Teoremas en Límites

Teorema principal: Límites de funciones polinomiales y racionales

Si $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios y $a \in \mathbb{R}$ entonces:

1) Si $p(x)$ es polinomio, el límite en a siempre se puede calcular $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$ (sustituyendo x por a).

2) Si $\frac{p(x)}{q(x)}$ es racional, el límite en a siempre se puede calcular $\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$ (sustituyendo x por a) si $q(a) \neq 0$.

Ej: $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+1}{x-3} = \frac{2^2+1}{2-3} = \frac{5}{-1} = -5$ (Porque $\frac{x^2+1}{x-3}$ es racional y $2-3 \neq 0$)

Indeterminación, no polinomio: $\frac{0}{0}$ (a veces) que tengo que quitar o $\frac{\infty}{\infty}$ (a veces) que tengo que dividir.

Ej: $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ (Indeterminación $\frac{0}{0}$ y no es polinomio)

Ej: $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x-3}$ (Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ y no es polinomio)

Ej: $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2$

Ej: $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x-3} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x(1-\frac{3}{x})} = \lim_{x \to \infty} \frac{x(1+\frac{1}{x^2})}{1-\frac{3}{x}} = \infty$

Ej: $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2$

Ej: $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x-3} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x(1-\frac{3}{x})} = \lim_{x \to \infty} \frac{x(1+\frac{1}{x^2})}{1-\frac{3}{x}} = \infty$

Ej: Indeterminación, no polinomio: $\frac{0}{0}$ (a veces) que tengo que quitar o $\frac{\infty}{\infty}$ (a veces) que tengo que dividir.

Ej: $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ (Indeterminación $\frac{0}{0}$ y no es polinomio)

Ej: $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x-3}$ (Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ y no es polinomio)

Ej: $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2$

Ej: $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x-3} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x(1-\frac{3}{x})} = \lim_{x \to \infty} \frac{x(1+\frac{1}{x^2})}{1-\frac{3}{x}} = \infty$