Taller de Problemas 1

3) Demuestre que: $A^{i'}_{k}\tilde{A}^{j}_{i'} = \delta^{j}_{k}$, y además, como un caso especial, establecer la relación con los cosenos directores que satisfacen:

$$\cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 + \cos(\gamma)^2 = 1$$

Solución: Sean x^i las coordenadas originales y $x^{i'}$ las coordenadas transformadas. La matriz de transformación $A^{i'}_{k}$ se define como las derivadas parciales de las nuevas coordenadas respecto a las originales:

$$A^{i'}_{k} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{k}}$$

Su inversa $\tilde{A}^{j}_{i}$ es el jacobiano de la transformación inversa:

$$\tilde{A}^{j}_{i'} = \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{i'}}$$

Por lo tanto, las derivadas parciales satisface

$$\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{k}} = \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{k}}$$

El lado izquierdo es la delta de Kronecker δ^{j}_{k} y el lado derecho es el producto $\tilde{A}^{j}_{i'}A^{i'}_{k}$, por lo tanto

$$A^{i'}_{k}\tilde{A}^{j}_{i'} = \delta^{j}_{k}$$

Cosenos Directores:

Para un vector unitario $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ los cosenos directores son:

$$\cos(\alpha) = v_1,\ \cos(\beta) = v_2,\ \cos(\gamma) = v_3$$

donde α, β, γ son los ángulos entre $\vec{v}$ y los ejes x, y, z.

Entonces

$$|\vec{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 + \cos(\gamma)^2 = 1$$

4) Considere el radio vector posición $\vec{r} = x^i \hat{\imath}_i \equiv x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ en 2 dimensiones. Dado el conjunto de transformaciones que se indican a continuación, demuestre en cuales casos los componentes de $\vec{r}$ transforman como verdaderos componentes de vectores.

$$(x,y) \to (-y, x),\quad (x,y) \to (x,-y),$$

$$(x,y) \to (x-y, x+y),\quad (x,y) \to (x+y, x-y)$$

Solución:

• $(x,y) \to (-y,x)$ $\quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$\det(A_1) = 1$ (rotación)

Norma preservada: $(-y)^2 + x^2 = x^2 + y^2$

Si es transformación vectorial

• $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ $\quad (x,y) \to (x,-y)$

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A_2) = -1$ (reflexión)

Norma preservada: $x^2 + (-y)^2 = x^2 + y$

Si es transformación vectorial

• $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A_3}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$ $\quad \det(A_3) = 2$

Norma no preservada: $2x^2 + 2y^2 \neq x^2 + y^2$

No es transformación vectorial estándar

• $(x,y) \to (x+y,\ x-y)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det(A_4) = -2$

Norma no preservada: $2x^2+2y^2 \neq x^2+y^2$

No es transformación vectorial estándar

Taller de Problemas 2

2) Considere que:

• $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} = x^i \hat{\imath}_i$

• $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}(x,y,z) = a^i(x,y,z)\hat{\imath}_i$ y
$\vec{b} = \vec{b}(\vec{r}) = \vec{b}(x,y,z) = b^i(x,y,z)\hat{\imath}_i$,

• $\phi = \phi(\vec{r}) = \phi(x,y,z)$ y
$\psi = \psi(\vec{r}) = \psi(x,y,z)$

Utilizando la notación de índices, e inspirándose en el ejemplo demuestre las siguientes identidades vectoriales:

a) $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$.

d) $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{a})$ ¿Qué se puede decir de $\nabla\times(\nabla\cdot\vec{a})$?

f) $\nabla\times(\nabla\times\vec{a}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{a}) - \nabla^2\vec{a}$.

Solución:

a) Expresamos el gradiente en notación de índices:

$$(\nabla(\phi\psi))_i = \partial_i(\phi\psi)$$

Aplicamos la regla del producto

$$\partial_i(\phi\psi) = \phi\partial_i\psi + \psi\partial_i\phi$$

Reemplazamos con notación vectorial

$$\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$$

d) $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{a}) = \partial_i(\nabla\times\vec{a})_i = \partial_i(\varepsilon_{ijk}\partial_j a_k)$

Usamos la antisimetría del tensor ε_{ijk}

$$\partial_i \varepsilon_{ijk}\partial_j a_k = \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j a_k$$

$\partial_i\partial_j$ es simétrico en i,j, pero ε_{ijk} es antisimétrico, la contracción entre estos dos es 0

$$\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j a_k = 0$$

Para $\nabla\times(\nabla\cdot\vec{a})$

Sabemos que $\nabla\cdot\vec{a}$ forma un escalar, luego, el producto vectorial no está definido para un escalar. Por lo tanto, esta operación es inválida.

f) $\nabla\times(\nabla\times\vec{a}) = \varepsilon_{ijk}\partial_j(\nabla\times\vec{a})_k$

$= \varepsilon_{ijk}\partial_j\varepsilon_{kmn}\partial_m a_n$

$= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\partial_j\partial_m a_n = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk}\partial_j\partial_m a_n$

$= (\delta^i_m\delta^j_n - \delta^i_n\delta^j_m)\partial_j\partial_m a_n$

$= \delta^i_m\delta^j_n\partial_j\partial_m a_n - \delta^i_n\delta^j_m\partial_j\partial_m a_n$

$= \delta^i_m\partial_m\delta^j_n\partial_j a_n - \delta^i_n a_n\delta^j_m\partial_j\partial_m$

$= \partial_i(\partial_j a_n) - a_i(\partial_j\partial_m)$

$= \nabla(\nabla\cdot\vec{a}) - \nabla^2\vec{a}$

2) Demuestre

a) $\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)\,\text{sen}^2(\alpha)$

b) $\text{sen}(3\alpha) = 3\cos^2(\alpha)\,\text{sen}(\alpha) - \text{sen}^3(\alpha)$

Solución: Utilizamos la fórmula de De Moivre

$$[\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta)]^n = \cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)$$

Entonces

$\cos(3\alpha) + i\,sen(3\alpha) = [\cos(\alpha) + i\,sen(\alpha)]^3$

$= \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)sen^2(\alpha) + i[3\cos^2(\alpha)sen(\alpha) - sen^3(\alpha)]$

igualando la parte real e imaginaria tendremos:

a)
$\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)sen^2(\alpha)$

b)
$sen(3\alpha) = 3\cos^2(\alpha)sen(\alpha) - sen^3(\alpha)$

3) Encuentre todas las raices de las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{2i}$ c) $(-1)^{1/3}$ e) $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$
b) $\sqrt{1-\sqrt{3}i}$ d) $8^{1/6}$

Solución:

Las raices de un número complejo se obtiene de la siguiente relación:

$z^{1/n} = [|z|(\cos(\theta) + i\,sen(\theta))]^{1/n}$

$= |z|^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,sen\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$

donde $k = 0, 1, \dots, n-1.$

a) $z^2 = 2i \rightarrow z = \sqrt{2i}$

$|z| = 2 \quad \theta = \pi/2 \quad n = 2$

$z_0 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$\boxed{z_0 = 1 + i}$

$z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\,sen\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$

$\boxed{z_1 = -1 - i}$

b) $z = 1 - i\sqrt{3} \rightarrow |z| = 2 \quad \theta = -\pi/3$

$z_0 = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,sen\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$\boxed{z_0 = \sqrt{6}/2 - i\sqrt{2}/2}$

$z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\,sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

$\boxed{z_1 = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}}$

c) $z = -1 \rightarrow |z| = 1 \quad \theta = \pi$

$z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,sen\left(\frac{\pi}{3}\right) =$

$\boxed{z_0 = 1/2 + i\sqrt{3}/2}$

$z_1 = \cos(\pi) + i\,sen(\pi)$

$\boxed{z_1 = -1}$

$z_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\,sen\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

$\boxed{z_2 = 1/2 - i\sqrt{3}/2}$

d) $z = 8 \rightarrow |z| = 8 \quad \theta = 0$

$z_0 = \sqrt{2}\,[\cos(0) + i\,sen(0)]$

$\boxed{z_0 = \sqrt{2}}$

$z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$\boxed{z_1 = \sqrt{2}(1/2 + i\sqrt{3}/2)}$

$z_2 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$\boxed{z_2 = \sqrt{2}(-1/2 + i\sqrt{3}/2)}$

$z_3 = \sqrt{2}\,[\cos(\pi) + i\,sen(\pi)] =$

$\boxed{z_3 = -\sqrt{2}}$

$z_4 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\,sen\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]$

$\boxed{z_4 = \sqrt{2}(-1/2 - i\sqrt{3}/2)}$

$z_5 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\,sen\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right]$

$\boxed{z_5 = \sqrt{2}(1/2 - i\sqrt{3}/2)}$

e) $z = -8 - 8\sqrt{3}i \rightarrow |z| = 16 \quad \theta = 4\pi/3$

$z_0 = 2[\cos(\frac{\pi}{3}) + i\,\text{sen}(\frac{\pi}{3})]$

$\boxed{z_0 = 1 + i\sqrt{3}}$

$z_1 = 2[\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\,\text{sen}(\frac{5\pi}{6})]$

$\boxed{z_1 = -\sqrt{3} + i}$

$z_2 = 2[\cos(\frac{4\pi}{3}) + i\,\text{sen}(\frac{4\pi}{3})]$

$\boxed{z_2 = -1 - i\sqrt{3}}$

$z_3 = 2[\cos(\frac{11\pi}{6}) + i\,\text{sen}(\frac{11\pi}{6})]$

$\boxed{z_3 = \sqrt{3} - i}$

6) Demuestre que:

a) $\text{Log}(-ie) = 1 - i\pi/2$

b) $\text{Log}(1-i) = 1/2\,\text{Ln}(2) - i\pi/4$

c) $\text{Log}(e) = 1 + 2n\pi i$

d) $\text{Log}(i) = (2n + 1/2)\pi i$

Solución: utilizamos $\text{Log}(z) = \text{Ln}|z| + i(\theta + 2\pi n)$

a) $\text{Log}(-ie) = \text{Ln}(e) + i(-\pi/2 + 2\pi n)$

$= 1 - i\pi/2 + 2\pi n i$

$\text{Log}(-ie) = 1 - i\pi/2 \rightarrow n = 0$

b) $\text{Log}(1-i) = \text{Ln}\sqrt{2} + i(-\pi/4 + 2\pi n)$

$= \frac{1}{2}\text{Ln}\,2 - i\pi/4 + 2\pi n$

$\text{Log}(1-i) = \frac{1}{2}\text{Ln}\,2 - i\pi/4 \rightarrow n = 0$

c) $\text{Log}(e) = \text{Ln}\,e + i(0 + 2\pi n)$

$\text{Log}(e) = 1 + 2\pi n i$

d) $\text{Log}(i) = \text{Ln}(1) + i(\pi/2 + 2\pi n)$

$\text{Log}(i) = i\pi(1/2 + 2n)$