

Trabalho de Algoritmos e Grafos  
Curso de Engenharia da Computação  
Universidade Federal do Ceará - Campus Sobral  
Samuel Hericles Souza Silveira - 389118

November 29, 2019

## 1 Definição

### 1.1 Isomorfismo entre os grafos $G_1$ e $G_2$ .

Sabemos que isomorfismo dos grafos  $G_1$  e  $G_2$  é uma bijeção entre os conjuntos de vértices de  $G_1$  e  $G_2$ :

$$f : V(G_1) \Rightarrow V(G_2) \quad (1)$$

E para quaisquer dois vértices  $u$  e  $v$  de  $G_1$ , que são adjacentes em  $G_1$ , temos que  $f(u)$  e  $f(v)$ , que são vértices de  $G_2$ , são adjacentes em  $G_2$ .

## 2 Provas dos algoritmos

### 2.1 Mesma quantidade de vértices

Quantidade de vértices dos grafos. Se a quantidade de vértices de  $G_1$  for diferente da quantidade de vértices de  $G_2$ , isso implica que  $G_1$  não é um isomorfo de  $G_2$ .

#### Prova

A definição de isomorfismo afirma que há uma bijeção entre os conjuntos de vértices de  $G_1$  e  $G_2$ . Uma bijeção entre os dois conjuntos implica que a quantidade de vértices de  $G_1$  é a mesma de  $G_2$ :

$$|V(G_1)| = |V(G_2)| \quad (2)$$

Logo, se a quantidade de vértices de  $G_1$  for diferente da quantidade de vértices de  $G_2$ , temos que  $G_1$  não é um isomorfo de  $G_2$ .

## 2.2 Mesma quantidade de arestas

Quantidade de arestas dos grafos.

Se a quantidade de arestas de  $G_1$  for diferente da quantidade de arestas de  $G_2$ , isso implica que  $G_1$  não é um isomorfo de  $G_2$ .

### Prova

A definição de isomorfismo afirma que para cada aresta  $u \in E(G_1)$ , temos a aresta  $f(u)f(v) \in E(G_2)$ , logo, também existe uma bijeção nos conjuntos de arestas de  $G_1$  e de  $G_2$ :

$$h : E(G_1) \rightarrow E(G_2) \quad (3)$$

Uma bijeção implica na mesma quantidade de arestas dos conjuntos:

$$|E(G_1)| = |E(G_2)| \quad (4)$$

Logo, se a quantidade de arestas de  $G_1$  for diferente da quantidade de arestas de  $G_2$ , temos que  $G_1$  não é um isomorfo de  $G_2$ .

## 2.3 Verificar se são conexos

Se os grafos são conexos ou desconexos. Se  $G_1$  for conexo e  $G_2$  for desconexo, ou  $G_1$  for desconexo e  $G_2$  for conexo, isso implica que  $G_1$  não é um isomorfo de  $G_2$ .

### Prova

Analisando o primeiro caso, se  $G_1$  for conexo e  $G_2$  for desconexo: Usando as Provas 1 e 2, para  $G_1$  ser isomorfo de  $G_2$ , temos que ter o mesmo número de vértices e o mesmo número de arestas em  $G_1$  e  $G_2$ , logo:

$$|E(G_1)| = |E(G_2)|e|V(G_1)| = |V(G_2)| \quad (5)$$

Suponha que  $G_1$ , que é conexo, é isomorfo de  $G_2$ , que é desconexo, então:

Para cada aresta  $(u,v) \in E(G_1)$  tem que existir  $f(u)f(v) \in E(G_2)$ . Como  $G_1$  é conexo, entre quaisquer  $u$  e  $v \in V(G_1)$ , existe um caminho  $k$  que conecta quaisquer  $u$  e  $v$ . No caminho  $k$  temos que o conjunto de arestas que pertencem a esse caminho estão contidas em  $E(G_1)$ :

$(x,y)$  são as arestas que pertencem ao caminho  $k$ ,  $(x,y) \subseteq E(G_1)$ .

Como afirmamos que  $G_1$  é isomorfo de  $G_2$ , temos que arestas do caminho  $k$ ,  $(x,y) \subseteq E(G_1)$ , então  $f(x)f(y) \subseteq E(G_2)$ , como o caminho  $k$ , é o caminho entre quaisquer  $x$  e  $y \in V(G_1)$ , temos existe um caminho entre quaisquer  $f(x)$  e  $f(y) \in V(G_2)$ , isso implica que  $G_2$  é conexo, o que é um absurdo, logo, a suposição é falsa, e  $G_1$ , que é conexo, não é isomorfo de  $G_2$ , que é desconexo.

## 2.4 Quantidade de componentes conexas

Se  $G_1$  tiver  $X$  componentes conexas, e  $G_2$ ,  $Y$  componentes conexas, com  $X \neq Y$ , isso implica que  $G_1$  não é isomorfo de  $G_2$ .

**Prova** Suponha  $G_1$  isomorfo de  $G_2$ , com  $X \neq Y$ . Usando as Provas 1 e 2, para  $G_1$  ser isomorfo de  $G_2$ , temos:

$$|E(G_1)| = |E(G_2)|e|V(G_1)| = |V(G_2)| \quad (6)$$

$G_1$  tem  $X_K$  caminhos, um  $K_i$  para cada componente conexa,  $(u,v)$  pertence ao caminho  $K_i$ , que  $u,v \in V(G_1)$  e  $(u,v) \in E(G_1)$ , então como são isomorfos,  $f(u),f(v) \in V(G_1)$  e  $f(u)f(v) \in E(G_2)$ . Logo, existem  $Y_K$  caminhos em  $G_2$ , com  $Y = X$ , o que é um absurdo, portanto  $G_1$  não é isomorfo de  $G_2$ .

## 2.5 Mesma quantidade de graus de cada vértices

Se for criado um vetor  $w$ , onde em cada posição desse vetor está armazenada o grau de cada vértice de  $G_1$ , e  $z$  com os graus dos vértices de  $G_2$ , depois de ordenados os vetores, se  $w$  for diferente de  $z$ , isso implica que  $G_1$  não é isomorfo de  $G_2$ .

**Prova** Usando as Provas 1 e 2, para  $G_1$  ser isomorfo de  $G_2$ , temos:

$$|E(G_1)| = |E(G_2)|e|V(G_1)| = |V(G_2)| \quad (7)$$

O vetor  $w$  deve ser do mesmo tamanho de  $z$ .

O vetor  $w$ , tem a seguinte estrutura: [...,  $a$ , ..., ...] de posições 1 à  $V(G_1)$  e o vetor  $z$ : [..., ...,  $a$ , ...] de posições 1 à  $V(G_2)$ .

$w = \text{ordena}(w)$  e  $z = \text{ordena}(z)$   $w$  terá a estrutura: [...,  $a$ , ..., ...]; e  $z$ : [...,  $a$ , ..., ...], se  $w \neq z$ .

Suponha que  $G_1$  é isomorfo de  $G_2$ , com o vetor  $w$  ordenado diferente de  $z$  ordenado. Tome  $v_i, \dots, v_j \in V(G_1)$ , tal que  $d(v_i) = a$ , sabemos que  $f(v_i), \dots, f(v_j) \in V(G_2)$ , tal que  $d(f(v_i)) = a$ .

Para ser isomorfo,  $w$  tem que ter os mesmos elementos de  $z$ , porque

$E(G_1) = (E(G_2))$ ,  $\sum d(V(G_1)) = 2 \cdot (E(G_1))$  e  $\sum d(V(G_2)) = 2(E(G_2))$ . Logo depois de ordenado  $w$  e  $z$  devem ser iguais para ser isomorfo.

$$|E(G_1)| = |E(G_2)| \quad (8)$$

$$\sum d(V(G_1)) = 2|E(G_1)| \quad (9)$$

$$\sum d(V(G_2)) = 2|E(G_2)| \quad (10)$$

Logo depois de ordenando  $w$  e  $z$  devem ser iguais para ser isomorfo. Portanto, isso prova que os grafos devem possuir a mesma quantidade de graus para cada aresta.

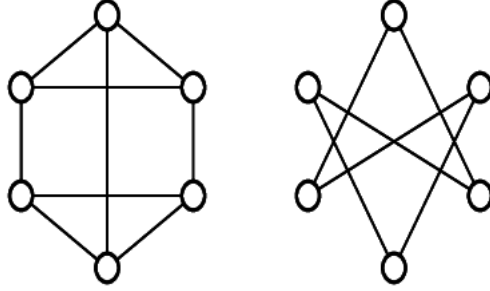


Figure 1: Grafos que parecem isomorfos mas não são.

### 3 Circuitos em grafos

Se  $G_1$  tiver algum circuito e  $G_2$  não tiver circuitos, ou  $G_2$  tiver algum circuito e  $G_1$  não tiver circuitos, isso implica que  $G_1$  não é um isomorfo de  $G_2$ .

#### Prova

Analisando o primeiro caso,  $G_1$  tiver algum circuito e  $G_2$  não tiver circuitos. Usando as Provas 1 e 2, para  $G_1$  ser isomorfo de  $G_2$ , temos:

$$|E(G_1)| = |E(G_2)|e|V(G_1)| = |V(G_2)| \quad (11)$$

Suponha que  $G_1$ , que apresenta algum circuito, é isomorfo de  $G_2$ , que não tem circuitos, então:

Para cada aresta  $(u,v) \in E(G_1)$  tem que existir  $f(u)f(v) \in E(G_2)$ , então como  $G_1$  tem circuito, existe algum vértice  $v_0 \in V(G_1)$ , com um caminho  $k$   $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n, v_0)$  que sai de  $v_0$ , passa por no mínimo mais 2 vértices diferentes de  $v_0$ , e voltam para  $v_0$ . No caminho  $k$  temos que o conjunto de arestas que pertencem a esse caminho estão contidas em  $E(G_1)$ :  $v_i v_j$  são as arestas que pertencem ao caminho  $k$ ,  $v_i v_j \subseteq E(G_1)$ ,  $i, j = 0 \dots n$ .

Como afirmamos que  $G_1$  é isomorfo de  $G_2$ , com as arestas do caminho  $k$ ,  $v_i v_j \subseteq E(G_1)$ , e os vértices do caminho  $k$ ,  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n, v_0 \in V(G_1)$ , então  $f(v_i)f(v_j) \subseteq E(G_2)$ , e  $f(v_0), f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n), f(v_0) \in V(G_2)$ , então existe um caminho que sai de  $f(v_0)$  passa por no mínimo mais 2 vértices diferentes de  $f(v_0)$ , e voltam para  $f(v_0)$ , implicando em um circuito em  $G_2$ , o que é um absurdo, logo, a suposição é falsa, e  $G_1$ , que tem algum circuito, não é isomorfo de  $G_2$ , que não tem circuitos.

## 4 Tabela de Comparação dos Tempos de Execução:

$n$  é o número de vértices;

$p$  é a probabilidade de gerar uma aresta.

	$n = 8$	$n = 12$	$n = 16$
$p = 1/4$	0.01662 ms	0.03796 ms	0.0987 ms
$p = 2/4$	0.037963 ms	0.16506 ms	0.05863 ms
$p = 3/4$	0.22835 ms	0.60626 ms	0.37593 ms

Table 1: Tempo médio com teste por 100 repetições. **Obs:** Mesmo variando a ordem de execução dos algoritmos, a mudança é muito pequena comparando com outras ordens.

**Obs:** Média realizada com 100 repetições, analisando os 6 testes de características. O tempo calculado inclui apenas os testes e as saídas de sistema (printf) das funções de testes, não foram incluídos as criações dos grafos. Configurações da máquina de teste:

- Processador: Intel intel Core i3 2ª Geração CPU 2.20 GHz;
- Memória RAM: 4 GB DDR3;
- Sistema Operacional: Arch Linux, 64 bits.