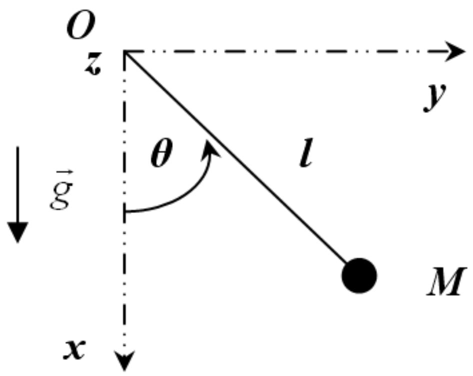
TP 2

Résolution numérique d'équations différentielles ordinaires - 2ème partie : application au pendule chaotique



2.1 Étude du mouvement d'un pendule avec l'approximation des petits angles

On considère le pendule simple de la figure , dont l'équation du mouvement libre s'écrit :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + q\frac{d\theta}{dt} + \Omega^2 \sin\theta = 0 \qquad \text{avec } \sin\theta \simeq \theta \quad \rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + q\frac{d\theta}{dt} + \Omega^2\theta = 0$$

où θ est l'angle que fait le pendule par rapport à la verticale, $\Omega = \sqrt{g/l}$ est la pulsation propre et q est le terme de frottement fluide. On utilisera par commodité la valeur suivante : $\Omega = 1\text{rad.s}^{-1}$.

13. Résolvez cette équation linéarisée ($\frac{d^2\theta}{dt^2} + q\frac{d\theta}{dt} + \Omega^2\theta = 0$) avec la méthode RK4 pour différentes valeurs de l'amortissement : $q = 1$, $q = 2$, $q = 5\ s^{-1}$ et tracez *sur un même graphe* l'évolution de $\theta(t)$ dans ces régimes respectivement pseudo-périodique, critique et apériodique. On prendra comme conditions initiales $\theta(t = 0) = 10°$ (à convertir en radian) et $\frac{d\theta}{dt}(t = 0) = 0$ et un pas de temps $dt = 0.05$s pour t allant de 0 à 20s. Il est utile ici de mettre la boucle sur le temps qui calcule $\theta(t)$ dans une fonction avec comme paramètre la valeur de l'amortissement q. Cette fonction devra remplir deux tableaux : celui qui contient les valeurs du temps t et celui qui contient les valeurs de $\theta(t)$.

On ajoute maintenant une force d'excitation au pendule de sorte que l'équation du mouvement s'écrive :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + q\frac{d\theta}{dt} + \Omega^2\theta = F_e \sin(\Omega_e t).$$

14. Résolvez cette nouvelle équation avec la méthode RK4 pour une force excitatrice d'intensité $F_e = 1\text{rad.s}^{-2}$ et de pulsation $\Omega_e = 2\Omega/3$. Tracez *sur un même graphe* la trajectoire dans l'espace des phase $(\theta, \frac{d\theta}{dt})$ pour le pendule libre ($q = 0$ et $F_e = 0$) , amorti (q=1 et $F_e = 0$), et amorti avec excitation (q=1 et $F_e = 1$). On prendra toujours comme conditions initiales $\theta(t = 0) = 10°$ (à convertir en radian) et $\frac{d\theta}{dt}(t = 0) = 0$. Commentez la forme des trajectoires que vous observez.

2.2 Mouvement chaotique

Lorsque l'on ne fait plus l'hypothèse des petits angles ($\sin\theta \simeq \theta$), on obtient une équation différentielle d'ordre 2 qui n'est pas linéaire :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + q\frac{d\theta}{dt} + \Omega^2 \sin\theta = F_e \sin(\Omega_e t).$$

Pour certaines valeurs des paramètres physiques, le comportement du pendule sera chaotique. Afin d'illustrer ce comportement, on se placera dans les conditions suivantes : $\theta(t = 0) = 10°$ (à convertir en radian) et $\frac{d\theta}{dt}(t = 0) = 0$, $\Omega_e = 2\Omega/3$, $q = 0.5s^{-1}$.

15. Résolvez l'équation du mouvement non-linéaire avec la méthode RK4 pour les valeurs suivantes de l'amplitude d'excitation $F_e = \{1.4, 1.44, 1.465, 1.5\}$ rad.s^{-2} et tracez $\theta(t)$ sur un temps de 100s (choisir le nombre de plots nécessaires pour bien distinguer le comportement). Ajouter deux tests **if** dans la boucle après l'appel à rk4 pour maintenir l'angle θ dans l'interval $[-\pi; \pi]$. Que constatez-vous au sujet de la période du pendule ? (attention, périodique≠sinusoidal...)

16. Dans le cas $F_e = 1.5$ rad.s^{-2}, calculez l'évolution de $\theta(t)$ pour deux conditions initiales très proches l'une de l'autre : $\theta(t = 0) = 10°$ et $\theta(t = 0) = 9.999°$. Tracez les deux trajectoires sur un même plot. Au bout de combien temps est-ce qu'un écart entre les deux courbes devient visible ? On voudrait maintenant quantifier comment et avec quelle la vitesse cet écart croit. On essaye de vérifier une croissance exponentielle, c'est-à-dire la valeur absolue de cet écart croit comme $e^{\lambda t}$ où λ est « l'exposant de Lyapounov » qui caractérise la vitesse à laquelle deux systèmes quasiment identiques divergent. Essayer de déterminer l'exposant de Lyapounov en traçant le logarithme de cet écart absolu.

Puis en y superposant une droite à la main, vérifiant ainsi qu'il s'agit d'une croissance exponentielle. La pente de cette droite est la valeur de l'exposant de Lyapounov λ. Qu'en conclure sur vos capacités de prédiction de l'état futur du système ?

2.3 *Pour aller plus loin :* diagramme de bifurcation.

Afin de mettre en évidence la transition du système vers le régime chaotique, on peut calculer l'état du système uniquement à des instants t_n tels que $t_n = \frac{2\pi n}{\Omega_e}$ où n est un entier, ce qui veut dire que l'on observe en phase avec la fréquence excitatrice. Comme dans le cas où on observe un mouvement avec un stroboscope, si le pendule est dans un régime stationnaire et oscille à la fréquence d'excitation, alors les valeurs de θ_n que l'on calcule ont la même valeur, c'est comme si on avait figé le mouvement. En faisant varier

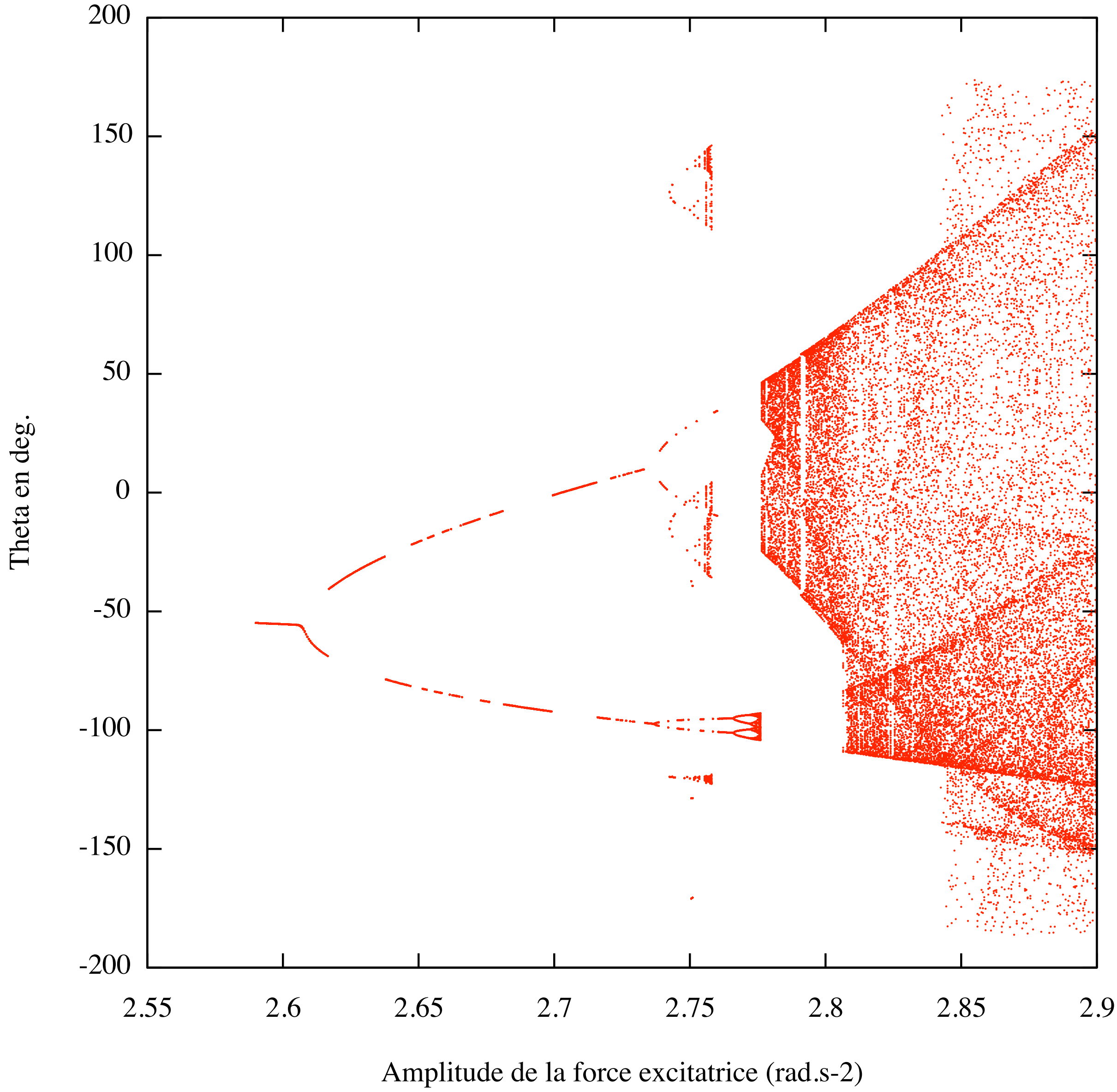


FIGURE 2.1 – Diagramme de bifurcation

la valeur de la force d'excitation, vous pourrez étudier les changements de régime du pendule.

17. Pour tracer le diagramme de bifurcation, il faut faire évoluer le système suffisamment longtemps pour éliminer le régime transitoire, et afficher par exemple 50 ou 100 valeurs de θ pour des temps multiples entiers de la période d'excitation. On choisira un δt adapté pour faciliter les calculs, par exemple :$\delta t = \frac{2\pi}{200\Omega_e}$. Pour obtenir de beaux exemples, vous pourrez faire varier F_e entre 1.41 et 1.5 rad.s^{-2} par pas de 0.005, ou entre 2.55 et 2.85. Vous pourrez obtenir un graphe comme montré dans la figure 2.1.