Taller de Problemas 5

5) Considere el EV de las matrices complejas 2x2 hermíticas. Una matriz hermítica (o autoadjunta) será igual a su adjunta. Esto es, una matriz será igual a su transpuesta conjugada $(A^{\dagger})^i_j \Rightarrow (A^*)^j_i \equiv A^i_j$:

$$A \longleftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = A^{\dagger} = \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix} \text{ es decir}$$

$$\begin{cases} z_1^* = z_1 & \text{real,} \\ z_4^* = z_4 & \text{real,} \\ z_2^* = z_3 & \text{complejos.} \end{cases}$$

Entonces

a) Muestre que las matrices de Pauli $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ forman un espacio para ese espacio vectorial.

Solución: El espacio de matrices hermíticas 2x2 es un EV real. Su dimensión es 4. Se pide mostrar que las matrices de pauli forman una base. Las matrices son:

$$\sigma_0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para que formen una base, deben ser:

- Linealmente independientes (sobre $\mathbb{R}$)
- Generar todo el espacio de matrices hermíticas

Escribimos $z_2 = x + iy$ (con $x, y \in \mathbb{R}$). Entonces:

$$A = \begin{pmatrix} z_1 & x+iy \\ x-iy & z_4 \end{pmatrix}$$

Busquemos coeficientes reales $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tales que:

$$A = \alpha\sigma_0 + \beta\sigma_1 + \gamma\sigma_2 + \delta\sigma_3$$

$$A = \alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha+\delta & \beta - i\gamma \\ \beta + i\gamma & \alpha - \delta \end{pmatrix}$$

igualamos con $\begin{pmatrix} z_1 & x+iy \\ x-iy & z_4 \end{pmatrix}$

- $\alpha + \delta = z_1$
- $\beta - i\gamma = x + iy$
- $\beta + i\gamma = x - iy$
- $\alpha - \delta = z_4$

$$\left.\begin{matrix} \beta - i\gamma = x+iy \\ \beta + i\gamma = x-iy \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \beta = x \\ \gamma = -y \end{matrix}$$

$$\alpha = \frac{a+b}{2}, \quad \delta = \frac{a-b}{2}$$

Como los coeficientes son reales distintos de cero, generan A. Así, $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ genera todo el espacio

b) Compruebe que esa base es ortogonal bajo la definición de producto interno $\langle a|b\rangle \rightleftharpoons Tr(A^{\dagger}B)$.

Solución: Note que, como las matrices de Pauli son hermíticas ($A^{\dagger} = A$), el producto interno se simplifica a:

$$\langle a|b\rangle \rightleftharpoons Tr(A^{\dagger}B) = Tr(AB)$$

Luego, debemos mostrar que para $i \neq j$:

$$\langle\sigma_i|\sigma_j\rangle = Tr(\sigma_i\sigma_j) = 0$$

y para $i = j$, $\langle\sigma_i|\sigma_j\rangle \neq 0$

Ahora, calculamos los productos internos

$$Tr(\sigma_0\sigma_0) = Tr(I) = 2$$

Para $i = 1,2,3$: $\langle\sigma_0|\sigma_i\rangle = Tr(\sigma_0\sigma_i) = Tr(\sigma_i) = 0$

Para $i, j \in \{1,2,3\}$; si $i = j$

$$\langle\sigma_i|\sigma_j\rangle = Tr(\sigma_i^2) = Tr(I) = 2$$

si $i \neq j$: $\langle \sigma_i | \sigma_j \rangle = Tr(\sigma_i \sigma_j)$

Sabemos que $\sigma_i \sigma_j = i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$, que es una matriz de traza cero. Por lo tanto:

$$Tr(\sigma_i \sigma_j) = 0 \quad \text{para } i \neq j$$

C) Explore si se pueden construir subespacios vectoriales de matrices reales e imaginarios puros

Solución: Una matriz hermítica es real si todas sus entradas son reales. Esto requieres: $y=0$ y, por tanto, $z_2 = x \in \mathbb{R}$. La matriz queda

$$A_{real} = \begin{pmatrix} z_1 & x \\ x & z_4 \end{pmatrix}, \quad z_1, z_4, x \in \mathbb{R}$$

Este es un subespacio vectorial de dimensión 3. Una base posible es $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_3\}$

Podemos considerar matrices que sean puramente imaginarias en el sentido de que sus entradas sean imaginarios puros. Pero para que sea hermítica, debemos tener

- z_1 y $z_4 = 0$

- z_2 debe ser imaginario puro: $z_2 = iy$ donde $y \in \mathbb{R}$ y $z_2^* = -iy$; entonces

$$A_{imaginaria} = \begin{pmatrix} 0 & iy \\ -iy & 0 \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{R}$$

Esto es un subespacio de dimensión 1. Una base es $\{\sigma_2\}$