Teorema de Ramsey para grafos

Lucinara Fernandes

Universidade Federal do Ceará - campus Sobral
Programa de Educação Tutorial (PET)

August 24, 2019

Sumário

Introdução

- Frank Plumpton Ramsey;
- "On a problem of formal logic";
- Teoria de Ramsey;
  - busca regularidade em meio a desordem;
  - possibilidade de encontrar um grau de ordem em um conjunto desordenado;

Figure: F. P. Ramsey

Noções sobre Grafos

- Um grafo ilustra as ligações ou as relações entre objetos.

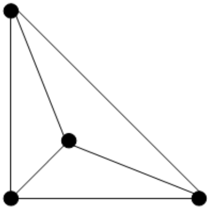

Figure: Exemplo de grafo

Noções sobre Grafos

- Um grafo ilustra as ligações ou as relações entre objetos.

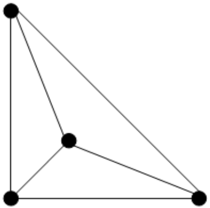

Figure: Exemplo de grafo

Definição 1

Um grafo $G = (V, E)$ é constituído por um conjunto (finito e não-vazio) V de vértices e um conjunto E de arestas. Cada aresta é um par não-ordenado de vértices distintos (conjunto de cardinalidade 2). Se uma aresta corresponde ao par de vértices i, j, dizemos que i e j são as extremidades da aresta.

Noções sobre Grafos

- Ordem: número de vértices em um grafo;

Noções sobre Grafos

- Ordem: número de vértices em um grafo;
- Grau de um vértice V (gr(V)): número de arestas conectadas a um dado vértice;

Noções sobre Grafos

- Ordem: número de vértices em um grafo;
- Grau de um vértice V (gr(V)): número de arestas conectadas a um dado vértice;
- Grafo completo: grafo em que há uma aresta conectando cada par de vértices distintos. (K_n, grafo completo com n vértices);

Noções sobre Grafos

- Ordem: número de vértices em um grafo;
- Grau de um vértice V (gr(V)): número de arestas conectadas a um dado vértice;
- Grafo completo: grafo em que há uma aresta conectando cada par de vértices distintos. (K_n, grafo completo com n vértices);
- Grafo bicolorido: grafo em que as arestas são coloridas com apenas duas cores distintas. Um grafo será monocromático se todas arestas forem da mesma cor;

Noções sobre Grafos

- Ordem: número de vértices em um grafo;
- Grau de um vértice V (gr(V)): número de arestas conectadas a um dado vértice;
- Grafo completo: grafo em que há uma aresta conectando cada par de vértices distintos. (K_n, grafo completo com n vértices);
- Grafo bicolorido: grafo em que as arestas são coloridas com apenas duas cores distintas. Um grafo será monocromático se todas arestas forem da mesma cor;
- Subgrafo $G' = (V', E')$ de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo tal que $V' \subset V$ e $E' \subset E$.

Teorema de Ramsey para grafos

Teorema de Ramsey para Duas Cores

Sejam s e t inteiros positivos. Existe um menor inteiro positivo $R = R(s, t)$ tal que toda a coloração de arestas de K_R, com as cores vermelho e azul, admite um subgrafo K_s vermelho ou um subgrafo K_t azul.

Teorema de Ramsey para grafos

Exemplo 1 - "Problema da festa"

Em uma festa com seis pessoas, existe três pessoas que são mutualmente conhecidas entre si ou três pessoas que são mutualmente estranhas entre si.

Teorema de Ramsey para grafos

Exemplo 1 - "Problema da festa"

Em uma festa com seis pessoas, existe três pessoas que são mutualmente conhecidas entre si ou três pessoas que são mutualmente estranhas entre si.

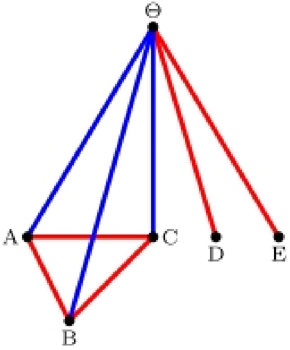

Figure: Problema da festa

Teorema de Ramsey para grafos

Teorema de Ramsey para grafos multicoloridos

Para quaisquer r números naturais, $a_1, a_2, ..., a_r$, existe um número natural, $R(a_1, a_2, ..., a_r) = n$, tal que qualquer grafo completo multicolorido de ordem pelo menos n, colorido com r cores distintas, deve conter um monocromático Ka_1 da cor 1 ou um monocromático Ka_2 da cor 2 ou um monocromático Ka_3 da cor 3, e assim sucessivamente.

Número de Ramsey

Definição

Ordem do menor grafo completo que, quando bicolorido, deve conter um K_s azul ou um K_t vermelho.

Número de Ramsey

Definição

Ordem do menor grafo completo que, quando bicolorido, deve conter um K_s azul ou um K_t vermelho.

Consequências

- $R(s, t) = R(t, s)$;
- $R(s, 1) = 1$;
- $R(s, 2) = s$.

Número de Ramsey

k \ l	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	6	9	14	18	23	28	36	40 42	47 50	53 59	60 68	67 77	74 87
4		18	25	36 41	49 61	59 84	73 115	92 149	102 191	128 238	138 291	147 349	155 417
5			43 48	58 87	80 143	101 216	133 316	149 442	183 633	203 848	233 1138	267 1461	269 1878
6				102 165	115 298	134 495	183 780	204 1171	256 1804	294 2566	347 3703	5033	401 6911
7					205 540	217 1031	252 1713	292 2826	405 4553	417 6954	511 10578	15263	22112
8						282 1870	329 3583	343 6090	10630	16944	817 27485	41525	865 63609
9							565 6588	581 12677	22325	38832	64864		
10								798 23556	45881	81123			1265

Figure: Alguns valores de número de Ramsey para grafos bicoloridos [Radziszowski 17']

Size-Ramsey number

Teorema 2 [Erdõs 78']

$\widehat{r}(H) = min\{|E(G)| : G \rightarrow (H)_2\}$

Size-Ramsey number

Teorema 2 [Erdõs 78']

$\widehat{r}(H) = min\{|E(G)| : G \rightarrow (H)_2\}$

Teorema 3 [Conlon 15']

Dados os grafos G e H e um inteiro positivo q temos que G é q-Ramsey para H, denotado $G \rightarrow (H)_q$, se toda q-coloração das arestas de G contiver uma cópia monocromática de H.

Referências

1. G. A. M. J. Soares. O Teorema de Ramsey e outros resultados de combinatória. IMPA.
2. S. P. Radziszowski. Small Ramsey Numbers. Rochester Institute of Technology, 2017
3. B. Landman and A. Robertson. Ramsey Theory on the Integers. Student mathematical library. American Mathematical Society, 2004
4. D. Conlon, J. Fox, and B. Sudakov, Recent developments in graph Ramsey theory, Surveys in combinatorics 2015, 2015, pp. 49–118.
5. P. Erdős, R. J. Faudree, C. C. Rousseau, and R. H. Schelp, The size Ramsey number, Period. Math. Hungar. 9 (1978), no. 1-2, 145–161