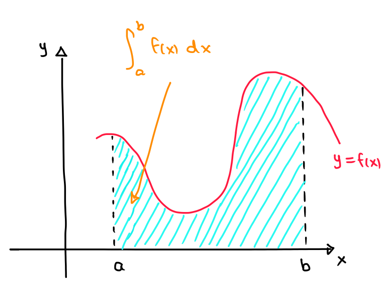
# Teorema Fundamental del Cálculo

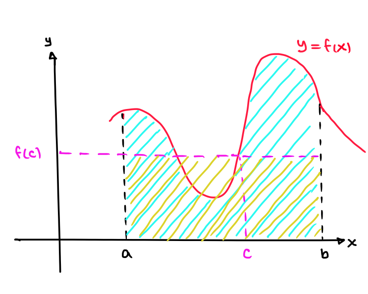
Newton y Leibniz descubrieron la íntima relación que existe entre las antiderivadas e integrales definidas, lo que nos permite calcular los valores exactos de muchas integrales definidas sin usar sumas de Riemann. Esta relación es tan importante que se conoce como el Teorema Fundamental del Cálculo.

**Teo** (del valor medio para integrales definidas)

Si $f$ es una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces existe un punto $c \in [a,b]$ tal que

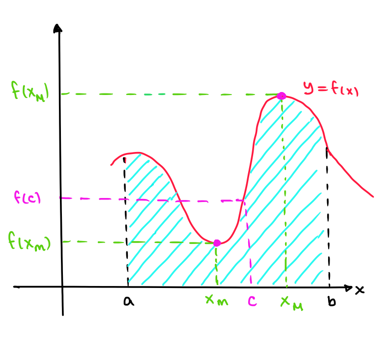
$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$




El teorema del valor medio para integrales definidas, geométricamente afirma que dicha área se puede rectificar (cuadrar), es decir, que se puede encontrar un rectángulo cuya área es igual al valor de la integral.

**Dem** Como $f$ es continua en $[a,b]$, existen puntos $x_m$ y $x_M$ en $[a,b]$ tales que $f(x_m)$ y $f(x_M)$ son el valor mínimo y máximo absolutos en $[a,b]$




Por la propiedad 7,

$$f(x_m)(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le f(x_M)(b-a)$$

$$f(x_m) \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le f(x_M)$$

Por el Teorema del valor intermedio para funciones continuas, existe $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

es decir,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \quad //$$

**Ejem.** Determinar el valor del número $c$ del teorema para la integral.

$$\int_0^2 x^2\,dx \qquad f(x) = x^2$$

Sabemos que $\int_0^2 x^2\,dx = \frac{8}{3}$ (sección anterior)

Por el Teorema anterior, existe $c \in [0,2]$ tal que

$$\int_0^2 x^2\,dx = f(c)(2-0) = 2c^2$$

Luego, $2c^2 = \frac{8}{3} \Rightarrow c = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

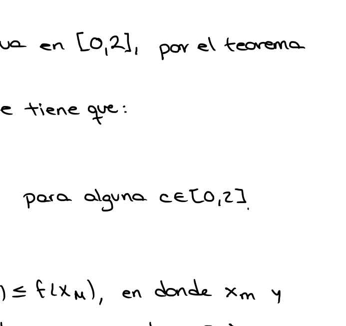
$\therefore\ c = \frac{2}{\sqrt{3}}$ pq $c \in [0,2]$ //

**Def** Si $f$ es integrable en $[a,b]$, su valor medio o promedio en $[a,b]$ es el número:

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}.$$

**Ejem.** Determinar el valor promedio de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[3,5]$.

Digamos que $\int_3^5 x^2\,dx = \frac{98}{3}$




Entonces el valor promedio de $f$ en $[3,5]$ por definición es

$$f(c) = \frac{\int_3^5 x^2\,dx}{5-3} = \frac{\frac{98}{3}}{\frac{2}{1}} = \frac{49}{3} \quad //$$

**Ejem** Aplicar el teorema del valor medio para integrales definidas para demostrar que

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2+3}\,dx \le \frac{2}{3}$$

Sea $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$. Como $f$ es continua en $[0,2]$, por el teorema del valor medio para integrales definidas, se tiene que:

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2+3}\,dx = f(c)(2-0) = \frac{2}{c^2+3} \qquad \text{para alguna } c \in [0,2]$$

Pero el número $c$ es tal que $f(x_m) \le f(c) \le f(x_M)$, en donde $x_m$ y $x_M$ son los puntos en $[0,2]$ en los que $f$ alcanza su valor mínimo y máximo globales, respectivamente.

En este caso, $x_M = 0$ por lo que $f(c) = \frac{1}{c^2+3} \le f(0) = \frac{1}{3}$

De donde,

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2+3}\,dx = \frac{2}{c^2+3} \le \frac{2}{3} \quad //$$

**Teorema** (Teorema Fundamental del Cálculo, TFC)

1. Si $f$ es continua en $[a,b]$, entonces $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b)$ y su derivada es $f(x)$:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

2. Si $f$ es continua en todo punto de $[a,b]$ y $F$ es cualquier antiderivada de $f$ en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

**Dem.**

① Para $a < x < b$ se tiene que

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{definición}\\ \text{de } g'(x)}}{F'(x) =} \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{definición}\\ \text{de } g(x)}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{definición de}\\ -\int_x^a f(t)dt}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt}{h} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Propiedad de}\\ \text{suma de integrales}}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$

Por el TVM para integrales definidas, existe $c \in [x, x+h]$ tal que

$$f(c) = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} \qquad b-a = (x+h) - x = h$$

y por el Teorema del sandwich para límites, se tiene que $\lim_{h\to 0} c = x$

$$x = \lim_{h\to 0} x \le \lim_{h\to 0} c \le \lim_{h\to 0} x+h = x$$

Como $f$ es continua en $[a,b]$, se tiene que:

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}\right] = \lim_{h\to 0} f(c) = f\left[\lim_{h\to 0} c\right] = f(x)$$

$\therefore\ F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b).$

② Por la primera parte se tiene que $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

es tal que $\text{Hipótesis}\ \{\ F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b].$

Entonces

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt \underset{\substack{\uparrow\\ \text{propiedad}}}{=} \int_a^b f(t)\,dt \quad //$$

**Observaciones:**

1. Por simplicidad, la expresión $F(b) - F(a)$ se denota como $F(x)\Big|_a^b$ o como $[F(x)]_a^b$.

2. Una función $F$ tal que $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$, es una antiderivada de $f$ o una primitiva de $f$; y a la expresión $F(x)+c$ en donde $c$ es una constante, se le denota como

$$\int f(x)\,dx \quad \text{y se le llama integral indefinida de } f$$

respecto a $x$, siempre que $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]$.

Así que, si $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]$, entonces

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \longleftarrow \text{integral indefinida}$$

Luego,

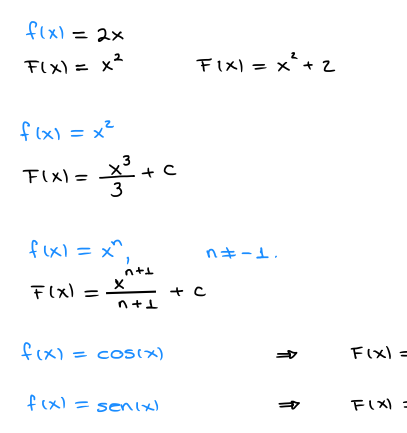
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^b$$

**Ejemplo** Encuentra la antiderivada de la función $f(x) = 4x^3$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

**Sol.** Buscamos una función $F$ que satisfaga la igualdad

$$F'(x) = 4x^3 = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Sabemos que $F(x) = x^4$ es una de tales funciones.




$F_1(x) = x^4$
$F_1'(x) = 4x^3$

$F_2(x) = x^4 - 5$
$F_2'(x) = 4x^3$

$F_3(x) = x^4 + 3$
$F_3'(x) = 4x^3$

$F(x) = x^4 + c$
$F'(x) = 4x^3 = f(x)$.

**Ejemplos**

1) $f(x) = 2x$
   $F(x) = x^2 \qquad F(x) = x^2 + 2 \qquad F(x) = x^2 - \pi$

2) $f(x) = x^2$
   $F(x) = \frac{x^3}{3} + c$

3) $f(x) = x^n, \quad n \ne -1.$
   $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

4) $f(x) = \cos(x) \Rightarrow F(x) = \operatorname{sen}(x) + c$

5) $f(x) = \operatorname{sen}(x) \Rightarrow F(x) = -\cos(x) + c$

6) $f(x) = \sec^2(x) \Rightarrow F(x) = \tan(x) + c$

7) $f(x) = \sec(x)\tan(x) \Rightarrow F(x) = \sec(x) + c$

8) $f(x) = \csc^2(x) \Rightarrow F(x) = -\cot(x) + c$

9) $f(x) = \csc(x)\cot(x) \Rightarrow F(x) = -\csc(x) + c$

**Calcular** $\int_1^3 5x^2\,dx = 5\underbrace{\int_1^3 x^2\,dx}$

$$\overset{\text{TFC ②}}{=} 5\big[F(x)\big]_1^3 = 5[F(3) - F(1)]$$
$$= 5\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3$$
$$= 5\left[\frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right]$$
$$= 5\left[9 - \frac{1}{3}\right]$$
$$= 5\left[\frac{26}{3}\right]$$
$$= \frac{130}{3} \quad //$$

$f(x) = x^2$
$F(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow F'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2$

**Ejemplo.** Considerar la función definida $F$ en $[2,4]$ por

$$F(x) = \int_2^x \frac{1}{t}\,dt \qquad \text{TFC-①}$$

Determinar $F'(x)\ \forall x \in (2,4)$.

**Sol.** La función $f(t) = \frac{1}{t}$ es continua en el intervalo $[2,4]$. Además $F$ es diferenciable en todo punto del intervalo $(2,4)$ y

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_2^x \frac{1}{t}\,dt\right] = f(x) \qquad \forall x \in (2,4)$$

**Ejemplo.** Sea $F(x) = \int_1^x \frac{1}{w^2}\,dw$ para $x > 0$. Encontrar $F'(x)$

Sean $I = (0, \infty)$ y $c = 1$.

Luego,

$$F'(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{para } x > 0. \quad //$$

**Ejemplo** Sea $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{si } x \ge 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Determinar $F'(x)\ \forall x \in (-1,1)$, donde $F(x) = \int_{-1}^x f(t)\,dt$.

**Sol.** Es fácil verificar que $f$ es continua en el intervalo $[-1,1]$ excepto en el punto $x = 0$.

Sea $F(x) = \int_{-1}^x f(t)\,dt \qquad \forall x \in [-1,1]$

Concluimos por el TFC, que $F$ es diferenciable respectivamente en los intervalos $(-1,0)$ y $(0,1)$. Además,

$$F'(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{si } x \in (0,1) \\ x^2 - 1 & \text{si } x \in (-1,0) \end{cases} \quad //$$