Trabalho de Algoritmos e Grafos
Curso de Engenharia da Computação
Universidade Federal do Ceará - Campus Sobral
Samuel Hericles Souza Silveira - 389118

November 28, 2019

1 Definição

1.1 Isomorfismo entre os grafos G_1 e G_2.

Sabemos que isomorfismo dos grafos G_1 e G_2 é uma bijeção entre os conjuntos de vértices de G_1 e G_2:

$$f : V(G_1) => V(G_2) \tag{1}$$

E para quaisquer dois vértices u e v de G_1, que são adjacentes em G_1, temos que f(u) e f(v), que são vértices de G_2, são adjacentes em G_2.

2 Provas dos algoritmos

2.1 Mesma quantidade de vértices

Quantidade de vértices dos grafos. Se a quantidade de vértices de G_1 for diferente da quantidade de vértices de G_2, isso implica que G_1 não é um isomorfo de G_2.

Prova

A definição de isomorfismo afirma que há uma bijeção entre os conjuntos de vértices de G_1 e G_2. Uma bijeção entre os dois conjuntos implica que a quantidade de vértices de G_1 é a mesma de G_2:

$$|V(G_1)| = |V(G_2)| \tag{2}$$

Logo, se a quantidade de vértices de G_1 for diferente da quantidade de vértices de G_2, temos que G_1 não é um isomorfo de G_2.

2.2 Mesma quantidade de arestas

Quantidade de arestas dos grafos.

Se a quantidade de arestas de G_1 for diferente da quantidade de arestas de G_2, isso implica que G_1 não é um isomorfo de G_2.

Prova

A definição de isomorfismo afirma que para cada aresta u ϵ E(G_1), temos a aresta f(u)f(v) $\in E(\mathrm{G}_2)$, logo, também existe uma bijeção nos conjuntos de arestas deG_1 e de G_2:

$$h : E(G_1) => E(G_2) \tag{3}$$

Uma bijeção implica na mesma quantidade de arestas dos conjuntos:

$$|E(G_1)| = |E(G_2)| \tag{4}$$

Logo, se a quantidade de arestas de G_1 for diferente da quantidade de arestas de G_2, temos que G_1 não é um isomorfo de G_2.

2.3 Verificar se são conexos

Se os grafos são conexos ou desconexos. Se G_1 for conexo e G_2 for desconexo, ou G_1 for desconexo e G_2 for conexo, isso implica que G_1 não é um isomorfo de G_2.

Prova

Analisando o primeiro caso, se G_1 for conexo e G_2 for desconexo: Usando as Provas 1 e 2, para G_1 ser isomorfos de G_2, temos que ter o mesmo número de vértices e o mesmo número de arestas em G_1 e G_2, logo:

$$|E(G1)| = |E(G2)| e |V(G1)| = |V(G2)| \tag{5}$$

Suponha que G_1, que é conexo, é isomorfo de G_2, que é desconexo, então:

Para cada aresta *(u,v)* ϵ E(G_1) tem que existir f(u)f(v) ϵ E(G_2). Como G_1 é conexo, entre quaisquer u e v ϵ V(G_1), existe um caminho k que conecta quaisquer u e v. No caminho k temos que o conjunto de arestas que pertencem a esse caminho estão contidas em E($G1$):

(x,y) são as arestas que pertencem ao caminho k, *(x,y)* $\subseteq E(\mathrm{G}_1)$.

Como afirmamos que G_1 é isomorfo de G_2, temos que arestas do caminho k, *(x,y)* $\subseteq E(\mathrm{G}_1)$, então f(x)f(y) $\subseteq E(\mathrm{G}_2)$, como o caminho k, é o caminho entre quaisquer x e y $\in V(\mathrm{G}_1)$, temos existe um caminho entre quaisquer f(x) e f(y) ϵ V(G_2), isso implica que G_2 é conexo, o que é um absurdo, logo, a suposição é falsa, e G_1, que é conexo, não é isomorfo de G_2, que é desconexo.

2.4 Quantidade de componentes conexas

Se G_1 tiver X componentes conexas, e G_2, Y componentes conexas, com X $\neq$ Y, isso implica que G_1 não é isomorfo de G_2.

Prova Suponha G_1 isomorfo de G_2, com X $\neq$ Y. Usando as Provas 1 e 2, para G_1 ser isomorfos de G_2, temos:

$$|E(G_1)| = |E(G_2)|e|V(G_1)| = |V(G_2)| \tag{6}$$

G_1 tem X_K caminhos, um K_i para cada componente conexa, (u,v) pertence ao caminho K_i, que u,v V(G_1) e *(u,v)* $\in$ E(G_1), então como são isomorfos, f(u),f(v) $\in$ V(G_1) e f(u)f(v) $\in$ E(G_2). Logo, existem Y_K caminhos em G_2, com Y = X, o que é um absurdo, portanto G_1 não é isomorfo de G_2.

2.5 Mesma quantidade de graus de cada vértices

Se for criado um vetor w, onde em cada posição desse vetor está armazenada o grau de cada vértice de G1, e z com os graus dos vértices de G2, depois de ordenados os vetores, se w for diferente de z, isso implica que G1 não é isomorfo de G2.

Prova Usando as Provas 1 e 2, para G_1 ser isomorfos de G_2, temos:

$$|E(G_1)| = |E(G_2)|e|V(G_1)| = |V(G_2)| \tag{7}$$

O vetor w deve ser do mesmo tamanho de z.

O vetor w, tem a seguinte estrutura: [..., a, ..., ...] de posições 1 à V(G_1) e o vetor z: [..., ..., a , ...] de posições 1 à V(G_2).

w = ordena(w) e z = ordena(z) w terá a estrutura: [..., a, ... ,...]; e z: [..., a, ..., ...], se w $\neq$ z.

Suponha que G_1 é isomorfo de G_2, com o vetor w ordenado diferente de z ordenado. Tome $v_i, ..., v_j \in$ V(G_1), tal que d(v_i) = a, sabemos que f(v_i),...,f(v_j) V(G_2), tal que d(f(v_i)) = a.

Para ser isomorfo, w tem que ter os mesmos elementos de z, porque

E(G_1) = (E(G_2)), $\sum$ d(V(G_1)) = 2.(E(G_1)) e $\sum$d(V(G_2)) = 2(E(G_2))t. Logo depois de ordenado w e z devem ser iguais para ser isomorfo.

$$|E(G_1)| = |E(G_2)| \tag{8}$$

$$\sum d(V(G_1)) = 2|E(G_1)| \tag{9}$$

$$\sum d(V(G_2)) = 2|E(G_2)| \tag{10}$$

Logo depois de ordenando w e z devem ser iguais para ser isomorfo. Portanto, isso prova que os grafos devem possui a mesma quantidade de graus para cada aresta.

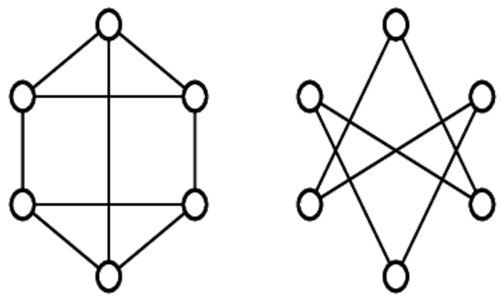

Figure 1: Grafos que parecem isomorfos mas não são.

3 Circuitos em grafos

Se G_1 tiver algum circuito e G_2 não tiver circuitos, ou G_2 tiver algum circuito e G_1 não tiver circuitos, isso implica que G_1 não é um isomorfo de G_2.

Prova

Analisando o primeiro caso, G_1 tiver algum circuito e G_2 não tiver circuitos. Usando as Provas 1 e 2, para G_1 ser isomorfos de G_2, temos:

$$|E(G_1)| = |E(G_2)|e|V(G_1)| = |V(G_2)| \tag{11}$$

Suponha que G_1, que apresenta algum circuito, é isomorfo de G_2, que não tem circuitos, então:

Para cada aresta *(u,v)* ϵ E(G_1) tem que existir f(u)f(v) $\in$ E(G_2),então como G_1 tem circuito, existe algum vértice v_0 ϵ V(G_1), com um caminho k $(v_0, v_1, v_2, ..., v_n, v_0)$ que sai de v_0, passa por no mínimo mais 2 vértices diferentes de v_0, e voltam para v_0. No caminho k temos que o conjunto de arestas que pertencem a esse caminho estão contidas em E(G_1): v_iv_j são as arestas que pertencem ao caminho k, $v_iv_j \subseteq E$(G$_1$), i, j = 0 ... n .

Como afirmamos que G1 é isomorfo de G_2, com as arestas do caminho k, $v_iv_j \subseteq E$(G$_1$), e os vértices do caminho $k, v_0, v_1, v_2, ..., v_n, v_0 \in V$(G$_1$), então f($v_i$)f($v_j$) $\subseteq E$(G$_2$), e f(v_0),f(v_1),f(v_2),...,f(v_n),f(v_0) ϵ V(G_2), então existe um caminho que sai de f(v_0) passa por no mínimo mais 2 vértices diferentes de f(v_0), e voltam para f(v_0), implicando em um circuito em G_2, o que é um absurdo, logo, a suposição é falsa, e G_1, que tem algum circuito, não é isomorfo de G_2, que não tem circuitos.

4 Tabela de Comparação dos Tempos de Execução:

n é o número de vértices;
p é a probabilidade de gerar uma aresta.

	n = 8	n = 12	n = 16
p = 1/4	0.01662 ms	0.03796 ms	0.0987 ms
p = 2/4	0.037963 ms	0.16506 ms	0.05863 ms
p = 3/4	0.22835 ms	0.60626 ms	0.37593 ms

Table 1: Tempo médio com teste por 100 repetições.

Obs: Média realizada com 100 repetições, analisando os 6 testes de características. O tempo calculado inclui apenas os testes e as saídas de sistema (prinft) das funções de testes, não foram incluídos as criações dos grafos. Configurações da máquina de teste:

- Processador: Intel intel Core i3 2º Geração CPU 2.20 GHz;
- Memória RAM: 4 GB DDR3;
- Sistema Operacional: Arch Linux, 64 bits.