Funciones Logarítmicas y Exponenciales, Tema 4.

Como $y = e^{\ln x}$, $\ln x$ tiene sus funciones inversas una de la otra, así tenemos que:

$$x^a = e^{\ln(x^a)} = e^{a \ln x} \qquad \text{donde } x > 0.$$

Def. Para $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces $\log_a x^a$ define a la función exponencial de base a.

Tma. $\lim_{x \to -\infty} \log_a x^a = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 1 \\ \infty & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases}$

$\lim_{x \to \infty} \log_a x^a = \begin{cases} \infty & \text{si } a > 1 \\ 0 & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases}$

Demo.

$a > 1$

$\lim_{x \to -\infty} \log_a x^a$

$\begin{cases} \lim_{x \to -\infty} \log_a x \to -\infty & \text{si } x < 0 \\ \lim_{x \to -\infty} \log_a x \to 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to \infty} \log_a x^a$

$\begin{cases} \lim_{x \to \infty} \log_a x \to \infty & \text{si } x > 0 \\ \lim_{x \to \infty} \log_a x \to -\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$0 < a < 1$

$\lim_{x \to -\infty} \log_a x^a$

$\begin{cases} \lim_{x \to -\infty} \log_a x \to \infty & \text{si } x < 0 \\ \lim_{x \to -\infty} \log_a x \to 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to \infty} \log_a x^a$

$\begin{cases} \lim_{x \to \infty} \log_a x \to -\infty & \text{si } x > 0 \\ \lim_{x \to \infty} \log_a x \to \infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Tma. Si $a > 0$, entonces $\frac{d}{dx}[x^a] = \left[\ln(a)\, x^a\right]$

Demo. Dado $a^x = e^{x \ln a}$ entonces

$\frac{d}{dx}[a^x] = \frac{d}{dx}\left[e^{x \ln a}\right] = e^{x \ln a}\left[\frac{d}{dx}[x \ln a]\right] = \ln(a)\, a^x = \ln(a)\, a^x$ lo cual.

Def. Si $a > 0$ y $a \neq 1$ se dice que la función diferenciable, entonces $\frac{d}{dx}[a^x] = \ln(a)\, a^x$ $\forall x$.

Tma. Considerando $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces

$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a^2}{2!} + \cdots$ $\forall x$ con $|x| < 1$

$\Rightarrow \left[\frac{d}{dx}[a^x]\right]_0 = \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + ax + \frac{a^2}{2!} + \cdots - 1}{x}$

$= \lim_{x \to 0} \left[a^{x-1} \ln(a)\right] = \ln(a)\left[\frac{a^0}{1!}\right]$

Ejemplo. Calcular $\frac{d}{dx}\left[\left(3^{x^2-1}\right)\right]$ $\qquad$ $a = 3 > 0$, $a \neq 1$, $\ln(a) = \ln(3)$, $u = x^2 - 1$, $u' = 2x$

Sol. $\frac{d}{dx}\left[\left(3^{x^2-1}\right)\right] = \ln(3)\, 3^{x^2-1}\left[\frac{d}{dx}[x^2-1]\right]$

$= \ln(3)\, 3^{x^2-1}(2x - 0)$

Observaciones: $\qquad$ $\ln(a) > 0$

1) Puesto que $\frac{d}{dx}[a^x] = \ln(a)\, a^x > \ln(a)\, a^{x-1}$, entonces

$\frac{d}{dx}[a^x] > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $a > 1$ $\qquad$ a es creciente. Verdad.

$\frac{d}{dx}[a^x] < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $0 < a < 1$ $\qquad$ a Es decreciente. Verdad.

2) $\frac{d}{dx}[a^x] = \ln(a)\, a^x > \ln(a)\, a^{x-1}$ $\qquad$ $a > 1$ $\qquad$ a es creciente. Verdad.

$\frac{d}{dx}[a^x] < \ln(a)\, a^{x-1}$ $\qquad$ $0 < a < 1$ $\qquad$ a es decreciente. Verdad.

Tma. Si $a > 0$, entonces $\frac{d}{dx}[x^a] = \left[x^{a-1}\right]$ $\forall x$ con $x > 0$.

Demo. Dado $a^x = e^{x \ln a}$, entonces

$\frac{d}{dx}[x^a] = \frac{d}{dx}\left[e^{a \ln x}\right] = e^{a \ln x}\left[\frac{d}{dx}[a \ln x]\right] = x^a\left[\frac{a}{x}\right] = a\, x^{a-1}$ lo cual.

Def. Si $a > 0$ y $a \neq 1$ se dice que la función diferenciable, entonces $\frac{d}{dx}[x^a] = \left[x^{a-1}\right]$ $\forall x$ con $x > 0$.

Tma. Considerando $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces

$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a^2}{2!} + \cdots$ $\forall x$ con $|x| < 1$

$\Rightarrow \left[\frac{d}{dx}[x^a]\right]_0 = \lim_{x \to 0} \frac{x^a - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + ax + \frac{a^2}{2!} + \cdots - 1}{x}$

$= \lim_{x \to 0} \left[x^{a-1}\right] = \left[\frac{0^a}{1!}\right] = 1$

Ejemplo. Calcular $\frac{d}{dx}\left[\left(x^{\sqrt{x}}\right)\right]$ $\qquad$ $a = \sqrt{x} > 0$, $a \neq 1$, $\ln(a) = \ln(\sqrt{x})$, $u = \sqrt{x}$, $u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Sol. $\frac{d}{dx}\left[\left(x^{\sqrt{x}}\right)\right] = \ln(\sqrt{x})\, x^{\sqrt{x}}\left[\frac{d}{dx}[\sqrt{x}]\right]$

$= \ln(\sqrt{x})\, x^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

Observaciones:

1) $\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x} > 0$ $\qquad$ $x > 0$ $\qquad$ $\ln x$ es creciente.

$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x} < 0$ $\qquad$ $x < 0$ $\qquad$ $\ln x$ es decreciente.

Entonces

$\ln x$ es una función creciente si $x > 0$.

$\ln x$ es una función decreciente si $x < 0$.

2) $f'(x) = \frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} > 0$ $\qquad$ Entonces,

$x > 0$ $\qquad$ $\Rightarrow$ $\frac{d}{dx}[\ln x] > 0$

$x < 0$ $\qquad$ $\Rightarrow$ $\frac{d}{dx}[\ln x] < 0$

$\Rightarrow$ Es cóncava hacia abajo cuando $x > 0$.

Es cóncava hacia arriba cuando $x < 0$.

Tma. La función $\ln x$ es derivable en $(0, \infty)$, entonces es continua en $(0, \infty)$

Demo. Dado $x^a = e^{a \ln x}$, entonces $\log_a(x^a) = x$.

Gráfica:

1) Dado que

$\frac{d}{dx}[x^a] = \frac{d}{dx}\left[e^{a \ln x}\right] = \frac{d}{dx}\left[e^{\log_a(x^a)}\right] = \ln(a)\, x^{\log_a(x^a)} = \ln(a)\, x^a$,

entonces $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^a}{\ln(a)}\right] = x^a$. Luego que $a > 0$.

$$\boxed{\int x^a\, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1}$$

2) Como $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^a}{\ln(a)}\right] = \frac{a\, x^{a-1}}{\ln(a)}$, entonces por el tma.

$$\boxed{\int a\, x^{a-1}\, dx = \ln(a)\, x^a + C}$$

Ejemplo.

1) $\int x^2\, dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C$

$a = 2 > 0$

$a \neq -1$

$\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + C$

2) $\int 4^{x-1}\, dx = \int 4^x\, dx = \frac{4^x}{\ln 4} + C$

$a = 4 > 0$

$a \neq -1$

$\int 4^{x-1}\, dx = \frac{4^x}{\ln 4} + C$

3) $\int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\, dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx$

$a = -\frac{1}{2} < 0$

$a \neq -1$

$\int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\, dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx$

4) $\int \frac{1}{x^2}\, dx = \int x^{-2}\, dx = \int x^{-2}\, dx$

$a = -2 < 0$

$a \neq -1$

$\int \frac{1}{x^2}\, dx = \int x^{-2}\, dx$

5) $\int \frac{1}{x}\, dx = \int x^{-1}\, dx = \int \left(\frac{1}{x}\right) dx$

$a = -1$

$\int \frac{1}{x}\, dx = \int x^{-1}\, dx$

II En cada una de las siguientes expresiones despeja y:

(a) $\log_2(y) + \log_2(y) = x + 6$, $0 < y < 5$.

$\log_2(y) + \log_2(y) = x + 6$

$\log_2(y^2) = x + 6$

$y^2 = 2^{x+6}$

$y = \pm 2^{\frac{x+6}{2}}$

$y = 2^{\frac{x+6}{2}}$

$y = -2^{\frac{x+6}{2}}$

(b) $\frac{y^2 - 1}{y^2 + 1} = x$

$y^2 - 1 = x(y^2 + 1)$

$y^2 - 1 = xy^2 + x$

$y^2 - xy^2 = x + 1$

$y^2(1 - x) = x + 1$

$y^2 = \frac{x+1}{1-x}$

$y = \pm\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$

$y = \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$ $\qquad$ $y = -\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$

(c) $\ln(x) + \ln(y) = \ln(x + y)$

$\ln(x) + \ln(y) = \ln(x + y)$

$\ln(xy) = \ln(x + y)$

$xy = x + y$

$y(x - 1) = x$

$y = \frac{x}{x-1}$

III Encuentra el dominio y la derivada de la función en cada inciso:

(a) $f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(x+1)}$

Sea $\frac{\ln(x)}{\ln(x+1)} = \frac{\log_a(x)}{\log_a(x+1)}$

Tma. $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$

Sea $g(x) = \log_a(x)$ y $h(x) = \log_a(x+1)$, entonces

Dominio $g(x) = \log_a(x)$ $\qquad$ $\forall x > 0$

$h(x) = \log_a(x+1)$ $\qquad$ $\forall x > -1$

$\Rightarrow$ Dom $f(x) = (0, \infty) \cap (-1, \infty)$ por def.

$= (0, \infty)$

Luego, $\frac{d}{dx}[f(x)] = \left(\frac{1}{\ln(a)}\right)\left(\frac{1}{x}\right)$ (Tomando de nuevo)

$\left(\frac{1}{\ln(a)}\right)\left(\frac{1}{x+1}\right)$ (Tomando)

$= \frac{1}{x\ln(a)} - \frac{1}{(x+1)\ln(a)}$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}[f(x)] = \left(\frac{1}{\ln(a)}\right)\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{\ln(a)}\right)\left(\frac{1}{x+1}\right)$

$= \frac{1}{\ln(a)}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right]$

$= \frac{1}{\ln(a)}\left[\frac{x+1-x}{x(x+1)}\right]$

$= \frac{1}{\ln(a)}\left[\frac{1}{x(x+1)}\right]$

$= \frac{1}{\ln(a)}\left[\frac{1}{x^2+x}\right]$

(b) $\frac{\log_2(x)}{x}$

$\frac{\log_2(x)}{x} = \frac{\log_a(x)}{x}$

$\frac{\log_2(x)}{x} = \frac{\log_a(x)}{x}$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{\log_a(x)}{x}\right] = \frac{\frac{d}{dx}[\log_a(x)]\, x - \log_a(x)\frac{d}{dx}[x]}{x^2}$

$= \frac{\left(\frac{1}{\ln(a)}\right)\left(\frac{1}{x}\right) x - \log_a(x)(1)}{x^2}$

$= \frac{\frac{1}{\ln(a)} - \log_a(x)}{x^2}$

$= \frac{\frac{1}{\ln(a)} - \frac{\ln(x)}{\ln(a)}}{x^2}$

$= \frac{\frac{1 - \ln(x)}{\ln(a)}}{x^2}$

$= \frac{1 - \ln(x)}{x^2 \ln(a)}$