TRADING ALGORITHM

Étude de l'article :

« Option Hedging with Smooth Market Impact »

Tianhui Michael Li and Robert Almgren

April 8, 2016

30 DECEMBRE 2018

ETUDIANT : SAMUEL GUILLUY

Introduction

La recherche de la meilleure stratégie de couverture dynamique en se basant sur des modèles mathématiques est un sujet important à fort intérêt en finance. Ce sujet est d'autant plus vaste qu'il faut adapter les modèles aux différents marchés et produits dérivés.

Le modèle de Black & Scholes est utilisé comme référence au calcul du prix théorique d'une option européenne et pour déterminer des stratégies de couverture de risque (delta-neutre ou autres) de portefeuille financier sous un certain nombre de condition :

- Le prix de l'actif sous-jacent S_t suit un mouvement brownien géométrique avec une volatilité constante et une dérive constante.
- Il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage.
- Le temps est une fonction continue.
- Il est possible d'effectuer des ventes à découvert.
- Il n'y a pas de coûts de transactions.
- Il existe un taux d'intérêt sans risque, connu à l'avance et constant.
- Tous les sous-jacents sont parfaitement divisibles (on peut par exemple acheter 1/100e d'action), dans le cas d'une action, celle-ci ne paie pas de dividendes entre le moment de l'évaluation de l'option et l'échéance de celle-ci.

Cependant ce modèle est souvent considéré comme trop simpliste et conduit à des politiques de gestion des risques pouvant être qualifiées d'irresponsables de la part des institutions financières.

L'exemple du motif en dent de scie observé le 19 Juillet 2012 (figure 1 de l'article de [3]) est un exemple de surutilisation du modèle de Black & Scholes sans que les hypothèses de volatilité constante et de dérive constante soit vérifiée. L'impact de marché de la stratégie de delta-neutre de gros portefeuille n'étant alors pas pris en compte.

Almgren et Li analysent dans leur article « Option Hedging with smooth market impact » une stratégie de couverture de risque sous un ensemble d'hypothèses de marché encore non explorées par la communauté des chercheurs travaillant sur le domaine.

- Comment cet article s'inscrit-il dans la continuité des travaux sur les stratégies de couverture de risque ?

Pour répondre à cette question, nous allons voir :

I. La modélisation de l'impact de marché.

II. Les principaux résultats de l'article.

III. Comment allez plus loin et mettre en pratique le calcul d'impact de marché dans une stratégie de couverture delta-neutre ?

I. La modélisation de l'impact de marché

1. *Le modèle par limite de série temporelle*

Le modèle par limite de série temporelle consiste à considérer une discrétisation du temps et des actions effectuées afin de calculer la quantité d'option à acheter/vendre pour couvrir au sens delta-neutre un call européen par passage à la limite d'une série temporelle dont le terme (n) de la série correspond à la couverture delta-neutre résultant de l'impact de marché du au terme (n-1).
Comme expliqué dans l'article de [1], en considérant un impact de marché de la forme :

$$dS \to dS + \lambda \times N \times S^2$$

Où N est la quantité d'action acheté et λ un coefficient de proportionnalité
On obtient alors :

Modification	Stratégie de couverture	Achat	Nouveau prix
$dS_1 \longrightarrow$	$\Gamma \times dS_1 \longrightarrow$	$\Gamma \times dS_1 \longrightarrow$	$S + dS_1 + \underbrace{\lambda \times \Gamma \times S^2 \times dS_1}_{dS_2}$

Ainsi, en supposant la nécessité de se couvrir contre l'impact sur le marché de son propre achat du à la couverture de dS,
$N_{tot} = \Gamma \times dS_1 + \Gamma \times dS_2 + \cdots + \Gamma \times dS_\infty$
$dS_1 = dS$
$N_{tot} = \Gamma \times dS + \Gamma \times \lambda \times \Gamma \times S^2 \times dS + \Gamma \times dS_3 + \cdots + \Gamma \times dS_\infty$

$$N_{tot} = \frac{1}{1 - \lambda \times \gamma} \times \Gamma \times dS$$

On trouve donc que N se calcul comme une série géométrique de raison $\lambda \times \gamma$ où $\gamma = \Gamma \times S^2$.

2. *Le modèle continu*

Le modèle continu consiste à chercher un système d'équations différentielles stochastiques pour notre modèle prenant en compte l'impact de marché. Dans l'article de [3], il est décrit deux impact de marché permettant de considérer deux phénomènes observés sur les marchés :

- **L'impact de marché permanent** représente la prise en compte des nouvelles informations d'achats par les autres parties prenantes réajustant alors leur prix.

Mathématiquement cela revient à écrire :

$$P_t = P_0 + \upsilon \times (X_t - X_0) + \sigma \times W_t$$

Où : P_t est le prix du fondamental à l'instant t, X_t est le nombre d'actions possédé par un agent à la date t, $\nu > 0$ est le coefficient d'impact permanent (modèle linéaire), $\sigma > 0$ est le coefficient de volatilité du modèle de Black & Scholes, W_t est un mouvement brownien standard.

- **L'impact de marché temporaire** représente le phénomène de liquidité du marché, si on achète/vends beaucoup d'actions, les meilleurs offres d'achats et de ventes du carnet d'ordre disparaissent rapidement et on est nécessairement amener à acheter/vendre à un moins bon prix.

Mathématiquement cela revient à écrire :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \theta_u \, du \quad et \quad \widetilde{P_t} = P_t + \eta \, \theta_t$$

Où $\widetilde{P_t}$ est le prix auquel on va acheter/vendre le sous-jacent, $\eta > 0$ est le coefficient d'impact temporaire (modèle linéaire) , θ_t est le nombre d'actions acheter entre t et t+dt.

II. Les principaux résultats de l'article

1. *Etablissement de l'équation de Hamilton Jacobi du modèle*

a) Etablissement de l'équation du PnL

En considérant un modèle d'impact de marché continu avec un impact de marché temporaire et un impact de marché permanent tous les deux linéaires, on obtient l'équation donnant la valeur du portefeuille à la date de clôture des marché le soir T :

$$R_0 = \mathrm{g}(0, P_0) + X_0 P_0$$

$$R_T = \mathrm{g}(T, P_\mathrm{T}) + X_\mathrm{T} P_\mathrm{T} - \int_0^T \widetilde{P_t}(\theta_t)\, \theta_t \, \mathrm{dt}$$

Prix d'un call européen entre 0 et T dans un modèle de Black & Scholes sans impact de marché	Prix du sous-jacent à la date T multiplié par la quantité d'action possédé à la date T	Prix auquel on a acheter le sous-jacent multiplié par la quantité acheté

b) Modèle considérant le « overnigth risk »

Afin d'être couvert contre le risque du au maintien de la position la nuit, nous devons considérer la modification possible du prix du sous-jacent sans avoir la possibilité d'effectuer des transactions durant la nuit. En notant T_* l'instant de réouverture des marchés au matin, on a :

$$R_{T_*} = \mathrm{g}\big(T_*, P_{T_*}\big) + X_\mathrm{T} P_{T_*} - \int_0^T \widetilde{P_t}(\theta_t)\, \theta_t \, \mathrm{dt} \quad = R_T - \xi + \mathrm{Y_T}\, \Pi$$

Où : $\xi = \int_T^{T_*} (\Delta(\mathrm{t}, P_t) - \Delta(\mathrm{T}, P_T)) dP_t$, $\quad \mathrm{Y_T} = X_\mathrm{T} - \Delta(\mathrm{T}, P_T)$, $\quad \Pi = P_{T_*} - P_T$

c) Optimisation Moyenne-Variance

Afin de trouver la meilleure stratégie de couverture Delta neutre, on applique la méthode d'optimisation Moyenne-Variance à R_T, on obtient ainsi les équations :

- $\mathbb{E}(\mathrm{R_T}) = \mathrm{R_0} + \upsilon\, \mathbb{E}(\int_0^\mathrm{T} \mathrm{Y_t}\, \theta_\mathrm{t}\, \mathrm{dt}) - \eta\, \mathbb{E}(\int_0^\mathrm{T} {\theta_\mathrm{t}}^2\, \mathrm{dt})$
- $Var(\mathrm{R_T}) = \sigma^2\, \mathrm{Var}\Big(\int_0^\mathrm{T} \mathrm{Y_t}\, dW_t\Big) = \sigma^2\, \mathbb{E}(\int_0^\mathrm{T} {\mathrm{Y_t}}^2\, \mathrm{dt})$
- $\inf_{\theta_\mathrm{t} \in \Theta} [\lambda\, Var(\mathrm{R_T}) - \mathbb{E}(\mathrm{R_T})] = \inf_{\theta_\mathrm{t} \in \Theta} \mathbb{E}[\lambda\, \sigma^2 \int_0^\mathrm{T} {\mathrm{Y_t}}^2\, \mathrm{dt} - \upsilon \int_0^\mathrm{T} \mathrm{Y_t}\, \theta_\mathrm{t}\, \mathrm{dt} + \eta \int_0^\mathrm{T} {\theta_\mathrm{t}}^2\, \mathrm{dt}\ ]$

Si l'on inclut le risque de nuit, comme ξ et Π dépendent uniquement du prix entre T et T_* , ils sont doncdécorrélées aux autres termes du PnL. De plus, leurs espérences étant nulles, on obtient ainsi :

$$\inf_{\theta_\mathrm{t} \in \Theta} \mathbb{E}[\lambda(\mathrm{Y_t}\, \Pi - \xi)^2 + \lambda\, \sigma^2 \int_0^\mathrm{T} {\mathrm{Y_t}}^2\, \mathrm{dt} - \upsilon \int_0^\mathrm{T} \mathrm{Y_t}\, \theta_\mathrm{t}\, \mathrm{dt} + \eta \int_0^\mathrm{T} {\theta_\mathrm{t}}^2\, \mathrm{dt}\ ]$$

Et l'équation de Hamilton Jacobi à résoudre s'écrit alors :

$$J(t, p, y) = \inf_{\theta_\mathrm{t} \in \Theta} \mathbb{E}[\lambda(\mathrm{Y_t}\, \Pi - \xi)^2 + \lambda\, \sigma^2 \int_0^\mathrm{T} {\mathrm{Y_t}}^2\, \mathrm{dt} - \upsilon \int_0^\mathrm{T} \mathrm{Y_t}\, \theta_\mathrm{t}\, \mathrm{dt} + \eta \int_0^\mathrm{T} {\theta_\mathrm{t}}^2\, \mathrm{dt}\ ]$$

2. *Le principe du contrôle martingale optimal*

Même si les calculs permettant d'obtenir la solution à l'équation de Hamilton Jacobi ne sont pas détaillés dans cette article, cette méthode permettant de procéder au contrôle optimal de notre portefeuille semble particulièrement intéressante et mérite une présentation détaillée.

Théorème :
Soit sous-jacent X^u dépendant d'une fonction de contrôle u (ou stratégie en finance) et suivant l'équation :

$$dX^u(t) = \mu(t, X^u(t), u(t))\, dt + \sigma(t, X^u(t), u(t))\, dW(t)$$

Notre objectif est de résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\max_{u(.)\in A(x,I)} E^{0,x}(F(X^u(T))) \text{ avec F quelconque}$$

$$\text{Posons : } v(t,x) = \sup_{u(.)\in A(x,I(t))} E^{t,x}(F(X^u(T))) \quad \text{et} \quad g(t,x) = E^{t,x}(F(X^{u^*}(T)))$$

Alors, si g(t,x) est bornée et $C^{1,2}$ tels que :

$$0 = \sup_{u\in U}[g_t(t,) + \mu(t,x,u)g_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x,u)g_{xx}(t,x)]$$
$$F(x) = g(T,x)$$

Alors, nous avons :

$$g(T,x) \ \geq \ v(t,x)\ \forall (t,x) \in [0,T) \times R$$

Et s'il existe en plus un contrôle admissible $u^*(t)$ satisfaisant :

$$u^*(\mathrm{t}) \in \underset{u\in U}{\operatorname{argmax}}[g_t\left(t, X^{u^*}(t)\right) + \mu(t,x,u)g_x\left(t, X^{u^*}(t)\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x,u)g_{xx}\left(t, X^{u^*}(t)\right)]$$

Alors nous avons :

$$g(T,x) = v(t,x)\ \forall (t,x) \in [0,T) \times R$$

et $u^*(\mathrm{t})$ est le contrôle optimal associé à $v(t,x)$

Ainsi, cela permet de transformer notre problème d'optimisation en un problème plus simple que l'on peut résoudre dans certains cas.

3. *Analyse Qualitatif des résultats de l'équation de Hamilton Jacobi*

La formule du contrôle optimal données par le principe du contrôle martingale optimal est la suivante :

$$\theta = -\frac{1}{2\eta}\left((1+\nu\Gamma)J_y + \nu J_p - \nu y\right)$$

- On achète d'autant moins que l'impact de marché temporaire est fort, ce qui est intuitif.

- Si $\nu = 0$, l'impact de marché permanent est nul, on achète donc afin de diminuer la variation de J par rapport à y. Ce qui est en accord avec la stratégie de Delta neutre sans impact de marché car $\mathrm{Y_T} = X_{\mathrm{T}} - \Delta(\mathrm{T}, P_T)$ *donc si* $\mathrm{Y_T} = 0$, *on est Delta neutre.*

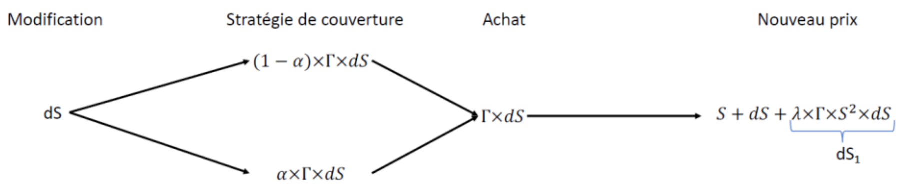
- Si $\nu > 0$, on doit alors considérer l'effet de l'impact de marché permanent
  - Le terme $\nu y/2\eta$ correspond à l'existence d'un arbitrage
  - Le terme $-\frac{1}{2\eta} * \nu J_p$ correspond à une dépendance direct de θ par rapport à l'impact de marché permanent, de plus, comme l'impact d'un portefeuille est faible sur le prix du sous-jacent, le terme J_p dépend peu de la stratégie employé mais plutôt des mesures effectuées sur le marché.
  - Le terme $-\frac{1}{2\eta} * (1 + \nu\Gamma) J_y$ correspond à une dépendance indirect de θ par rapport à l'impact de marché permanent car il n'agit que lorsque $\Gamma \neq 0$ i.e. au moment d'une variation de Delta.

III. Pour aller plus loin

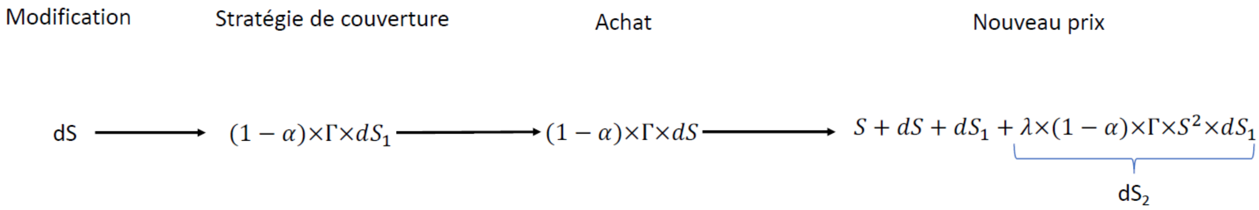
1. *L'ouverture vers des stratégies impliquant la théorie des jeux*

Lorsqu'une entreprise à des fonds très importants, la couverture de son action sert à annuler la variation de son portefeuille par rapport au spot est divisées entre plusieurs banques.
De part les gros volumes à couvrir delta-neutre, l'achat/la vente de sous-jacent par l'une de ces banques impact significativement la valeur du sous-jacent.
En se basant sur l'hypothèse que les banques ont toutes le même trade (le montant des trades est souvent public) et effectue leur analyse sur le même modèle (stratégie classique delta neutre du modèle de Black & Scholes), il est possible d'utiliser une modélisation précise de l'impact de marché afin d'apporter des stratégies permettant de trouver le moment et montant optimum pour effectuer l'achat ou la vente de sous-jacent afin d'être delta neutre.

On détaillera ici le cas de l'utilisation d'un impact de marché calculé par limite de série temporelle. Avec un pourcentage α d'investisseur suivant une stratégie de couverture delta-neutre sans prendre en compte l'impact de marché et un pourcentage $1 - \alpha$ d'investisseur (typiquement nous) suivant une stratégie de couverture delta-neutre prenant en compte l'impact de marché de l'ensemble des participants.



Ainsi, en supposant la nécessité de se couvrir contre l'impact de marché de son propre achat dû à la couverture de dS, on obtient :



$N_{tot} = (1-\alpha)\times\Gamma\times dS + \Gamma\times(1-\alpha)\times dS_1 + \cdots + (1-\alpha)\times\Gamma\times dS_\infty$
$dS_1 = \lambda\times\Gamma\times S^2\times dS$

$$N_{tot} = (1-\alpha)\times\Gamma\times dS + \frac{1}{1-\lambda\times\gamma\times(1-\alpha)}\times\Gamma\times dS_1$$

$$N_{tot} = (1-\alpha)\times\Gamma\times dS + \frac{1}{1-\lambda\times\gamma\times(1-\alpha)}\times\Gamma\times\lambda\times\gamma\times dS$$

Si on souhaitait considérer un impact de marché continue plutôt que discret, il faudrait résoudre une équation d'Hamilton Jacobi similaire à celle trouvée précédemment. De plus, une méthode numérique du type élément finie basé sur le théorème de Lax-Milgram serait alors nécessaire afin d'estimer θ_t optimal.

IV. Conclusion

Ainsi, la modélisation de l'impact de marché pour l'achat ou la vente d'une grande quantité d'actifs est nécessaire afin de comprendre les variations du prix du sous-jacent non-prise en compte dans le modèle de Black & Scholes.
De plus, cela nous permet de visualiser le comportement des gros acteurs du marché et ainsi commencer à réfléchir à des stratégies prenant en compte cet effet.

V. Références

[1] G.Loeper, Option pricing with Linear Market Impact and non-linear Black Scholes Equations, Monash

[2] Ralf Korn, The Martingale Optimality Principle: The best you can is good enough
, Department of Mathematics, University of Kaiserslautern, 67653 Kaiserslautern, Germany
Fraunhofer Institute ITWM, 67653 Kaiserslautern, Germany

[3] Tianhui Michael Li and Robert Almgren, Option Hedging with Smooth Market Impact, April 8, 2016