# INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO
## Cálculo Diferencial e Integral II

### Laboratorio 12: Integrales impropias

1. Muestra que $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$. Después justifica si la siguiente igualdad es válida:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)} = \int_1^\infty \frac{dx}{x} - \int_1^\infty \frac{dx}{x+1}.$$

2. Determina para qué valores de $p \in \mathbb{R}$ converge la integral en cada inciso:

   *a)* $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^p}$.

   *b)* $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p}$.

3. Deduce cuál debe ser el valor de la constante $A$ para el cual converge la siguiente integral impropia. ¿A qué converge la integral?

$$\int_2^\infty \left( \frac{x}{2x^2+1} - \frac{A}{x+1} \right) dx.$$

4. Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$.

   *a)* Determina el dominio $D$ de $f$ y justifica que $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,dx$ es una integral impropia.

   *b)* Demuestra que $\displaystyle\lim_{\alpha \to 2^+} \frac{1}{\pi} \int_{4-\alpha}^{2\alpha} f(x)dx = 1$.

5. Determinar la convergencia de las siguientes integrales impropias. Calcular el valor de la integral para los casos en los que la integral sea convergente.

   *a)* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x(1+5x)}$.

   *b)* $\displaystyle\int_{\ln(2)}^\infty \frac{e^{-x}}{1-e^{-2x}} dx$.

   *c)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^x+e^{-x}} dx$.

   *d)* $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^{2x}\, dx$.

   *e)* $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty |x|\, e^{-x^2} dx$.

   *f)* $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-3|x-2|}\, dx$.

   *g)* $\displaystyle\int_0^1 x\ln(x)dx$.

   *h)* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-\operatorname{sen}(x)}$.

   *i)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x-1} dx$.

   *j)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{4r}{\sqrt{1-r^4}} dr$.

   *k)* $\displaystyle\int_1^{\cosh(t)} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$, $t \geq 0$.

   *l)* $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$.

   *m)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$.

   *n)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-x}}} dx$.

## Cazuelazo semanal.

- Sea $f$ una función continua y considera que $\displaystyle\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ converge. Muestra que para todo $x > a$ se satisface

$$\int_a^{\infty} f(t)\,dt = \int_a^{x} f(t)\,dt + \int_x^{\infty} f(t)\,dt.$$

  Usa lo anterior para mostrar que $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_x^{\infty} f(t)\,dt = -f(x)$.