Programmation logique

Samuel Gallay

24 mai 2021

Plan de l’exposé

Sauf mention explicite de votre part, seules les trois premières parties seront présentées :

I. Principe général

II. Implémentation de l’interpréteur Prolog

III. Le puzzle du zèbre

IV. Subtilités intéressantes du code

V. Application au contrôle d’accès - Sécurité

VI. Logique : rappels, Prolog et clauses définies

Exemple de programme Prolog

```
apprend(eve, mathematiques).
apprend(benjamin, informatique).
apprend(benjamin, physique).
enseigne(alice, physique).
enseigne(pierre, mathematiques).
enseigne(pierre, informatique).

étudiant_de(E,P):-apprend(E,M), enseigne(P,M).

étudiant(E, pierre) ?
```

L’analyse syntaxique

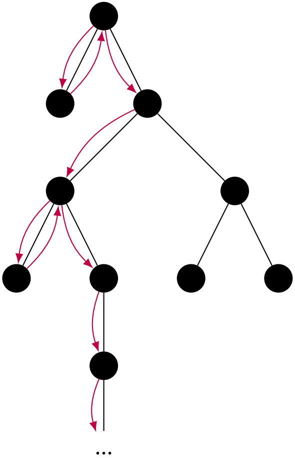
Syntaxe minimale de Prolog sous la forme de Backus-Naur :

```
<Caractère> ::= 'a'..'z' | 'A'..'Z' | '_' | '0'..'9'
<Mot>       ::= <Caractère> | <Caractère> <Mot>
<Prédicat>  ::= 'a'..'z' | 'a'..'z' <Mot>
<Variable>  ::= 'A'..'Z' | 'A'..'Z' <Mot>
<Programme> ::= <Clause> | <Clause> <Programme>
<Clause>    ::= <Terme> '.' | <Terme> ':-' <ListeTermes> '.'
```

```
type var = Id of string * int
type term = Var of var | Predicate of string * (term list)
type clause = Clause of term * (term list)
```

La grammaire est $LL(1)$. Résultat : 1 Mo/sec à 1GHz.

Le retour sur trace



Il faut choisir dans quel ordre utiliser les clauses !

Solution utilisée en Prolog : parcours en profondeur.

Avantage

Faible cout en mémoire.

Inconvénient

Risque manquer des solutions (boucles infinies).

L’arbre de recherche

Utilisation de l’évaluation paresseuse pour représenter l’arbre possiblement infini :

```
type 'a tree = Leaf of 'a | Node of 'a tree Lazy.t list
```

Je transforme l’arbre en une séquence possiblement infinie de ses feuilles (les solutions) :

```
let rec to_seq = function
| Leaf str → Seq.return str
| Node tl → Seq.flat_map
  (fun par → to_seq (Lazy.force par)) (list_to_seq tl)
```

J’applique des filtres sur cette séquence, et il suffit d’itérer les solutions.

Le problème du zèbre (*Life International*, 1962)

```
There are five houses.
The Englishman lives in the red house.
The Spaniard owns the dog.
Coffee is drunk in the green house.
The Ukrainian drinks tea.
The green house is immediately to the right
  of the ivory house.
The Old Gold smoker owns snails.
Kools are smoked in the yellow house.
Milk is drunk in the middle house.
The Norwegian lives in the first house.
The man who smokes Chesterfields lives in the house
  next to the man with the fox.
Kools are smoked in the house next to the house
  where the horse is kept.
The Lucky Strike smoker drinks orange juice.
The Japanese smokes Parliaments.
The Norwegian lives next to the blue house.

Now, who drinks water? Who owns the zebra?
```

Le problème du zèbre

```
member(X, [X | Xs]).
member(X, [Y | Ys]) :- member(X, Ys).

isright(L, R, [L, R | T]).
isright(L, R, [H | T]) :- isright(L, R, T).

nextto(A, B, X) :- isright(A, B, X).
nextto(A, B, X) :- isright(B, A, X).

equal(X, X).
```

Le problème du zèbre

```
zebra(H, W, Z):-
equal(H, [[norwegian, _, _, _, _], _,
          [_, _, _, milk, _], _, _]),
member([englishman, _, _, _, red], H),
member([spaniard, dog, _, _, _], H),
...
nextto([norwegian, _, _, _, _], [_, _, _, _, blue], H),
isright([_, _, _, _, ivory], [_, _, _, _, green], H),
...
member([W, _, _, water, _], H),
member([Z, zebra, _, _, _], H).

zebra(Houses, WaterDrinker, ZebraOwner) ?
```

Conclusion

Efficacité du langage Prolog pour résoudre des problèmes de logique.

Pas besoin d'expliquer à l'ordinateur comment résoudre le problème : moins d'erreurs possible.

Typage et variants polymorphes

```ocaml
type id = Id of string * int

type term =
  [ `GeneralVar of id
  | `TableVar of id
  | `EmptyTable
  | `Table of term * table
  | `Predicate of string * term list ]

and table = [ `TableVar of id | `EmptyTable
            | `Table of term * table ]

type var = [ `GeneralVar of id | `TableVar of id ]
```

Algorithme d'unification

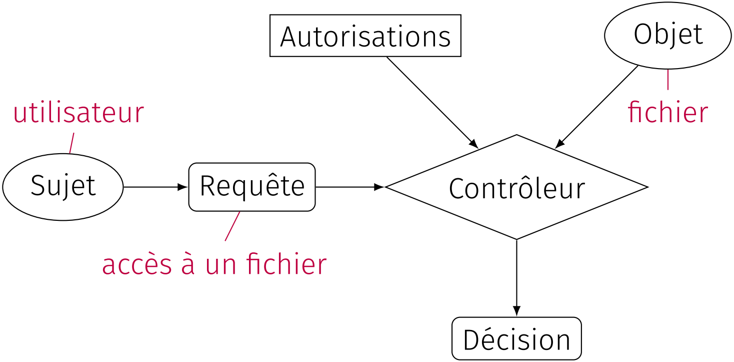
```
E = {étudiant_de(E,P) = étudiant_de(E, pierre)}.

Répéter tant que E change :
  Sélectionner une équation  s ═ t dans E;
  Si s = t est de la forme :
    f(s1, ... , sn) = f(t1, ... , tn) avec n ⩾ 0
      Alors remplacer l'équation par s1=t1 ... sn=tn
    f(s1, ... , sm) = g(t1, ... , tn) avec f ≠ g
      Alors ÉCHEC
    X = X
      Alors supprimer l'équation
    t = X où t n'est pas une variable
      Alors remplacer l'équation par X = t
    X = t où X ≠ t et X apparait plus d'une fois dans E
      Si X est un sous-terme de t Alors ÉCHEC
      Sinon on remplace toutes les autres occurences
      de X par t
```

Termine et est correct.

L'arbre de recherche

```
let rec sld_tree world request substitution n =
  match request with
  | [] → Leaf substitution
  | head_request_term :: other_request_terms →
      let filter_clause c =
        let (Clause (left_member, right_member)) =
          rename n c in
        let new_tree unifier = lazy
            (sld_tree world
              (List.map (apply unifier)
              (right_member @ other_request_terms))
               (unifier @ substitution) (n + 1)) in
         Option.map new_tree
          (unify head_request_term left_member) in
       Node (List.filter_map filter_clause world)
```

Contrôle d’accès : motivation



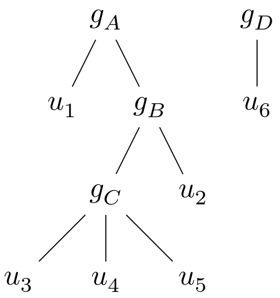
Matrice de contrôle d'accès : limitations

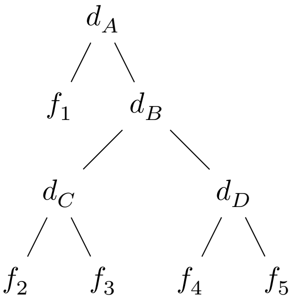
Fichier \ Utilisateur	Alice	Bob	Charlie	...
Fichier 1	1	1	0	...
Fichier 2	0	1	1	...
Fichier 3	1	0	0	...
...	...	...	...	

Inconvénients

- taille de la matrice
- suppression des autorisations

Arborescence de fichiers et groupes d’utilisateurs



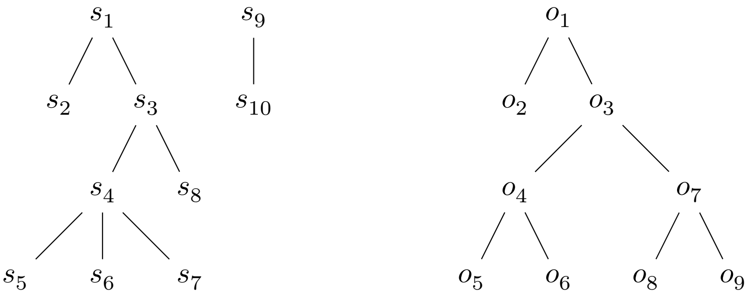


u_i : utilisateur
g_i : groupe

$appartient_{gr}(u_3, g_C)$
$inclus_{gr}(g_B, g_A)$

f_i : fichier
d_i : dossier

$appartient_{dos}(f_4, d_D)$
$inclus_{dos}(d_C, d_B)$



s_i : sujet

$sous\_sujet(s_2, s_1)$

o_i : objet

$sous\_objet(o_2, o_1)$

Les règles d'autorisation

- Règles simples :

$$autorise(s_i, o_j), \text{ ou } sous\_sujet(s_i, s_j)$$

- Propagation des autorisations :

$$\forall U, \forall G, \forall D,$$
$$sous\_sujet(U, G) \land autorise(G, D) \Rightarrow autorise(U, D)$$

$$\forall F, \forall D, \forall U,$$
$$sous\_objet(F, D) \land autorise(U, D) \Rightarrow autorise(U, F)$$

Objectifs

Écrire un système permettant :

1. de représenter ce type de règles
2. de répondre à des questions comme :
   - *Alice peut-elle accéder au fichier A ?*
   - *Qui est-ce qui peut accéder au fichier A ?*
   - *À quels fichiers Alice peut-elle accéder ?*

Retour au contrôle d'accès

```
sous_sujet(alice, groupe1).
sous_sujet(groupe1, groupe2).
sous_sujet(bob, groupe2).

sous_objet(fichierA, dossier1).
sous_objet(fichierB, dossier2).
sous_objet(dossier1, dossier2).

autorise(groupe1, dossier2).

autorise(U, F) :-  sous_objet(F, D), autorise(U, D).
autorise(U, F) :-  sous_sujet(U, G), autorise(G, F).

autorise(U, F) ?
```

Logique du premier ordre, ou calcul des prédicats

- Des prédicats, des variables, des fonctions, les connecteurs logiques $\vee$ et $\wedge$, et les quantificateurs $\exists$ et $\forall$.
- Les règles sont des *formules bien définies* dont toutes les variables sont liées (formules closes).
- Mise sous forme prénexe.
- Skolémisation.
- Mise sous forme normale conjonctive.

Logique du premier ordre, ou calcul des prédicats

Les règles sont maintenant toutes de la forme :

$$\forall X_1 ... X_s, \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{k} L_{i,j} \right)$$

En ne notant plus les quantificateurs, et en séparant en n clauses, on se réduit à la forme :

$$\bigvee_{i=1}^{k} L_i$$

où les L_i sont des littéraux positifs ou négatifs.

Restriction aux clauses définies

Attention

Perte de généralité par rapport à la logique du premier ordre : existence d'algorithmes efficaces sur les clauses de Horn.

Exactement un littéral positif :

$$\left(\bigvee_{i=1}^{n} \neg P_i\right) \vee Q \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} P_i \Rightarrow Q$$

Si $n = 0$: un fait, Q toujours vrai.

Notation Prolog :

```
q(f1(X), ... ) :- p1(f2(Y), ... ), ... , pn(fk(Z), ... ).
```

La SLD-Résolution

$$\frac{\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \qquad B_1 \leftarrow B_2 \wedge \ldots \wedge B_k}{\neg(B_2 \wedge \ldots \wedge B_k \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n)\theta_1}$$

Avec $\theta_1 = \mathtt{MGU}(A_1, B_1)$.

Si $\neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow Faux$, alors $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)\theta_1$ est $Vrai$.

Unification : substitution des variables de deux termes. Ex :

```
étudiant(E, P) = étudiant(E, pierre)
```

Il existe un unifieur plus général.