INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO
Cálculo Diferencial e Integral II

Laboratorio 10: Integración por sustitución trigonométrica

1. Calcula la familia de primitivas de la función $f(x) = \arctan(\sqrt{x})$.

2. Encuentra el valor de $a > 0$ tal que, si $f(x) = \dfrac{x-3}{2x}$, entonces el valor de la integral

$$I = \int_1^a \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2}\, dx = \frac{\pi}{4}\,.$$

3. *a*) Demuestra que

$$g(x) = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{a}\right), \quad a > 0,$$

es una primitiva de

$$f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

b) Usa el resultado de (a) para calcular

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

4. *a*) Usa integración por partes para demostrar que

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

b) Calcula el valor de la última integral, utilizando sustitución trigonométrica.

5. Determina las siguientes integrales, usando una sustitución trigonométrica (y su triángulo):

a) $\displaystyle\int x \operatorname{arc\,sen}(x)\, dx.$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}.$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2x - 1}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\, dx.$

d) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{arc\,sen}(x)\, dx.$

e) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{4x^2}{(1-x^2)^{3/2}}\, dx.$

f) $\displaystyle\int_2^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\, dx.$

g) $\displaystyle\int_0^{\ln 4} \frac{e^t}{\sqrt{e^{2t} + 9}}\, dt.$

h) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x + x^2}}.$

i) $\displaystyle\int_{1/12}^{1/4} \frac{2}{\sqrt{t} + 4t\sqrt{t}}\, dt.$

j) $\displaystyle\int_0^{a} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2},\ a \neq 0.$

Cazuelazo semanal.

- Prueba que, para toda $n \in \mathbb{N}$, se satisface que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n(x)}{\operatorname{sen}^n(x) + \cos^n(x)}\, dx = \frac{\pi}{4}\,.$$