INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO
Cálculo Diferencial e Integral II

Laboratorio 13: Polinomios de Taylor, residuos y aproximaciones.

1. En cada inciso, obtén el polinomio de Taylor de grado n, $P_n(x)$, generado por $f(x)$ en c:

   a) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$, $n = 2$ y evalúa en $c = 1$.

   b) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{ds}{s+1}$, $n = 2$ y evalúa en $c = 1/2$.

   c) $f(x) = 3 + \displaystyle\int_2^{2x} e^{t^2-4}\, dt$, $n = 2$ y $c = 1$.

   d) $f(x) = \ln(x)$, $c = 1$.

   e) $f(x) = \operatorname{senh}(x)$, $c = 0$.

   f) $f(x) = x^2 - x - 2$, $c = -1$.

2. Aproximar:

   a) $\sqrt[3]{e^2}$ con un error menor a 0.001.

   b) $\ln(5/4)$ con un error menor a 0.01.

3. A partir del polinomio de Taylor de orden n para e^x en $x_0 = 0$ determina el polinomio de Taylor de grado 3 generado por las siguientes funciones $f(x)$ en $x_0 = 0$:

   a) $f(x) = e^{-2x}$.

   b) $f(x) = e^{-x^2}$.

   c) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$.

4. Determina la exactitud de la aproximación $\cos(x) \approx 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$ sobre el intervalo $[-1, 1]$.

5. Usando el teorema de Taylor, demuestra que $\left| e^{-x} - \left(1 - x + \dfrac{x^2}{2}\right) \right| < \dfrac{1}{6}, \quad \forall x \in [0, 1]$.

6. Sean $P_3(x)$ un polinomio de Taylor de grado tres y $R_3(x)$ una función tal que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{R_3(x)}{x^3} = 0$.

   Escribe a la función $f(x) = e^{2x}$ de tal modo que $f(x) = P_3(x) + R(x)$ y usa este resultado para calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^{2x} - 2x^3 - 2x^2 - x}{x^4}.$$

Cazuelazo semanal.

- Muestra que $x^2\left(1 - \dfrac{x^4}{6}\right) < \operatorname{sen}\left(x^2\right)$ para todo $x \in (0, \sqrt{\pi})$.