Zmiešavanie diskrétnych distribúcií
Dizertačná práca

Samuel Hudec

Univerzita Mateja Bela
Fakulta prírodných vied
Katedra matematiky

22. 8. 2019

Ciele prezentacie

- Priemerované zmiešané distribúcie
- V dizertačnej práci zahrnuté priemerované zmiešané distribúcie
- Parametrické priestory
- Charakteristiky distribúcie
- Odhadovanie parametrov
- Testy dobrej zhody
- Publikačná činnosť

Priemerované zmiešané distribúcie

Nech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sú nezávislé diskrétne náhodné premenné nadobúdajúce hodnoty $x_1, x_2, \ldots$ zo známymi (štandardnými) distribúciami pravdepodobnosti a pmf tvaru $\{\frac{f_j(x_i)}{\alpha^{(j)}}\}_{i=1}^{\infty}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Potom priemerovaná diskrétna zmiešaná distribúcia má pravdepodobnostnú funkciu

$$P(x_i) = C\left(\sum_{j=1}^{n} a_j f_j(x_i)\right), \quad i = 1, 2, \ldots .$$

$f_j(x_i)$ sú ,,nenormalizované časti" známych distribúcií pravdepodobnosti s váhami a_j a $C^{-1} = \sum_{j=1}^{n} a_j \alpha^{(j)}$ je normalizačná konštanta.

Zahrnuté priemerované zmiešané distribúcie

- Averaged mixed logarithmic distribution Type 1a
- Averaged mixed logarithmic distribution Type 2

Zahrnuté priemerované zmiešané distribúcie

- Averaged mixed logarithmic distribution Type 1a
- Averaged mixed logarithmic distribution Type 2
- Averaged mixed logarithmic-geometric distribution Type 3a
- Averaged mixed logarithmic-geometric distribution Type 3b
- Averaged mixed logarithmic-geometric distribution Type 3c

Zahrnuté priemerované zmiešané distribúcie

- Averaged mixed logarithmic distribution Type 1a
- Averaged mixed logarithmic distribution Type 2
- Averaged mixed logarithmic-geometric distribution Type 3a
- Averaged mixed logarithmic-geometric distribution Type 3b
- Averaged mixed logarithmic-geometric distribution Type 3c
- Averaged mixed logarithmic-negative binomial distribution

Zahrnuté priemerované zmiešané distribúcie

Averaged mixed logarithmic distribution Type 1a

$$P(x) = \frac{a^x - rb^x}{x[r \ln(1-b) - \ln(1-a)]}, \quad \text{pre} \quad x = 1, 2, 3 \ldots .$$

Averaged mixed logarithmic distribution Type 2

$$P(x) = \frac{a^x + (-1)^{x+1} rb^x}{x[r \ln(1+b) - \ln(1-a)]}, \quad \text{pre} \quad x = 1, 2, 3 \ldots .$$

Zahrnuté priemerované zmiešané distribúcie

Averaged mixed logarithmic-geometric distribution Type 3a

$$P(x) = \begin{cases} \dfrac{r}{\frac{r}{(1-q)} - \ln(1-\theta)}, & \text{pre } x = 0, \\ \dfrac{rq^x + \frac{\theta^x}{x}}{\frac{r}{(1-q)} - \ln(1-\theta)}, & \text{pre } x = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Averaged mixed logarithmic-geometric distribution Type 3b

$$P(x) = \frac{rq^x + \frac{\theta^x}{x}}{rq(1-q)^{-1} - \ln(1-\theta)}, \quad \text{pre} \quad x = 1, 2, 3 \ldots$$

Averaged mixed logarithmic-geometric distribution Type 3c

$$P(x) = \begin{cases} \dfrac{r}{r(1-b)^{-1} + \ln(\frac{1-a}{1-b})}, & \text{pre } x = 0, \\ \dfrac{rb^x + \frac{b^x - a^x}{x}}{r(1-b)^{-1} + \ln(\frac{1-a}{1-b})}, & \text{pre } x = 1, 2, \ldots . \end{cases}$$

Zahrnuté priemerované zmiešané distribúcie

Averaged mixed logarithmic-negative binomial distribution

$$P(x) = \begin{cases} \dfrac{r(1-q)^m}{r - \ln(1-q)}, & \text{pre } x = 0, \\ \dfrac{r\binom{m+x-1}{x}(1-q)^m q^x + \frac{q^x}{x}}{r - \ln(1-q)}, & \text{pre } x = 1, 2, \ldots . \end{cases}$$

pričom

$$\binom{m+x-1}{x} = \begin{cases} \binom{m+x-1}{x} = 1, & \text{pre } x = 0, \\ \binom{m+x-1}{x} = \dfrac{m(m-1)(m-2)...(m-x+1)}{x!}, & \text{pre } x = 1, 2, \ldots . \end{cases}$$

Parametrický priestor

Na základe podmienok definície pravdepodobnostnej funkcie

$$P(x_i) \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) = 1.$$

Parametrický priestor

Na základe podmienok definície pravdepodobnostnej funkcie

$$P(x_i) \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) = 1.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j f_j(x_i) \geq 0, \quad \text{pre} \quad i = 1, 2, 3...$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j f_j(x_i) \leq 0. \quad \text{pre} \quad i = 1, 2, 3...$$

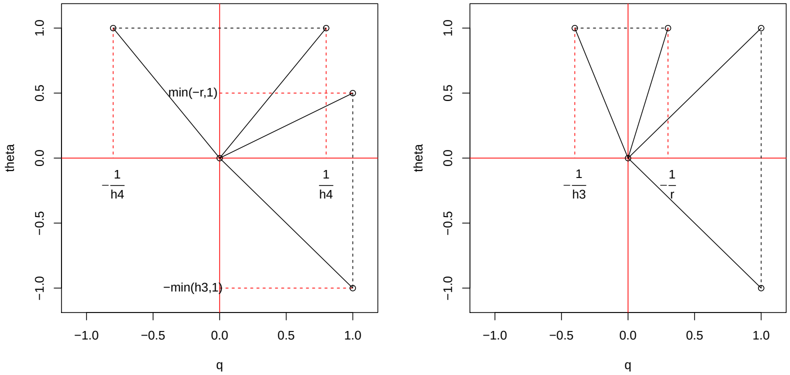
sme odvodzovali parametrický priestor každéj distribúcie.

Parametrický priestor

Ako príklad výsledku zdlhavých odvodzovaní súhrnný prametrický priestor pre Averaged mixed logarithmic-geometric distribution Type 3b

1. $\{(r,q,\theta) : r \geq e, \quad \{0 \leq q < 1, -q \leq \theta < 1\} \cup \{-1 < q < 0, -qr \leq \theta < 1\}\}$
2. $\{(r,q,\theta) : 0 < r < e, \quad \{0 \leq q < 1, -q \min\{r,1\} \leq \theta < 1\} \cup \{h = \max\{\sqrt[(2k_0+1)]{(2k_0+1)r}, \sqrt[(2k_0+3)]{(2k_0+3)r}\}, -1 < q < 0, -qh \leq \theta < 1\}\}$
3. $\{(r,q,\theta) : r = 0, \quad 0 < \theta < 1, -1 < q < 1\}$
4. $\{(r,q,\theta) : -e < r < 0, \quad \{0 \leq q < 1, \theta \in \langle -q \min\{\sqrt{2(-r)}, 1\}, q \min\{-r, 1\}\rangle\}\}$
5. $\{(r,q,\theta) : r \leq -e, \quad \{0 \leq q < 1, \theta \in \langle -q, q\rangle\}\}$

Parametrický priestor



Obr.: Zložený prametrický priestor pre $-e < r < 0$ (vľavo) a $r \leq -e$ (vpravo), kde $h3 = \sqrt{2(-r)}$ a $h4 = \max\{ \sqrt[(x_0)]{x_0(-r)}, \sqrt[(x_0+1)]{(x_0+1)(-r)}\}$

Charakteristiky distribúcie

Pokračujme pre Averaged mixed logarithmic-geometric distribution Type 3b.
Vytvárajúca funkcia

$$G(t) = \frac{rqt(1-qt)^{-1} - \ln(1-\theta t)}{rq(1-q)^{-1} - \ln(1-\theta)}.$$

Klesajúci faktoriálny moment t-teho rádu je

$$\mu'_{[t]} = \frac{1}{rq(1-q)^{-1} - \ln(1-\theta)}\left[\frac{t!rq^t}{(1-q)^{t+1}} + \frac{(t-1)!\theta^t}{(1-\theta)^t}\right].$$

Charakteristiky distribúcie

Momenty, kde označme $C = rq(1-q)^{-1} - \ln(1-\theta)$

$$\begin{aligned}
\mu_1' =& \frac{1}{C}\left(\frac{rq}{(1-q)^2} + \frac{\theta}{1-\theta}\right),\\
\mu_2' =& \frac{1}{C}\left(-\frac{rq(q+1)}{(q-1)^3} + \frac{\theta}{(1-\theta)^2}\right),\\
\mu_3' =& \frac{1}{C}\left(\frac{rq(q^2+4q+1)}{(q-1)^4} - \frac{\theta(\theta+1)}{(\theta-1)^3}\right),\\
\mu_4' =& \frac{1}{C}\left(-\frac{rq(q^3+11q^2+11q+1)}{(q-1)^5} + \frac{\theta(\theta^2+4\theta+1)}{(\theta-1)^4}\right).
\end{aligned}$$

Charakteristiky distribúcie

Centrálne momenty

$$
\begin{aligned}
\mu_1 =& 0,\\
\mu_2 =& \frac{1}{C^2}\left(-\frac{rCq(q+1)}{(q-1)^3}+\frac{C\theta}{(1-\theta)^2}-\left(\frac{rq}{(1-q)^2}+\frac{\theta}{1-\theta}\right)^2\right),\\
\mu_3 =& \frac{1}{C}\left(\frac{rq(q^2+4q+1)}{(q-1)^4}-\frac{\theta(\theta+1)}{(\theta-1)^3}\right)-\frac{3}{C^2}\left(-\frac{rq(q+1)}{(q-1)^3}+\frac{\theta}{(1-\theta)^2}\right)\\
&\left(\frac{rq}{(1-q)^2}+\frac{\theta}{1-\theta}\right)+\frac{2}{C^3}\left(\frac{rq}{(1-q)^2}+\frac{\theta}{1-\theta}\right)^3,\\
\mu_4 =& \frac{1}{C}\left(-\frac{rq(q^3+11q^2+11q+1)}{(q-1)^5}+\frac{\theta(\theta^2+4\theta+1)}{(\theta-1)^4}\right)-\\
&-\frac{4}{C^2}\left(\frac{rq(q^2+4q+1)}{(q-1)^4}-\frac{\theta(\theta+1)}{(\theta-1)^3}\right)\left(\frac{rq}{(1-q)^2}+\frac{\theta}{1-\theta}\right)+\\
&+\frac{6}{C^3}\left(-\frac{rq(q+1)}{(q-1)^3}+\frac{\theta}{(1-\theta)^2}\right)\left(\frac{rq}{(1-q)^2}+\frac{\theta}{1-\theta}\right)^2-\frac{3}{C^4}\left(\frac{rq}{(1-q)^2}+\frac{\theta}{1-\theta}\right)^4,\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Odhady prarametrov

- Metóda štyroch frekvencii
- Momentova medóda
- Kombinácie

Odhady prarametrov

- Metóda štyroch frekvencii
- Momentova medóda
- Kombinácie
- Metóda maximalnej vierohodnosti
- Metóda minimálneho χ^2
- Iteračne Metóda maximalnej vierohodnosti
- Iteračne Metóda minimálneho χ^2

Odhady prarametrov

- log-likelihood (logaritmická vierohodnostná) funkcia

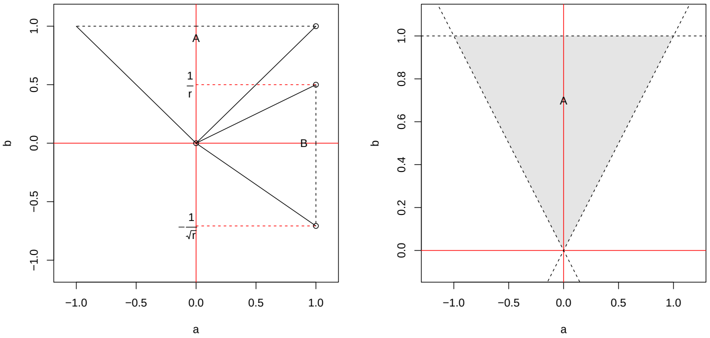
$$\ln \mathcal{L}(x_1, x_2, ..., x_n; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \ln P(x_i).$$

- Funkciu použijeme na numerické optimalizovanie za nelinearnych reštrikcii (parametrický priestor).

- `constrOptim.nl` z knižnice `alabama`, ktorá využíva `Augmented Lagrangian Adaptive Barrier Minimization Algorithm`.

Odhady prarametrov

Averaged mixed logarithmic distribution Type 1a



Obr.: Parametrický priestor pre $r > 1$ (vľavo). Priamky tvoriace hranice časti A parametrického priestoru vo forme $h(x) > 0$ (vpravo).

Odhady prarametrov

1. Algoritmus necháme iterovať na týchto oblastiach a nájdeme hodnoty $\boldsymbol{\theta}$ v ktorých $\ln \mathcal{L}(x_1, x_2, ..., x_n; \boldsymbol{\theta})$ nadobuda maximum,
2. porovnáme tieto odhady a vyberieme ten, v ktorom je hodnota funkcie $\ln \mathcal{L}(x_1, x_2, ..., x_n; \boldsymbol{\theta})$ najvyššia.

Odhady prarametrov

1. Algoritmus necháme iterovať na týchto oblastiach a nájdeme hodnoty $\boldsymbol{\theta}$ v ktorých $\ln \mathcal{L}(x_1, x_2, ..., x_n; \boldsymbol{\theta})$ nadobuda maximum,
2. porovnáme tieto odhady a vyberieme ten, v ktorom je hodnota funkcie $\ln \mathcal{L}(x_1, x_2, ..., x_n; \boldsymbol{\theta})$ najvyššia.

Na otestovanie správnosti sme vzali fixné série parametrov, nagenerujeme 1000 pseudo-náhodných výberov a pre každý odhadneme parametre.

Odhady prarametrov

1. Algoritmus necháme iterovať na týchto oblastiach a nájdeme hodnoty $\boldsymbol{\theta}$ v ktorých $\ln \mathcal{L}(x_1, x_2, ..., x_n; \boldsymbol{\theta})$ nadobuda maximum,
2. porovnáme tieto odhady a vyberieme ten, v ktorom je hodnota funkcie $\ln \mathcal{L}(x_1, x_2, ..., x_n; \boldsymbol{\theta})$ najvyššia.

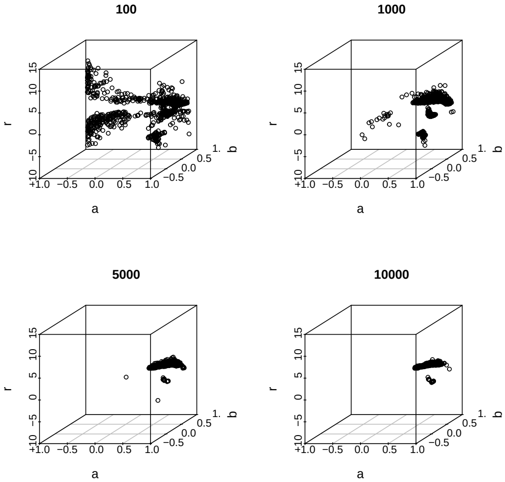
Na otestovanie správnosti sme vzali fixné série parametrov, nagenerujeme 1000 pseudo-náhodných výberov a pre každý odhadneme parametre.

Nepodarilo sa nám nájsť žiaden vhodný počiatočný odhad a preto sme zvolili pevné štartovacie hodnoty.

Rovnaký postup sme zvolili aj pri Metóda minimalneho χ^2.

Odhady prarametrov

Averaged mixed logarithmic distribution Type 1a



Odhady prarametrov

Averaged mixed logarithmic-geometric distribution Type 3b
Metóda maximalnej vierohodnosti

#	r=4	q=0.5	θ=0.9	r=2	q=0.8	θ=0.3
N=50	1.1991	0.26005	0.61262	-0.66969	0.53507	0.32658
N=100	1.7044	0.28938	0.73745	-0.88347	0.58552	0.32828
N=500	1.6606	0.41995	0.83597	0.017664	0.71405	0.25674
N=1000	1.8612	0.4683	0.84959	0.052443	0.74842	0.19796
N=5000	2.2730	0.54707	0.87000	1.147175	0.79988	0.24344
N=10000	0.10427	0.88608	0.79058	1.61569	0.8004	0.29395

#	r=-2	q=0.6	θ=0.2	r=-5	q=0.9	θ=-0.3
N=50	-0.77586	0.27438	0.37635	-0.68115	0.74425	0.24507
N=100	-0.67194	0.32862	0.34155	-0.43597	0.81250	0.12256
N=500	-0.65935	0.39971	0.32358	-0.10142	0.88970	0.06361
N=1000	-0.5123	0.43435	0.30001	-0.26131	0.89883	0.00974
N=5000	-1.2744	0.52087	0.2772	-0.40228	0.90017	-0.02577
N=10000	-1.3444	0.56801	0.23775	-1.3947	0.90011	-0.07790

Odhady prarametrov

Averaged mixed logarithmic-geometric distribution Type 3b
Metóda minimalneho χ^2

#	r=4	q=0.5	θ=0.9	r=2	q=0.8	θ=0.3
N=50	-1.26742	0.26925	0.30936	-1.04517	0.44142	0.42434
N=100	-0.47203	0.18293	0.45464	-0.55110	0.64915	0.22500
N=500	0.07009	0.03766	0.78329	-0.06827	0.74813	0.14465
N=1000	0.75400	0.09731	0.81673	0.28141	0.76662	0.18890
N=5000	1.86974	0.61814	0.85049	1.43880	0.80013	0.29334
N=10000	2.29425	0.62027	0.86215	1.75130	0.80112	0.32057

#	r=-2	q=0.6	θ=0.2	r=-5	q=0.9	θ=-0.3
N=50	-1.20604	0.27127	0.34043	-1.61221	0.42050	0.60160
N=100	-0.18855	0.35629	0.27378	-0.77197	0.76170	0.174459
N=500	-0.42670	0.40550	0.30707	-1.08489	0.89109	-0.02281
N=1000	0.03947	0.44611	0.25683	-1.14776	0.89859	-0.02005
N=5000	-0.75157	0.50774	0.25609	-1.55814	0.90067	-0.03910
N=10000	-1.40409	0.55344	0.24074	-1.65347	0.90049	-0.07229

Odahady parametrov

Averaged mixed logarithmic distribution Typu 1a má asymptotické vlastnosti odhadu maximalnej vierohodnotsi

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \approx N_3\left(\boldsymbol{\theta}; \frac{1}{n}\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\right),$$

Napiseme 95% intervaly spoľahlivosti pre parametre r, a, b

$$\left(\hat{a} - u_{0,025}\sqrt{(1/N)\mathbf{J}_{11}^{-1}(\hat{r}, \hat{a}, \hat{b})}, \quad \hat{a} + u_{0,025}\sqrt{(1/N)\mathbf{J}_{11}^{-1}(\hat{r}, \hat{a}, \hat{b})}\right),$$

$$\left(\hat{b} - u_{0,025}\sqrt{(1/N)\mathbf{J}_{22}^{-1}(\hat{r}, \hat{a}, \hat{b})}, \quad \hat{b} + u_{0,025}\sqrt{(1/N)\mathbf{J}_{22}^{-1}(\hat{r}, \hat{a}, \hat{b})}\right),$$

$$\left(\hat{r} - u_{0,025}\sqrt{(1/N)\mathbf{J}_{33}^{-1}(\hat{r}, \hat{a}, \hat{b})}, \quad \hat{r} + u_{0,025}\sqrt{(1/N)\mathbf{J}_{33}^{-1}(\hat{r}, \hat{a}, \hat{b})}\right),$$

Testy dobrej zhody

Nech $\xi_i^{(n)}$ sú empirické početnosti hodnôt z realizácie náhodneho výberu $X_1, X_2, \ldots, X_n$, ktoré patria do i-teho intervalu. Odhad metodou minimalneho χ^2 vektora prametrov budeme označovať $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = (\tilde{r}, \tilde{a}, \tilde{b})$. Ak realizácia

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{(\xi_i^{(n)(real)} - np_i(\tilde{\boldsymbol{\theta}})^{(real)})^2}{np_i(\tilde{\boldsymbol{\theta}})^{(real)}} \geqq \chi^2_{k-1-u}(1-\alpha),$$

kde $\chi^2_{k-1-u}(1-\alpha)$ je $(1-\alpha)$ kvantil distribúcie χ^2, tak zamietame hypotézu, že náhodný výber pochádza z ,,našej" distribúcie na hladine významnosti α.

Testy dobrej zhody

Vysledky odhadu chyby prvého druhu pre fixné trojice parametrov pre

Averaged mixed logarithmic-geometric distribution Type 3b

#	$r \geq e$	$e > r > 0$	$-e < r < 0$	$-r \leq e$
N=50	0.969	0.735	0.884	0.974
N=100	0.625	0.104	0.334	0.189
N=500	0.1	0.065	0.074	0.085
N=1000	0.307	0.063	0.07	0.061
N=5000	0.485	0.051	0.069	0.054
N=10000	0.41	0.054	0.055	0.063

Publikačná činnosť

- Hudec S., *Priemerované zmiešané rozdelenia typu 1a*, Forum Statisticum Slovacum 1/2017
- Hudec S., *Priemerované diskrétne zmiešané logaritmické rozdelenia,* ROBUST 2018
- Hudec S., *Cluster analysis on panel data,* Forum Statisticum Slovacum 1/2018
- Hudec S., *Generalizations of the lasso penalty,* WDS-m, Prague 2018
- Hudec S., Kiaba M., Knapková M., *Impact of macroeconomic indicators on public debt of Slovak Republic* Journal of Business Economics and Management, vol. 20, no. 4 (2019)

Publikačná činnosť

- Hudec S., Špirková J., *Smoothing of mortality rates using mixture functions,* IPMU 2018
- Hudec S., Špirková J., *Mixture function as an appropriate smoothing of mortality rates,* RELIK 2017
- Hudec S., *Modelling The Force of Mortality Using Local Polynomial Method in R,* 20th Application of Mathematics and Statistics in Economics 2017
- Hudec S., Špirková J., *Mixture function in mortality rates aggregation,* The 3rd International Symposium on Fuzzy Sets - Uncertainty Modelling 2017
- Hudec S., Gubalová J., Medveďová P., Špirková J., *The impact of smoothing mortality rates on life insurance,* RELIK 2018

Otazky a pripomienky oponentov

Otázka
Ktoré najaktuálnejšie podnety z praxe viedli ku skúmaný distribúciám?

Pripomienka
v rozdelení prametrického priestoru na strane 23 chýba prípad $r = 0$ hoci sa autor v ďalšom aj týmto prípadom zaoberá.

Pripomienka
na strane 24 v riadku 12 je uvedené "pre prípad $r > 1$ a $y = 1, 2, \ldots$ je funkcia f(y) klesajúca", v skutočnosti je ale klesajúca iba pre $r > 1$, pretože pre každé konkrétne y je f(y) reálne číslo a nie funkcia. Hneď na dalšej strane v prvom riadku sa hovorí o reade, pričom ale ide o postupnosť - rad evokuje súvislosť s nekonečným radom, o krorý tu ale nejde.

Pripomienka
Rovnako pri prípadenej publiácii výsledkov odporúčam vyhýbať sa hovorovému štýlu (napr. "limitne ide"má byť "jej limita je")

Otazky a pripomienky oponentov

Pripomienka
Je možné, že odhady konvergujú (ak vôbec konvergujú...) k skutočným hodnotám parametrov pomaly, alebo dokonca veľmi pomaly. V práci však narážame na take správanie odhadov, ktoré vzbudzuje pochybnosti, či sú numerické metódy naprogamované (resp. použité) správnym spôsobom.

Pripomienka
Konkrétne napr. na str. 76 v Tabuľke 4.1 sa pre hodnotu parametra $r = -1$ zdá, že sa odhad s rastúcim počtom simulácií od skutočnej hodnoty parametra skôr vzďaľuje (to isté môžeme pozorovať tiež na str. 76 v Tabuľke 4.2 pre $r = -5$).

Pripomienka
Ešte viac bije do očí odhad v prípade $r = 4$ v Tabuľke 5.1 na str. 87, kde pre rozsah $N = 10000$ skončíme s odhadom, ktorý má hodnotu $0,1$, pričom pre menšie rozsahy je výrazne lepší.

Pripomienka
Až absurdne pôsobí odhad parametra r v prípade, že jeho skutočná hodnota je 4, resp. $0,8$ (str. 98, Tabuľka 6.1), keď dosahuje prakticky nulové hodnoty.

Otazky a pripomienky oponentov

Median

#	r=4	q=0.5	θ=0.9
N=50	0.08566229	0.2477554	0.7505398
N=100	0.2003034	0.3637268	0.7876622
N=500	0.8624809	0.4924508	0.8180208
N=1000	2.66106	0.4906059	0.8742398
N=5000	2.718282	0.4960561	0.8853658
N=10000	0.006636402	0.9032513	0.7881391
N=20000	0.007502586	0.8985859	0.7917735
N=50000	0.006516578	0.9033194	0.7879641

Otazky a pripomienky oponentov

Mean

#	r=4	q=0.5	θ=0.9
N=50	0.6270069	0.2192697	0.6078167
N=100	1.352762	0.2462451	0.7259171
N=500	1.728974	0.3915924	0.8370398
N=1000	1.792014	0.4899758	0.8458286
N=5000	2.306566	0.5470676	0.8705451
N=10000	0.1155536	0.8836072	0.7911635
N=20000	0.9976591	0.7542213	0.8239918
N=50000	0.03140528	0.8997948	0.7887981