] Z. Skupień. Smallest sets of longest paths with empty intersection. *Combin. Probab. Comput.*, 5(4):429–436, 1996.

[14] R. Uehara and Y. Uno. Efficient algorithms for the longest path problem. In Rudolf Fleischer and Gerhard Trippen, editors, *Algorithms and Computation*, volume 3341 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 1547–1553. Springer Berlin / Heidelberg, 2005. 10.1007/978-3-540-30551-4_74.

[15] R. Uehara and Y. Uno. On computing longest paths in small graph classes. *Internat. J. Found. Comput. Sci.*, 18(5):911–930, 2007.

[16] H. Walther. Über die Nichtexistenz eines Knotenpunktes, durch den alle längsten Wege eines Graphen gehen. *J. Combinatorial Theory*, 6:1–6, 1969.

[17] H. Walther and H.-J. Voss. Über Kreise in Graphen. *VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften*, 1974.

[18] T. Zamfirescu. A two-connected planar graph without concurrent longest paths. *J. Combinatorial Theory*, 13:116–121, 1972.

[19] T. Zamfirescu. On longest paths and circuits in graphs. *Math. Scand.*, 38(2):211–239, 1976.

[20] T. Zamfirescu. Intersecting longest paths or cycles: a short survey. *An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform.*, 28:1–9, 2001.