INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO
Cálculo Diferencial e Integral II

Laboratorio 11: Integración por fracciones parciales

1. Usando el cambio de variable $u = \sqrt{x}$, con $x > 0$, calcular $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+1}{x+1}\,dx$.

2. Sea $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. Evaluar la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{x - x^{r+1}}$, primero usando la sustitución $u = x^r$ y después usando fracciones parciales.

3. Sea $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x) + \cos(x)}$.

   a) Si $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, usa las identidades de doble ángulo y/o medio ángulo para demostrar que
   $$\operatorname{sen}(x) = \frac{2u}{1+u^2} \quad \text{y} \quad \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}\,.$$

   b) Encuentra los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que, bajo el cambio de variable del inciso anterior, se satisface que
   $$I = -2\int \frac{du}{(u-a)(u-b)}\,.$$

   c) Usando el inciso anterior, demuestra que se satisface que
   $$I = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) - b}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) - a}\right| + C\,, \quad \text{donde } C \in \mathbb{R}\,.$$

4. Encuentra todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ de tal modo que se satisface la ecuación
   $$\int_a^{2^{1/6}} \frac{du}{u^7 - u} = \frac{1}{6}\,.$$

5. Integrar:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+x^2-2x}\,dx.$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-1)^2}\,dx.$

c) $\displaystyle\int \frac{x^4+9}{x^4+9x^2}\,dx.$

d) $\displaystyle\int \frac{e^t}{e^{2t}+3e^t+2}\,dt.$

e) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)+\operatorname{sen}(x)-6}\,dx.$

Cazuelazo semanal.

- Calcular la integral $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+1}\,dx$. (Sugerencia: $x^4+1=(x^2-\sqrt{2}\,x+1)(x^2+\sqrt{2}\,x+1)$).

- A partir de la relación de correspondencia

$$x=\int_{y_0}^{y}\frac{du}{u(1-2u)(1-u)}\,,$$

demuestra con fracciones parciales que para todo $y_0 \in \left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$, se tiene que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x)=\frac{1}{2}$.