Funciones Inversas

Def: Sea $f:A\to B$. Decimos que f es inyectiva si para cada $y\in B$ que sea imagen, el x es único.

$$\forall y\in B\ \ \forall x_1,x_2\in A:\ f(x_1)=y,\ f(x_2)=y \Rightarrow x_1=x_2$$

Obs: (Prueba de la recta horizontal para funciones inyectivas)

Una función f es inyectiva si y sólo si su gráfica intersa a cada recta horizontal a lo sumo en un punto.

Def: Sea función $f:A\to B$ es biyectiva (o sobreyectiva) si para cada $y\in B$ existe $x\in A$ tal que $f(x)=y$, esto es, $f(A)=B$.

Por extensión decimos que una función es biyectiva si f es a la vez inyectiva y sobreyectiva, esto es, $f:A\to B$ es biyectiva si:

$$\forall y\in B\ \exists!\, x\in A:\ f(x)=y$$

Def: Sea función $f:A\to B$ es biyectiva, el f es biyectiva, f es sobreyectiva.

Ejemplo: Sea $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$, definida por $f(x)=\sin x$.

$$\begin{aligned}&\forall y\in[-1,1]\ \ \exists x\in\mathbb{R}:\ f(x)=y\\ &\Leftrightarrow \sin x=y\\ &\Leftrightarrow \arcsin(\sin x)=\arcsin y\\ &\Leftrightarrow x=\arcsin y\end{aligned}$$

x,y es siguiente

$$\Leftrightarrow \exists x\in\mathbb{R}:\ \arcsin(\sin x)=y \quad \text{(1 es cierto)}$$

$$\Leftrightarrow \exists x\in\mathbb{R}:\ \text{Sen}\,x=y$$

$$\Leftrightarrow \forall y\in[-1,1]\ \exists x\in\mathbb{R}:\ f(x)=y$$

$\Leftrightarrow$ 1 es siguiente.

Def: Si $f:A\to B$ es biyectiva, entonces la función inversa $f^{-1}:B\to A$ es definida como:

$$f^{-1}(y)=x \quad \Leftrightarrow \quad f(x)=y$$

Es decir que definimos una función de B hacia A.

Def: Decimos que una función es invertible si admite inversa. Más aún, f es f^{-1} son biyectivas.

Una función f tiene inversa si y sólo si f es biyectiva.

Def: Si $f:\text{Dom}(f)\to\mathbb{R}$ es sobreyectiva también se llama sobreyectiva f es biyectiva.

Las que también definimos para que una función sea inyectiva.

Gráfica de una función y su inversa.

Ejemplo: Determinar la inversa de $y=\frac{1}{x}$.

Sol: Sea y una función biyectiva.

Entonces podemos encontrar la inversa x:

$$\begin{aligned}&y=\frac{1}{x}\\ &\Leftrightarrow x=\frac{1}{y}\\ &\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\frac{1}{y}\\ &\Leftrightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{x}\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ $x=\frac{1}{y}$ $\Rightarrow$ $x=y=\frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow$ $y=f^{-1}(x)=x$

$\Leftrightarrow$ $f^{-1}(x)=\frac{1}{x}$

Ej: Ejemplo:

$$\begin{aligned}&f(x)=\frac{1}{x}\\ &f(1)=1\\ &f(2)=\frac{1}{2}\\ &f(3)=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Obs: Por su simetría

$$f(x)=f^{-1}(x)$$

Ej: Ejemplo:

La función es creciente, por lo tanto es inyectiva.

Ejemplo: Determinar la inversa de $y=\frac{1}{x}$.

Sol: Sea y una función biyectiva.

Entonces podemos encontrar la inversa x:

$$\begin{aligned}&y=\frac{1}{x}\\ &\Leftrightarrow x=\frac{1}{y}\\ &\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\frac{1}{y}\\ &\Leftrightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{x}\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ $x=\frac{1}{y}$ $\Rightarrow$ $x=y=\frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow$ $y=f^{-1}(x)=x$

$\Leftrightarrow$ $f^{-1}(x)=\frac{1}{x}$

Ej: Ejemplo: