Indeterminaciones.

(1) Se sabe que $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Demuestre que $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ y $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan x}=1$.

Deduzca que $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ y $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ para todo valor x diferente de cero.

Deduzca que $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$.

Dem. Observemos primero que $\frac{\tan x}{x}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}$.

Demostremos que $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Como $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ y $\cos x\neq 0$, decimos en cuál, que es tan, entonces tomar tan que

$$\frac{\tan x}{x}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\quad\text{y}\quad\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}$$

Hacer, $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}$ $\Rightarrow$ $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$

Como $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ y $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$ entonces $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$.

Por otro lado, como $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ y $\cos x\neq 0$ entonces

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$$

Es decir, $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin x}=1$.

Por otro lado, $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ y $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin x}=1$ entonces

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\tan x}=1\cdot 1=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\tan x}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot 1=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

Conclusión: Todo seno tiene $\frac{\sin x}{x}$ entonces que necesitamos transformar la expresión de la cual queremos hacer el límite.

$\frac{\sin x}{x}$ $\frac{\sin x}{\tan x}$ $\frac{\tan x}{x}$ $\frac{\tan x}{\sin x}$ son ecuaciones de la segunda forma.

$\frac{\sin x}{\cos x}$ $\frac{\cos x}{\sin x}$ $\frac{\cos x}{\tan x}$ $\frac{\tan x}{\cos x}$ son ecuaciones de la primera forma.

Recuerde que el seno y coseno son funciones periódicas y que el coseno es una función par y el seno es una función impar. Recuerde que la función tangente es una función impar y que la función cotangente es una función impar.

Regla de L'Hôpital

Sean f y g funciones, $x_0\in\mathbb{R}$ y $\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=0$. Suponga que satisface las siguientes condiciones:

- f y g derivables en $\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$
- f y g derivables en todo intervalo que no contenga x_0
- $g'(x)\neq 0$, para todo $x\in\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$
- $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$

Entonces, garantiza que $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=L$ (en caso que $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ sea diferente de cero) $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ej. Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ y $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$.

Sol. Sea $f(x)=\sin x$ y $g(x)=x$ $\Rightarrow$ $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}g(x)=0$.

Además, como que hablamos $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ es tomo que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\lim_{x\to 0}\cos x=1$$

Entonces, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=1$.

Sol. Sea $f(x)=\tan x$ y $g(x)=x$ $\Rightarrow$ $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}g(x)=0$.

Además, como que hablamos $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ es tomo que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x}{1}=\lim_{x\to 0}\sec^2 x=1$$

Entonces, $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=1$.

Consecuencia de la Regla de L'Hôpital

- Indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$
- Cuando x tiene un valor x_0 en lugar de ∞.
- Indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Se transforma, a la de la regla anterior, cuando, simplemente,

$$x=\infty\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$x=-\infty\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{-\infty}=0$$

$$x=x_0\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{x_0}=\frac{1}{x_0}$$

Es decirnos, sólo hacer, cuando sean necesarios.

- Indeterminación del tipo $\infty\cdot 0$

Cuando se indeterminación del tipo $\infty\cdot 0$ siguen, de las siguientes transformaciones:

$$0\cdot\infty=\frac{0}{\frac{1}{\infty}}\qquad\infty\cdot 0=\frac{\infty}{\frac{1}{0}}$$

- Los indeterminación 1^∞, 0^0 y ∞^0 son como que se ha estudiado:

$$e^{\lim_{x\to x_0}\ln f(x)}$$

Ejm

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}1=1$ $\Rightarrow$ Es de grado uno en x.

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

Ejercicio Resolver los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

Como $\lim_{x\to\infty}x^2=\infty$ y $\lim_{x\to\infty}x^2=\infty$

$\Rightarrow$ $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Es decir, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ es de grado cuatro en el numerador y grado cuatro en el denominador.

$\Rightarrow$ $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ es de grado cero.

$\Rightarrow$ $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}1=1$

2. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^3-x+1}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

Como $\lim_{x\to\infty}x^2=\infty$ y $\lim_{x\to\infty}x^3=\infty$

$\Rightarrow$ $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^3-x+1}$ es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Es decir, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^3-x+1}$ es de grado dos en el numerador y grado tres en el denominador.

$\Rightarrow$ $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^3-x+1}$ es de grado menos uno.

$\Rightarrow$ $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^3-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

3. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x+1}{x^2-x+1}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

Como $\lim_{x\to\infty}x^3=\infty$ y $\lim_{x\to\infty}x^2=\infty$

$\Rightarrow$ $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x+1}{x^2-x+1}$ es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Es decir, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x+1}{x^2-x+1}$ es de grado tres en el numerador y grado dos en el denominador.

$\Rightarrow$ $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x+1}{x^2-x+1}$ es de grado uno.

$\Rightarrow$ $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x+1}{x^2-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

4. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2+x+1}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

Como $\lim_{x\to\infty}x^2=\infty$ y $\lim_{x\to\infty}x^2=\infty$

$\Rightarrow$ $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2+x+1}$ es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Es decir, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2+x+1}$ es de grado dos en el numerador y grado dos en el denominador.

$\Rightarrow$ $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2+x+1}$ es de grado cero.

$\Rightarrow$ $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}1=1$

5. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{1+0}=1$

6. $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}}=\sqrt{\frac{1}{1+0}}=1$

7. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1}=\sqrt{1}=1$

8. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4}{x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

9. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1}=\sqrt{1}=1$

10. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4}{x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

11. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4}{x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

12. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4}{x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

13. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4}{x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

14. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4}{x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

15. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4}{x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

16. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4}{x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

17. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4}{x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

18. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4}{x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

19. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4}{x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

20. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4}{x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

21. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4}{x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

22. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4}{x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

23. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4}{x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

24. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4}{x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

25. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4}{x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

26. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4}{x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

27. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4}{x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

28. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4}{x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

29. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4}{x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

30. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4}{x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

31. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4}{x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

32. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4}{x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

33. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4}{x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

34. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4}{x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

35. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4}{x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

36. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4}{x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

37. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4}{x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

38. $\