Taller de Problemas 7 Pag 176.

6) En el caso tridimensional tenemos que, si $\{e_i\}$ define un sistema de coordenadas (dextrógiro) y no necesariamente ortogonal, entonces demuestre que:

a) $e^i = \dfrac{e_j \times e_k}{e_i \cdot (e_j \times e_k)}$, $i,j,k = 1,2,3$ y sus permutaciones cíclicas

Solución:
Sea $\{e_i\}$ una base (no necesariamente ortogonal) en $\mathbb{R}^3$. La base dual $\{e^i\}$ se define mediante la relación

$$e^i \cdot e_j = \delta^i_j$$

Dado que $\{e_i\}$ es una base dextrógira, el producto escalar $e_i \cdot (e_j \times e_k)$ es no nulo y positivo para permutaciones cíclicas de 1, 2, 3. Además, se cumple $e^i = \alpha (e_j \times e_k)$ debido a que cada uno de los vectores base duales es perpendicular a los otros dos de la base dual, como $e_1 \cdot e^1 = 1$, entonces:

$\alpha e_1 \cdot (e_2 \times e_3) = 1 \rightarrow \alpha = \dfrac{1}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)}$

$\rightarrow e^1 = \dfrac{e_2 \times e_3}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)}$ y, en general

$$e^i = \frac{e_j \times e_k}{e_i \cdot (e_j \times e_k)}$$

b) Si los volumenes: $V = e_1 \cdot (e_2 \times e_3)$ y $\tilde{V} = e^1 \cdot (e^2 \times e^3)$, entonces $V\tilde{V} = 1$

Solución: tenemos que, por la propiedad anterior

$e^i = \dfrac{e_j \times e_k}{e_i \cdot (e_j \times e_k)} \rightarrow$ pero $V = e_i \cdot (e_j \times e_k)$

$\rightarrow e^i = \dfrac{e_j \times e_k}{V}$

Notemos que

$\tilde{V} = e^i \cdot (e^j \times e^k)$

Sabemos que

$e^j = \dfrac{e_k \times e_i}{V}$, $e^k = \dfrac{e_i \times e_j}{V}$

Luego

$e^j \times e^k = \dfrac{1}{V^2} [e_k \times e_i \times e_i \times e_j]$

Aplicando propiedades

$\rightarrow \quad = \dfrac{1}{V^2} [e_k \cdot (e_i \times e_j)] e_i - [e_k \cdot (\overset{0}{e_i \times e_i})] e_j$

$\rightarrow e^j \times e^k = \dfrac{1}{V^2} [\underbrace{e_k \cdot (e_i \times e_j)}_{V}] e_i$

$\rightarrow e^j \times e^k = \dfrac{1}{V^2} V e_i$

Reemplazamos:

$\tilde{V} = e^i \cdot \dfrac{1}{V} e_i \Rightarrow V\tilde{V} = e^i \cdot e_i = \delta^i_i = 1$

c) ¿Qué vector satisface $\vec{a} \cdot e^i = 1$? Demuestre que $\vec{a}$ es único

Solución: Supongamos un vector $\vec{a}$ que satisface

$$\vec{a} = a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^3 e_3$$

Luego, hacemos el producto escalar:

$\vec{a} \cdot e^i = (a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^3 e_3) \cdot e^i$
$= a^1 e_1 \cdot e^i + a^2 e_2 \cdot e^i + a^3 e_3 \cdot e^i$
$= a^1 \delta^i_1 + a^2 \delta^i_2 + a^3 \delta^i_3 = a^i$

Pero $\vec{a} \cdot e^i = 1 \rightarrow a^i = 1$, entonces $\vec{a} = e_1 + e_2 + e_3 = e_i$

Ahora, supongamos un vector $\vec{b}$, tal que

$$\vec{b} = b^1 e_1 + b^2 e_2 + b^3 e_3$$

Luego, hacemos el producto escalar $\vec{b} \cdot e^i = (b^1 e_1 + b^2 e_2 + b^3 e_3) \cdot e^i$
$= b^i = 1$

entonces $\vec{b} = e_1 + e_2 + e_3 = \vec{a}$, luego $\vec{a}$ es único

d) Encuentre el producto vectorial de dos vectores a y b que están representados en un sistema de coordenadas oblicuo: Dada la base: $w_1 = 4\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, $w_2 = 3\hat{i} + 3\hat{j}$, $w_3 = 2\hat{k}$. Entonces encuentre:

I) Las bases recíprocas $\{e^i\}$

II) Las componentes covariantes y contravariantes del vector $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$.

Solución:

I) Las bases recíprocas se calculan como

$$e^1 = \frac{w_2 \times w_3}{w_1 \cdot (w_2 \times w_3)}, \quad e^2 = \frac{w_3 \times w_1}{w_2 \cdot (w_3 \times w_1)}$$

$$e^3 = \frac{w_1 \times w_2}{w_3 \cdot (w_1 \times w_2)}$$

Sabemos que el producto triple nos da el volumen conformado por los tres vectores, lo cual implica que es el mismo sin importar el orden, entonces:

$$w_2 \times w_3 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6\hat{i} - 6\hat{j}$$

$$w_1 \cdot (w_2 \times w_3) = 4 \cdot 6 - 2 \cdot 6 + 1 \cdot 0 = 12$$

Luego, calculamos el numerador de cada componente

$$w_3 \times w_1 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4\hat{i} + 8\hat{j}$$

$$w_1 \times w_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$$

Entonces:

$$e^1 = \frac{1}{12}(6\hat{i} - 6\hat{j}) = \frac{1}{2}\hat{i} - \frac{1}{2}\hat{j}$$

$$e^2 = \frac{1}{12}(-4\hat{i} + 8\hat{j}) = -\frac{1}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j}$$

$$e^3 = \frac{1}{12}(-3\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}) = -\frac{1}{4}\hat{i} + \frac{1}{4}\hat{j} + \frac{1}{2}\hat{k}$$

II) Componentes contravariantes a^i: Son las proyecciones de la base dual

$$a^i = \vec{a} \cdot e^i$$

$$a^1 = \vec{a} \cdot e^1 = (1,2,3) \cdot (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 0) = -1/2$$
$$a^2 = \vec{a} \cdot e^2 = (1,2,3) \cdot (-1/3, 2/3, 0) = 1$$
$$a^3 = (1,2,3) \cdot (-1/4, 1/4, 1/2) = 7/4$$

Componentes covariantes a_i: Son las proyecciones sobre la base original

$$a_i = \vec{a} \cdot w_i$$

$$a_1 = \vec{a} \cdot w_1 = (1,2,3) \cdot (4,2,1) = 11$$
$$a_2 = \vec{a} \cdot w_2 = (1,2,3) \cdot (3,3,0) = 9$$
$$a_3 = \vec{a} \cdot w_3 = (1,2,3) \cdot (0,0,2) = 6$$

7) Considere una vez más el EV de matrices hermíticas 2×2, y la definición de producto interno $\langle a|b \rangle \rightleftarrows Tr(A^{+}B)$. Hemos comprobado que las matrices de Pauli $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ y la matriz unitaria forman una base para ese espacio. Encuentre entonces la base dual asociada a las base de Pauli y, adicionalmente, dado un vector genérico en este EV encuentre su 1-forma asociada.

Solución: tenemos que las matrices de Pauli son hermíticas y, se cumple la propiedad

$$\langle \sigma_\mu | \sigma_\alpha \rangle = Tr(\sigma_\mu^{+} \sigma_\alpha) = Tr(\sigma_\mu \sigma_\alpha)$$

Note que, $Tr(\sigma_\mu \sigma_\alpha) = 2\delta_\alpha^\mu$ $\mu, \alpha = 0, 1, 2, 3$.

Supongamos una base dual $\{e^{\mu}\}$ que satisfaga $\langle e^{\mu} | \sigma_\alpha \rangle = \delta^{\mu}_{\alpha}$

Dado que las matrices de Pauli son ortogonales, proponemos

$$e^\mu = c^\mu \sigma_\mu , \quad c^\mu \in \mathbb{R}$$

Entonces, $\langle e^\mu | \sigma_\alpha \rangle = Tr(e^\mu \sigma_\alpha)$
$\rightarrow \langle e^\mu | \sigma_\alpha \rangle = c^\mu Tr(\sigma_\mu \sigma_\alpha)$
$\rightarrow Tr(\sigma_\mu \sigma_\alpha) = 2\delta^\mu_\alpha$
$c^\mu \cdot 2\delta^\mu_\alpha = \delta^\mu_\alpha$, para $\mu = \alpha$
$c^\mu \cdot 2 = 1 \rightarrow c^\mu = 1/2$

Así, la base dual es $e^\mu = \frac{1}{2}\sigma_\alpha$

Un vector genérico A en el espacio se escribe como:

$$A = a^0\sigma_0 + a^1\sigma_1 + a^2\sigma_2 + a^3\sigma_3$$

Las componentes contravariantes a^μ son los coeficientes en la expansión de A en la base $\{\sigma_\mu\}$.

Las componentes covariantes a_μ se obtienen proyectando A sobre la base dual: $a_\mu = \langle A | e_\mu \rangle$
O simplemente $a_\mu = \langle A | \sigma_\mu \rangle = Tr(A\sigma_\mu)$

$\rightarrow a_\mu = Tr(a^\alpha \sigma_\alpha \sigma_\mu) = a^\alpha Tr(\sigma_\alpha \sigma_\mu)$
$= a^\alpha Tr(\sigma_\mu \sigma_\alpha) = a^\alpha 2\delta^\mu_\alpha =$
$= 2a^\mu \rightarrow a_\mu = 2a^\mu$

La componente covariante es el doble que la contravariante

La 1-forma $\tilde{A}$ es un funcional lineal que actúa sobre vectores B como

$$\tilde{A}(B) = \langle A | B \rangle$$

en términos de la base dual $\{e^\mu\}$, la 1-forma se expande como

$$\tilde{A} = a_0 e^0 + a_1 e^1 + a_2 e^2 + a_3 e^3,$$

donde a_μ son las componentes covariantes de A
sustituyendo $a_\mu = 2a^\mu$ y $e^\mu = \frac{1}{2}\sigma_\mu$

$$\tilde{A} = (2a^0)(1/2\,\sigma_0) + (2a^1)(1/2\,\sigma_1) + (2a^2)(1/2\,\sigma_2) + (2a^3)(1/2\,\sigma_3)$$

$$\rightarrow \tilde{A} = a^0\sigma_0 + a^1\sigma_1 + a^2\sigma_2 + a^3\sigma_3$$

Luego $\tilde{A} = A$ (los vectores y sus 1-formas asociadas se representan de la misma manera.