INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO
Cálculo Diferencial e Integral II

Laboratorio 4: Integral por sustitución y logaritmo natural

La primera página es de lagartijas para practicar, al menos resuelve los ejercicios en azul.

1. Calcula las siguientes integrales definidas:

   a) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\csc(x)}$,

   b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(\frac{d}{dx}\cos^{2025}(x)\right) dx$,

   c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} x\sqrt{2x-3}\, dx$,

   d) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi} \operatorname{sen}|\pi - 3x|\ dx$,

   e) $\displaystyle\int_1^7 \frac{5t}{\sqrt{1+t}}\, dt$,

   f) $\displaystyle\int_{\pi/8}^{\pi/4} \frac{2\cos(2\theta)}{\operatorname{sen}^3(2\theta)}\, d\theta$,

   g) $\displaystyle\int_1^x \frac{t^2}{\sqrt{t^3+3}}\, dt$, con $x \geq 1$,

   h) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{5\operatorname{sen}(x)\ \cos(x)}{\left(1+\operatorname{sen}^2(x)\right)^2}\, dx$,

   i) $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{\sqrt{1+t}}\, dt$, con $x \geq 0$.

2. Derivar.

   a) $f(x) = \dfrac{2x^3}{\ln(x)} + \ln\left(\dfrac{4}{x^2}\right)$,

   b) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x^4+5}{\cos\,(x)}}$,

   c) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(3-x)\left(\frac{3+t^6}{t^5+7}\right) dt$.

3. Derivar usando derivación logarítmica:

   a) $f(x) = (\sqrt{x})^{x^x}$.

   b) $h(x) = x^{\sqrt{x}}\, x^{\ln(x)},\ \ x > 0$.

   c) $f(x) = \dfrac{\ln^2(x)}{(x^2+1)^{5/2}\sqrt{2+\operatorname{sen}(x)}}$.

4. Determina las siguientes integrales indefinidas:

   a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2(x)\,[2+\tan(x)]^5}$,

   b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\, dx$,

   c) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{1+\cos(x)}}\, dx$,

   d) $\displaystyle\int (z^5+4z^2)(z^3+1)^{12}\, dz$,

   e) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+\sqrt{x}}\, dx$,

   f) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x^4}{x^3-1}}\, dx$,

   g) $\displaystyle\int \frac{x\cos\left(\sqrt{x^2+5}\right)}{\sqrt{x^2+5}}\, dx$,

   h) $\displaystyle\int [1+\ln(x)]\cot(x\ln(x))dx$,

   i) $\displaystyle\int \frac{1}{x+x\operatorname{sen}(\ln(x))}\, dx$.

5. Halla TODAS las funciones diferenciables f que satisfacen la ecuación

$$[f(x)]^2 = \int_0^x \frac{uf(u)}{5+u^2}\,du, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

6. Sea $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{(\ln(t))^2}{1+t}\,dt$, con $x > 0$. Demuestra que $f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \dfrac{(\ln(x))^3}{3}$.

   Sugerencia: En $f\left(\frac{1}{x}\right)$ hacer el cambio de variable $u = \dfrac{1}{t}$. Después usar propiedades de la integral para resolver $f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)$.

7. Determina una función diferenciable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea par, con $f(0) = 0$ y tal que

$$\ln(1 + f(x)) = \int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sen}(t)}{1 + f(\sqrt{t})}\,dt, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

(Examen Dep.1, 2024-O)

Cazuelazo semanal.

- Demuestra que la función definida como sigue

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{x}{n}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2x}{n}\right) + \cdots + \operatorname{sen}\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)\right], & \text{si } x \neq 0, \\ 1, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

  es continua en todo su dominio.