Samuel Alexis González Martínez 2240680

Taller de Problemas 3

10)

a) Demostrar que P_n es un EV respecto a la suma de polinomios y a la multiplicación de polinomios por un escalar

Solución:

1. Cerradura bajo la suma. Sean $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$ y $q(x)=b_0+b_0x+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}$ polinomios pertenecientes a P_n, entonces

$$p(x)+q(x)=(a_0+\cdots+a_{n-1}x^{n-1})+(b_0+\cdots+b_{n-1}x^{n-1})$$
$$=(a_0+b_0)+\cdots+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}$$

Como $(a_0+b_0),\ldots,(a_{n-1}+b_{n-1})\in\mathbb{R}$, entonces $p(x)+q(x)\in P_n$

2. Conmutatividad. Sea $p(x)$ y $q(x)\in P_n$, entonces

$$p(x)+q(x)=(a_0+b_0)+\cdots+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}$$
$$=(b_0+a_0)+\cdots+(b_{n-1}+a_{n-1})x^{n-1}$$
$$=q(x)+p(x)$$

3. Asociatividad. Sean $p(x),q(x),r(x)\in P_n$ entonces

$$(p(x)+q(x))+r(x)=[(a_0+b_0)+\cdots+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}]+(c_0+\cdots+c_{n-1}x^{n-1})$$
$$=[(a_0+b_0)+c_0]+\cdots+[(a_{n-1}+b_{n-1})+c_{n-1}]x^{n-1}$$
$$=[a_0+(b_0+c_0)]+\cdots+[a_{n-1}+(b_{n-1}+c_{n-1})]x^{n-1}$$
$$=(a_0+\cdots+a_{n-1}x^{n-1})+[(b_0+c_0)+\cdots+(b_{n-1}+c_{n-1})x^{n-1}]$$
$$=p(x)+(q(x)+r(x))$$

4. Existencia del neutro aditivo. Sea $p(x)\in P_n$ y $O(x)=0+0x+\cdots+0x^{n-1}\in P_n$, entonces

$$p(x)+O(x)=(a_0+0)+\cdots+(a_{n-1}+0)x^{n}$$
$$=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}=p(x)$$

5. Existencia del inverso aditivo. Sean $p(x)\in P_n$ y $-p(x)=-a_0-a_1x-\cdots-a_{n-1}x^{n-1}\in P_n$, entonces

$$p(x)+(-p(x))=[(a_0+(-a_0)]+\cdots+[a_{n-1}+(-a_{n-1})]x^{n-1}$$
$$=0+0x+\cdots+0x^{n-1}=O(x)\in P_n$$

6. Cerradura bajo el producto escalar. Sea $p(x)\in P_n$ y $\alpha\in\mathbb{K}$, entonces,

$$\alpha p(x)=\alpha(a_0+\cdots+a_{n-1}x^{n-1})=\alpha a_0+\cdots+\alpha a_{n-1}x^{n-1}$$

$\alpha a_0,\alpha a_1,\ldots,\alpha a_{n-1}\in\mathbb{R}$, entonces $\alpha p(x)\in P_n$

7. Asociatividad por producto escalar. Sea $p(x)\in P_n$ y $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, entonces

$$\alpha(\beta p(x))=\alpha(\beta a_0+\cdots+\beta a_{n-1}x^{n-1})$$
$$=\alpha\beta a_0+\cdots+\alpha\beta a_{n-1}x^{n-1}$$
$$=(\alpha\beta)(a_0+\cdots+a_{n-1}x^{n-1})=(\alpha\beta)p(x)$$

8. Existencia de neutro multiplicativo. Sea $p(x)\in P_n$ y $1\in\mathbb{R}$, entonces

$$1\cdot p(x)=(1\cdot a_0)+\cdots+(1\cdot a_{n-1})x^{n-1}$$
$$=a_0+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}=p(x)$$

9. Distributividad. Sean $p(x),q(x)\in P_n$ y $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, entonces,

$$\alpha(p(x)+q(x))=\alpha(a_0+b_0)+\cdots+\alpha(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}$$
$$=\alpha a_0+\cdots+\alpha a_{n-1}x^{n-1}+\alpha b_0+\cdots+\alpha b_{n-1}x^{n-1}$$
$$=\alpha p(x)+\alpha q(x)$$

$$(\beta+\alpha)p(x)=(\alpha+\beta)a_0+\cdots+(\alpha+\beta)a_{n-1}x^{n-1}$$
$$=\alpha a_0+\cdots+\alpha a_{n-1}x^{n-1}+\beta a_0+\cdots+\beta a_{n-1}x^{n-1}$$
$$=\alpha p(x)+\beta p(x)$$

b) Si los coeficientes a_i son enteros ¿P_n será un EV? ¿Por qué?

Solución: No, falla la cerradura bajo la multiplicación por un escalar. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ no es entero y $p(x)$ tiene coeficientes enteros $\alpha p(x)$ tendrá coeficientes no enteros.

c) ¿Cual de los siguientes subconjuntos de P_n es un subespacio vectorial?

I. El polinomio cero y todos los polinomios de grado $n-1$.

Solución:

1. Cerradura bajo la suma. Sea $p_1(x), q_1(x) \in P_{n-1}$ entonces

$$p_1(x)+q_1(x) = (a_0+\cdots+a_{n-2}x^{n-2}) + (b_0+\cdots+b_{n-2}x^{n-2})$$

$$= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(b_{n-1}+a_{n-2})x^{n-2}$$

$$p_1(x)+q_1(x) \in P_n$$

2. Cerradura bajo producto escalar. Sea $p_1(x) \in P_{n-1}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces,

$$\alpha p_1(x) = \alpha(a_0+\cdots+a_{n-2}x^{n-2})$$
$$= \alpha a_0+\cdots+\alpha a_{n-2}x^{n-2}$$

$$\alpha p_1(x) \in P_{n-1}$$

3. Existencia de un neutro. Note que $0(x) \in P_{n-1}$

$$0(x) = 0+0x+\cdots+0x^{n-2} \Rightarrow 0(x) \in P_{n-1}$$

Por lo tanto, $P_{n-1} \leq P_n$

II. El polinomio cero y todos los polinomios de grado par

Solución:

1. Cerradura bajo la suma. Sea $p_2(x), q_2(x) \in P_{2k}$, tal que $2k \leq n-1$, entonces

$$p_2(x)+q_2(x) = (a_0+a_1x^2+\cdots+a_kx^{2k}) + (b_0+b_1x^2+\cdots+b_kx^{2k})$$

$$= (a_0+b_0)+\cdots+(a_k+b_k)x^{2k}$$

$$p_2(x)+q_2(x) \in P_{2k}$$

2. Cerradura bajo producto escalar. Sea $p_2(x) \in P_{2k}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\alpha p_2(x) = \alpha(a_0+a_1x^2+\cdots+a_kx^{2k})$$
$$= \alpha a_0+\alpha a_1x^2+\cdots+\alpha a_kx^{2k}$$

$$\alpha p_2(x) \in P_{2k}$$

3. Existencia de un neutro. Según la definición establecida $0 \in P_{2k}$, entonces

$$0 = 0+0x^2+\cdots+0x^{2k} \rightarrow 0 \in P_{2k}$$

$$P_{2k} \leq P_{n-1}$$

III. Todos los polinomios que tienen a x como un factor ($n>1$)

1. Cerradura bajo la suma. Sean $p_3(x), q_3(x) \in xP_{n-2}$ note que

$$p_3(x)+q_3(x) = x(a_0+\cdots+a_{n-2}x^{n-2}) + x(b_0+\cdots+b_{n-2}x^{n-2})$$

$$= x[(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_{n-2}x^{n-2}]$$

$$p_3(x)+q_3(x) \in xP_{n-2}$$

2. Cerradura bajo producto escalar. Sea $p_3(x) \in xP_{n-2}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\alpha p_3(x) = \alpha x(a_0+\cdots+a_{n-2}x^{n-2})$$
$$= x(\alpha a_0+\cdots+\alpha a_{n-2}x^{n-2})$$

$$\alpha p_3(x) \in xP_{n-2}$$

3. Existencia de un neutro $0 \in xP_{n-1}$

$0 = 0x = x(0+\cdots+0x^{n-2}) \Rightarrow 0 \in xP_{n-1}$

$$x P_{n-2} \subseteq P_{n-1}$$

IV Todos los polinomios que tienen a $x-1$ como factor

1. Cerradura bajo la suma. Sean $p_4(x)$ y $q_4(x) \in (x-1)P_{n-2}$, entonces

$$p_4(x)+q_4(x) = (x-1)(a_0+\cdots+a_{n-2}x^{n-2}) + (x-1)(b_0+\cdots+b_{n-2}x^{n-2})$$

$$= (x-1)[(a_0+b_0)+\cdots+(a_{n-2}b_{n-2})x^{n-2}]$$

$$p_4(x)+q_4(x) \in (x-1)P_{n-2}$$

2. Cerradura bajo producto escalar. Sea $p_4(x) \in (x-1)P_{n-2}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces,

$$\alpha p_4(x) = \alpha(x-1)(a_0+\cdots+a_{n-2}x^{n-2})$$
$$= (x-1)(\alpha a_0+\cdots+\alpha a_{n-2}x^{n-2})$$

$$\alpha p_4(x) \in (x-1)P_{n-2}$$

3. Existencia de un neutro. $0 \in (x-1)P_{n-2}$

$$0 = (x-1)0 = (x-1)(0+0x+\cdots+0x^{n-2})$$

$$(x-1)P_{n-2} \in P_{n-1}$$

Taller de Problemas 4

6.

a) Compruebe si los cuaterniones, $|a\rangle$, forman un espacio vectorial respecto a esa operación suma y esa multiplicación por escalores, análoga a los vectores en $\mathbb{R}^3$ en coordenadas cartesianas.

Solución:

1. Cerradura bajo la suma: ✓

Si $|a\rangle$ y $|b\rangle$ son cuaterniones, su suma es:

$$|a\rangle + |b\rangle = (a^0+b^0) + (a^1+b^1)|q_1\rangle + (a^2+b^2)|q_2\rangle + (a^3+b^3)|q_3\rangle$$

Como $a^\alpha + b^\alpha \in \mathbb{R}$, la suma es otro cuaternión

2. Asociatividad de la suma: ✓

Para tres cuaterniones $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle$:

$$(|a\rangle + |b\rangle) + |c\rangle = |a\rangle (|b\rangle + |c\rangle)$$

Se cumple porque la suma de números reales es asociativa.

3. Elemento neutro aditivo: ✓

El cuaternión cero es:

$$|0\rangle = 0|q_0\rangle + 0|q_1\rangle + 0|q_2\rangle + 0|q_3\rangle$$

Para cualquier $|a\rangle$: $|a\rangle + |0\rangle = |a\rangle$

4. Inverso aditivo:

Dado $|a\rangle$, su inverso es:

$$-|a\rangle = -a^0|q_0\rangle - a^1|q_1\rangle - a^2|q_2\rangle - a^3|q_3\rangle$$

Cumple $|a\rangle + (-|a\rangle) = |0\rangle$

5. Conmutatividad de la suma: ✓ debido a la conmutatividad de la suma en $\mathbb{R}$.

6. Cerradura bajo la multiplicación por escalar: ✓

Para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $|a\rangle$:

$$\alpha|a\rangle = (\alpha a^0)|q_0\rangle + (\alpha a^1)|q_1\rangle + (\alpha a^2)|q_2\rangle + (\alpha a^2)|q_2\rangle.$$

Como $\alpha a^\alpha \in \mathbb{R}$, el resultado es otro cuaternión.

7. Distributividad respecto a la suma de escalares: ✓

Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $(\alpha+\beta)|a\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|a\rangle$

8. Distributividad respecto a la suma de vectores ✓

Para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $|a\rangle, |b\rangle$:

$$\alpha(|a\rangle + |b\rangle) = \alpha|a\rangle + \alpha|b\rangle.$$

9. Compatibilidad con la multiplicación de escalares: ✓

Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\alpha(\beta|a\rangle) = (\alpha\beta)|a\rangle$

10. Elemento identidad escalar: ✓

Para el escalar $1 \in \mathbb{R}$:

$$1 \cdot |a\rangle = |a\rangle.$$

En conclusión, los cuaterniones $|a\rangle$ satisfacen todos los axiomas de un EV.

b) Dados dos cuaterniones cualesquiera $|b\rangle \equiv (b^0, \vec{b})$ y $|r\rangle = (r^0, \vec{r})$, y su tabla de multiplicación, muestre que el producto de estos cuaterniones $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$ podrá representarse como

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle \leftrightarrow (d^0, \vec{d}) = (b^0 r^0 - \vec{b}\cdot\vec{r},\ r^0\vec{b} + b^0\vec{r} + \vec{b}\times\vec{r})$$

donde $(\cdot)$ y $(\times)$ corresponden con los productos escalares y vectoriales tridimensionales de siempre.

Solución: Multiplicamos los cuaterniones término a término

$$|b\rangle \odot |r\rangle = (b^0 + \vec{b}) \odot (r^0 + \vec{r})$$
$$= b^0 r^0 + b^0 \vec{r} + r^0 \vec{b} + \boxed{\vec{b} \odot \vec{r}}$$

Término $\vec{b} \odot \vec{r}$:

Usando la tabla de multiplicación para los elementos $|q_i\rangle$:

$$\vec{b} \odot \vec{r} = (b^1|q_1\rangle + b^2|q_2\rangle + b^3|q_3\rangle) \odot (r^1|q_1\rangle + r^2|q_2\rangle + r^3|q_3\rangle)$$

Aplicando las reglas:

$$|q_i\rangle \odot |q_j\rangle = -\delta^i_j + \varepsilon_{ijk}|q_k\rangle$$

$$\vec{b} \odot \vec{r} = \underbrace{-\sum_{i=1}^{3} b^i r^i}_{-\vec{b}\cdot\vec{r}} + \underbrace{\sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} b^i r^j |q_k\rangle}_{\vec{b}\times\vec{r}}$$

La primera suma es un producto escalar $-\vec{b}\cdot\vec{r}$.
La segunda es el producto vectorial $\vec{b}\times\vec{r}$.

Sustituyendo $\vec{b}\odot\vec{r}$ en el producto original:

$$|b\rangle \odot |r\rangle = b^0 r^0 + b^0 \vec{r} + r^0 \vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{r} + \vec{b}\times\vec{r}$$

Agrupamos la parte escalar y vectorial y nos queda

$$|d\rangle = (d^0, \vec{d}) = (b^0 r^0 - \vec{b}\cdot\vec{r},\ r^0\vec{b} + b^0\vec{r} + \vec{b}\times\vec{r})$$

c) Ahora con índices: dados $|b\rangle = b^\alpha |q_\alpha\rangle$ y $|r\rangle = r^\alpha |q_\alpha\rangle$ compruebe si el producto $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$ puede ser siempre escrito de la siguiente forma:

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle = a|q_0\rangle + S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha |q_j\rangle + A^{[jk]i} b_j r_k |q_i\rangle$$

donde a representa un número, $S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha$ (recuerde que los índices latinos toman los valores $j,k,l = 1,2,3$, mientras $\alpha = 0,1,2,3$), donde $S^{(\alpha j)}$ indica $S^{\alpha j} = S^{j\alpha}$, que la cantidad $S^{\alpha j}$ es simétrica, y por lo tanto $(S^{\alpha j}\delta^0_\alpha + S^{j\alpha}\delta^0_\alpha)|q_j\rangle$. Mientras $A^{[jk]i}$ representa un conjunto de objetos antisimétricos en j y k:

$$A^{[jk]i} \to A^{jki} = -A^{kji} \to (A^{jki} b_j r_k - A^{kji} b_j r_k)|q_i\rangle$$

Solución:

Usando la tabla de multiplicación de los cuaterniones:

- $|q_0\rangle \odot |q_\beta\rangle = |q_\beta\rangle$
- $|q_j\rangle \odot |q_k\rangle = -\delta^j_k |q_0\rangle + \varepsilon_{jkl}|q_l\rangle$ (para $j,k,l = 1,2,3$)

Término escalar $(a|q_0\rangle)$:
Proviene de

$$b^0 r^0 (|q_0\rangle \odot |q_0\rangle) + b^j r^k (|q_j\rangle \odot |q_k\rangle) = b^0 r^0 |q_0\rangle - b^j r^k \delta_{jk} |q_0\rangle.$$

$$a = b^0 r^0 - \vec{b}\cdot\vec{r}$$

Término simétrico $(S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha |q_j\rangle)$:
Proviene de

$$b^0 r^j (|q_0\rangle \odot |q_j\rangle) + b^j r^0 (|q_j\rangle \odot |q_0\rangle) = b^0 r^j |q_j\rangle + b^j r^0 |q_j\rangle.$$

$$S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha = b^0 r^j + b^j r^0, \quad S^{(\alpha j)} = S^{(j\alpha)}$$

Término antisimétrico $(A^{[jk]i} b_j r_k |q_i\rangle)$:

$$b^j r^k (|q_j\rangle \odot |q_k\rangle) = b^j r^k \varepsilon_{jkl} |q_l\rangle$$

Identificamos: $A^{[jk]i} = \varepsilon_{jki}$ que es antisimétrico en j y k. Así:

$$A^{[jk]i} b_j r_k |q_i\rangle = \varepsilon_{jki} b_j r_k |q_i\rangle = (\vec{b}\times\vec{r})^i |q_i\rangle$$

d) Identifique las cantidades: a, $s^{(ij)}$ y $A^{[ijk]}$, en términos de las componentes de los cuaterniones. ¿El producto de cuaterniones $|d\rangle = |a\rangle \odot |r\rangle$ será un vector, pseudovector o ninguna de los anteriores? Explique por qué.

Solución: Las cantidades mencionadas ya se identificaron en el punto anterior.

El producto $|d\rangle = |a\rangle \odot |r\rangle$ es un cuaternión, que generaliza números complejos en 3D. No es ni vector ni pseudo vector, pero su parte vectorial contiene contribuciones en ambos. La distinción clave el la presencia del producto cruz, que introduce comportamiento pseudovectorial.

e) Compruebe si las matrices de Pauli y la identidad

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_0 \equiv I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puede representar la base de los cuaterniones $\{|q_1\rangle, |q_2\rangle, |q_3\rangle, |q_0\rangle\}$. Seguidamente muestre que matrices complejos 2x2 del tipo:

$$|b\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix},$$

pueden ser considerados como cuaterniones, donde $z = x+iy$ y $w = a+ib$ son números complejos. Las matrices de Pauli aparecen en mecánica cuántica cuando se tiene en cuenta la interacción del espín de una partícula como campo electromagnético externo.

Solución: La base de los cuaterniones $\{|q_1\rangle, |q_2\rangle, |q_3\rangle, |q_0\rangle\}$ puede asociarse con las matrices de la siguiente manera:

Para que estas matrices representen los cuaterniones, deben cumplir las mismas reglas de multiplicación. Sin embargo, las matrices de pauli satisfacen:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = I, \quad \sigma_i\sigma_j = i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

$(i \neq j)$. Comparando las reglas de los cuaterniones:

- Los cuaterniones cumplen $i^2 = -1$, pero $\sigma_i^2 = 1$.
- El producto de dos matrices de Pauli introduce un factor i adicional: $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3$.

Para que las matrices cumplan $i^2 = -1$ como los cuaterniones, multiplicamos las matrices de pauli por $-i$:

$$|q_1\rangle \leftrightarrow -i\sigma_1, \ |q_2\rangle \leftrightarrow -i\sigma_2, \ |q_3\rangle \leftrightarrow -i\sigma_3$$

Ahora se cumple:

$$(-i\sigma_j)^2 = -I \quad (\text{análogo a } i^2 = -1)$$

$$(-i\sigma_1)(-i\sigma_2) = -i\sigma_3 = |q_3\rangle$$

Entonces las matrices que representen las bases serán:

$$|q_0\rangle \leftrightarrow \sigma_0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ |q_1\rangle \leftrightarrow -i\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$|q_2\rangle \leftrightarrow -i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ |q_3\rangle - i\sigma_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Un cuaternión arbitrario $|b\rangle = b^0 + b^1|q_1\rangle + b^2|q_2\rangle + b^3|q_3\rangle$ puede expresarse como

$$|b\rangle \leftrightarrow b^0 I - ib^1\sigma_1 - ib^2\sigma_2 - ib^3\sigma_3$$

$$= \begin{pmatrix} b^0 - ib^3 & -ib^1 - b^2 \\ -ib^1 + b^2 & b^0 + ib^3 \end{pmatrix}$$

Si definimos $z = b^0 - ib^3$ y $w = -b^1 - ib^2$, entonces la matriz toma la forma

$$|b\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix} \text{ donde } z, w \in \mathbb{C}$$

f) Muestre que una representación posible para la base de cuaterniones es: la matriz identidad y las matrices reales 4×4 de la forma:

$$|q_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, |q_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$, |q_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Los cuaterniones satisfacen:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k, \; jk = i, \; ki = j,$$

y anticonmutatividad: $ij = -ji$, etc.

- Calculamos los productos matriciales: ✓

$$|q_1\rangle^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$|q_1\rangle^2 = -I_4$. Análogamente,

$$|q_2\rangle^2 = |q_3\rangle^2 = -I_4$$

- Productos cruzados: ✓

$$|q_1\rangle|q_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = |q_3\rangle.$$

$$|q_2\rangle|q_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = |q_1\rangle.$$

$$|q_3\rangle|q_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = |q_2\rangle$$

- Anticonmutatividad: ✓

$$|q_1\rangle|q_2\rangle = -|q_2\rangle|q_1\rangle, \text{ etc.}$$

Por ejemplo,

$$|q_2\rangle|q_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -|q_3\rangle$$

En conclusión, forman una representación fiel de los cuaterniones en el espacio de matrices reales 4×4.

g) Compruebe si la siguiente es una buena definición de producto interno:

$$\widetilde{\langle a|b\rangle} = |a\rangle^{*} \odot |b\rangle$$

Solución: Expandimos el término de la derecha

$$|a\rangle^{+} \odot |b\rangle = (a^0 - a^i|q_i\rangle) \odot (b^0 + b^i|q_i\rangle)$$

$$= (a^0b^0 + \vec{a}\cdot\vec{b}, \; a^0\vec{b} - b^0\vec{a} + \vec{a}\times\vec{b})$$

Como se puede ver, obtenemos un cuaternión. De acuerdo a la definición de producto interno:

$$I(|v_i\rangle, |v_j\rangle) : V\times V \to K \;\; \forall\, |v_i\rangle, |v_j\rangle \in V$$

El producto interno no está bien definido debido a que da como resultado algo distinto a un escalar.

h) Modifique un poco la definición anterior de tal forma que:

$$\langle a|b\rangle = \tfrac{1}{2}\left[\widetilde{\langle a|b\rangle} - |q_1\rangle \odot \widetilde{\langle a|b\rangle} \odot |q_1\rangle\right],$$

y compruebe si esta definición compleja del producto interno cumple con todas los propiedades. Nótese que un cuaternión de la forma $|f\rangle = f^0 + f^1|q_1\rangle$ es un número complejo convencional.

Solución:

Sustituimos $\widetilde{\langle a|b\rangle} = |c\rangle$, entonces

$\langle a|b\rangle = \frac{1}{2}[|c\rangle - |q_1\rangle \odot |c\rangle \odot |q_1\rangle]$

$= \frac{1}{2}[|c\rangle - |q_1\rangle \odot (C^0 + C^i|q_i\rangle \odot |q_1\rangle]$

$= \frac{1}{2}[|c\rangle - (-c^1 + c^0|q_1\rangle - c^2|q_3\rangle - c^3|q_2\rangle) \odot |q_1\rangle]$

$= \frac{1}{2}[|c\rangle - (-c^0 - c^1|q_1\rangle + c^2|q_2\rangle + c^3|q_3\rangle]$

$= \frac{1}{2}[c^0 + c^1|q_1\rangle + \cancel{c^2|q_2\rangle} + \cancel{c^3|q_3\rangle} + c^0 + c^1|q_1\rangle - \cancel{c^2|q_2\rangle} - \cancel{c^3|q_3\rangle}]$

$= c^0 + c^1|q_1\rangle \in \mathbb{C}$

Comprobemos las propiedades:

1) Sea $|a\rangle \in V$, note que $\langle|a\rangle||a\rangle\rangle \geq 0$

$\langle a|a\rangle = \frac{1}{2}[\widetilde{\langle a|a\rangle} - |q_1\rangle \odot \widetilde{\langle a|a\rangle} \odot |q_1\rangle]$

$\widetilde{\langle a|a\rangle} = |a\rangle^* \odot |a\rangle = (a^0 - a^i|q_i\rangle)(a^0 + a^i|q_i\rangle)$

$= (a^0)^2 - (a^i|q_i\rangle) \odot (a^i|q_i\rangle)$

$= (a^0)^2 - (-a^i a^i + \varepsilon^{ijk} \cancel{a_j a_k}|q_i\rangle)$ 0

$= (a^0)^2 + (a^i)^2$

$\rightarrow \langle a|a\rangle = \frac{1}{2}[(a^0)^2 + (a^i)^2 - |q_1\rangle \odot ((a^0)^2 + (a^i)^2) \odot |q_1\rangle]$

$= \frac{1}{2}[(a^0)^2 + (a^i)^2 - (-(a^0)^2 - (a^i)^2)]$

$= (a^0)^2 + (a^i)^2 \geq 0$

2. Sea $|a\rangle, |b\rangle \in V$, $\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^*$

Veamos que

$\widetilde{\langle a|b\rangle} = |a\rangle^* \odot |b\rangle = (a^0b^0 + a^ib^i, a^0b^i - b^0a^i + \varepsilon^{ijk}a_jb_k)$

$= |c\rangle = (c^0; c^i|q_i\rangle)$

$\widetilde{\langle b|a\rangle} = |b\rangle^* \odot |a\rangle = (b^0a^0 + b^ia^i; b^0a^i - a^0b^i + \varepsilon^{ijk}b_ja_k)$

$= (a^0b^0 + a^ib^i; -(a^0b^i - a^ib^0 + \varepsilon^{ijk}a_kb_j)) = |c\rangle^*$

$|c\rangle^* = (c^0, -c^i|q_i\rangle)$

$\rightarrow \widetilde{\langle a|b\rangle} = |c\rangle = \widetilde{\langle b|a\rangle}^* = |c\rangle^*$

Ahora reemplazamos

$\langle a|b\rangle = \frac{1}{2}[|c\rangle - |q_1\rangle \odot |c\rangle \odot |q_1\rangle] = c^0 + c^i|q_i\rangle$

$\langle b|a\rangle = \frac{1}{2}[|c\rangle^* - |q_1\rangle \odot |c\rangle \odot |q_1\rangle] = c^0 - c^i|q_i\rangle$

$\rightarrow \langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^*$

3. Sea $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$\langle a|\alpha b + \beta c\rangle = \frac{1}{2}[\widetilde{\langle a|\alpha b + \beta c\rangle} - |q_1\rangle \odot \langle a|\alpha b + \beta c\rangle \odot |q_1\rangle]$

$= [(a^0(\alpha b^0 + \beta c^0) + a^i(\alpha b + \beta c)_i, a^0(\alpha b^i + \beta c^i) - (\alpha b^0 + \beta c^0)a^i + \varepsilon^{ijk}a_j(\alpha b + \beta c)_k]$

$= [\alpha(a^0b^0 + a^ib_i) + \beta(a^0c^0 + a^ic_i), \alpha(a^0b^i - b^0a^i) + \beta(a^0c^i - c^0a^i) + \alpha\varepsilon^{ijk}a_jb_k + \beta\varepsilon^{ijk}a_jc_k]$

$= \alpha[a^0b^0 + a^ib_i, a^0b_i - b^0a_i + \varepsilon^{ijk}a_jb_k] + \beta[a^0c^0 + a^ic_i, a^0c_i - c^0a^i + \varepsilon^{ijk}a_jc_k]$

$= \alpha\widetilde{\langle a|b\rangle} + \beta\widetilde{\langle a|c\rangle}$

Entonces

$\langle a|\alpha b + \beta c\rangle = \frac{1}{2}[(\alpha\widetilde{\langle a|b\rangle} + \beta\widetilde{\langle a|c\rangle} - |q_1\rangle \odot (\alpha\widetilde{\langle a|b\rangle} + \beta\widetilde{\langle a|c\rangle}) \odot |q_1\rangle)$

$= \frac{1}{2}[(\alpha\widetilde{\langle a|b\rangle} + \beta\widetilde{\langle a|c\rangle}) - |q_1\rangle \odot \alpha\widetilde{\langle a|b\rangle} \odot |q_1\rangle - |q_1\rangle \odot \beta\widetilde{\langle a|c\rangle} \odot |q_1\rangle]$

$= \frac{\alpha}{2}[\widetilde{\langle a|b\rangle} - |q_1\rangle \odot \widetilde{\langle a|b\rangle} \odot |q_1\rangle] + \frac{\beta}{2}[\widetilde{\langle a|c\rangle} - |q_1\rangle \odot \widetilde{\langle a|c\rangle} \odot |q_1\rangle]$

$= \alpha\langle a|b\rangle + \beta\langle a|c\rangle$

4. Sean $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$\langle \alpha a + \beta b | c\rangle = \langle c | \alpha a + \beta b\rangle^*$ (ya demostrado)

$= \langle \alpha \langle c|a\rangle + \beta\langle c|b\rangle\rangle^*$ (ya demostrado)

Usando las propiedades de los números complejos

- $(z+w)^* = z^* + w^*$; $z, w \in \mathbb{C}$
- $(zw)^* = z^* w^*$; $z, w \in \mathbb{C}$

$\rightarrow (\alpha\langle c|a\rangle + \beta\langle c|b\rangle)^* = \alpha^*\langle c|a\rangle^* + \beta^*\langle c|b\rangle^*$

$\rightarrow \langle \alpha a + \beta b | c\rangle = \alpha^*\langle a|c\rangle + \beta^*\langle b|c\rangle$

5. Sean $|a\rangle, |0\rangle \in V$

$\langle a|0\rangle = \frac{1}{2}[\langle \widetilde{a|0}\rangle - |q_1\rangle \odot \langle \widetilde{a|0}\rangle \odot |q_1\rangle]$

$= \frac{1}{2}[(a^* \odot 0) - |q_1\rangle \odot (a^* \odot 0) \odot |q_1\rangle]$

$= 0$

$\langle 0|a\rangle = \frac{1}{2}[\langle \widetilde{0|a}\rangle - |q_1\rangle \odot \langle \widetilde{0|a}\rangle \odot |q_1\rangle]$
$= 0$

Por lo tanto, $\langle a|0\rangle = \langle 0|a\rangle = 0$ ✓

i) Compruebe si la siguiente es una buena definición de norma para los cuaterniones:

$$n(|b\rangle) = \||a\rangle\| = \sqrt{\langle a|a\rangle} = \sqrt{|a\rangle^* \odot |a\rangle}.$$

Recordemos que $a^* \odot a = (a^0)^2 + (a^i)^2 \in \mathbb{K}$

Probemos sus propiedades

1. Sea $|a\rangle \in V$

$\|a\| = \sqrt{\langle a|a\rangle} = \sqrt{|a\rangle^* \odot |a\rangle} = \sqrt{(a^0)^2 + (a^i)^2}$

Como el argumento es ≥ 0, $\|a\| \geq 0$

2. Sea $|a\rangle \in V$ y $\alpha \in \mathbb{C}$

$\|\alpha|a\rangle\| = \langle \alpha a|\alpha a\rangle = \alpha\alpha^*\langle a|a\rangle = |\alpha|\,\||a\rangle\|$

3. Sea $|a\rangle, |b\rangle \in V$

$\|a+b\|^2 = \langle a+b|a+b\rangle = \langle a|a\rangle + \langle a|b\rangle + \langle b|a\rangle$
$+ \langle b|b\rangle$

$= \|a\|^2 + \|b\|^2 + \langle a|b\rangle + \langle a|b\rangle^*$

$= \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2Re(\langle a|b\rangle)$ ¿ $Re(\langle a|b\rangle) \leq |\langle a|b\rangle|$

$\leq \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2|\langle a|b\rangle|$ (como $|\langle a|b\rangle| \leq \|a\|\|b\|$)

$\rightarrow \|a\ \ b\|^2 \leq \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\|a\|\|b\|$

$\rightarrow \|a+b\|^2 \leq (\|a\| + \|b\|)^2$

$\rightarrow \|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$

j) Compruebe si un cuaternión definido por:

$\overline{|a\rangle} = |a\rangle^* / \||a\rangle\|^2$,

puede ser considerado como el inverso o elemento simétrico de $|a\rangle$, respecto a la multiplicación $\odot$.

Solución:

Nos piden demostrar que $\overline{|a\rangle} \odot |a\rangle = 1$, entonces

$\overline{|a\rangle} \odot |a\rangle = \frac{|a\rangle^*}{\|a\|^2} \odot |a\rangle = \frac{\langle a|a\rangle}{\|a\|^2} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|^2}$

$= |q_0\rangle = 1$

K) Compruebe si los cuaterniones $|a\rangle$ forman un grupo respecto a la operación multiplicación $\odot$. Construya la tabla de multiplicación para el grupo de cuaterniones.

Solución:

1. Cerradura de $\odot$. Sea $|a\rangle, |b\rangle \in V$ note que

$|a\rangle \odot |b\rangle = [a^0b^0 - a^ib^i (a^0b^i + b^0a^i + \varepsilon^{ijk}a_jb_k)|q_i\rangle]$
$= |c\rangle = (c^0, c^i|q_i\rangle) \rightarrow |a\rangle \odot |b\rangle \in V$

2. Asociatividad de $\odot$. Sea $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle \in V$

Un cuaternión cualquiera toma la forma de la matriz

$$|b\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}$$

entonces podemos tratar a $|a\rangle$ y $|b\rangle$ como las matrices A y B respectivamente ($|c\rangle \leftrightarrow C$)

$$(|a\rangle \odot |b\rangle) \odot |c\rangle = (AB)C = A(BC)$$

$$= |a\rangle \odot (|b\rangle \odot |c\rangle)$$

3. Existencia de un neutro. Sea $|a\rangle, |q_0\rangle \in V$ entonces

$$|a\rangle \odot |q_0\rangle = (a_0 + a_i |q_i\rangle) \odot 1 = a_0 + a_i |q_i\rangle = |a\rangle$$

4. Existencia de un inverso. Sea $|a\rangle$ y $|\bar{a}\rangle = |a\rangle^* / \|a\|^2 \in V$, entonces

$$|a\rangle \odot |\bar{a}\rangle = |a\rangle \odot \frac{|a\rangle^*}{\|a\|^2} = |q_0\rangle = 1$$

$$|\bar{a}\rangle \odot |a\rangle = \frac{|a\rangle^*}{\|a\|^2} \odot |a\rangle = |q_0\rangle = 1$$

$\odot$	1	$\tilde{i}$	$\tilde{j}$	$\tilde{k}$
1	1	$\tilde{i}$	$\tilde{j}$	$\tilde{k}$
$\tilde{i}$	$\tilde{i}$	-1	$\tilde{k}$	$-\tilde{j}$
$\tilde{j}$	$\tilde{j}$	$-\tilde{k}$	-1	$\tilde{i}$
$\tilde{k}$	$\tilde{k}$	$\tilde{j}$	$-\tilde{i}$	-1

1) Los vectores en $\mathbb{R}^3$ en coordenadas cartesianas, $|v\rangle$, pueden ser representados como cuaterniones, donde la parte escalar es nula $v^0 = 0 \rightarrow |v\rangle = v^j |q_j\rangle$. Compruebe si el siguiente producto conserva la norma:

$$|v'\rangle = |\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle$$

esto es:

$$\||v'\rangle\|^2 = (v^{1'})^2 + (v^{2'})^2 + (v^{3'})^2 = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2$$

$$= \||v\rangle\|^2$$

$$\|v'\|^2 = |v'\rangle \odot |v'\rangle^*$$
$$= (|\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle) \odot (|\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle)^*$$
$$= (|\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle) \odot (|a\rangle^* \odot |v\rangle^* \odot |\bar{a}\rangle^*)$$
$$= |\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot (|a\rangle \odot |a\rangle^*) \odot |v\rangle^* \odot |\bar{a}\rangle^*$$
$$= \|a\|^2 [|\bar{a}\rangle \odot (|v\rangle \odot |v\rangle^*) \odot |\bar{a}\rangle^*]$$
$$= \|a\|^2 \|v\|^2 |\bar{a}\rangle \odot |\bar{a}\rangle^* = \|a\|^2 \|\bar{a}\|^2 \|v\|^2$$

Entonces,

$$\|\bar{a}\|^2 = (\bar{a})^* \odot \bar{a} = \frac{(a^*)^*}{\|a\|^2} \odot \frac{a^*}{\|a\|^2} = \frac{a \odot a^*}{\|a\|^4}$$

$$= \frac{\|a\|^2}{\|a\|^4} = \frac{1}{\|a\|^2}$$

$$\rightarrow \|v'\|^2 = \|a\|^2 \frac{1}{\|a\|^2} \|v\|$$

$$\rightarrow \|v'\|^2 = \|v\|^2$$