Integração Trapezoidal

Henrique Mendes Castilho
Samuel Lima Ferreira de Araujo

31 de Março de 2019

1 História

Um trabalho publicado em 2016 aponta que o uso da regra de cálculo da área de trapézios possa ter sido utilizada antes de 50 a.C [1]. Na ocasião, alguns astrônomos babilônicos da época utilizaram quatro placas para calcular a posição do planeta Júpiter utilizando a regra trapezoidal.

Para isto, os cálculos presente em uma das placas apresenta que a distância percorrida por Júpiter foi computada pela área da figura que representa o quanto a velocidade alterou em relação ao tempo. Em nenhuma placa há desenhos das figuras geométricas, mas o autor descreve que as áreas computadas nas placas são de trapézios.

As raízes da utilização da regra de integração por trapézios voltam para Euler e Maclaurin [2]. É difícil encontrar discussões explícitas do uso da regra, mas acredita-se que Euler tenha sido o primeiro a identificar o fenômeno nos anos de 1820, no qual a regra dos trapézios poderia ser utilizada em integrais periódicas ou integrando sobre uma linha, resultando valores exponencialmente precisos.

2 Teoria

A ideia é calcular um valor aproximado da integral através da soma de trapézios. [3]

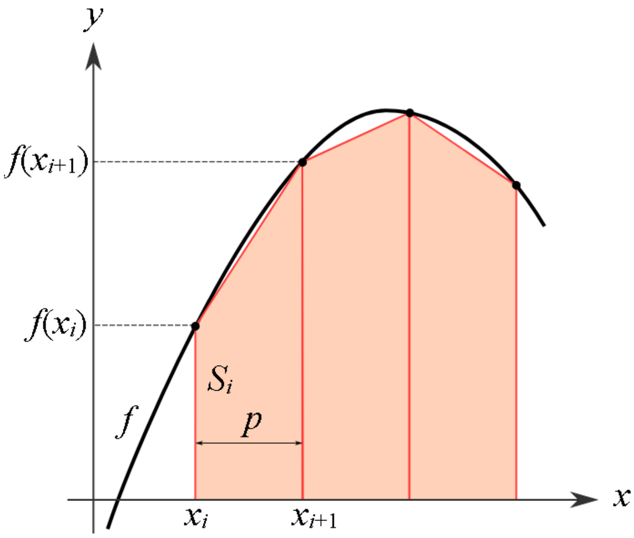

Figura 1: Representação gráfica da integração trapezoidal

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{N} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \Delta x_k \tag{1}$$

3 Exemplo

$$f(x) = x^2 + 5 \tag{2}$$

Integrando de $a = 0$ até $b = 12$

3.1 Um trapézio

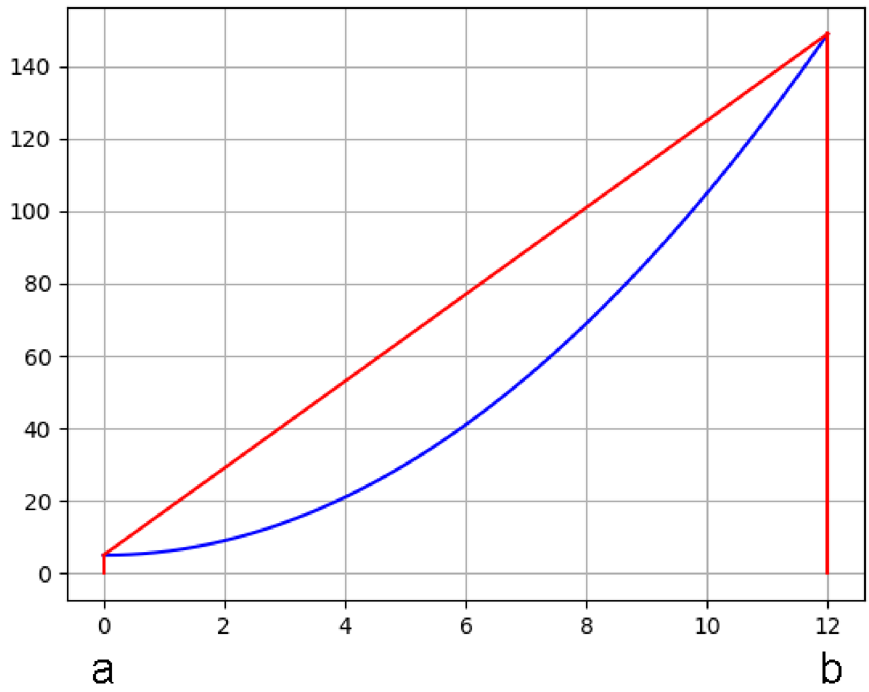

Figura 2: Curva dividida em um trapézio

Área do trapézio é definida pela equação 1, que substituindo fica:

$$S = \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b - a) \tag{3}$$

$$S = \frac{5 + 149}{2} \cdot 12 = 924 \tag{4}$$

- Área utilizando a regra: 924.000
- Área utilizando a integral: 636.000
- Erro relativo: -45.283%

3.2 Dois trapézios

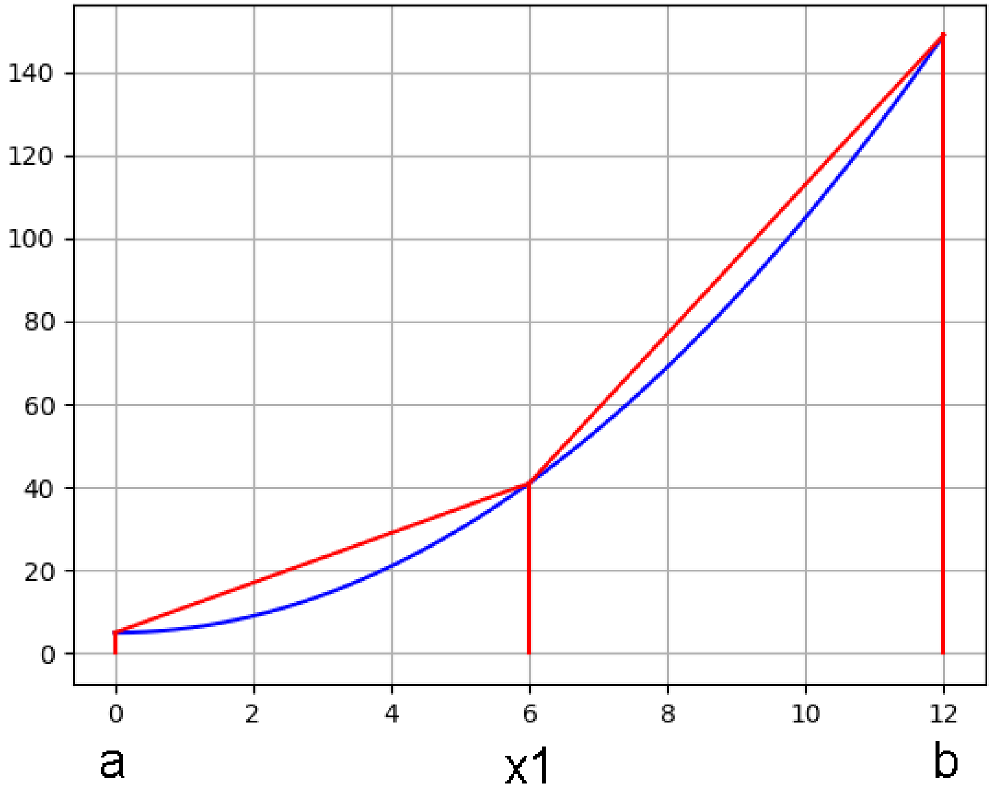

Figura 3: Curva dividida em dois trapézios

Área do trapézio é definida pela equação 1, que substituindo fica:

$$S = \frac{f(a) + f(x_1)}{2} \cdot (x_1 - a) + \frac{f(x_1) + f(b)}{2} \cdot (b - x_1) \tag{5}$$

$$S = \frac{5 + 41}{2} \cdot 6 + \frac{41 + 149}{2} \cdot 6 = 708 \tag{6}$$

- Área utilizando a regra: 708.000
- Área utilizando a integral: 636.000
- Erro relativo: -11.321%

3.3 Três trapézios

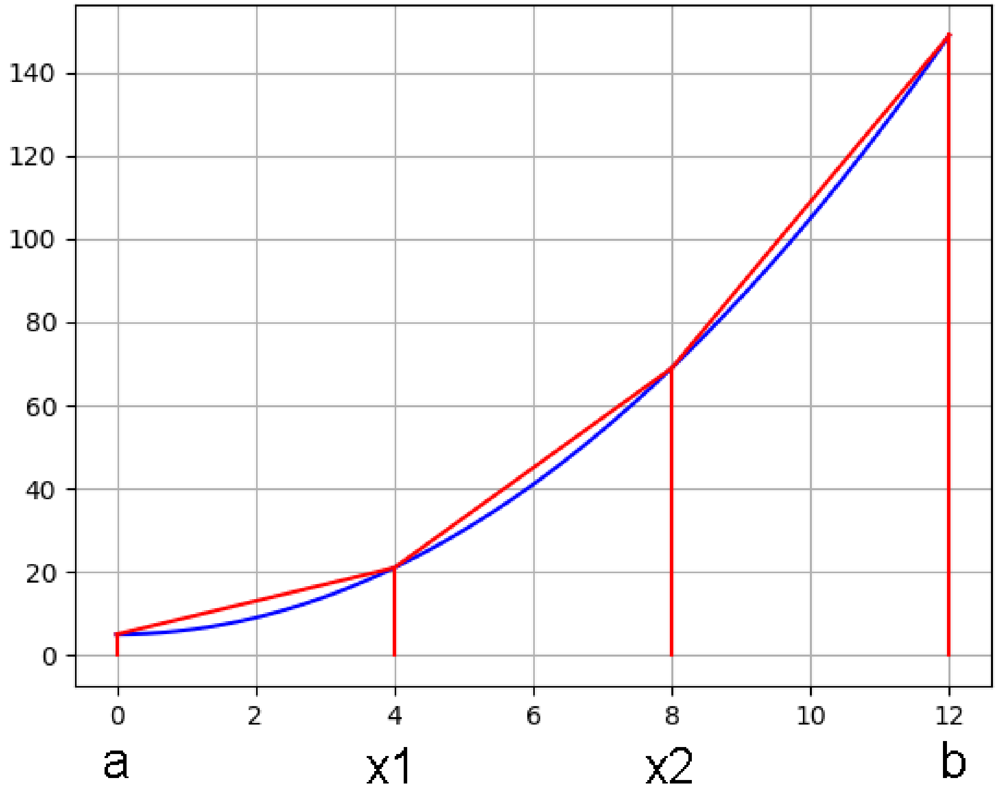

Figura 4: Curva dividida em três trapézios

Área do trapézio é definida pela equação 1, que substituindo fica:

$$S = \frac{f(a) + f(x_1)}{2} \cdot (x1 - a) + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \cdot (x_2 - x_1)... \\ + \frac{f(x_2) + f(b)}{2} \cdot (b - x_2) \tag{7}$$

$$S = \frac{5 + 21}{2} \cdot 4 + \frac{21 + 69}{2} \cdot 4 + \frac{69 + 149}{2} \cdot 4 = 668 \tag{8}$$

- Área utilizando a regra: 668.000
- Área utilizando a integral: 636.000
- Erro relativo: -5.031%

3.4 Quatro trapézios

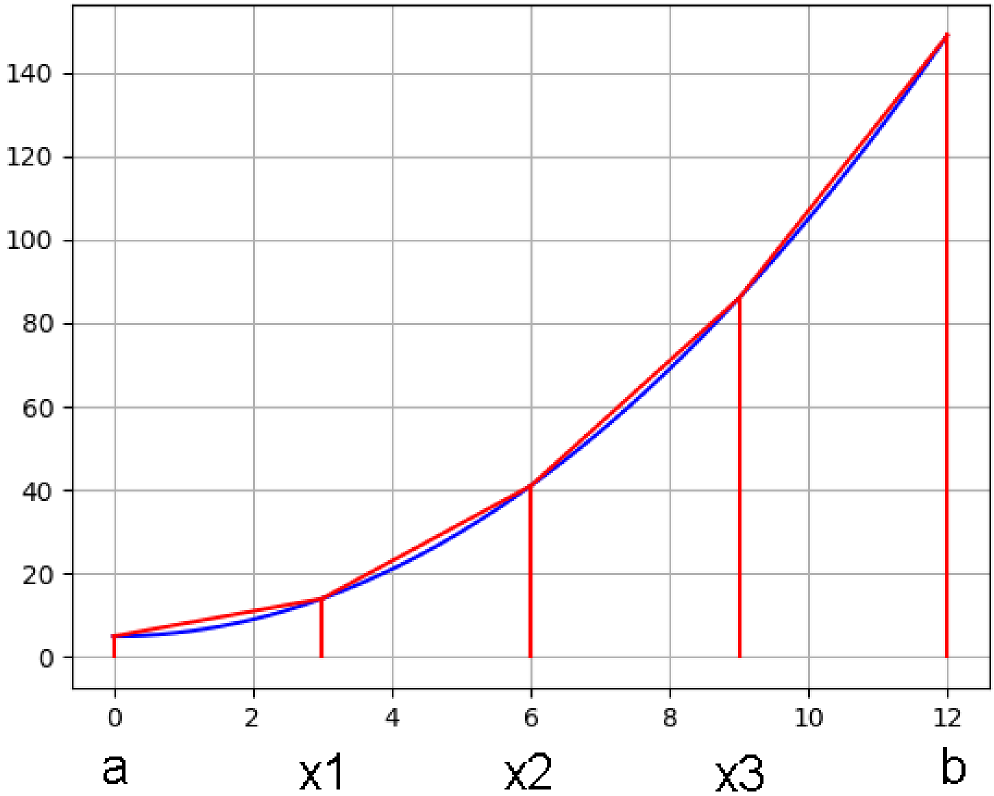

Figura 5: Curva dividida em quatro trapézios

Área do trapézio é definida pela equação 1, que substituindo fica:

$$S = \frac{f(a)+f(x_1)}{2} \cdot (x1 - a) + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \cdot (x_2 - x_1)... \\ + \frac{f(x_2)+f(x_3)}{2} \cdot (x_3 - x_2) + \frac{f(x_3)+f(b)}{2} \cdot (b - x_3) \tag{9}$$

$$S = \frac{5+14}{2} \cdot 3 + \frac{14+41}{2} \cdot 3 + \frac{41+86}{2} \cdot 3 + \frac{86+149}{2} \cdot 3 = 652 \tag{10}$$

- Área utilizando a regra: 652.000
- Área utilizando a integral: 636.000
- Erro relativo: -2.516%

4 Gráfico

Comportamento do erro relativo com a quantidade de trapézios utilizados na integração.

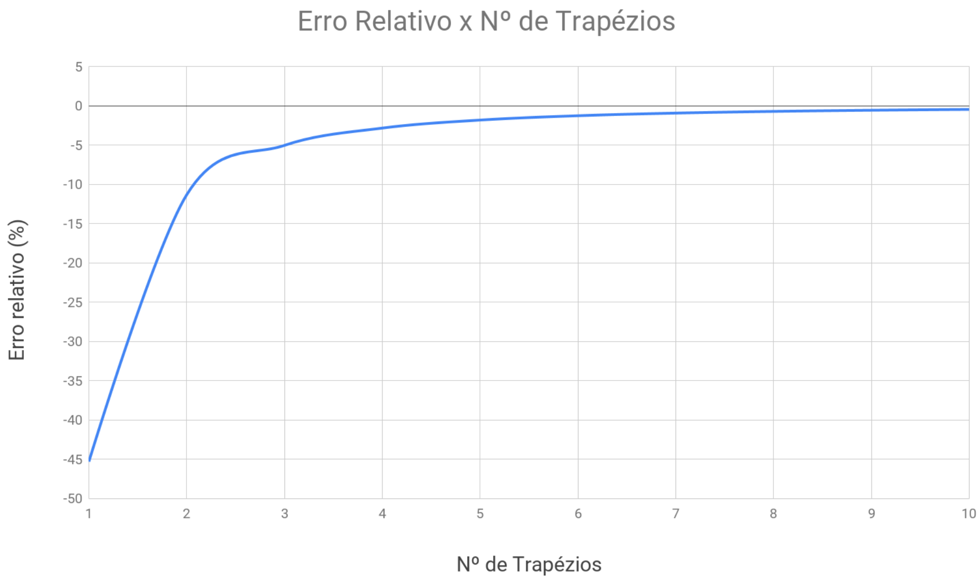

Figura 6: Gráfico do erro relativo e o número de trapézios

Observa-se um comportamento de uma função exponencial aos dados utilizados. Logo, ao aumentar o número de trapézios para valores muito grandes, o erro relativo obtido tende ao valor 0.

Referências

[1] Mathieu Ossendrijver. Ancient babylonian astronomers calculated jupiter's position from the area under a time-velocity graph. *Science*, 351(6272):482–484, 2016.

[2] Lloyd N Trefethen and JAC Weideman. The exponentially convergent trapezoidal rule. *SIAM Review*, 56(3):385–458, 2014.

[3] Kendall E. Atkinson. *An Introduction to Numerical Analysis*. John Wiley & Sons, New York, USA, 2nd edition, 1989.