Feuille de travaux pratiques #2

On rappelle que pour exploiter tout le potentiel de Python dans un contexte mathématique, il est nécessaire d'installer ou d'importer un certain nombre de modules à chaque session. Pour cette séance, on pourra par exemple charger les modules suivants :

```
import math
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
import numpy.random as rd
from random import *
from scipy.stats import *
```

Comme nous l'avons vu / allons le voir en cours, il existe différents modes de convergence pour les suites de variables aléatoires. Étant donné un espace de probabilté $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on dit par exemple qu'une suite (X_n) de variables aléatoires réelles converge presque sûrement vers une variable X si

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega, \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1.$$

On dit qu'une suite (X_n) de variables aléatoires réelles converge en loi vers une variable X

$$F_{X_n}(t) = \mathbb{P}(X_n \leq t) \xrightarrow{n\to+\infty} F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t),$$

en tout point t de continuité de la fonction de répartition F_X.

Exercice 1. *Modèle de Wright–Fischer*
On fixe un entier $N \geq 1$. On définit une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, N\}$ comme suit : $X_0 = k \in \{0, \ldots N\}$ fixé et déterministe et pour $n \geq 0$ on choisit X_{n+1} selon une loi binomiale $\mathcal{B}(N, \frac{X_n}{N})$.

1. Générer et tracer une trajectoire de la suite $(X_n)_{n\geq 0}$.
2. Illustrer le fait que lorsque n tend vers l'infini, (X_n) converge presque sûrement vers une variable limite X_∞ à valeurs dans le $\{0, N\}$.
3. On choisit $N = 100$, $n = 1000$, $m = 1000$, simuler m fois la variable X_n et déterminer la proportion de fois ou $X_n = 0$. Répéter l'opération en faisant variant le point de départ $k \in \{0, \ldots N\}$, que remarquez-vous ?
4. On fixe $0 < \alpha < 1$, et on choisit maintenant X_{n+1} selon une loi binomiale de paramètres $\mathcal{B}\left(N, \alpha\frac{X_n}{N} + (1-\alpha)\left(1 - \frac{X_n}{N}\right)\right)$. Que remarquez-vous sur les trajectoires ?

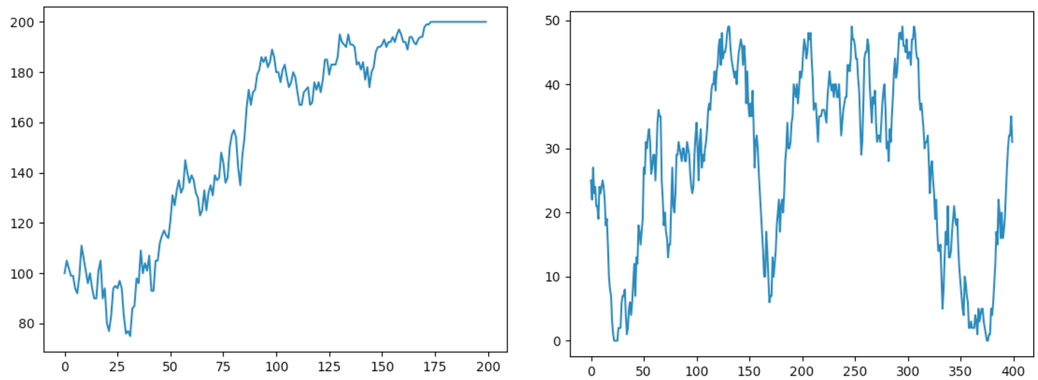

Figure 1 – Deux trajectoires du modèle de Wright-Fisher, sans et avec mutation.

Exercice 2. *Urne de Polya*
On dispose d'un stock infini de balles de 2 couleurs, disons rouges et bleues. Dans une urne, on place initialement 1 boule rouge et 1 balle bleu. On tire une balle au hasard dans l'urne, si elle est rouge on la remet dans l'urne avec une nouvelle balle rouge, si elle est bleue on la remet dans l'urne avec une nouvelle balle bleue. Après n étapes, il y a ainsi $n+2$ balles au total dans l'urne, on note N_n le nombre de balle rouges dans l'urne après n étapes et $X_n = \frac{N_n}{n+2}$ la proportion de balles rouges dans l'urne. On a ainsi $N_0 = 1$, $X_0 = 1/2$ et

$$N_{n+1} = \begin{cases} N_n + 1 & \text{avec probabilité } \; X_n, \\ N_n & \text{avec probabilité } \; 1 - X_n. \end{cases}, \qquad X_{n+1} = \frac{N_{n+1}}{n+3}.$$

1. Générer et tracer une trajectoire de la suite $(X_n)_{n\geq 0}$.
2. Illustrer le fait que lorsque n tend vers l'infini, (X_n) converge presque sûrement vers une variable limite X_∞ à valeurs dans le $[0,1]$.
3. On choisit $n = 500$, $m = 1000$, simuler m fois la variable X_n et tracer la fonction de répartition empirique des données. Superposer la fonction de répartition d'une variable uniforme sur $[0,1]$. Que remarquez-vous ?

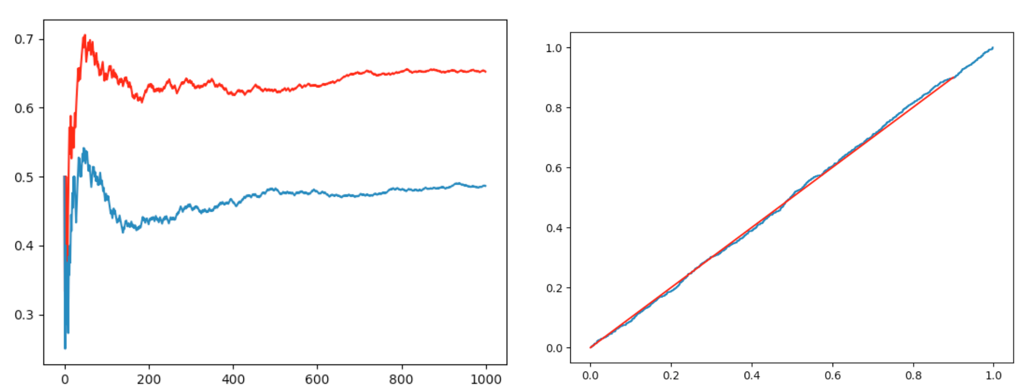

Figure 2 – Deux trajectoires du modèle de Polya et la fonction répartition empirique.

Exercice 3. *Théorème limite fondamentaux*
On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ indépendantes et toutes de même loi, de variance finie σ^2, par exemple des variables de Bernoulli, Poisson, géométriques, exponentielles, gaussiennes etc. On s'intéresse au comportement asymptotique de la somme $S_n := X_1 + \ldots + X_n$.

1. Pour vos lois usuelles favorites, tracer plusieurs trajectoires de la suite $(S_n/n - \mathbb{E}[X_1])_{n\geq 1}$. Que remarquez-vous ?

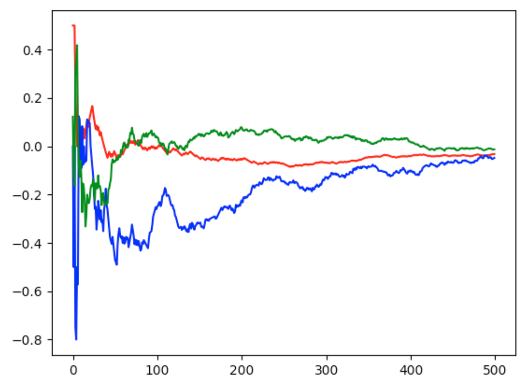

FIGURE 3 – Trajectoires de $S_n/n - \mathbb{E}[X_1]$.

2. Pour $n = 1000$ et $m = 1000$, générer m réalisations de $\sqrt{n}(S_n/n - \mathbb{E}[X_1])$ et tracer l'histogramme ou la fonction de répartition empirique correspondants. On pourra superposer le graphe de la densité gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Que remarquez-vous ?

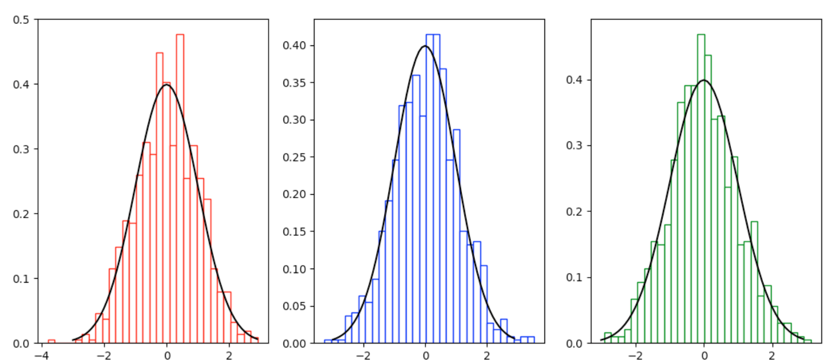

FIGURE 4 – Histogrammes empiriques et densité gaussienne.

Exercice 4. *Loi des événements rares*
Soient $\lambda > 0$ et (X_n) une suite de variables aléatoires telles que X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$.

1. Pour $n = 1000$, simuler $m = 10000$ réalisations de la variable X_n.
2. Tracer la fonction de répartition empirique associée.
3. Superposer la fonction de répartition d'une variable de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

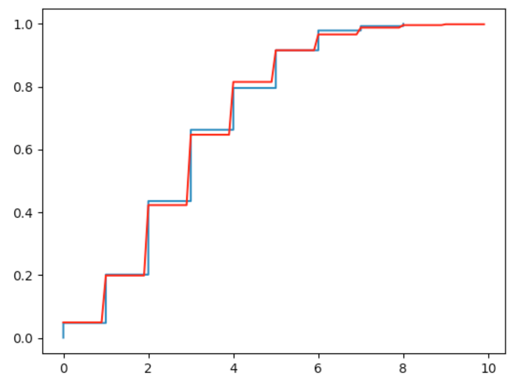

FIGURE 5 – Fonctions de répartition empirique et théorique dans la loi des événements rares.

Exercice 5. *Polynômes trigonométriques aléatoires*
Soient a_k, b_k des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On considère la suite de polynômes trigonométriques aléatoires

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx), \quad x \in [0, 2\pi].$$

1. Programmer une fonction qui calcule le nombre N_n de zéros de f_n dans $[0, 2\pi]$.
2. Illustrer le fait que N_n/n converge presque sûrement vers $2/\sqrt{3}$.
3. Remplacer les variables $\mathcal{N}(0,1)$ par des variables de Rademacher, que remarquez-vous ?

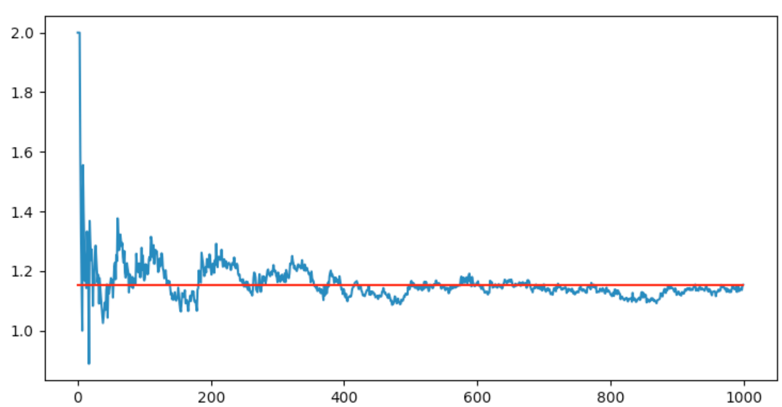

FIGURE 6 – Nombre de zéros réels de f_n en fonction de n.