# 1 Definição

## 1.1 Isomorfismo entre os grafos $G_1$ e $G_2$.

Sabemos que isomorfismo dos grafos $G_1$ e $G_2$ é uma bijeção entre os conjuntos de vértices de $G_1$ e $G_2$:

$$f : V(G_1) => V(G_2) \tag{1}$$

E para quaisquer dois vértices u e v de $G_1$, que são adjacentes em $G_1$, temos que f(u) e f(v), que são vértices de $G_2$, são adjacentes em $G_2$.

# 2 Provas dos algoritmos

## 2.1 Mesma quantidade de vértices

Quantidade de vértices dos grafos. Se a quantidade de vértices de $G_1$ for diferente da quantidade de vértices de $G_2$, isso implica que $G_1$ não é um isomorfo de $G_2$.

**Prova**

A definição de isomorfismo afirma que há uma bijeção entre os conjuntos de vértices de $G_1$ e $G_2$. Uma bijeção entre os dois conjuntos implica que a quantidade de vértices de $G_1$ é a mesma de $G_2$:

$$|V(G_1)| = |V(G_2)| \tag{2}$$

Logo, se a quantidade de vértices de $G_1$ for diferente da quantidade de vértices de $G_2$, temos que $G_1$ não é um isomorfo de $G_2$.

## 2.2 Mesma quantidade de arestas

Quantidade de arestas dos grafos.

Se a quantidade de arestas de $G_1$ for diferente da quantidade de arestas de $G_2$, isso implica que $G_1$ não é um isomorfo de $G_2$.

**Prova**

A definição de isomorfismo afirma que para cada aresta u $\epsilon$ E($G_1$), temos a aresta f(u)f(v) $\in E(\mathrm{G}_2)$, logo, também existe uma bijeção nos conjuntos de arestas de$G_1$ e de $G_2$:

$$h : E(G_1) => E(G_2) \tag{3}$$

Uma bijeção implica na mesma quantidade de arestas dos conjuntos:

$$|E(G_1)| = |E(G_2)| \tag{4}$$

Logo, se a quantidade de arestas de $G_1$ for diferente da quantidade de arestas de $G_2$, temos que $G_1$ não é um isomorfo de $G_2$.

## 2.3 Verificar se são conexos

Se os grafos são conexos ou desconexos. Se $G_1$ for conexo e $G_2$ for desconexo, ou $G_1$ for desconexo e $G_2$ for conexo, isso implica que $G_1$ não é um isomorfo de $G_2$.

**Prova**

Analisando o primeiro caso, se $G_1$ for conexo e $G_2$ for desconexo: Usando as Provas 1 e 2, para $G_1$ ser isomorfos de $G_2$, temos que ter o mesmo número de vértices e o mesmo número de arestas em $G_1$ e $G_2$, logo:

$$|E(G1)| = |E(G2)|e|V(G1)| = |V(G2)| \tag{5}$$

Suponha que $G_1$, que é conexo, é isomorfo de $G_2$, que é desconexo, então:

Para cada aresta *(u,v)* $\epsilon$ E($G_1$) tem que existir f(u)f(v) $\epsilon$ E($G_2$). Como $G_1$ é conexo, entre quaisquer u e v $\epsilon$ V($G_1$), existe um caminho k que conecta quaisquer u e v. No caminho k temos que o conjunto de arestas que pertencem a esse caminho estão contidas em E($G1$):

*(x,y)* são as arestas que pertencem ao caminho k, *(x,y)* $\subseteq E(\mathrm{G}_1)$.

Como afirmamos que $G_1$ é isomorfo de $G_2$, temos que arestas do caminho k, *(x,y)* $\subseteq E(\mathrm{G}_1)$, então f(x)f(y) $\subseteq E(\mathrm{G}_2)$, como o caminho k, é o caminho entre quaisquer x e y $\in V(\mathrm{G}_1)$, temos existe um caminho entre quaisquer f(x) e f(y) $\epsilon$ V($G_2$), isso implica que $G_2$ é conexo, o que é um absurdo, logo, a suposição é falsa, e $G_1$, que é conexo, não é isomorfo de $G_2$, que é desconexo.

## 2.4 Quantidade de componentes conexas

Se $G_1$ tiver X componentes conexas, e $G_2$, Y componentes conexas, com X $\neq$ Y, isso implica que $G_1$ não é isomorfo de $G_2$.

**Prova** Suponha $G_1$ isomorfo de $G_2$, com X $\neq$ Y. Usando as Provas 1 e 2, para $G_1$ ser isomorfos de $G_2$, temos:

$$|E(G_1)| = |E(G_2)|e|V(G_1)| = |V(G_2)| \tag{6}$$

$G_1$ tem $X_K$ caminhos, um $K_i$ para cada componente conexa, (u,v) pertence ao caminho $K_i$, que u,v  V($G_1$) e *(u,v)* $\in$ E($G_1$), então como são isomorfos, f(u),f(v) $\in$ V($G_1$) e f(u)f(v) $\in$ E($G_2$). Logo, existem $Y_K$ caminhos em $G_2$, com Y = X, o que é um absurdo, portanto $G_1$ não é isomorfo de $G_2$.

## 2.5 Mesma quantidade de graus de cada vértices

Se for criado um vetor w, onde em cada posição desse vetor está armazenada o grau de cada vértice de G1, e z com os graus dos vértices de G2, depois de ordenados os vetores, se w for diferente de z, isso implica que G1 não é isomorfo de G2.

**Prova** Usando as Provas 1 e 2, para $G_1$ ser isomorfos de $G_2$, temos:

$$|E(G_1)| = |E(G_2)|e|V(G_1)| = |V(G_2)| \tag{7}$$

O vetor w deve ser do mesmo tamanho de z.

O vetor w, tem a seguinte estrutura: [..., a, ..., ...] de posições 1 à V($G_1$) e o vetor z: [..., ..., a , ...] de posições 1 à V($G_2$).

w = ordena(w) e z = ordena(z) w terá a estrutura: [..., a, ... ,...]; e z: [..., a, ..., ...], se w $\neq$ z.

Suponha que $G_1$ é isomorfo de $G_2$, com o vetor w ordenado diferente de z ordenado. Tome $v_i, ..., v_j \in$ V($G_1$), tal que d($v_i$) = a, sabemos que f($v_i$),...,f($v_j$) V($G_2$), tal que d(f($v_i$)) = a.

Para ser isomorfo, w tem que ter os mesmos elementos de z, porque

E($G_1$) = (E($G_2$)), $\sum$ d(V($G_1$)) = 2.(E($G_1$)) e $\sum$d(V($G_2$)) = 2(E($G_2$))t. Logo depois de ordenado w e z devem ser iguais para ser isomorfo.

$$|E(G_1)| = |E(G_2)| \tag{8}$$

$$\sum d(V(G_1)) = 2|E(G_1)| \tag{9}$$

$$\sum d(V(G_2)) = 2|E(G_2)| \tag{10}$$

Logo depois de ordenando w e z devem ser iguais para ser isomorfo. Portanto, isso prova que os grafos devem possui a mesma quantidade de graus para cada aresta.

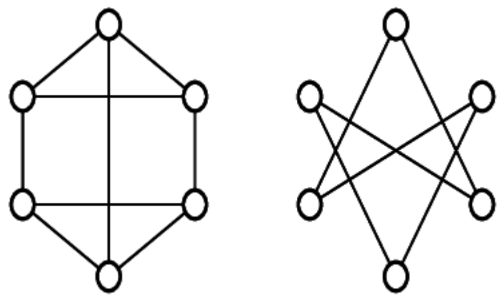

Figure 1: Grafos que parecem isomorfos mas não são.

# 3 Circuitos em grafos

Se $G_1$ tiver algum circuito e $G_2$ não tiver circuitos, ou $G_2$ tiver algum circuito e $G_1$ não tiver circuitos, isso implica que $G_1$ não é um isomorfo de $G_2$.

**Prova**

Analisando o primeiro caso, $G_1$ tiver algum circuito e $G_2$ não tiver circuitos. Usando as Provas 1 e 2, para $G_1$ ser isomorfos de $G_2$, temos:

$$|E(G_1)| = |E(G_2)| e |V(G_1)| = |V(G_2)| \tag{11}$$

Suponha que $G_1$, que apresenta algum circuito, é isomorfo de $G_2$, que não tem circuitos, então:

Para cada aresta *(u,v)* $\epsilon$ E($G_1$) tem que existir f(u)f(v) $\in$ E($G_2$),então como $G_1$ tem circuito, existe algum vértice $v_0$ $\epsilon$ V($G_1$), com um caminho k $(v_0, v_1, v_2, ..., v_n, v_0)$ que sai de $v_0$, passa por no mínimo mais 2 vértices diferentes de $v_0$, e voltam para $v_0$. No caminho k temos que o conjunto de arestas que pertencem a esse caminho estão contidas em E($G_1$): $v_i v_j$ são as arestas que pertencem ao caminho k, $v_i v_j \subseteq E$(G$_1$), i, j = 0 ... n .

Como afirmamos que G1 é isomorfo de $G_2$, com as arestas do caminho k, $v_i v_j \subseteq E$(G$_1$), e os vértices do caminho $k, v_0, v_1, v_2, ..., v_n, v_0 \in V$(G$_1$), então f($v_i$)f($v_j$) $\subseteq$ $E$(G$_2$), e f($v_0$),f($v_1$),f($v_2$),...,f($v_n$),f($v_0$) $\epsilon$ V($G_2$), então existe um caminho que sai de f($v_0$) passa por no mínimo mais 2 vértices diferentes de f($v_0$), e voltam para f($v_0$), implicando em um circuito em $G_2$, o que é um absurdo, logo, a suposição é falsa, e $G_1$, que tem algum circuito, não é isomorfo de $G_2$, que não tem circuitos.

# 4 Tabela de Comparação dos Tempos de Execução:

**n** é o número de vértices;
**p** é a probabilidade de gerar uma aresta.

| | n = 8 | n = 12 | n = 16 |
|---|---|---|---|
| p = 1/4 | 0.01662 ms | 0.03796 ms | 0.0987 ms |
| p = 2/4 | 0.037963 ms | 0.16506 ms | 0.05863 ms |
| p = 3/4 | 0.22835 ms | 0.60626 ms | 0.37593 ms |

Table 1: Tempo médio com teste por 100 repetições.**Obs**: Mesmo variando a ordem de execução dos algoritmos, a mudança é muito pequena comparando com outras ordens.

**Obs**: Média realizada com 100 repetições, analisando os 6 testes de características. O tempo calculado inclui apenas os testes e as saídas de sistema (prinft) das funções de testes, não foram incluídos as criações dos grafos. Configurações da máquina de teste:

- Processador: Intel intel Core i3 2º Geração CPU 2.20 GHz;
- Memória RAM: 4 GB DDR3;
- Sistema Operacional: Arch Linux, 64 bits.