

Nom étudiant: Samuel Ogulluk

Numéro étudiant: 21501479

LU3PY126 FOAD

TP 1 Intégration des équations différentielles

Table des matières

| | | | | | |
|--------------------|------------------------|---|----|---|----|
| Table des matières | | | 7 | Fonction Euler générale | 10 |
| 1 | Méthode d'Euler | 3 | 8 | Simulation de particules chargées | 11 |
| 2 | Désintégration X->Y->Z | 5 | 9 | Oscillateur harmonique et erreurs | 12 |
| 3 | Oscillateur harmonique | 6 | 10 | Runge-Kutta d'ordre 4 pour l'oscillateur harmonique | 14 |
| 4 | Fonction Deriv | 7 | | | |
| 5 | Fonction Euler | 8 | 11 | Runge-Kutta d'ordre 2 | 16 |
| 6 | Fonction Deriv3 | 9 | 12 | Comparaison des méthodes numériques | 18 |

Introduction

Au cours de ce TP, nous nous intéresserons à la résolution numérique d'équations différentielles. Ainsi, nous verrons notamment les point suivants :

- ➔ résolutions d'équation différentielles d'ordre 1 par la méthode d'Euler
- ➔ résolution d'un système d'équations différentielles d'ordre 1 par la méthode d'Euler
- ➔ résolution d'une équation différentielle d'ordre 2 (cas du ressort non amorti)
- ➔ Application de la méthode de Runge-Kutta à l'ordre 2 et à l'ordre 4

Les codes présentés sont en C++ et Python pour la visualisation et sont joint à ce compte-rendu ainsi que disponibles dans le dépôt suivant : Dépôt Github

Question 1 Méthode d'Euler

Pour commencer, nous avons déterminé la solution à l'équation de désintégration $X \rightarrow Y$ donnant :

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

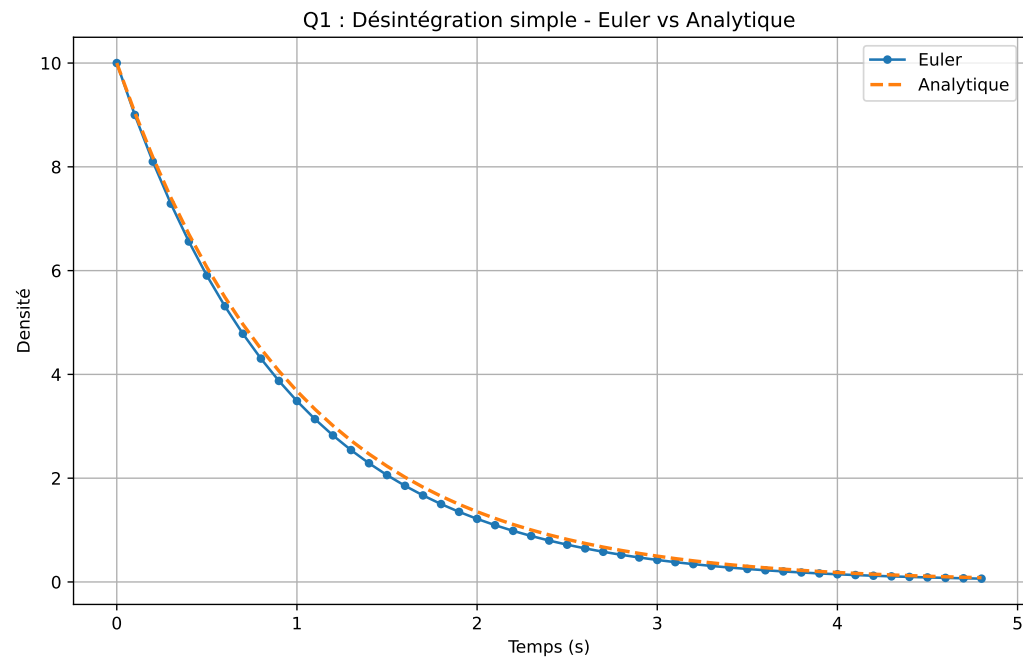
. Pour ce faire, nous utilisons Euler explicite :

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + f(y(t_k), t_k) \times \Delta t \quad (1)$$

Pour ce faire, nous itérons sur un tableau uniformément réparti temporellement, et on calcule chaque valeur de la fonction à partir des valeurs précédentes selon l'équation 1 ;

TP1/q1.cpp

```
1 #include "tp1.hpp"
2
3 void solve_q1() {
4     double k = 1.0;
5     double Tmax = 5.0;
6     double dt = 0.1;
7     double x0 = 10.0;
8     int steps = static_cast<int>(Tmax / dt);
9
10    std::vector<double> x(steps);
11    x[0] = x0;
12
13    std::ofstream fichier("resultats/q1.csv");
14    if (fichier.is_open()) {
15        fichier << "t,x_euler,x_analytique" <<
16            << std::endl;
17
18        for (int i = 0; i < steps - 1; ++i) {
19            double t = i * dt;
20            x[i+1] = x[i] - k * x[i] * dt;
21            double x_analytique = x0 * std::exp(-k *
22                << t);
23            fichier << t << "," << x[i] << "," <<
24                << x_analytique << std::endl;
25        }
26    }
27    fichier.close();
28 }
```



On constate ainsi que la méthode numérique approxime très bien la solution analytique, en présentant cependant toujours un retard, dû à la méthode employé (la méthode implicite aurait une avance).

FIGURE 1 – Comparaison de la densité $x(t)$ théorique et numérique

Question 2 Désintégration X->Y->Z

On simule ensuite un système d'équation, appliquant la méthode d'euler à un vecteur. On obtient ainsi :

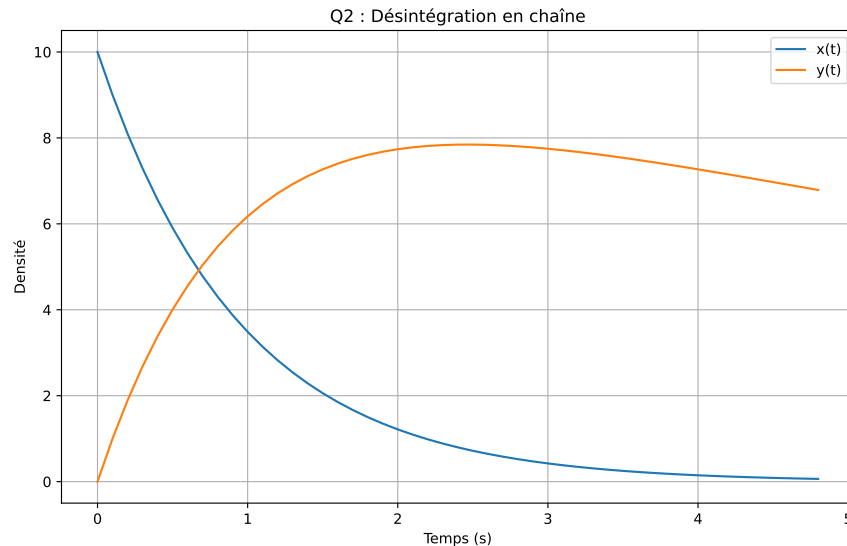


FIGURE 2 – Densité $x(t)$ et $y(t)$ en fonction du temps

On constate ainsi que $x(t)$ n'est pas modifié, tandis que $y(t)$ illustre la transformation $Y \rightarrow Z$, qui est de dérivée proportionnelle à $x(t)$ et $y(t)$.

TP1/q2.cpp

```
1 // q2.cpp
2 #include "tp1.hpp"
3
4 void solve_q2() {
5     double k = 1.0;
6     double k2 = 0.1;
7     double dt = 0.1;
8     double Tmax = 5.0;
9     int steps = static_cast<int>(Tmax / dt);
10
11     std::vector<double> y(steps, 0.0);
12     std::vector<double> x(steps, 0.0);
13     x[0] = 10.0; // x0
14
15     std::ofstream fichier("resultats/q2.csv");
16     if (fichier.is_open()) {
17         fichier << "t,x,y" << std::endl;
18         //Euler mais sur deux variables (la deuxieme
19         // est la dérivée de la premiere)
20         for (int i = 0; i < steps - 1; ++i) {
21             double t = i * dt;
22             double dxdt = -k * x[i];
23             double dydt = k * x[i] - k2 * y[i];
24
25             x[i+1] = x[i] + dxdt * dt;
26             y[i+1] = y[i] + dydt * dt;
```

Question 3 Oscillateur harmonique

On s'intéresse maintenant à un oscillateur harmonique d'équation : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

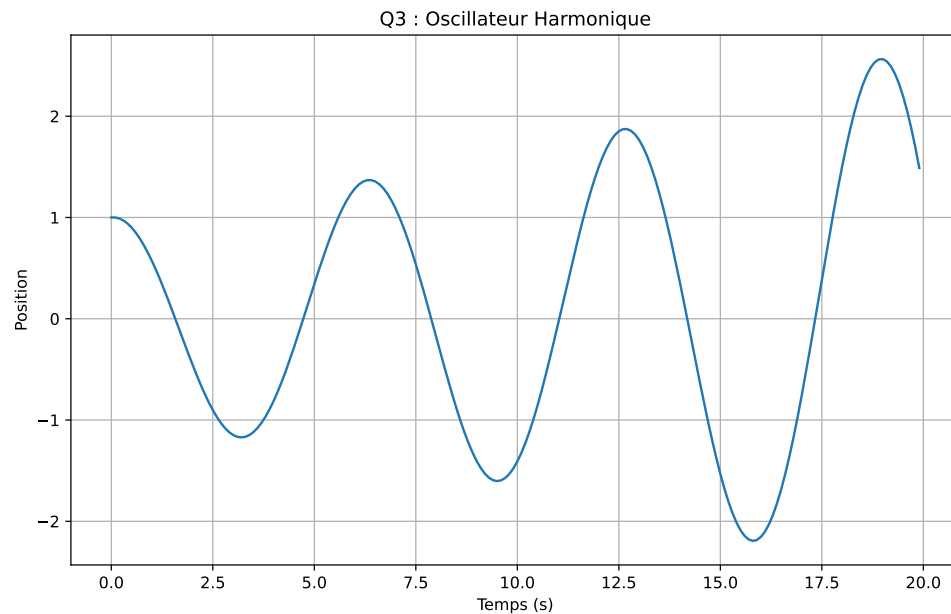


FIGURE 3 – $x(t)$ d'un oscillateur harmonique

On constate ici un problème énergétique, l'amplitude du mouvement est croissante alors que le système est réversible.

TP1/q3.cpp

```
1 #include "tp1.hpp"
2
3 void solve_q3() {
4     double dt = 0.1;
5     double Tmax = 20.0;
6     int steps = static_cast<int>(Tmax / dt);
7     // CI
8     const int n = 2;
9     double state[n];
10    state[0] = 1.0; // x0 = 1.0
11    state[1] = 0.0; // v0 = 0.0
12
13    std::ofstream fichier("resultats/q3.csv");
14    if (fichier.is_open()) {
15        fichier << "t,x,v" << std::endl;
16
17        for (int i = 0; i < steps; ++i) {
18            double t = i * dt;
19            fichier << t << "," << state[0] << "," <<
20                ↪ state[1] << std::endl;
21            euler(n, t, state, dt, deriv3);
22        }
23        fichier.close();
24    }
```

Question 4 Fonction Deriv

Afin de résoudre le système étudié en question 2, on vient créer la fonction deriv suivante :

TP1/q4.cpp

```
6   dy[0] = y[1];
7   dy[1] = -w0_q4 * w0_q4 * y[0];
8 }
9
```

Cette fonction nous permet ensuite de venir reproduire les résultats vu précédemment, à l'aide d'un code plus général.

TP1/q4.cpp

```
11  double dt = 0.1;
12  double Tmax = 50.0;
13  int steps = static_cast<int>(Tmax / dt);
14
15  // CI
16  const int n = 2;
17  double state[n];
18  state[0] = 1.0; // x0 = 1.0
19  state[1] = 0.0; // v0 = 0.0
20
21  std::ofstream fichier("resultats/q4.csv");
22  if (fichier.is_open()) {
23      fichier << "t,x,v" << std::endl;
24
25      for (int i = 0; i < steps; ++i) {
26          double t = i * dt;
27          fichier << t << "," << state[0] << "," <<
28              ↪ state[1] << std::endl;
29
30          // Intégration par Euler
31          euler(n, t, state, dt, deriv_q4);
32      }
33      fichier.close();
34  }
35 }
```

Question 5 Fonction Euler

On souhaite maintenant créer une fonction générale permettant de résoudre numériquement des systèmes d'équations différentielles. Pour ce faire, on utilise l'équation 1 pour obtenir la fonction suivante :

TP1/q5.cpp

```
8 // Forward declaration
9 void deriv_q5(int n, double t, double y[], double
  ↪ dy[]);
10
11 void euler_q5(int n, double t, double y[], double dt,
  ↪ double dy[]) {
12     deriv_q5(n, t, y, dy);
13     for (int i = 0; i < n; ++i) {
14         y[i] += dy[i] * dt;
15     }
16 }
17
18 void deriv_q5(int n, double t, double y[], double
  ↪ dy[]) {
```

Ainsi, on peut calculer à chaque itération, un point supplémentaire de la fonction recherchée et traiter la question 2 comme un cas particulier.

TP1/q5.cpp

```
22     dy[1] = k_q5 * y[0] - k2_q5 * y[1]; // dy/dt
23 }
24
25 void solve_q5() {
26     double dt = 0.1;
27     double Tmax = 5.0;
28     int steps = static_cast<int>(Tmax / dt);
29
30     // CI
31     const int n = 2;
32     double state[n];
33     state[0] = 10.0; // x0 = 10.0
34     state[1] = 0.0; // y0 = 0.0
35
36     std::ofstream fichier("resultats/q5.csv");
37     if (fichier.is_open()) {
38         fichier << "t,x,y" << std::endl;
39
40         for (int i = 0; i < steps; ++i) {
41             double t = i * dt;
42
43             fichier << t << "," << state[0] << "," <<
  ↪ state[1] << std::endl;
44
45             double dy[n];
46             euler_q5(n, t, state, dt, dy);
47         }
```

Question 6 Fonction Deriv3

On souhaite maintenant faire de même pour l'équation d'un oscillateur harmonique. On crée ainsi la fonction Deriv3, qui prend en entrée un vecteur constitué de x et de sa dérivée afin de résoudre le système 2 :

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x \iff \begin{cases} u = \frac{dx}{dt} \\ \frac{du}{dt} = -\omega_0^2 x \end{cases} \iff \begin{cases} x(t_{k+1}) = x(t_k) + u(t_k) \times \Delta t \\ u(t_{k+1}) = u(t_k) - \omega_0^2 x(t_k) \times \Delta t \end{cases} \quad (2)$$

TP1/q6.cpp

```
5 void deriv3(int n, double t, double y[], double dy[]) {
6     dy[0] = y[1];
7     dy[1] = -w0_global * w0_global * y[0];
8 }
9
10 void euler_q6(int n, double t, double y[], double dt, double
    ↪ dy[]) {
11     deriv3(n, t, y, dy);
12     for (int i = 0; i < n; ++i) {
13         y[i] += dy[i] * dt;
14     }
15 }
```

TP1/q6.cpp

```
17 void solve_q6() {
18     double dt = 0.1;
19     double Tmax = 20.0;
20     int steps = static_cast<int>(Tmax /
    ↪ dt);
21     const int n = 2;
22     double state[n];
23     state[0] = 1.0; // x0 = 1.0
24     state[1] = 0.0; // v0 = 0.0
25     std::ofstream
    ↪ fichier("resultats/q6.csv");
26     if (fichier.is_open()) {
27         fichier << "t,x,v" << std::endl;
28         for (int i = 0; i < steps; ++i) {
29             double t = i * dt;
30             fichier << t << "," << state[0]
    ↪ << "," << state[1] <<
    ↪ std::endl;
31             double dy[n];
32             euler_q6(n, t, state, dt, dy);
33         }
34         fichier.close();
35     }
```

Question 7 Fonction Euler générale

On vient ensuite modifier le prototype de la fonction euler pour qu'elle prenne une fonction de type dérivée en entrée. Ainsi, pour résoudre une équation différentielle ordinaire, il suffit de fournir les conditions initiales et l'équation différentielle sous forme de fonctionnelle. **TP1/q7.cpp**

```
1 // q7.cpp
2 #include "tp1.hpp"
3
4 void euler(int n, double t, double y[], double dt,
5           void deriv(int, double, double[],
6                     ↪ double[])) {
7     double dy[n];
8     deriv(n, t, y, dy);
9
10    // Euler explicite ici
11    for (int i = 0; i < n; ++i) {
```

On peut ainsi résoudre les précédents exemples.

TP1/q7.cpp

```
13 }
14 }
15
16 void solve_q7() { // exemple de résolution de q6
17     double dt = 0.1;
18     double Tmax = 20.0;
19     int steps = static_cast<int>(Tmax / dt);
20
21     const int n = 2;
22     double state[n];
23     state[0] = 1.0; // x0 = 1.0
24     state[1] = 0.0; // v0 = 0.0
25
26     std::ofstream fichier("resultats/q7.csv");
27     if (fichier.is_open()) {
28         fichier << "t,x,v" << std::endl;
29
30         for (int i = 0; i < steps; ++i) {
31             double t = i * dt;
32
33             fichier << t << "," << state[0] << "," <<
34                 ↪ state[1] << std::endl;
35
36             euler(n, t, state, dt, deriv3);
37         }
```

Question 8 Simulation de particules chargées

On vient enfin simuler une particule chargée dans un champ électromagnétique uniforme et constant.

On obtient ainsi l'évolution dans le temps des coordonnées de la particule, ainsi que la trajectoire qu'elle prend :

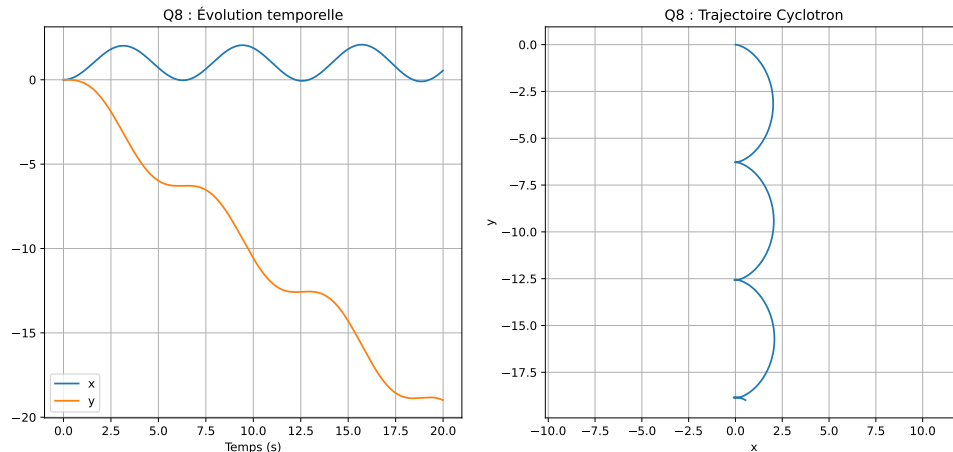


FIGURE 4 – Evolution des coordonnées de la particule chargée

TP1/q8.cpp

```
5 void deriv_particle(int n, double t, double y[],  
  ↪ double dy[]) {  
6     dy[0] = y[2];  
7     dy[1] = y[3];  
8     dy[2] = 1.0 + y[3];  
9     dy[3] = -y[2];  
10 }  
11  
12 void solve_q8() {  
13     double dt = 0.01;  
14     double Tmax = 20.0;  
15     int steps = static_cast<int>(Tmax / dt);  
16     const int n = 4;  
17     double state[n] = {0.0, 0.0, 0.0, 0.0};  
18     std::ofstream fichier("resultats/q8.csv");  
19     if (fichier.is_open()) {  
20         fichier << "t,x,y" << std::endl;  
21         for (int i = 0; i < steps; ++i) {  
22             fichier << i * dt << "," << state[0] <<  
  ↪      << "," << state[1] << std::endl;  
23             euler(n, i * dt, state, dt,  
  ↪      deriv_particle);  
24         }  
25         fichier.close();  
26     }  
27 }
```

Question 9 Oscillateur harmonique et erreurs

On s'intéresse maintenant à l'erreur commise par la méthode d'Euler explicite sur le cas de l'oscillateur harmonique, dont on connaît la solution analytique :

TP1/q9.cpp

```
7 void deriv_q9(int n, double t, double y[],  
  ↪ double dy[]) {  
8   dy[0] = y[1];  
9   dy[1] = -w0_q9 * w0_q9 * y[0];  
10 }  
11  
12 double solution_analytique(double t, double  
  ↪ x0, double v0, double w0) {  
13   return x0 * std::cos(w0 * t) + (v0 /  
    ↪ w0) * std::sin(w0 * t);  
14 }
```

On constate encore la divergence de l'enveloppe montrant les difficultés de cette méthode à traiter l'énergie. On constate de plus que diminuer Δt permet de diminuer l'erreur, mais ne change rien à la divergence de l'amplitude.

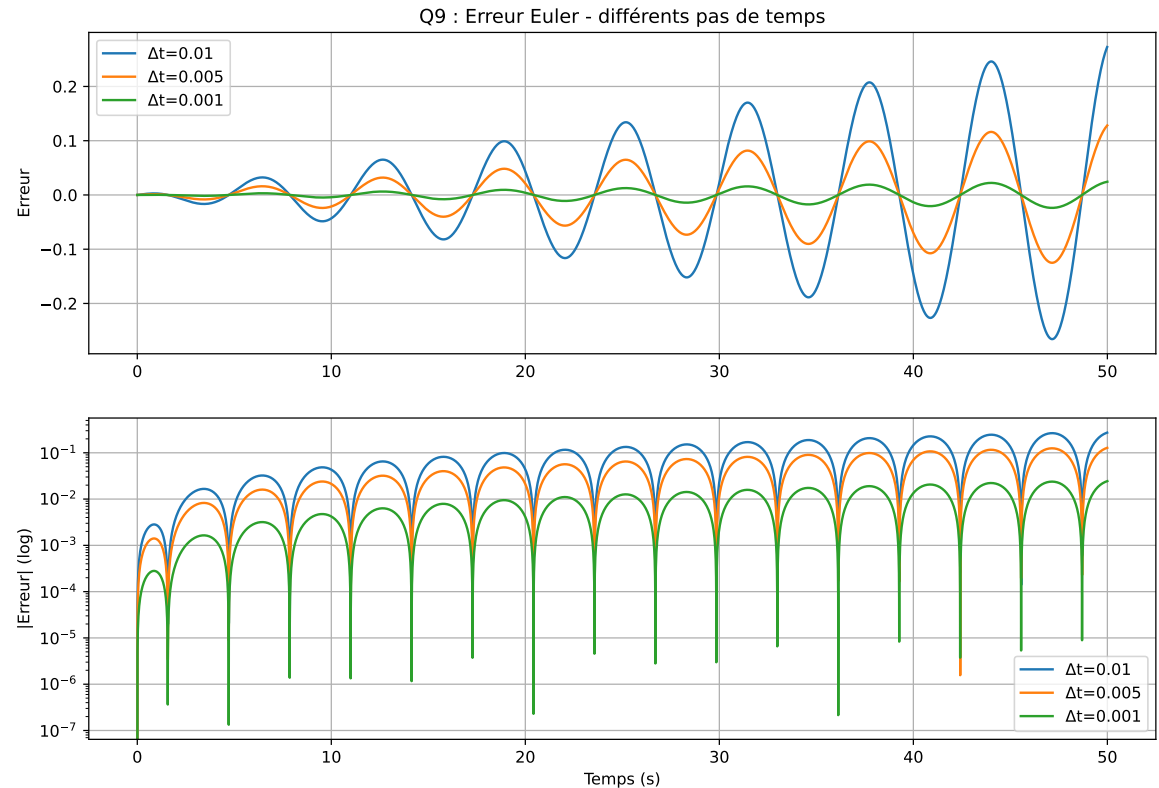


FIGURE 1 – Erreur en fonction du temps et du pas de temps

TP1/q9.cpp

```
16 void solve_q9_with_dt(double dt, const std::string& filename) {
17     double Tmax = 50.0;
18     int steps = static_cast<int>(Tmax / dt);
19     const int n = 2;
20     double state[n];
21     state[0] = 1.0; // x0 = 1.0
22     state[1] = 0.0; // v0 = 0.0
23     double x0 = state[0];
24     double v0 = state[1];
25     std::ofstream fichier(filename);
26     if (fichier.is_open()) {
27         fichier << "t,x_numerique,x_analytique,erreur" << std::endl;
28         for (int i = 0; i < steps; ++i) {
29             double t = i * dt;
30             double x_th = solution_analytique(t, x0, v0, w0_q9);
31             double erreur = state[0] - x_th;
32             fichier << t << "," << state[0] << "," << x_th << "," << erreur << std::endl;
33             euler(n, t, state, dt, deriv_q9);
34         }
35         fichier.close();
36     }
37 }
38
39 void solve_q9() {
40     // Test avec différents pas de temps
41     solve_q9_with_dt(0.01, "resultats/q9_dt001.csv");
42     solve_q9_with_dt(0.005, "resultats/q9_dt0005.csv");
43     solve_q9_with_dt(0.001, "resultats/q9_dt0001.csv");
44 }
```

Question 10 Runge-Kutta d'ordre 4 pour l'oscillateur harmonique

On vient maintenant reproduire la même expérience, en utilisant cette fois-ci la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. On constate ainsi que l'erreur est inférieure à l'erreur par la méthode d'Euler, de plusieurs ordres de grandeur. En effet, si on constate que le problème de divergence est également présent, la méthode atténue fortement ces effets sur le court à moyen terme.

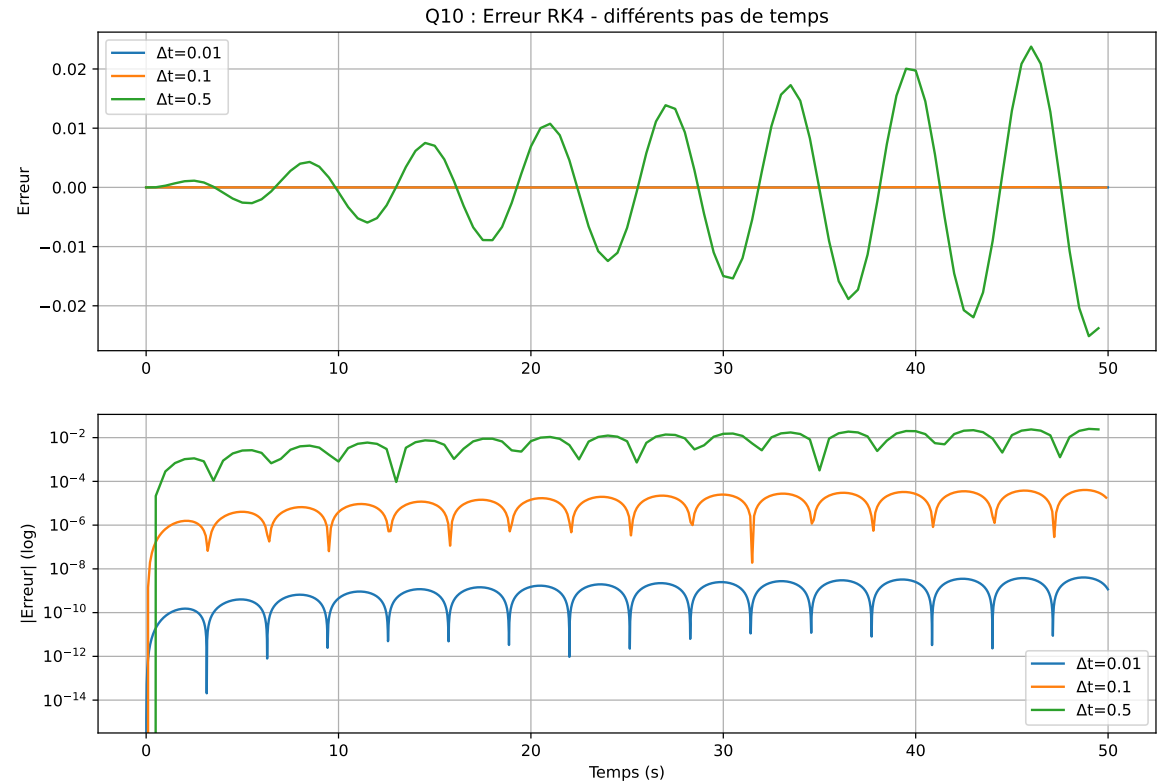


FIGURE 2 – Erreur en fonction du temps et du pas de temps pour RK4

TP1/q10.cpp

```
21 void solve_q10_with_dt(double dt, const std::string& filename) {
22     double Tmax = 50.0;
23     int steps = static_cast<int>(Tmax / dt);
24     const int n = 2;
25     double state[n];
26     state[0] = 1.0;
27     state[1] = 0.0;
28     double x0 = state[0];
29     double v0 = state[1];
30     std::ofstream fichier(filename);
31     if (fichier.is_open()) {
32         fichier << "t,x_numerique,x_analytique,erreur" << std::endl;
33         for (int i = 0; i < steps; ++i) {
34             double t = i * dt;
35             double x_th = solution_analytique_q10(t, x0, v0, w0_q10);
36             double erreur = state[0] - x_th;
37             fichier << t << "," << state[0] << "," << x_th << "," << erreur << std::endl;
38             rk4(n, t, state, dt, deriv_q10);
39         }
40         fichier.close();
41     }
42 }
43
44 void solve_q10() {
45     solve_q10_with_dt(0.01, "resultats/q10_dt001.csv");
46     solve_q10_with_dt(0.1, "resultats/q10_dt01.csv");
47     solve_q10_with_dt(0.5, "resultats/q10_dt05.csv");
48 }
```

Question 11 Runge-Kutta d'ordre 2

On vient maintenant créer la fonction rk2, marchant avec un prototype identique à "euler", en appliquant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 :

TP1/q11.cpp

```
4 void rk2(int n, double x, double y[],  
  ↪ double dx, void deriv(int, double,  
  ↪ double[], double[])) {  
5     int i;  
6     double ddx;  
7     double k1[n], k2[n], yp[n];  
8     ddx = dx / 2;  
9  
10    deriv(n, x, y, k1);  
11    for (i = 0; i < n; i++) {  
12        yp[i] = y[i] + k1[i] * ddx;  
13    }  
14  
15    deriv(n, x + ddx, yp, k2);  
16    for (i = 0; i < n; i++) {  
17        y[i] = y[i] + k2[i] * dx;  
18    }  
19 }
```

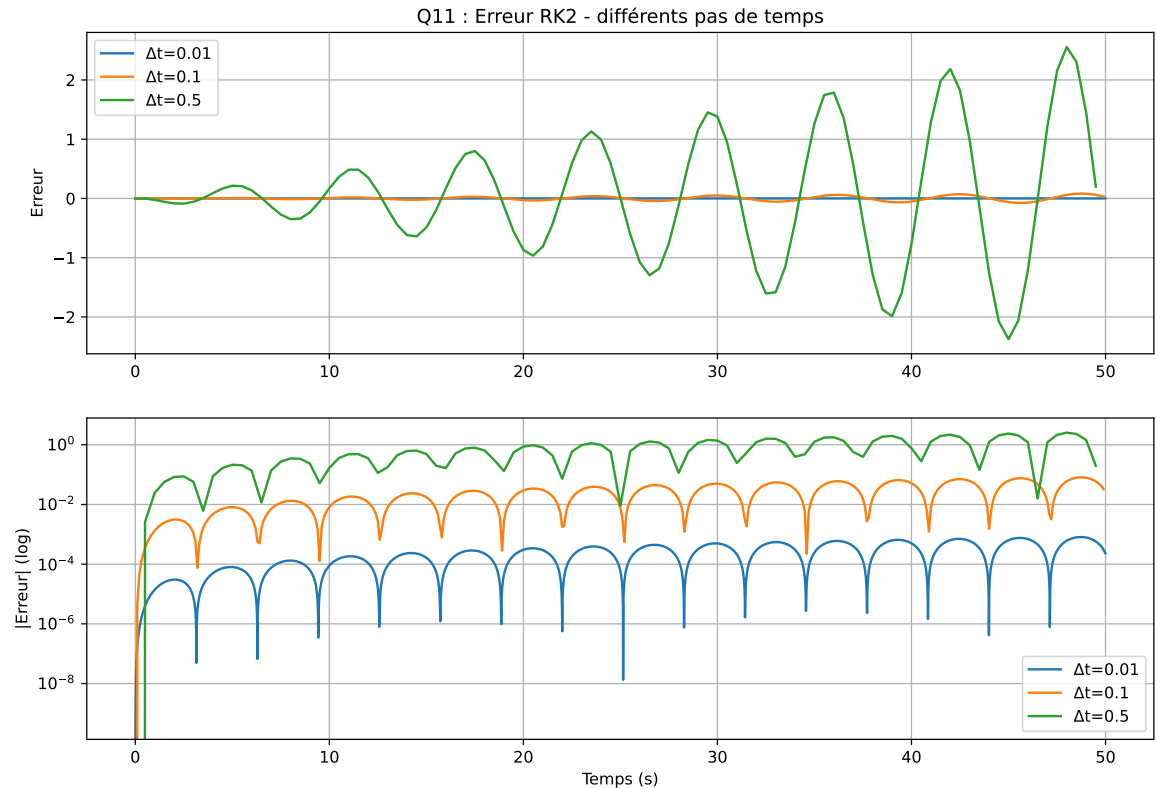


FIGURE 3 – Erreur en fonction du temps et du pas de temps pour RK2

TP1/q11.cpp

```

22 double w0_q11 = 1.0;    // Pulsation propre
23
24 // Fonction dérivée pour l'oscillateur harmonique
25 void deriv_q11(int n, double t, double y[], double
    ↪ dy[]) {
26     dy[1] = -w0_q11 * w0_q11 * y[0];
27     dy[0] = y[1];
28 }
29
30 double solution_analytique_q11(double t, double x0,
    ↪ double v0, double w0) {
31     return x0 * std::cos(w0 * t) + (v0 / w0) *
    ↪ std::sin(w0 * t);
32 }
33
34 void solve_q11_with_dt(double dt, const std::string&
    ↪ filename) {
35     double Tmax = 50.0;
36     int steps = static_cast<int>(Tmax / dt);
37     const int n = 2;
38     double state[n];
39     state[0] = 1.0;
40     state[1] = 0.0;
41     double x0 = state[0];
42     double v0 = state[1];

```

TP1/q11.cpp

```

43     std::ofstream fichier(filename);
44     if (fichier.is_open()) {
45         fichier << "t,x_numerique,x_analytique,erreur"
    ↪ << std::endl;
46         for (int i = 0; i < steps; ++i) {
47             double t = i * dt;
48             double x_th = solution_analytique_q11(t,
    ↪ x0, v0, w0_q11);
49             double erreur = state[0] - x_th;
50             fichier << t << "," << state[0] << "," <<
    ↪ x_th << "," << erreur << std::endl;
51             rk2(n, t, state, dt, deriv_q11);
52         }
53         fichier.close();
54     }
55 }
56
57 void solve_q11() {
58     solve_q11_with_dt(0.01,
    ↪ "resultats/q11_dt001.csv");
59     solve_q11_with_dt(0.1, "resultats/q11_dt01.csv");
60     solve_q11_with_dt(0.5, "resultats/q11_dt05.csv");
61 }

```

Question 12 Comparaison des méthodes numériques

Enfin, nous pouvons comparer les 3 méthodes sur le cas de l'oscillateur harmonique. On constate ainsi que :

- Euler présente une erreur plus importante mais est de complexité algorithmique moindre.
- RK2 se place au milieu tant en terme d'erreur que de complexité algorithmique.
- RK4 est le meilleur en terme d'erreur mais est le plus complexe algorithmiquement parlant.
- Aucun des algorithmes ne prend pas en compte l'énergie et sa conservation.

Ainsi, des arbitrages sont à effectuer entre une efficacité accrue (notamment pour la simulation temps réel) et une précision plus importante (pour les simulation physiques de pointe).

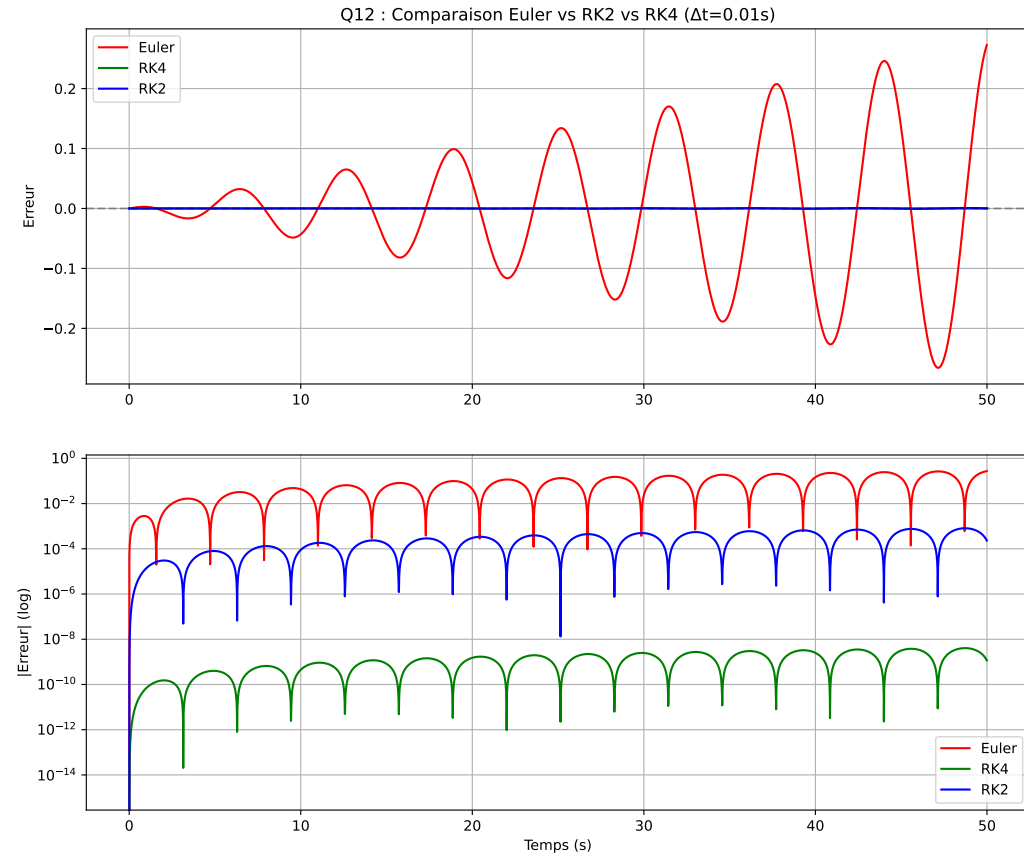


FIGURE 4 – Comparaison des algorithmies : Euler, RK2 et Rk4

Annexe

TP1/visualisation.py

```
18 def q1():
19     try:
20         data = np.loadtxt(os.path.join(RES_DIR,
21             ↪ "q1.csv"), delimiter=',', skiprows=1)
22         plt.figure()
23         plt.plot(data[:, 0], data[:, 1], 'o-',
24             ↪ label='Euler', markersize=4)
25         plt.plot(data[:, 0], data[:, 2], '--',
26             ↪ label='Analytique', linewidth=2)
27         plt.title('Q1 : Désintégration simple - Euler
28             ↪ vs Analytique')
29         plt.xlabel('Temps (s)')
30         plt.ylabel('Densité')
31         plt.legend()
32         plt.grid(True, alpha=0.3)
33         plt.savefig(os.path.join(FIG_DIR, "q1.pdf"),
34             ↪ dpi=150, bbox_inches='tight')
35         plt.close()
36     except Exception as e:
37         print(f"Erreur Q1: {e}")
```

TP1/visualisation.py

```
34 def q2():
35     try:
36         data = np.loadtxt(os.path.join(RES_DIR,
37             ↪ "q2.csv"), delimiter=',', skiprows=1)
38         plt.figure()
39         plt.plot(data[:, 0], data[:, 1], label='x(t)')
40         plt.plot(data[:, 0], data[:, 2], label='y(t)')
41         plt.title('Q2 : Désintégration en chaîne')
42         plt.xlabel('Temps (s)')
43         plt.ylabel('Densité')
44         plt.legend()
45         plt.grid(True, alpha=0.3)
46         plt.savefig(os.path.join(FIG_DIR, "q2.pdf"),
47             ↪ dpi=150, bbox_inches='tight')
48         plt.close()
49     except Exception as e:
50         print(f"Erreur Q2: {e}")
```

TP1/visualisation.py

```

50 def q3():
51     try:
52         data = np.loadtxt(os.path.join(RES_DIR,
53             ↪ "q3.csv"), delimiter=',', skiprows=1)
54         plt.figure()
55         plt.plot(data[:, 0], data[:, 1])
56         plt.title('Q3 : Oscillateur Harmonique')
57         plt.xlabel('Temps (s)')
58         plt.ylabel('Position')
59         plt.grid(True, alpha=0.3)
60         plt.savefig(os.path.join(FIG_DIR, "q3.pdf"),
61             ↪ dpi=150, bbox_inches='tight')
62         plt.close()
63     except Exception as e:
64         print(f"Erreur Q3: {e}")

```

TP1/visualisation.py

```

64 def q8():
65     try:
66         data = np.loadtxt(os.path.join(RES_DIR,
67             ↪ "q8.csv"), delimiter=',', skiprows=1)
68         fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2,
69             ↪ figsize=(14, 6))
70         ax1.plot(data[:, 0], data[:, 1], label='x')
71         ax1.plot(data[:, 0], data[:, 2], label='y')
72         ax1.set_title('Q8 : Évolution temporelle')
73         ax1.set_xlabel('Temps (s)')
74         ax1.legend()
75         ax1.grid(True, alpha=0.3)
76         ax2.plot(data[:, 1], data[:, 2])
77         ax2.set_title('Q8 : Trajectoire Cyclotron')
78         ax2.set_xlabel('x')
79         ax2.set_ylabel('y')
80         ax2.axis('equal')
81         ax2.grid(True, alpha=0.3)
82         plt.savefig(os.path.join(FIG_DIR, "q8.pdf"),
83             ↪ dpi=150, bbox_inches='tight')
84         plt.close()
85     except Exception as e:
86         print(f"Erreur Q8: {e}")

```

TP1/visualisation.py

```

85 def q9():
86     try:
87         fig, axes = plt.subplots(2, 1, figsize=(12,
88             ↪ 8))
89         for dt, f in [(0.01, 'q9_dt001.csv'), (0.005,
90             ↪ 'q9_dt0005.csv'), (0.001,
91             ↪ 'q9_dt0001.csv')]:
92             try:
93                 data =
94                 ↪ np.loadtxt(os.path.join(RES_DIR,
95                 ↪ f), delimiter=',', skiprows=1)
96                 axes[0].plot(data[:, 0], data[:, 3],
97                 ↪ label=f't={dt}')
98                 axes[1].semilogy(data[:, 0],
99                 ↪ np.abs(data[:, 3]),
100                 ↪ label=f't={dt}')
101             except:
102                 pass
103             axes[0].set_title("Q9 : Erreur Euler -
104                 ↪ différents pas de temps")
105             axes[0].set_ylabel('Erreur')
106             axes[0].legend()
107             axes[0].grid(True, alpha=0.3)
108             axes[1].set_xlabel('Temps (s)')
109             axes[1].set_ylabel('|Erreur| (log)')
110             axes[1].legend()
111             axes[1].grid(True, alpha=0.3)
112             plt.savefig(os.path.join(FIG_DIR, "q9.pdf"),
113                 ↪ dpi=150, bbox_inches='tight')
114             plt.close()

```

TP1/visualisation.py

```

108 def q10():
109     try:
110         fig, axes = plt.subplots(2, 1, figsize=(12,
111             ↪ 8))
112         for dt, f in [(0.01, 'q10_dt001.csv'), (0.1,
113             ↪ 'q10_dt01.csv'), (0.5, 'q10_dt05.csv')]:
114             try:
115                 data =
116                 ↪ np.loadtxt(os.path.join(RES_DIR,
117                 ↪ f), delimiter=',', skiprows=1)
118                 axes[0].plot(data[:, 0], data[:, 3],
119                 ↪ label=f't={dt}')
120                 axes[1].semilogy(data[:, 0],
121                 ↪ np.abs(data[:, 3]),
122                 ↪ label=f't={dt}')
123             except:
124                 pass
125             axes[0].set_title("Q10 : Erreur RK4 -
126                 ↪ différents pas de temps")
127             axes[0].set_ylabel('Erreur')
128             axes[0].legend()
129             axes[0].grid(True, alpha=0.3)
130             axes[1].set_xlabel('Temps (s)')
131             axes[1].set_ylabel('|Erreur| (log)')
132             axes[1].legend()
133             axes[1].grid(True, alpha=0.3)
134             plt.savefig(os.path.join(FIG_DIR, "q10.pdf"),
135                 ↪ dpi=150, bbox_inches='tight')
136             plt.close()
137     except Exception as e:
138         print(f"Erreur Q10: {e}")

```

TP1/visualisation.py

```
131 def q11():
132     try:
133         fig, axes = plt.subplots(2, 1, figsize=(12, 8))
134         for dt, f in [(0.01, 'q11_dt001.csv'), (0.1, 'q11_dt01.csv'), (0.5, 'q11_dt05.csv')]:
135             try:
136                 data = np.loadtxt(os.path.join(RES_DIR, f), delimiter=',', skiprows=1)
137                 axes[0].plot(data[:, 0], data[:, 3], label=f't={dt}')
138                 axes[1].semilogy(data[:, 0], np.abs(data[:, 3]), label=f't={dt}')
139             except:
140                 pass
141         axes[0].set_title("Q11 : Erreur RK2 - différents pas de temps")
142         axes[0].set_ylabel('Erreur')
143         axes[0].legend()
144         axes[0].grid(True, alpha=0.3)
145         axes[1].set_xlabel('Temps (s)')
146         axes[1].set_ylabel('|Erreur| (log)')
147         axes[1].legend()
148         axes[1].grid(True, alpha=0.3)
149         plt.savefig(os.path.join(FIG_DIR, "q11.pdf"), dpi=150, bbox_inches='tight')
150         plt.close()
151     except Exception as e:
152         print(f"Erreur Q11: {e}")
```

TP1/visualisation.py

```
154 def q12():
155     try:
156         fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(2, 1, figsize=(12, 10))
157         colors = {'q9_dt001.csv': 'red', 'q10_dt001.csv': 'green', 'q11_dt001.csv': 'blue'}
158         labels = {'q9_dt001.csv': 'Euler', 'q10_dt001.csv': 'RK4', 'q11_dt001.csv': 'RK2'}
159         for f, c in colors.items():
160             try:
161                 data = np.loadtxt(os.path.join(RES_DIR, f), delimiter=',', skiprows=1)
162                 ax1.plot(data[:, 0], data[:, 3], label=labels[f], color=c)
163                 ax2.semilogy(data[:, 0], np.abs(data[:, 3]), label=labels[f], color=c)
164             except:
165                 pass
166         ax1.set_title('Q12 : Comparaison Euler vs RK2 vs RK4 (deltat=0.01s)')
167         ax1.set_ylabel('Erreur')
168         ax1.legend()
169         ax1.grid(True, alpha=0.3)
170         ax1.axhline(0, color='k', linestyle='--', alpha=0.3)
171         ax2.set_xlabel('Temps (s)')
172         ax2.set_ylabel('|Erreur| (log)')
173         ax2.legend()
174         ax2.grid(True, alpha=0.3)
175         plt.savefig(os.path.join(FIG_DIR, "q12.pdf"), dpi=150, bbox_inches='tight')
176         plt.close()
177     except Exception as e:
178         print(f"Erreur Q12: {e}")
```