Criterios de comparación

Teorema 1.1.9. Funciones continuas, con antiderivadas para todo $x \in [a, \infty)$

a) Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ convergente, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ convergente.

b) Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergente, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergente.

Ejemplo 1.1.10. Considere $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$, no sabemos si es convergente o divergente.

Obs. Si $\sin(x) \geq 0$ en $[a, \infty)$ $\forall x \in [a, \infty)$

Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergente, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergente.

Ejemplo 1.1.11. Considere $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ $\forall x \in [a, \infty)$ $\sin(x) \geq 0$

$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ convergente, por consiguiente, de la integral definida:

$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{\sin(x)}{x}\,dx$

$\Rightarrow \lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{1}{x}\,dx$

$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{x}\,dx$

$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{x}\,dx$ es conv. $\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ conv.

Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergente, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergente. Luego, como $\sin(x) \leq 1$ $\forall x \in [a, \infty)$ $\sin(x) \geq 0$

$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx \leq \int_0^\infty \frac{1}{x}\,dx$ $\forall x \in [a, \infty)$ $\sin(x) \geq 0$

Así que $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ es divergente

$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ divergente

Obs. Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ convergente no podemos concluir si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es conv. o div.

Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergente, entonces no podemos concluir si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es conv. o div.

Ejemplo 1.1.12. Considere $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ $\forall x \in [a, \infty)$ $\sin(x) \geq 0$

$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ es conv. $\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ conv.

Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergente, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergente. Luego, como $\sin(x) \leq 1$ $\forall x \in [a, \infty)$ $\sin(x) \geq 0$

$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx \leq \int_0^\infty \frac{1}{x}\,dx$ $\forall x \in [a, \infty)$ $\sin(x) \geq 0$

Así que $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ es divergente

$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ divergente

Obs. Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ convergente, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ convergente.

Ejemplo 1.1.13. Considere $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ $\forall x \in [a, \infty)$ $\sin(x) \geq 0$

$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ es conv. $\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ conv.

Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergente, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergente. Luego, como $\sin(x) \leq 1$ $\forall x \in [a, \infty)$ $\sin(x) \geq 0$

$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx \leq \int_0^\infty \frac{1}{x}\,dx$ $\forall x \in [a, \infty)$ $\sin(x) \geq 0$

Así que $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ es divergente

$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ divergente

Obs. Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergente, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ convergente.

Ejemplo 1.1.14. Considere $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ $\forall x \in [a, \infty)$ $\sin(x) \geq 0$

$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ es conv. $\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ conv.

Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergente, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergente. Luego, como $\sin(x) \leq 1$ $\forall x \in [a, \infty)$ $\sin(x) \geq 0$

$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx \leq \int_0^\infty \frac{1}{x}\,dx$ $\forall x \in [a, \infty)$ $\sin(x) \geq 0$

Así que $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ es divergente

$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ divergente

Obs. Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ convergente, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergente.

Ejemplo 1.1.15. Considere $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ $\forall x \in [a, \infty)$ $\sin(x) \geq 0$

$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ es conv. $\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ conv.

Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergente, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergente. Luego, como $\sin(x) \leq 1$ $\forall x \in [a, \infty)$ $\sin(x) \geq 0$

$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx \leq \int_0^\infty \frac{1}{x}\,dx$ $\forall x \in [a, \infty)$ $\sin(x) \geq 0$

Así que $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ es divergente

$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ divergente

Obs. Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergente, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ convergente.

Ejemplo 1.1.16. Considere $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ $\forall x \in [a, \infty)$ $\sin(x) \geq 0$

$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ es conv. $\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ conv.

Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergente, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergente. Luego, como $\sin(x) \leq 1$ $\forall x \in [a, \infty)$ $\sin(x) \geq 0$

$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx \leq \int_0^\infty \frac{1}{x}\,dx$ $\forall x \in [a, \infty)$ $\sin(x) \geq 0$

Así que $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ es divergente

$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ divergente

Ejercicios

Estudie si es convergente o divergente la integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

Para $x \geq 0$, en una función continua en $[0, \infty)$ decide si es, o no, integrable en $[0, \infty)$ para integrar $\forall x \in$

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left[\arctan(x)\right]_0^b = \lim_{b \to \infty} \left[\arctan(b) - \arctan(0)\right]$$

$\Rightarrow$ la integral divergen

$\Rightarrow$ $\int_0^\infty$

Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es divergente (divergen o no converge)

Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente

Estudie si es convergente o divergente la integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

Para $x \geq 0$, en una función continua en $[0, \infty)$ decide si es, o no, integrable en $[0, \infty)$ para integrar $\forall x \in$

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left[\arctan(x)\right]_0^b = \lim_{b \to \infty} \left[\arctan(b) - \arctan(0)\right]$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \lim_{b \to \infty} \left[\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ la integral convergen

$\Rightarrow$ $\int_0^\infty$

Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente (convergen o no converge)

Estudie si es convergente o divergente la integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}\,dx$$

Para $x \geq 0$, en una función continua en $[0, \infty)$ decide si es, o no, integrable en $[0, \infty)$ para integrar $\forall x \in$

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left[\ln(x)\right]_0^b = \lim_{b \to \infty} \left[\ln(b) - \ln(0)\right]$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left[\ln(b) - \ln(0)\right]