Propiedades de la integral

Ej1 Si f es continua en $[a,b]$, entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt}$$

c) Si f es impar, entonces

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0}$$

Ejemplos

a) $\int_{-1}^{1} x^3\,dx$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx$

Propiedad 1: Si c es constante, entonces $\boxed{\int_a^b c\,dx = c(b-a)}$

Dem: Si $f(x)=c$ entonces la área encerrada por la función $f(x)$, entonces

$$\int_a^b c\,dx = \text{área} = \underbrace{c}_{\text{altura}}\underbrace{(b-a)}_{\text{base}}$$

Propiedad 2: Si f es integrable en $[a,b]$ y c es una constante, entonces

$$\boxed{\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx}$$

Dem: $\int_a^b c\,f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} c\,f(x_i)\,\Delta x$

$$= c\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$= c\int_a^b f(x)\,dx$$

Propiedad 3: Si f y g son funciones continuas en $[a,b]$, entonces

$$\boxed{\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx}$$

Dem: $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} [f(x_i)+g(x_i)]\,\Delta x$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Ejemplo

a) $\int_0^1 (x+x^2)\,dx$

Propiedad 4: Si f y g son funciones continuas en $[a,b]$, $[a,b]$ y $[c,d]$, entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

Dem: Si $f(x)\geq 0$ entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{área}$$

$$= \text{área } 1 + \text{área } 2$$

$$= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Ej2 Si $f(x)=x$ que $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$

Encuentre la integral $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$

Sol: Sabemos que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx$$

$$\frac{1}{2} = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx + \frac{1}{4}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \frac{1}{4}$$

Ej3 Si $f(x)=\sqrt{x}$ que $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2}{3}$

Encuentre la integral $\int_1^0 f(x)\,dx$

Sol: Sabemos que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_1^0 f(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$\frac{2}{3} = \int_1^0 f(x)\,dx + \frac{2}{3}$$

$$\int_1^0 f(x)\,dx = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}$$

$$\int_1^0 f(x)\,dx = 0$$

Ej4 Si $f(x)=x$ que $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$

Encuentre la integral $\int_1^2 f(x)\,dx$

Sol: Sabemos que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$\frac{1}{2} = \int_1^2 f(x)\,dx + \frac{1}{2}$$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = 0$$

Propiedad 5: Si f es una función integrable en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $m \leq f(x) \leq M$ para todo x en $[a,b]$, entonces

$$\boxed{m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)}$$

Dem: Es consecuencia de la propiedad 4.

Ej5 Si $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ es una función integrable en el intervalo cerrado $[0,1]$ y $m \leq f(x) \leq M$ para todo x en $[0,1]$, entonces

$$\boxed{m(b-a) \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq M(b-a)}$$

Sol: Es consecuencia de la propiedad 4.

Ej6 Si $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ es una función integrable en el intervalo cerrado $[0,1]$ y $m \leq f(x) \leq M$ para todo x en $[0,1]$, entonces

$$\boxed{m(b-a) \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq M(b-a)}$$

Sol: Es consecuencia de la propiedad 4.

Propiedad 6: Si f es una función integrable en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $m \leq f(x) \leq M$ para todo x en $[a,b]$, entonces

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx}$$

Dem: Como f es continua en $[a,b]$, la función $|f(x)|$ es también continua en $[a,b]$ y $|f(x)| \geq 0$.

Entonces por una vez más la propiedad 4, se tiene que para todo $x \in [a,b]$, se tiene que

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

Por la propiedad 4,

$$\int_a^b -|f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

de donde

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx}$$

Propiedad 7: Desigualdad de Cauchy Schwarz

Si f y g son funciones continuas en $[a,b]$, entonces

$$\boxed{\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx}$$

Ej7 Si $f(x)=x$ y $g(x)=x^2$ en $[0,1]$

Verifique que $\left(\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x)\,dx \int_0^1 g^2(x)\,dx$

Sol: Por un lado

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_0^1 x\cdot x^2\,dx\right)^2$$

$$= \left(\int_0^1 x^3\,dx\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$= \frac{1}{16}$$

Por otro lado

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx \int_0^1 g^2(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx \int_0^1 x^4\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{15}$$

Como $\frac{1}{16} < \frac{1}{15}$ se concluye que

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x)\,dx \int_0^1 g^2(x)\,dx$$

Ej8 Si $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=1$ en $[0,1]$

Verifique que $\left(\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x)\,dx \int_0^1 g^2(x)\,dx$

Sol: Por un lado

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_0^1 \sqrt{x}\cdot 1\,dx\right)^2$$

$$= \left(\int_0^1 \sqrt{x}\,dx\right)^2$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= \frac{4}{9}$$

Por otro lado

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx \int_0^1 g^2(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx \int_0^1 1^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1$$

$$= \frac{1}{2}$$

Como $\frac{4}{9} < \frac{1}{2}$ se concluye que

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x)\,dx \int_0^1 g^2(x)\,dx$$

Ej9 Si $f(x)=x$ y $g(x)=x^2$ en $[0,1]$

Verifique que $\left(\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x)\,dx \int_0^1 g^2(x)\,dx$

Sol: Por un lado

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_0^1 x\cdot x^2\,dx\right)^2$$

$$= \left(\int_0^1 x^3\,dx\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$= \frac{1}{16}$$

Por otro lado

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx \int_0^1 g^2(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx \int_0^1 x^4\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{15}$$

Como $\frac{1}{16} < \frac{1}{15}$ se concluye que

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x)\,dx \int_0^1 g^2(x)\,dx$$

Ej10 Si $f(x)=x$ y $g(x)=1$ en $[0,1]$

Verifique que $\left(\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x)\,dx \int_0^1 g^2(x)\,dx$

Sol: Por un lado

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_0^1 x\cdot 1\,dx\right)^2$$

$$= \left(\int_0^1 x\,dx\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}$$

Por otro lado

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx \int_0^1 g^2(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx \int_0^1 1^2\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 1$$

$$= \frac{1}{3}$$

Como $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ se concluye que

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x)\,dx \int_0^1 g^2(x)\,dx$$

Ej11 Si $f(x)=\sin x$ en $[0,\pi]$

Verifique que $\left(\int_0^\pi f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \int_0^\pi f^2(x)\,dx \int_0^\pi g^2(x)\,dx$

Sol: Por un lado

$$\left(\int_0^\pi f(x)g(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_0^\pi \sin x\cdot 1\,dx\right)^2$$

$$= \left(\int_0^\pi \sin x