INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO
Cálculo Diferencial e Integral II

Laboratorio 14: Sucesiones

1. Calcula el límite de cada sucesión $\{a_n\}$ o justifica si diverge:

   a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\pi^2 + \frac{1}{n}\right).$

   b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n.$

   c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{0.07}{n}\right)^n.$

   d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right).$

   e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2+1}{3-5n^2}.$

   f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n}$

   g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan\left(n^2\right)}{\ln(1+n)}.$

   h) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2n^2}.$

   i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n.$

   j) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n+1}{n}.$

   k) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}.$

   l) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}.}\right)$

   m) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \Big[n - \ln\left(3e^n+1\right)\Big].$

   n) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right).$

2. Determinar el valor al que converge la sucesión $a_n = [\ln(n)]^{1/n}$ sin utilizar la Regla de L'Hôpital.
   Sugerencia: Empieza por demostrar que $1 \leq \ln(n) \leq n$, para $n \geq 3$.

3. Sea $a > 0$. Encontrar el límite de la sucesión

$$a_n = \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2n-1}\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4n+1}\right)\left(n^4+a\right)^{1/4}}.$$

4. Usa la prueba del cociente o la prueba de la raíz n-ésima para sucesiones para estudiar la naturaleza de las siguientes sucesiones $\{a_n\}$:

   a) $a_n = n^5 e^{-n}.$

   b) $a_n = \dfrac{5^n}{n!}.$

   c) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}.$

Cazuelazo semanal.

- Sea $a_1 = \sqrt{2}$ y $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ para $n \geq 2$. Demuestra que, si $a_n \leq 2$ para todo $n \geq 1$, entonces $a_n \leq a_{n+1}$ y $a_n \to 2$ cuando $n \to \infty$.
- Muestra que si $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$, entonces el $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{2n}$.
- Demuestra que $\lim_{n\to\infty} (1+\alpha^n)^{1/n} = \begin{cases} 1, & \text{si } \ 0 < \alpha \leq 1, \\ \alpha, & \text{si } \ \alpha > 1. \end{cases}$