Integrales impropias (Parte 2)

En esta sesión se extiende la integral definida a intervalos abiertos de la forma $(-\infty,b)$, (a,∞) y $(-\infty,\infty)$. Además se extiende a intervalos cerrados $[a,b]$ en donde el integrando es una función discontinua.

Ejemplo:

a)

b)

es decir, el integrando es una función discontinua en el intervalo de integración.

A estos dos tipos de integrales en las formas integrales impropias, más específicamente:

Tipo 1: Intervalos infinitos o de primera especie

a) Si existe $\int_a^\infty f(x)\,dx$ para todo $b>a$, entonces

$$\boxed{\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx}$$

$\int_a^\infty f(x)\,dx$ es una integral impropia de primera especie

siempre y cuando el límite exista (como número finito).

b) Si existe $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ para todo $b<a$, entonces

$$\boxed{\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx}$$

$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ es una integral impropia de primera especie

siempre y cuando exista (como número finito).

Las integrales impropias de $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ y $\int_a^\infty f(x)\,dx$ se llaman convergentes si existe el límite y divergentes si no existe.

c) Si $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ y $\int_a^\infty f(x)\,dx$ son convergentes, entonces por definición,

$$\boxed{\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^b f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx}$$

donde $a\in\mathbb{R}$.

Propiedades de las integrales impropias de primera especie

Sean $f,g:[a,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ funciones integrables en $[a,b]$. Si las integrales $\int_a^\infty f(x)\,dx$ y $\int_a^\infty g(x)\,dx$ son convergentes, entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. Linealidad. Sean $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$\int_a^\infty \alpha f(x)+\beta g(x)\,dx = \alpha\int_a^\infty f(x)\,dx + \beta\int_a^\infty g(x)\,dx$$

2. Monotonía. Si $f(x)\leq g(x)$ $\forall x\in[a,\infty)$, entonces

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \leq \int_a^\infty g(x)\,dx$$

3. Aditividad respecto al intervalo. Si $b\in[a,\infty)$, entonces

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^\infty f(x)\,dx$$

4. Regla de Barrow. Si F es una primitiva de f, y existe $\lim_{x\to\infty}F(x)$, entonces

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty}\left[F(x)-F(a)\right].$$

Tipo 2: Integrandos discontinuos o de segunda especie

a) Si f es continua en $(a,b]$ y discontinua en b, entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b^-\to b}\int_a^{b^-} f(x)\,dx}$$

$\int_a^b f(x)\,dx$ es una integral impropia de segunda especie

siempre y cuando el límite exista (como número finito).

b) Si f es continua en $[a,b)$ y discontinua en a, entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b^+\to b}\int_{a^+}^b f(x)\,dx}$$

$\int_a^b f(x)\,dx$ es una integral impropia de segunda especie

siempre y cuando exista (como número finito).

Las integrales impropias $\int_a^b f(x)\,dx$ de tipo convergente si existe el límite y divergente si no existe.

c) Si f tiene una discontinuidad en c con $a<c<b$ y si son convergentes tanto $\int_a^c f(x)\,dx$ como $\int_c^b f(x)\,dx$, entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

Propiedades de las integrales impropias de segunda especie

Sean $f,g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ funciones integrables en $[c,b]$ $\forall c\in(a,b)$. Si las integrales $\int_a^b f(x)\,dx$ y $\int_a^b g(x)\,dx$ son convergentes, entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. Linealidad. Sean $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$\int_a^b \alpha f(x)+\beta g(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$$

2. Monotonía. Si $f(x)\leq g(x)$ $\forall x\in[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

3. Regla de Barrow. Si F es una primitiva de f, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b^-}\left[F(x)-F(a)\right].$$

Ejemplos:

① $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

$1+x^2>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ no existe ningún valor real para x que sea discontinuidad en $x=\frac{1}{0}$.

$$= \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{1}\right)^2}\,\frac{dx}{1}\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\arctan\left(\frac{x}{1}\right)\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\arctan\left(\frac{b}{1}\right)-\arctan\left(\frac{0}{1}\right)\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\arctan(b)-0\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$\therefore \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ es convergente.

② $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$

La función $f(x)=e^{-x}$ es continua en todo $\mathbb{R}$, en particular en $[0,\infty)$ y que la acotan en cualquier $[a,b]$ para cualquier $a,b\in\mathbb{R}$.

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\int e^{-x}\,dx\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\int e^{-x}\,dx\right]_0^b = -\lim_{b\to\infty}\left[e^{-x}\right]_0^b$$

$$= -\lim_{b\to\infty}\left[e^{-b}-e^{0}\right] = -\lim_{b\to\infty}\left[e^{-b}-1\right]$$

$$= -\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{e^{b}}-1\right] = -\left[0-1\right] = 1$$

$\therefore$ La integral original converge a 1.

③ $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$1-x^2=0$

$x=\pm 1$

Sea $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ es una función continua en $(-1,1)$ y en particular en $(-1,0]$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \overset{\text{Ad}}{=} \lim_{b^-\to 1}\int_{-1}^{b^-} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \overset{\text{Ad}}{=} \lim_{b^-\to 1}\int_{-1}^{b^-} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \lim_{b^-\to 1}\left[\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{1}\right)^2}}\,\frac{dx}{1}\right]_{-1}^{b^-}$$

$$= \lim_{b^-\to 1}\left[\arcsin\left(\frac{x}{1}\right)\right]_{-1}^{b^-}$$

$$= \lim_{b^-\to 1}\left[\arcsin(b)-\arcsin(-1)\right]$$

$$= \lim_{b^-\to 1}\left[\arcsin(b)-\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \lim_{b^-\to 1}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right] = \lim_{b^-\to 1}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \lim_{b^-\to 1}\left[\pi\right] = \pi$$

$\therefore$ La integral original converge a π.

④ $\int_{-1}^1 x^{-2}\,dx$

Sea $f(x)=x^{-2}$ es una función continua en $(-1,0)$ y en particular en $(-1,1)$

$$\int_{-1}^1 x^{-2}\,dx \overset{\text{Ad}}{=} \int_{-1}^0 x^{-2}\,dx + \int_0^1 x^{-2}\,dx$$

$$\int_{-1}^0 x^{-2}\,dx = \lim_{b^-\to 0}\int_{-1}^{b^-} x^{-2}\,dx$$

$$= \lim_{b^-\to 0}\left[\int \frac{1}{\left(\frac{x}{1}\right)^2}\,\frac{dx}{1}\right]_{-1}^{b^-}$$

$$= \lim_{b^-\to 0}\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{b^-}$$

$$= \lim_{b^-\to 0}\left[-\frac{1}{b}-\frac{1}{-1}\right]$$

$$= \lim_{b^-\to 0}\left[-\frac{1}{b}+1\right]$$

$$= \lim_{b^-\to 0}\left[-\frac{1}{0^-}+1\right] = \lim_{b^-\to 0}\left[-\frac{1}{-\varepsilon}+1\right]$$

$$= \lim_{b^-\to 0}\left[\frac{1}{\varepsilon}+1\right] = \lim_{b^-\to 0}\left[\frac{1}{0^+}+1\right]$$

$$= \lim_{b^-\to 0}\left[\infty+1\right] = \infty$$

$\therefore$ La integral original diverge.

Ahora tratemos de calcular $\int_0^1 x^{-2}\,dx$, ya la primera integral diverge.

$\therefore \int_{-1}^1 x^{-2}\,dx$ diverge ya que $\int_0^1 x^{-2}\,dx$ también diverge.

⑤ $\int_{-1}^1 x\,e^{x^2}\,dx \overset{\text{Ad}}{=} \int_{-1}^0 x\,e^{x^2}\,dx + \int_0^1 x\,e^{x^2}\,dx$

$$\int_{-1}^0 x\,e^{x^2}\,dx = \lim_{b^-\to 0}\int_{-1}^{b^-} x\,e^{x^2}\,dx = \lim_{b^-\to 0}\left[\int x\,e^{x^2}\,dx\right]_{-1}^{b^-}$$

$u=x^2$

$du=2x\,dx$

$\frac{du}{2}=x\,dx$

$$= \lim_{b^-\to 0}\left[\int \frac{1}{2}\,e^{u}\,du\right]_{-1}^{b^-} = \lim_{b^-\to 0}\left[\frac{1}{2}\,e^{u}\right]_{-1}^{b^-}$$

$$= \lim_{b^-\to 0}\left[\frac{1}{2}\,e^{x^2}\right]_{-1}^{b^-} = \lim_{b^-\to 0}\left[\frac{1}{2}\,e^{(b^-)^2}-\frac{1}{2}\,e^{(-1)^2}\right]$$

$$= \lim_{b^-\to 0}\left[\frac{1}{2}\,e^{(b^-)^2}-\frac{1}{2}\,e^{1}\right] = \lim_{b^-\to 0}\left[\frac{1}{2}\,e^{0}-\frac{1}{2}\,e^{1}\right]$$

$$= \lim_{b^-\to 0}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,e^{1}\right] = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,e^{1}$$

$\therefore \int_{-1}^0 x\,e^{x^2}\,dx$ converge a $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,e^{1}$

$$\int_0^1 x\,e^{x^2}\,dx = \lim_{b^+\to 0}\int_{b^+}^1 x\,e^{x^2}\,dx = \lim_{b^+\to 0}\left[\int x\,e^{x^2}\,dx\right]_{b^+}^{1}$$

$$= \lim_{b^+\to 0}\left[\int \frac{1}{2}\,e^{u}\,du\right]_{b^+}^{1} = \lim_{b^+\to 0}\left[\frac{1}{2}\,e^{u}\right]_{b^+}^{1}$$

$$= \lim_{b^+\to 0}\left[\frac{1}{2}\,e^{x^2}\right]_{b^+}^{1} = \lim_{b^+\to 0}\left[\frac{1}{2}\,e^{1^2}-\frac{1}{2}\,e^{(b^+)^2}\right]$$

$$= \lim_{b^+\to 0}\left[\frac{1}{2}\,e^{1}-\frac{1}{2}\,e^{(b^+)^2}\right] = \lim_{b^+\to 0}\left[\frac{1}{2}\,e^{1}-\frac{1}{2}\,e^{0}\right]$$

$$= \lim_{b^+\to 0}\left[\frac{1}{2}\,e^{1}-\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\,e^{1}-\frac{1}{2}$$

$\int_0^1 x\,e^{x^2}\,dx$ converge a $\frac{1}{2}\,e^{1}-\frac{1}{2}$

$\therefore \int_{-1}^1 x\,e^{x^2}\,dx \leq \int_{-1}^0 x\,e^{x^2}\,dx + \int_0^1 x\,e^{x^2}\,dx$

$$= -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,e^{1} > 0$$

$\therefore \int_{-1}^1 x\,e^{x^2}\,dx$ converge a cero.

⑥ $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\int x^{-2}\,dx \right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{b} + \frac{1}{1} = 1.$$

∴ La integral original converge.

② $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$$= \lim_{b\to 0} \int_b^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{b\to 0} \left[2\sqrt{x} \right]_b^1 = \lim_{b\to 0} 2\sqrt{1} - 2\sqrt{b}$$

$$= \infty$$

∴ La integral original diverge.

③ $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Sea $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ es continua en $(0,1)$

y $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \infty$ es f es discontinua en $x=1$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b\to 1^-} \left[\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right]_0^b$$

$$= \dots = \lim_{b\to 1^-} \left[\arcsin(x) \right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to 1^-} \arcsin(b) - \arcsin(0)$$

$$= \lim_{b\to 1^-} \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

∴ La integral original converge.

④ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \dots$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{\arctan(x)} \right]_a^0$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{\arctan(0)} - \frac{1}{\arctan(a)} \right]$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{\arctan(0)} + 1 \quad \text{ya} = \infty + 1 = \infty$$

∴ La integral original diverge.

⑤ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+(x)^2+(x)^4}$

$$\boxed{\begin{aligned} 1+(x)^2+(x)^4 &= (x^2+1)^2 \\ &= (x+i)^2(x-i)^2 \\ x+i &= 0 \Rightarrow x = -i \\ x-i &= 0 \Rightarrow x = i \end{aligned}}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-\sin(x)}{1+(x)^2+(x)^4} \right]_a^b = \lim_{b\to\infty} \left[\underbrace{\int \frac{\sin x}{x^2+1}\,dx}_{\text{I}} - \int \frac{\sin x}{(x^2+1)^2}\,dx \right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\int \frac{\sin x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{\sin x}{(x^2+1)^2}\,dx \right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} \ln(x+i) + \ln(x-i)$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\ln(x+i) + \ln(x-i) \right] - \left[\ln(x+i) + \ln(x-i) \right] \quad \leftarrow \text{Cálculo de residuos}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \ln\left(\frac{x+i}{x-i} \right) - \ln\left(\frac{x}{x} \right)$$

$$= \lim_{b\to\infty} \ln\left(\frac{x+i}{x-i} \cdot \frac{x+i}{x+i} \right) - \ln\left(\frac{x}{x} \right)$$

$$= \lim_{b\to\infty} \ln\left(\frac{x^2+2xi-1}{x^2+1} \right) - \ln\left(\frac{x}{x} \right)$$

$$= \ln(1) - \ln\left(\frac{x}{x} \right) = -\ln\left(\frac{x}{x} \right)$$

∴ La integral converge.

⑥ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\ln(x)}{x}\,dx$

$$\begin{aligned} u &= \ln x \\ du &= \frac{1}{x}\,dx \end{aligned}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\int u\,du \right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{u^2}{2} \right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{\ln^2(x)}{2} \right]_1^b$$

$$= \infty - 0 = \infty$$

∴ la integral original diverge.

⑦ $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b x e^{x^2}\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= x^2 \\ du &= 2x\,dx \\ \frac{du}{2} &= x\,dx \end{aligned}}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\int e^u \frac{du}{2} \right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{2} e^{b^2} - \frac{1}{2} e^{0^2} \right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{2} e^{b^2} - \frac{1}{2} \right]$$

$$= \infty - \frac{1}{2} = \infty$$

$$\begin{aligned} u &= x^2 \\ du &= 2x\,dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{du}{2} &= x\,dx \\ \frac{du}{2} &= x\,dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \int_{-\infty}^{\infty} x e^{x^2} &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 x e^{x^2} \\ &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{du}{2} \cdot e^{x^2} \\ &= \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_a^0 \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{a\to-\infty} e^{a^2} = -\frac{1}{2} e^{0^2} = 0 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 = \frac{1}{2}$$

∴ La integral original converge.

⑧ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1}\,dx \leq \int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1}\,dx + \int_{-\infty}^{1} \frac{\ln(x)}{x^2+1}\,dx$

$$* = \int_{-\infty}^{1} \frac{\ln(x)}{x^2+1}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^1 \frac{\ln(x)}{x^2+1}\,dx$$

$$\begin{aligned} u &= \ln x \\ du &= \frac{1}{x}\,dx \end{aligned}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[\int \frac{1}{x} \frac{1}{x^2+1}\,dx \right]$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[\ln(x) \frac{1}{x^2+1} \right]_a^1$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[\ln(1) \frac{1}{1^2+1} - \ln(a) \frac{1}{a^2+1} \right]$$

$$= \lim_{a\to-\infty} -\ln(a) \frac{1}{a^2+1} = \infty$$

∴ Como * diverge, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1}\,dx$ también diverge.

⑨ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2+17}\,dx \leq \int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2+17}\,dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{(x^2+1)^2+17}\,dx$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{x}{(x^2+1)^2+17}\,dx + \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{x}{(x^2+1)^2+17}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{2\sqrt{17}} \right]_0^b + \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{2\sqrt{17}} \right]_a^0$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{2\sqrt{17}} - 0 \right] + \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{2\sqrt{17}} - 0 \right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{17}} + \frac{1}{2\sqrt{17}} = 0$$

∴ La integral converge a 0.

⑩ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2}$

La función $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$ es continua para $x \in \mathbb{R}$ no con asíntota vertical para $\mathbb{R}$, pues que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+2} = 0$

∴ f es continua en $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2} = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{dx}{x^2+2} + \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+2}$$

$$\begin{aligned} u &= x \\ du &= dx \end{aligned}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[\int u^{-2}\,du \right]_a^0 + \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{2} u^{-1} \right]_0^b$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \right]_a^0 + \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \right]_0^b = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0$$

∴ La integral converge a 0.

⑪ $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\begin{aligned} u &= \arcsin x \\ du &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \end{aligned}$$

$$= \lim_{b\to 1^-} \left[\int u^{-2}\,du \right]_0^b = \lim_{b\to 1^-} \left[-u^{-1} \right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to 1^-} \left[-\frac{1}{\arcsin(b)} + \frac{1}{\arcsin(0)} \right]$$

$$= -\frac{1}{\arcsin(b)} + \frac{1}{0} = \infty$$

∴ La integral diverge.

⑫ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx + \int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{2} \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_a^0 + \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{2} \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^b