Tercera Evaluación Mínima

Tiempo: 50 minutos. Se pueden usar libros, apuntes, calculadoras, ordenadores, móviles, etc. Prohibido: el uso de otras personas (P1 y P2 son grupos).

$$\sqrt{1+x+x^2}$$

Nota: 1 de Tercero. Grado Doble.

Tomamos que $\sqrt{1+x+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Por otro lado,

$$\sqrt{1+x+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{1/2}{n}}{2^n} (1+x+x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{1/2}{n}}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1+x)^k =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{1/2}{n}}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{1/2}{n}}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^{k+j}$$

Como $k+j$ es arbitrario, entonces hay al menos dos formas de escribir x^{k+j} y, por tanto, a_n es un polinomio en $\frac{1}{2^n}$ y $\binom{1/2}{n}$. Por otro lado, $\binom{1/2}{n}$ es un polinomio en $\frac{1}{2^n}$ y $\binom{1/2}{n}$. Por tanto, a_n es un polinomio en $\frac{1}{2^n}$ y $\binom{1/2}{n}$.

$$\boxed{\sqrt{1+x+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$$

Ejercicio 2. Calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Nota: Por el ejercicio anterior, que es transitorio, entonces no tienes que usar Fourier.

Ejercicio 3. Calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar Fourier.

Ejercicio 4. Calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar Fourier.

Ejercicio 5. Calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ para $k \in \mathbb{N}$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar Fourier.

Transformada de Fourier generalizada.

Ejercicio 6. Sea $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Entonces

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} e^{-ix\xi} \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x\xi)}{x^2+1} \, dx - i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x\xi)}{x^2+1} \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x\xi)}{x^2+1} \, dx \quad \text{(ya que } \sin(x\xi) \text{ es impar)}$$

$$= \pi e^{-|\xi|}$$

$$\boxed{\mathcal{F}(f)(\xi) = \pi e^{-|\xi|}}$$

Ejercicio 7. Sea $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Entonces

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} e^{-ix\xi} \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x\xi)}{x^2+1} \, dx - i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x\xi)}{x^2+1} \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x\xi)}{x^2+1} \, dx \quad \text{(ya que } \sin(x\xi) \text{ es impar)}$$

$$= \pi e^{-|\xi|}$$

$$\boxed{\mathcal{F}(f)(\xi) = \pi e^{-|\xi|}}$$

Ejercicio 8. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} \, dx$.

Nota: Por el ejercicio anterior, que es transitorio, entonces no tienes que usar Fourier.

Ejercicio 9. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} \, dx$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar Fourier.

Ejercicio 10. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1} \, dx$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar Fourier.

Ejercicio 11. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^{2k}+1} \, dx$ para $k \in \mathbb{N}$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar Fourier.

Ejercicios de la transformada inversa.

Ejercicio 12. Sea $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Entonces

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi^2+1} e^{ix\xi} \, d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x\xi)}{\xi^2+1} \, d\xi + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x\xi)}{\xi^2+1} \, d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x\xi)}{\xi^2+1} \, d\xi \quad \text{(ya que } \sin(x\xi) \text{ es impar)}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}}$$

Ejercicio 13. Sea $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Entonces

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi^2+1} e^{ix\xi} \, d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x\xi)}{\xi^2+1} \, d\xi + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x\xi)}{\xi^2+1} \, d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x\xi)}{\xi^2+1} \, d\xi \quad \text{(ya que } \sin(x\xi) \text{ es impar)}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}}$$

Ejercicio 14. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} \, dx$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar Fourier.

Ejercicio 15. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1} \, dx$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar Fourier.

Ejercicio 16. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^{2k}+1} \, dx$ para $k \in \mathbb{N}$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar Fourier.

Ejercicios.

Ejercicio 17. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} \, dx$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar Fourier.

Ejercicio 18. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} \, dx$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar Fourier.

Ejercicio 19. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^3} \, dx$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar Fourier.

Ejercicio 20. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^{2k}} \, dx$ para $k \in \mathbb{N}$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar Fourier.

Ejercicio 21. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^{2k+1}} \, dx$ para $k \in \mathbb{N}$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar Fourier.

Ejercicio 22. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^{2k+2}} \, dx$ para $k \in \mathbb{N}$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar Fourier.

Ejercicio 23. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^{2k+3}} \, dx$ para $k \in \mathbb{N}$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar Fourier.

Convolución.

Ejercicio 24. Sea $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Entonces

$$f * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-y)^2+1} \frac{1}{y^2+1} \, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-y)^2+1} \frac{1}{(x+y)^2+1} \, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-y)^2+1} \frac{1}{(x+y)^2+1} \, dy \quad \text{(ya que } f \text{ es par)}$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{x^2+3}{x^4+4}$$

$$\boxed{f * f(x) = \frac{\pi}{2} \frac{x^2+3}{x^4+4}}$$

Ejercicio 25. Sea $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Entonces

$$f * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-y)^2+1} \frac{1}{y^2+1} \, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-y)^2+1} \frac{1}{(x+y)^2+1} \, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-y)^2+1} \frac{1}{(x+y)^2+1} \, dy \quad \text{(ya que } f \text{ es par)}$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{x^2+3}{x^4+4}$$

$$\boxed{f * f(x) = \frac{\pi}{2} \frac{x^2+3}{x^4+4}}$$

Ejercicio 26. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} \, dx$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar convolución.

Ejercicio 27. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1} \, dx$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar convolución.

Ejercicio 28. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^{2k}+1} \, dx$ para $k \in \mathbb{N}$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar convolución.

Ejercicio 29. Sea $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Entonces

$$f * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-y)^2+1} \frac{1}{y^2+1} \, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-y)^2+1} \frac{1}{(x+y)^2+1} \, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-y)^2+1} \frac{1}{(x+y)^2+1} \, dy \quad \text{(ya que } f \text{ es par)}$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{x^2+3}{x^4+4}$$

$$\boxed{f * f(x) = \frac{\pi}{2} \frac{x^2+3}{x^4+4}}$$

Ejercicio 30. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} \, dx$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar convolución.

Ejercicio 31. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} \, dx$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar convolución.

Ejercicio 32. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^3} \, dx$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar convolución.

Ejercicio 33. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^{2k}} \, dx$ para $k \in \mathbb{N}$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar convolución.

Ejercicio 34. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^{2k+1}} \, dx$ para $k \in \mathbb{N}$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar convolución.

Ejercicio 35. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^{2k+2}} \, dx$ para $k \in \mathbb{N}$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar convolución.

Ejercicio 36. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^{2k+3}} \, dx$ para $k \in \mathbb{N}$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar convolución.

Ejercicio 37. Sea $f(x) = e^{-|x|}$. Entonces

$$f * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} e^{-|y|} \, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} e^{-|y|} \, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} e^{-|y|} \, dy \quad \text{(ya que } f \text{ es par)}$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} e^{-(x-y)} e^{-(-y)} \, dy + \int_{x}^{\infty} e^{-(y-x)} e^{-(-y)} \, dy & \text{si } x \leq 0 \\ \int_{-\infty}^{0} e^{-(x-y)} e^{-(-y)} \, dy + \int_{0}^{x} e^{-(x-y)} e^{-(y)} \, dy + \int_{x}^{\infty} e^{-(y-x)} e^{-(y)} \, dy & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} e^{x-2y} \, dy + \int_{x}^{\infty} e^{-x} \, dy & \text{si } x \leq 0 \\ \int_{-\infty}^{0} e^{x-2y} \, dy + \int_{0}^{x} e^{-x} \, dy + \int_{x}^{\infty} e^{-2y+x} \, dy & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x} + e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} e^{x} + x e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x} + e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} e^{x} + x e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{f * f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x} + e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} e^{x} + x e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$$

Ejercicio 38. Sea $f(x) = e^{-|x|}$. Entonces

$$f * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} e^{-|y|} \, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} e^{-|y|} \, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} e^{-|y|} \, dy \quad \text{(ya que } f \text{ es par)}$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} e^{-(x-y)} e^{-(-y)} \, dy + \int_{x}^{\infty} e^{-(y-x)} e^{-(-y)} \, dy & \text{si } x \leq 0 \\ \int_{-\infty}^{0} e^{-(x-y)} e^{-(-y)} \, dy + \int_{0}^{x} e^{-(x-y)} e^{-(y)} \, dy + \int_{x}^{\infty} e^{-(y-x)} e^{-(y)} \, dy & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} e^{x-2y} \, dy + \int_{x}^{\infty} e^{-x} \, dy & \text{si } x \leq 0 \\ \int_{-\infty}^{0} e^{x-2y} \, dy + \int_{0}^{x} e^{-x} \, dy + \int_{x}^{\infty} e^{-2y+x} \, dy & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x} + e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} e^{x} + x e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x} + e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} e^{x} + x e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{f * f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x} + e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} e^{x} + x e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$$

Ejercicio 39. Sea $f(x) = e^{-|x|}$. Entonces

$$f * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} e^{-|y|} \, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} e^{-|y|} \, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} e^{-|y|} \, dy \quad \text{(ya que } f \text{ es par)}$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} e^{-(x-y)} e^{-(-y)} \, dy + \int_{x}^{\infty} e^{-(y-x)} e^{-(-y)} \, dy & \text{si } x \leq 0 \\ \int_{-\infty}^{0} e^{-(x-y)} e^{-(-y)} \, dy + \int_{0}^{x} e^{-(x-y)} e^{-(y)} \, dy + \int_{x}^{\infty} e^{-(y-x)} e^{-(y)} \, dy & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} e^{x-2y} \, dy + \int_{x}^{\infty} e^{-x} \, dy & \text{si } x \leq 0 \\ \int_{-\infty}^{0} e^{x-2y} \, dy + \int_{0}^{x} e^{-x} \, dy + \int_{x}^{\infty} e^{-2y+x} \, dy & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x} + e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} e^{x} + x e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x} + e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} e^{x} + x e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{f * f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x} + e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} e^{x} + x e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$$

Ejercicio 40. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} \, dx$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar convolución.

Ejercicio 41. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1} \, dx$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar convolución.

Ejercicio 42. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^{2k}+1} \, dx$ para $k \in \mathbb{N}$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar convolución.

Ejercicio 43. Sea $f(x) = e^{-|x|}$. Entonces

$$f * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} e^{-|y|} \, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} e^{-|y|} \, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} e^{-|y|} \, dy \quad \text{(ya que } f \text{ es par)}$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} e^{-(x-y)} e^{-(-y)} \, dy + \int_{x}^{\infty} e^{-(y-x)} e^{-(-y)} \, dy & \text{si } x \leq 0 \\ \int_{-\infty}^{0} e^{-(x-y)} e^{-(-y)} \, dy + \int_{0}^{x} e^{-(x-y)} e^{-(y)} \, dy + \int_{x}^{\infty} e^{-(y-x)} e^{-(y)} \, dy & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} e^{x-2y} \, dy + \int_{x}^{\infty} e^{-x} \, dy & \text{si } x \leq 0 \\ \int_{-\infty}^{0} e^{x-2y} \, dy + \int_{0}^{x} e^{-x} \, dy + \int_{x}^{\infty} e^{-2y+x} \, dy & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x} + e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} e^{x} + x e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x} + e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} e^{x} + x e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{f * f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x} + e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} e^{x} + x e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$$

Ejercicio 44. Sea $f(x) = e^{-|x|}$. Entonces

$$f * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} e^{-|y|} \, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} e^{-|y|} \, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} e^{-|y|} \, dy \quad \text{(ya que } f \text{ es par)}$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} e^{-(x-y)} e^{-(-y)} \, dy + \int_{x}^{\infty} e^{-(y-x)} e^{-(-y)} \, dy & \text{si } x \leq 0 \\ \int_{-\infty}^{0} e^{-(x-y)} e^{-(-y)} \, dy + \int_{0}^{x} e^{-(x-y)} e^{-(y)} \, dy + \int_{x}^{\infty} e^{-(y-x)} e^{-(y)} \, dy & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} e^{x-2y} \, dy + \int_{x}^{\infty} e^{-x} \, dy & \text{si } x \leq 0 \\ \int_{-\infty}^{0} e^{x-2y} \, dy + \int_{0}^{x} e^{-x} \, dy + \int_{x}^{\infty} e^{-2y+x} \, dy & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x} + e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} e^{x} + x e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x} + e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} e^{x} + x e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{f * f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x} + e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} e^{x} + x e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$$

Ejercicio 45. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} \, dx$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar convolución.

Ejercicio 46. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} \, dx$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar convolución.

Ejercicio 47. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^3} \, dx$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar convolución.

Ejercicio 48. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^{2k}} \, dx$ para $k \in \mathbb{N}$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar convolución.

Ejercicio 49. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^{2k+1}} \, dx$ para $k \in \mathbb{N}$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar convolución.

Ejercicio 50. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^{2k+2}} \, dx$ para $k \in \mathbb{N}$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar convolución.

Ejercicio 51. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^{2k+3}} \, dx$ para $k \in \mathbb{N}$.

Nota: Para hacer este ejercicio, tienes que usar convolución.

Ejercicio 52. Sea $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Entonces

$$\mathcal{F}(f * f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-y)^2+1} \frac{1}{y^2+1} e^{-ix\xi} \, dy \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-y)^2+1} \frac{1}{(x+y)^2+1} e^{-ix\xi} \, dy \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-y)^2+1} \frac{1}{(x+y)^2+1} e^{-ix\xi} \, dy \, dx \quad \text{(ya que } f \text{ es par)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-y)^2+1} \frac{1}{(x+y)^2+1} e^{-ix\xi} \, dx \, dy