INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO

Cálculo Diferencial e Integral II

Laboratorio (6-7): Logaritmos y exponenciales de base $a > 0$, trigonométricas inversas e hiperbólicas y sus inversas.

1. Sea $f(x) = \log_2(1 + x^2)$. Obtener:

   a) $\mathrm{Dom}(f)$.
   b) $\mathrm{Im}(f)$.
   c) Intersecciones con los ejes.
   d) Puntos críticos.
   e) Límites al infinito.
   f) Gráfica de f.

2. Simplificar:

   a) $\sec(\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{x}))$
   b) $\cosh(\ln(x))$
   c) $\tanh(\ln(x))$
   d) $\cosh(\operatorname{arcsenh}(x)),\ x \in \mathbb{R}$
   e) $\operatorname{sen}\left(\arccos\left(\frac{x}{5}\right)\right)$

3. Probar las identidades:

   a) $\cosh^2(x) = \dfrac{\cosh(2x) + 1}{2}$.
   b) $\operatorname{senh}(3x) = 4\operatorname{senh}^3(x) + 3\operatorname{senh}(x)$.
   c) $[\cosh(x) + \operatorname{senh}(x)]^n = \cosh(nx) + \operatorname{senh}(nx)$.
   d) $\operatorname{senh}(x) \pm \operatorname{senh}(y) = 2\operatorname{senh}\left(\dfrac{x \pm y}{2}\right)\cosh\left(\dfrac{x \mp y}{2}\right)$.

4. Considérese la función $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,sen}(1 - \ln(x))$.

   a) Obtener:

      1) $\mathrm{Dom}(f)$.
      2) $\mathrm{Im}(f)$.
      3) Ceros de f.
      4) Soluciones de $f(x) = -\pi$.

   b) Probar que f es inyectiva.
   c) Caracterizar la función inversa de f (dominio, imagen, regla de correspondencia).
   d) Hacer un bosquejo de la gráfica de f.

5. Usando la sustitución $x = \cosh(u)$, con $u \geq 0$, demuestra que para para $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_1^{\cosh(t)} x^2\sqrt{x^2 - 1}\,dx = \frac{1}{32}\operatorname{senh}(4t) - \frac{t}{8}.$$

6. Sea $x = \operatorname{senh}(y\sqrt{1 + x^2})$. Muestra que $(1 + x^2)\dfrac{dy}{dx} + xy = 1$.

7. Si $f(x) = \coth(x)$, entonces $f^{-1}(x) = \operatorname{arccoth}(x)$. Prueba que

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \text{ para } |x| > 1 \quad \text{y} \quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arccoth}(x) + C\,,\ C \in \mathbb{R}\,.$$

8. Sea $I(r) = \displaystyle\int_{-r}^{r} [f(u)]^2\, du$, donde $f(u) = \operatorname{sech}\left(\dfrac{u}{2}\right)$. Muestra que $\displaystyle\lim_{r\to\infty} I(r) = 4$.

9. Muestra que para toda $t > 0$, $\displaystyle\int_1^{\cosh(t)} \sqrt{x^2-1}\; dx = \int_0^t \operatorname{senh}^2(u)\, du$.

   Además, notando que $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \operatorname{senh}^2(x) = 2\operatorname{senh}^2(x) + 1$, muestra que

$$\int_1^{\cosh(t)} \sqrt{x^2-1}\; dx = \frac{\operatorname{senh}(2t)}{4} - \frac{t}{2}.$$

10. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 1$, si

$$f(x) = \int_3^{1+2^x} \frac{\log_2(t-1)}{t-1} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Lagartijas extras previas al examen

1. Derivar:

   a) $f(x) = \big(\log_3(x)\big)\big(\log_2(x)\big)$.

   b) $f(x) = \cosh(\sqrt{1-x^2})$.

   c) $h(x) = \cosh(\tan(e^{2x}))$.

   d) $f(x) = \dfrac{1}{\log_2(\log_2 x)}$.

   e) $y = \log_3\left(\dfrac{3^x}{1-3^x}\right)$.

   f) $f(x) = \cosh^2(\sqrt{2-e^x})$.

2. Calcular la siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{2\log_2(x-1)}{x-1}\, dx$.

   b) $\displaystyle\int_0^2 (3^x - 2^x)\, dx$.

   c) $\displaystyle\int e^t \operatorname{senh}(t)\, dt$.

   d) $\displaystyle\int 2^x \cosh(2^x)\, dx$.

   e) $\displaystyle\int_{1/10}^{10} \frac{\log_{10}(x)}{x}\, dx$.

   f) $\displaystyle\int \frac{3^{2x}}{\sqrt{1-3^x}} dx$.

   g) $\displaystyle\int_0^{\ln 10} 4\operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{2}\right)\, dx$.

   h) $\displaystyle\int_{-\ln 3}^{\ln 3} \sqrt{1+\cosh(x)}\, dx$.

   i) $\displaystyle\int \frac{x - \operatorname{arcsenh}(2x)}{\sqrt{1+4x^2}}\, dx$.