4

Funciones Proposicionales y Cuantificadores

4.1. Proposiciones Singulares y Proposiciones Generales

Las técnicas lógicas hasta aquí desarrolladas sólo se aplican a los argumentos cuya validez depende de la manera en que se combinan los enunciados simples en enunciados compuestos función de verdad. Esas técnicas no son aplicables a argumentos tales como:

Todos los humanos son mortales.
Sócrates es humano.
Por lo tanto, Sócrates es mortal.

La validez de un tal argumento depende de la estructura lógica interna de los enunciados no compuestos que contiene. Para evaluar tales argumentos debemos desarrollar métodos de análisis de enunciados no compuestos y desarrollar una simbología para sus estructuras internas.

La segunda premisa del argumento que precede es una *proposición singular;* afirma que el individuo Sócrates tiene el atributo de ser humano. "Sócrates" es llamado el término *sujeto* y "humano", el término *predicado*. Cualquier proposición singular (afirmativa) asegura que el individuo al que se refiere el término sujeto tiene el atributo que designa su término predicado. Consideramos individuos no sólo a las personas, sino también a cualesquier cosas: animales, ciudades, naciones, planetas o estrellas de los cuales pueden significativamente predicarse atributos. Los atributos no sólo son designados por los adjetivos, sino también por nombres o adverbios y aun por verbos; así "Elena es un encanto" y "Elena encanta" tienen el mismo significado que también puede expresarse como: "Elena es encantadora".

En las proposiciones singulares, como símbolos para denotar los individuos usamos las minúsculas "*a*" hasta "*w*", tomando, usualmente, la primera letra del nombre de un individuo para denotar a éste. Como estos símbolos denotan individuos, los llamamos constantes individuales. Para designar atributos usamos letras mayúsculas, siguiendo el mismo principio en su selección. Así, en el contexto del argumento precedente se denota Sócrates con s y simbolizamos los atributos *humano* y *mortal* por medio de las letras mayúsculas "H" y "M". Para expresar una proposición singular en nuestro simbolismo escribimos el símbolo de su término predicado a la izquierda del símbolo para su término sujeto. De este modo simbolizamos "Sócrates es humano" como "Hs" y "Sócrates es mortal" como "Ms".[1]

Examinando las formulaciones simbólicas de las proposiciones singulares que tienen el mismo término predicado, observamos que siguen un patrón común. Las formulaciones simbólicas de las proposiciones singulares "Aristóteles es humano", "Boston es humano", "California es humana", "Descartes es humano", . . . , que son "Ha", "Hb", "Hc", "Hd", . . . , cada una consiste en el símbolo de atributo "H" seguido por una constante individual. Usamos el símbolo "Hx" para simbolizar el patrón común de todas las proposiciones singulares que afirman qué individuos tienen el atributo *humano*. La minúscula "x" —llamada una variable individual— es meramente un *señalador* que sirve para indicar dónde puede escribirse una constante individual para dar lugar a una proposición singular. Las proposiciones singulares "Ha", "Hb", "Hc", "Hd", . . . o son verdaderas o son falsas; pero "Hx", no es verdadera ni es falsa pues no es una proposición. Expresiones tales como "Hx", son denominadas "funciones proposicionales" Estas se definen como expresiones que contienen variables individuales y se convierten en proposiciones cuando sus variables individuales son reemplazadas por constantes individuales.[2] Toda proposición singular puede considerarse como una *instancia de sustitución* de la función proposicional de la que resulta por la sustitución de una constante individual para la variable individual en la función proposicional. El proceso de obtener una proposición a partir de una función proposicional sustituyendo una constante por una variable se llama "instanciación". Las proposiciones singulares negativas "Aristóteles no es humano" y "Boston no es humano", que se simbolizan como "$\sim Ha$" y "$\sim Hb$", resultan por *instanciación* de la función proposicional "$\sim Hx$" de la cual son instancias de sustitución. Vemos así que en las funciones proposicionales se pueden presentar

---

[1] Algunos lógicos encierran las constantes individuales entre paréntesis, simbolizando "Sócrates es humano" como "$H(s)$", pero no nos apegaremos a esta escritura en esta obra.

[2] Algunos autores definen las "funciones proposicionales" como los *significados* de expresiones tales, pero aquí las definimos como las expresiones mismas.

otros símbolos además de los símbolos de atributos y las variables individuales.

Las proposiciones generales tales como "Todo es mortal" y "Algo es mortal" difieren de las proposiciones singulares en no contener nombres de individuos. Sin embargo, también pueden considerarse como resultantes de las funciones proposicionales, no por instanciación, sino por el proceso llamado "generalización" o "cuantificación". El primer ejemplo, "Todo es mortal", puede expresarse de manera alternativa como

Dada cualquier cosa individual, ésta es mortal.

Aquí el pronombre demostrativo ésta (o el pronombre relativo "ella") se refiere a la palabra "cosa" que le precede en el enunciado. Podemos usar la variable individual "x" en lugar del pronombre "ella" y su antecedente parafraseando la primera proposición general como

Dado cualquier x,x es mortal.

Podemos usar entonces la notación que ya hemos introducido para reescribirlo, como

Dado cualquier x, Mx.

La frase "Dado cualquier x" es un "cuantificador universal" y se simboliza como "(x)". Usando este nuevo símbolo podemos simbolizar completamente nuestra primera proposición general como

$$(x)Mx$$

De manera semejante podemos parafrasear la segunda proposición general "Algo es mortal", sucesivamente como

Existe cuando menos una cosa que es mortal.
Existe cuando menos una cosa tal que ésta es mortal.
Existe cuando menos un x tal que x es mortal.

y como

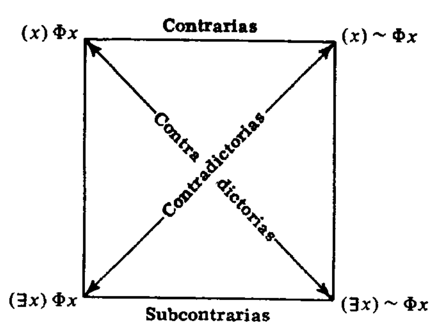
Existe cuando menos un x tal que Mx.

La frase "Existe cuando menos un x tal que" es un "cuantificador existencial" y se simboliza como "$(\exists x)$". Utilizando el nuevo símbolo podemos simbolizar por completo nuestra segunda proposición general como

$$(\exists x)Mx$$

Una proposición general se obtiene de una función proposicional poniendo o un cuantificador universal o un cuantificador existencial antes de la misma. Es obvio que la cuantificación universal de una función proposicional es verdadera si y sólo si todas sus instancias de sustitución son verdaderas, y que la cuantificación existencial de una función proposicional es verdadera si y sólo si tiene cuando menos una instancia de sustitución verdadera. Concediendo que hay al menos un individuo, entonces toda función proposicional tiene al menos una instancia de sustitución (verdadera o falsa). Con esta hipótesis, si la cuantificación universal de una función proposicional es verdadera, entonces su cuantificación existencial también debe serlo.

Otra relación entre la cuantificación universal y la cuantificación existencial se muestra considerando dos proposiciones generales adicionales "Algo no es mortal" y "Nada es mortal", que son las negaciones respectivas de las dos proposiciones generales primeramente consideradas. "Algo no es mortal" se simboliza como "$(\exists x) \sim Mx$" y "Nada es mortal" como "$(x) \sim Mx$". Estas muestran que la negación de la cuantificación universal (existencial) de una función proposicional es lógicamente equivalente a la cuantificación existencial (universal) de la nueva función proposicional que resulta al poner un símbolo de negación frente a la primera función proposicional. Usando la letra griega Φ para representar cualquier símbolo de atributo, los enlaces generales entre la cuantificación universal y la existencial pueden describirse en términos del siguiente diagrama cuadrado:



Suponiendo la existencia de al menos un individuo: podemos decir que las dos proposiciones de arriba son *contrarias*, esto es, que ambas pueden ser falsas, pero no pueden ser ambas verdaderas; las dos proposiciones de la parte baja son *subcontrarias*, es decir, que pueden ser ambas verdaderas, pero no pueden ambas ser falsas; las proposiciones que están en los extremos de las diagonales son *contradictorias*, una de las cuales debe ser verdadera y la otra falsa; y finalmente, de cada lado, la verdad de la proposición más baja es implicada por la verdad de la proposición situada directamente arriba de ella.

La lógica tradicional hacía énfasis en los cuatro tipos de proposiciones sujeto-predicado ilustrados por las siguientes:

Todos los humanos son mortales.
Ningún humano es mortal.
Algunos humanos son mortales.
Algunos humanos no son mortales.

Estas se clasificaban respectivamente como "afirmativa universal", "negativa universal", "afirmativa particular", y "negativa particular", y sus tipos se abreviaban como "***A***", "***E***", "***I***", "***O***". (Los nombres de las letras se presume que provienen del latín "***AffIrmo***" y, "***nEgO***, que significan *yo afirmo* y *yo niego.*) Estas 4 formas especiales de proposiciones sujeto-predicado fácilmente se simbolizan por medio de las funciones proposicionales y los cuantificadores.[3] El primero de ellos, la proposición ***A*** puede sucesivamente parafrasearse como

Dada cualquier cosa individual, si ésta es humana entonces ésta es mortal.
Dado cualquier x, si x es humano entonces x es mortal.
Dado cualquier x, x es humano $\supset$ x es mortal.

que finalmente se simboliza como

$$(x)[Hx \supset Mx]$$

Nuestra formulación simbólica de la proposición ***A*** es la cuantificación universal de la función proposicional compleja "$Hx \supset Mx$", cuyas instancias de sustitución no son proposiciones singulares sino condicionales cuyos antecedentes y consecuentes son proposiciones singulares que tienen los mismos términos sujeto. Entre las instancias de sustitución de la función proposicional "$Hx \supset Mx$" están los condicionales "$Ha \supset Ma$", "$Hb \supset Mb$", "$Hc \supset Mc$" y así sucesivamente. Al simbolizar una proposición ***A***, los corchetes sirven de puntuación para indicar que el cuantificador universal "(x)" *se aplica a*, o *tiene dentro de su alcance*, la totalidad de la función proposicional compleja "$Hx \supset Mx$". La noción de *alcance de un cuantificador* es muy importante, pues las diferencias en alcance corresponden a diferencias en significado. La expresión "$(x)[Hx \supset Mx]$" es una proposición que afirma que todas las instancias de sustitución de la función proposicional "$Hx \supset Mx$" son verdaderas. Por otro lado, la expresión "$(x)Hx \supset Mx$" es una función proposicional cuyas instancias de sustitución son "$(x)Hx \supset Ma$", "$(x)Hx \supset Mb$", "$(x)Hx \supset Mc$", etc.[4]

[3] En el Apéndice B se presenta un método alternativo de simbolizarlos.

[4] Para los cuantificadores (universal y existencial) se convendrá lo establecido para la negación a principios de la Pág. 27, Cap. 2: un cuantificador se aplica a, o tiene como alcance, la más pequeña de las componentes que la puntuación permita.

La proposición de tipo ***E*** "Ningún humano es mortal", puede parafrasearse sucesivamente como

> Dada cualquier cosa individual, si ésta es humana entonces no es mortal.
> Dado cualquier x, si x es humano entonces x no es mortal.
> Dado cualquier x, x es humano $\supset$ x no es mortal.

si se simboliza después como

$$(x)[Hx \supset \sim Mx]$$

De manera semejante, la proposición de tipo ***I*** "Algunos humanos son mortales", se puede parafrasear como

> Existe cuando menos una cosa que es humana y mortal.
> Existe cuando menos una cosa tal que ésta es humana y ésta es mortal.
> Existe cuando menos un x tal que x es humano y x es mortal.
> Existe cuando menos un x tal que x es humano $\cdot x$ es mortal.

y se le simboliza completamente como

$$(\exists x)[Hx \cdot Mx]$$

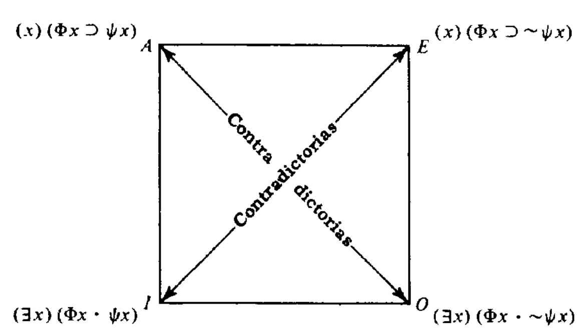
Finalmente, la proposición de tipo ***O*** "Algunos humanos no son mortales" viene a ser

> Existe cuando menos una cosa que es humana, pero no mortal.
> Existe cuando menos una cosa tal que ésta es humana y ésta no es mortal.
> Existe cuando menos una x tal que x es humano y x no es mortal.

y entonces se simboliza como la cuantificación existencial de una función compleja

$$(\exists x)[Hx \cdot \sim Mx]$$

Usando las letras griegas *fi* Φ y *psi* Ψ para representar cualesquier símbolos de atributo, las cuatro proposiciones generales sujeto-predicado de la lógica tradicional se pueden representar en un diagrama cuadrado como



De éstas, la ***A*** y la ***O*** son contradictorias y también son contradictorias la ***E*** y la ***I***. Pero ninguna de las otras relaciones discutidas en conexión con el diagrama cuadrado que aparece en la Pág. 90 se da entre las proposiciones tradicionales ***A***, ***E***, ***I*** y ***O***, aun cuando se suponga que hay un individuo en el universo. Si "Φx" es una función proposicional sin instancias de sustitución verdaderas, entonces sin atención al atributo que simbolice "Ψ" las funciones proposicionales "$\Phi x \supset \Psi x$" y "$\Phi x \supset \sim\Psi x$" tienen solamente instancias de sustitución verdaderas, pues todas sus instancias de sustitución son enunciados condicionales con antecedentes falsos. En tales casos las proposiciones ***A*** y ***E*** que son las cuantificaciones universales de estas funciones proposicionales complejas son verdaderas, de modo que las proposiciones ***A*** y ***E*** no son proposiciones contrarias. Nuevamente, sea "Φx" una función proposicional sin instancia de sustitución verdadera, entonces, independientemente de lo que "Ψx" pueda significar, las funciones proposicionales "$\Phi x \cdot \Psi x$" y "$\Phi x \cdot \sim\Psi x$" tienen sólo instancias de sustitución falsas, pues sus instancias de sustitución son conjunciones cuyos primeros enunciados conyuntos son falsos. En tales casos las proposiciones ***I*** y ***O*** que son las cuantificaciones existenciales de estas funciones proposicionales complejas son falsas, de modo que ***I*** y ***O*** son proposiciones no subcontrarias. En tales casos, entonces, ya que las proposiciones ***A*** y ***E*** son verdaderas y las proposiciones ***I*** y ***O*** son falsas, la verdad de una universal *no* implica la verdad de la particular correspondiente; no hay relación de implicación entre ellas.

Si hacemos el supuesto de que hay cuando menos un individuo, entonces "$(x)[\Phi x \supset \Psi x]$" implica "$(\exists x)[\Phi x \supset \Psi x]$". Pero la última *no* es una proposición ***I***. Una proposición ***I*** de la forma "Algunos Φ son Ψ se simboliza como "$(\exists x)[\Phi x \cdot \Psi x]$" que afirma que hay cuando menos una cosa que tiene el atributo Φ y el atributo Ψ. Pero la proposición "$(\exists x)[\Phi x \supset \Psi x]$" afirma que hay cuando menos un objeto que o tiene el atributo Ψ o no tiene el atributo Φ que es una afirmación muy diferente y mucho más débil.

Las cuatro formas tradicionales sujeto-predicado ***A***, ***E***, ***I*** y ***O*** no son las únicas formas de proposiciones generales. Hay otras que involucran la cuantificación de funciones proposicionales más complicadas. Así la proposición general "Todos los miembros son padres o maestros" que no significa lo mismo que "Todos los miembros son padres o todos los miembros son maestros", se simboliza como "$(x)[Mx \supset (Px \vee Tx)]$". Y la proposición general "Algunos Senadores son o desleales o mal aconsejados", se simboliza como "$(\exists x)[Sx \cdot (Dx \vee Mx)]$". Debe observarse que una proposición tal como "Las manzanas y los plátanos son nutritivos" puede simbolizarse como la conjunción de dos proposiciones de tipo **A**, "$\{(x)[Ax \supset Nx\} \cdot \{(x)[Bx \supset Nx]\}$", o como una proposición general no compuesta "$(x)[(Ax \vee Bx) \supset Nx]$". Pero *no* debiera simbolizarse como "$(x)[(Ax \cdot Bx) \supset Nx]$", pues decir que las manzanas y los plátanos son nutritivos es decir que cualquier cosa que es *o* una manzana *o* un plátano es nutritiva y *no* es decir que cualquier cosa que es manzana *y* plátano (sin importar lo que pudiera ser esto) es nutritiva. Hay que recalcar que no hay reglas para traducir los enunciados del lenguaje ordinario inglés o español a nuestra notación lógica. En cada caso hay que *comprender el significado* de la oración en español para *reexpresarla* en términos de funciones proposicionales y cuantificadores.

EJERCICIOS

I. Traducir cada una de las siguientes oraciones a la notación lógica de las funciones proposicionales y los cuantificadores, usando en cada caso abreviaciones que se sugieren de modo que cada forma comience con un cuantificador y *no* con un símbolo de negación:

*1. Las serpientes son reptiles. (Sx: x es una serpiente. Rx: x es un reptil.)
2. Las serpientes no son todas venenosas. (Sx: x es una serpiente. Vx: x es venenosa.)
3. Los niños están presentes. (Nx: x es un niño. Px: x está presente.)
4. Los ejecutivos todos tienen secretarias. (Ex: x es un ejecutivo. Sx: x tiene una secretaria.)
*5. Sólo los ejecutivos tienen secretarias. (Ex: x es un ejecutivo. Sx: x tiene una secretaria.)
6. Sólo los propietarios pueden votar en las elecciones municipales especiales. (Px: x es un propietario. Vx: x puede votar en las elecciones municipales especiales.)
7. Los empleados sólo podrán utilizar el ascensor de servicio. (Ux: x es un ascensor que los empleados podrán utilizar. Ax: x es un ascensor de servicio.)
8. Sólo los empleados podrán utilizar el ascensor de servicio. (Ex: x es un empleado. Ux: x puede utilizar el ascensor de servicio.)
9. No todo lo que brilla es oro. (Bx: x brilla. Ox: x es oro.)
*10. Nadie sino los valientes merecen a la bella. (Bx: x es valiente. Dx: x merece a la bella.)
11. No todos los visitantes se quedaron a cenar. (Vx: x es un visitante. Qx: x se quedó a cenar.)
12. Ningún visitante se quedó a cenar. (Vx: x es un visitante. Qx: x se quedó a cenar.)
13. Nada en la casa escapó a la destrucción. (Cx: x estaba en la casa. Ex: x escapó a la destrucción.)
14. Algunos estudiantes son inteligentes y trabajadores. (Ex: x es un estudiante. Ix: x es inteligente. Tx: x es trabajador.)

*15. Ningún abrigo es impermeable a menos que haya sido especialmente tratado. (Cx: x es un abrigo. Wx: x es impermeable. Sx: x ha sido especialmente tratado.)

16. Algunos medicamentos son peligrosos sólo si se toman en cantidades excesivas. (Mx: x es un medicamento. Px: x es peligroso. Ex: x se toma en cantidades excesivas.)

17. Todas las frutas y las verduras son sanas y nutritivas. (Fx: x es una fruta. Vx: x es una verdura Sx: x es sana. Nx: x es nutritiva.

18. Cada cosa placentera es o inmoral, o ilegal, o engorda. (Px: x es placentera. Mx: x es moral. Lx: x es legal. Ex: x engorda.)

19. Un profesor es un buen conferencista si y sólo si está bien informado y es entretenido. (Px: x es un profesor. Cx: x es un buen conferencista: Bx: x está bien informado. Ex: x es entretenido.)

*20. Sólo los policías y los bomberos son independientes y mal pagados. (Px: x es un policía. Fx: x es un bombero. Ix: x es indispensable. Ux: x es mal pagado.)

21. No todo actor famoso tiene talento. (Ax: x es un actor. Fx: x es famoso. Tx: x tiene talento.)

22. Cualquier chica es atractiva si es bien arreglada y de buen gusto. Cx: x es una chica. Ax: x es atractiva. Bx: x es bien arreglada. Gx: x es de buen gusto.)

23. No es verdad que todo reloj dará la hora correcta si y sólo si se le da cuerda con regularidad y no se le maltrata. (Rx: x es un reloj. Dx: x da la hora correcta. Cx: x se le da cuerda con regularidad. Mx: x es maltratado.)

24. No toda persona que habla mucho tiene mucho que decir. (Px: x es una persona. Hx: x habla mucho. Tx: x tiene mucho que decir.)

*25. Ningún automóvil que tenga más de diez años será reparado si está seriamente dañado. (Ax: x es un automóvil. Ox: x tiene más de diez años. Rx: x será reparado. Dx: x está seriamente dañado.)

Al simbolizar las siguientes, usar las abreviaciones: Cx: x es un caballo. Dx: x es dócil. Ex: x está bien entrenado.

26. Algunos caballos son dóciles y están bien entrenados.
27. Algunos caballos son dóciles sólo si están bien entrenados.
28. Algunos caballos son dóciles si están bien entrenados.
29. Cualquier caballo que está bien entrenado es dócil.
*30. Cualquier caballo que es manso está bien entrenado.
31. Ningún caballo es manso a menos que esté bien entrenado.
32. Cualquier caballo es manso si está bien entrenado.
33. Cualquier caballo está bien entrenado si es dócil.
34. Cualquier caballo es dócil si y sólo si está bien entrenado.
35. Los caballos dóciles están bien entrenados.

II. Simbolizar las siguientes proposiciones usando funciones proposicionales y cuantificadores.

*1. Bienaventurado el que se preocupa por el necesitado. (Salmo 41:1)
2. Es parco en palabras quien tiene la Sabiduría. (Proverbios 17:27)
3. El que halla mujer encuentra la ventura. (Proverbios 18:22)
4. El que de prisa se enriquece no lo hará sin culpa. (Proverbios 28:20)
*5. Se sentará cada uno bajo su parra y bajo su higuera. (Miqueas 4:4)

6. Aquel que aumenta su saber, aumenta su dolor. (Eclesiastés 1:18)
7. Nada hay secreto que no haya de conocerse y salir a la luz. (San Lucas 8:17)
8. El señor a quien ama, le reprende. (Hebreos 12:6)
9. En el camino hay un chacal; un león en la plaza. (Proverbios 26:13)
10. El que aborrece se enmascara con los labios; pero dentro lleva la traición. (Proverbios 26:24)

4.2. Demostración de Validez: Reglas Preliminares de Cuantificación

Para construir demostraciones de validez para argumentos simbolizados por medio de cuantificadores y funciones proposicionales debemos aumentar nuestra lista de Reglas de Inferencia. Agregaremos cuatro reglas que regulan la cuantificación, dando en esta sección una versión sobresimplificada de las mismas, y una formulación más adecuada en la Sec. 4.5.

1. Instanciación Universal (Versión Preliminar). Como la cuantificación universal de una función proporcional es verdadera si y sólo si todas las instancias de sustitución de esa función proposicional son verdaderas, podemos agregar a nuestra lista de Reglas de Inferencia el principio de que toda instancia de sustitución de una función proposicional puede inferirse válidamente de su cuantificación universal. Esta regla podemos expresarla simbólicamente como

$$\frac{(x)\Phi x}{\therefore \Phi \nu} \quad \text{(donde } \nu \text{ es cualquier símbolo individual)}$$

Como esta regla permite que instancias de sustitución sean inferidas de cuantificaciones universales, nos referiremos a ella como "el principio de Instanciación Universal" y lo abreviaremos como "**UI**".[5] Agregar **UI** nos permite dar una demostración formal de validez para el argumento "Todos los humanos son mortales; Sócrates es humano; luego Sócrates es Mortal"

1. $(x)[Hx \supset Mx]$
2. Hs $\quad /\therefore Ms$
3. $Hs \supset Ms$ $\quad$ 1, UI
4. Ms $\quad$ 3, 2, M.P.

2. Generalización Universal (Versión Preliminar). Nuestra siguiente regla puede explicarse por analogía con lo que se hace en matemáticas a un nivel razonablemente estándar. Un geómetra puede

[5] Esta regla y las tres siguientes son variantes de reglas para la "deducción natural" establecidas independientemente por Gerhard Gentzen y Stanislaw Jaśkowski en 1934.

iniciar una demostración diciendo, "Sea *ABC* un triángulo arbitrariamente elegido". Después, puede proseguir demostrando que el triángulo tiene cierto atributo especificado, y concluye que *todos* los triángulos tienen ese atributo especificado. Ahora bien, ¿cómo se justifica su conclusión final? ¿Por qué de que el triángulo *ABC* tenga un atributo especificado se sigue que *todos* los triángulos lo tengan? La respuesta es que si de *ABC* no se supone otra cosa que su triangularidad, entonces la expresión "*ABC*" puede tomarse como denotando cualquier triángulo. Y si el argumento ha establecido que *cualquier* triángulo debe tener el atributo en cuestión, entonces se sigue que *todos* los triángulos lo tienen. Ahora se introduce una notación semejante a la que usa el geómetra al referirse a "un triángulo arbitrariamente elegido". La todavía no usada minúscula "y" se utilizará para denotar *cualquier individuo arbitrariamente elegido*. Convenida esta usanza, la expresión "Φy" es una instancia de sustitución de la función proposicional "Φx" y asegura que *cualquier individuo arbitrariamente elegido* tiene la propiedad Φ. Es claro que "Φy" se sigue con validez de "$(x)\Phi x$" por **UI** puesto que lo que es verdad de todos los individuos es verdad de cualquier individuo arbitrariamente elegido. La inferencia es de igual forma válida en la otra dirección pues lo que es verdad de *cualquier individuo arbitrariamente elegido* debe serlo de *todos* los individuos. Aumentamos nuestra lista de Reglas de Inferencia nuevamente agregando el principio de que la cuantificación universal de una función proposicional puede válidamente inferirse de su instancia de sustitución con respecto al símbolo "y". Como esta regla permite la inferencia de proposiciones generales que son cuantificaciones universales, nos referimos a ella como el "principio de Generalización Universal", y la abreviamos como "**UG**". Nuestra expresión simbólica para esta segunda regla de cuantificación es

$$\frac{\Phi y}{\therefore (x)\Phi x}$$ (donde "y" denota cualquier individuo arbitrariamente elegido)

Podemos usar la nueva notación y la regla adicional **UG** para construir una demostración formal de validez para el argumento: "Ningún mortal es perfecto; todos los humanos son mortales; por lo tanto, ningún humano es perfecto".

1. $(x)[Mx \supset \sim Px]$
2. $(x)[Hx \supset Mx]$ $/\therefore (x)[Hx \supset \sim Px]$
3. $Hy \supset My$ — 2, **UI**
4. $My \supset \sim Py$ — 1, **UI**
5. $Hy \supset \sim Py$ — 3, 4, H.S.
6. $(x)[Hx \supset \sim Px]$ — 5, **UG**

3. Generalización Existencial (Versión Preliminar). Como la cuantificación existencial de una función proposicional es verdadera si y sólo si esa función proposicional tiene al menos una instancia de sustitución, podemos agregar a nuestra lista de Reglas de Inferencia el principio de que la cuantificación existencial de una función proposicional pueda válidamente inferirse de cualquier instancia de sustitución de esa función proposicional. Esta regla permite la inferencia de proposiciones generales existencialmente cuantificadas, de modo que la denominamos el "principio de Generalización Existencial" y la abreviamos como "**EG**". Su formulación simbólica es

$$\frac{\Phi\nu}{\therefore (\exists x)\Phi x} \quad \text{(donde } \nu \text{ es cualquier símbolo individual)}$$

4. Instanciación Existencial (Versión Preliminar). Se requiere una regla de cuantificación más. La cuantificación existencial de una función proposicional afirma que existe al menos un individuo tal que la sustitución de su nombre por la variable "x" en esa función proposicional dará una instancia de sustitución verdadera de la misma. Desde luego, podemos no saber nada más respecto al individuo. Pero podemos tomar cualquier constante individual que no sea "y", digamos "w", que no haya aparecido anteriormente en ese contexto y usarla para denotar el individuo o uno de los individuos cuya existencia ha sido afirmada por la cuantificación existencial. Sabiendo que existe un tal individuo y habiendo convenido en denotarlo con "w", podemos inferir de la cuantificación existencial de una función proposicional, la instancia de sustitución de esa función proposicional con respecto al símbolo individual "w". Agregamos como nuestra regla de cuantificación final, el principio que, de la cuantificación existencial de una función proposicional, válidamente podemos inferir la verdad de su instancia de sustitución con respecto a una constante individual que no tenga ocurrencias previas en ese contexto. La nueva regla puede escribirse como

$$\frac{(\exists x)\Phi x}{\therefore \Phi\nu} \quad \text{(donde } \nu \text{ es una constante individual diferente de "}y\text{", que no aparece anteriormente en el contexto)}$$

A éste se refiere como el "principio de Instanciación Existencial" y se le abrevia "**EI**".

Utilizamos las dos reglas de cuantificación últimas en la construcción de una demostración formal de validez para el argumento: "Todos los perros son carnívoros; algunos animales son perros; por lo tanto, algunos animales son carnívoros".

1. $(x)[Dx \supset Cx]$
2. $(\exists x)[Ax \cdot Dx]$ $\quad /\therefore (\exists x)[Ax \cdot Cx]$

3.	$Aw \cdot Dw$	2, **EI**
4.	$Dw \supset Cw$	1, **UI**
5.	$Dw \cdot Aw$	3, Conm.
6.	Dw	5, Simp.
7.	Cw	4, 6, M.P.
8.	Aw	3, Simp.
9.	$Aw \cdot Cw$	8, 7, Conj.
10.	$(\exists x)[Ax \cdot Cx]$	9, **EG**

Podemos mostrar la necesidad de la restricción indicada en el uso de **EI** considerando el argumento obviamente inválido: "Algunos gatos son animales; algunos perros son animales; por lo tanto, algunos gatos son perros". Si ignorásemos la restricción hecha sobre **EI** de que la instancia de sustitución inferida por la misma puede contener sólo una constante individual que no había ocurrido en el contexto previamente nos podríamos ver conducidos a construir la "demostración" siguiente:

1.	$(\exists x)[Cx \cdot Ax]$	
2.	$(\exists x)[Dx \cdot Ax]$	$/ \therefore (\exists x)[Cx \cdot Dx]$
3.	$Cw \cdot Aw$	1, **EI**
4.	$Dw \cdot Aw$	2, **EI (incorrecto)**
5.	Cw	3, Simp.
6.	Dw	4, Simp.
7.	$Cw \cdot Dw$	5, 6, Conj.
8.	$(\exists x)[Cx \cdot Dx]$	7, **EG**

Aquí el error está en el renglón 4. La segunda premisa nos asegura que hay al menos una cosa que es tanto un perro como un animal. Pero no tenemos libertad de usar el símbolo "w" para denotar esa cosa, pues "w" ya se ha usado para denotar una de las cosas que la primera premisa asegura que son tanto un gato como un animal. Para evitar errores de esta clase hay que obedecer la restricción indicada en el uso de **IE**. Debiera ser claro que siempre que usemos ambos **EI** y **UI** en una demostración para instanciar con respecto a la misma constante individual debemos usar **EI** primero. (Se ha sugerido que podríamos evitar la necesidad de usar **EI** antes que **UI** cambiando la restricción sobre **EI** a la siguiente "donde ν es una constante individual, diferente de "y" que no fue introducida en el contexto por ningún uso previo de **EI**". Pero aun además de que esa formulación presenta una circularidad aparente no impediría la construcción errónea de una "demostración formal de validez" para un argumento inválido tal como "Algunos hombres son bien parecidos. Sócrates es un hombre. Por lo tanto, Sócrates es bien parecido".)

Al igual que las primeras nueve Reglas de Inferencia presentadas en la Sec. 3.1, las cuatro reglas de cuantificación **UI**, **UG**, **EG** y **EI** pueden aplicarse sólo a renglones enteros de una demostración.

Cualquier supuesto de alcance limitado puede hacerse en una Demostración Condicional de validez y en particular, tenemos libertad para hacer un supuesto de la forma "Φy". Así, el argumento "Todos los estudiantes del primer año y los del segundo año están invitados y serán bienvenidos; por lo tanto, todos los estudiantes del primer año están invitados" se demuestra que es válido con la siguiente Demostración Condicional:

1.	$(x)[(Fx \vee Sx) \supset (Ix \cdot Wx)]$	$/\therefore (x)[Fx \supset Ix]$
→2.	Fy	
3.	$(Fy \vee Sy) \supset (Iy \cdot Wy)$	1, **UI**
4.	$Fy \vee Sy$	2, **Ad.**
5.	$Iy \cdot Wy$	3, 4, M.P.
6.	Iy	5, Simp.
7.	$Fy \supset Iy$	2–6, C.P.
8.	$(x)[Fx \supset Ix]$	7, **UG**

Se puede hacer más de un supuesto de alcance limitado al demostrar la validez de argumentos que involucran cuantificadores, como en la siguiente Demostración Condicional:

1.	$(x)[(Ax \vee Bx) \supset (Cx \cdot Dx)]$	
2.	$(x)\{(Cx \vee Ex) \supset [(Fx \vee Gx) \supset Hx\}$	$/\therefore (x)[Ax \supset (Fx \supset Hx)]$
3.	$(Ay \vee By) \supset (Cy \cdot Dy)$	1, **UI**
4.	$(Cy \vee Ey) \supset [(Fy \vee Gy) \supset Hy]$	2, **UI**
→5.	Ay	
6.	$Ay \vee By$	5, Ad.
7.	$Cy \cdot Dy$	3, 6, M.P.
8.	Cy	7, Simp.
9.	$Cy \vee Ey$	8, Ad.
10.	$(Fy \vee Gy) \supset Hy$	4, 9, M.P.
→11.	Fy	
12.	$Fy \vee Gy$	11, Ad.
13.	Hy	10, 12, M.P.
14.	$Fy \supset Hy$	11–13, C.P.
15.	$Ay \supset (Fy \supset Hy)$	5–14, C.P.
16.	$(x)[Ax \supset (Fx \supset Hx)]$	15, **UG**

EJERCICIOS

I. Construir demostraciones formales de validez para los siguientes argumentos, usando la regla de Demostración Condicional en donde se desee:

*1. $(x)[Ax \supset Bx]$
$\sim Bt$
$\therefore \sim At$

2. $(x)[Cx \supset Dx]$
$(x)[Ex \supset \sim Dx]$
$\therefore (x)[Ex \supset \sim Cx]$

3. $(x)[Fx \supset \sim Gx]$
$(\exists x)[Hx \cdot Gx]$
$\therefore (\exists x)[Hx \cdot \sim Fx]$

4. $(x)[Ix \supset Jx]$
$(\exists x)[Ix \cdot \sim Jx]$
$\therefore (x)[Jx \supset Ix]$

*5. $(x)[Kx \supset Lx]$
$(x)[(Kx \cdot Lx) \supset Mx]$
$\therefore (x)[Kx \supset Mx]$

6. $(x)[Nx \supset Ox]$
$(x)[Px \supset Ox]$
$\therefore (x)[(Nx \vee Px) \supset Ox]$

7. $(x)[Qx \supset Rx]$
$(\exists x)[Qx \vee Rx]$
$\therefore (\exists x)Rx$

8. $(x)[Sx \supset (Tx \supset Ux)]$
$(x)[Ux \supset (Vx \cdot Wx)]$
$\therefore (x)[Sx \supset (Tx \supset Vx)]$

9. $(x)[(Xx \vee Yx) \supset (Zx \cdot Ax)]$
$(x)[(Zx \vee Ax) \supset (Xx \cdot Yx)]$
$\therefore (x)[Xx \equiv Zx]$

10. $(x)[(Bx \supset Cx) \cdot (Dx \supset Ex)]$
$(x)[(Cx \vee Dx) \supset \{[Fx \supset (Gx \supset Fx)] \supset (Bx \cdot Dx)\}]$
$\therefore (x)[Bx \equiv Dx]$

II. Construir demostraciones formales de validez para los siguientes argumentos, usando la regla de Demostración Condicional en donde se quiera:

*1. Todos los atletas son musculosos. Carlos no es musculoso, por lo tanto, Carlos no es un atleta. (*Ax*, *Bx*, *c*)
2. No se puede depender de los contratistas. Algunos contratistas son ingenieros. Por lo tanto, no se puede depender de algunos ingenieros. (*Cx*, *Dx*, *Ex*)
3. Todos los violinistas son alegres. Algunos cazadores no son alegres. Por lo tanto, algunos cazadores no son violinistas. (*Vx*, *Ax*, *Cx*)
4. No hay jueces idiotas. Kanter es un idiota. Por lo tanto, Kanter no es un juez. (*Jx*, *Ix*, *k*)
*5. Todos los mentirosos son embusteros. Algunos mentirosos son periodistas. Por lo tanto, algunos periodistas son embusteros. (*Lx*, *Mx*, *Nx*)
6. No hay osteópatas que sean pediatras. Algunos charlatanes son pediatras. Por lo tanto, algunos charlatanes no son osteópatas. (*Ox*, *Px*, *Cx*)
7. Sólo los vendedores son detallistas. No todos los detallistas son viajeros. Por lo tanto, algunos vendedores no son viajeros. (*Vx*, *Dx*, *Tx*)
8. No hay uniformes no lavables. No hay terciopelos lavables. Por lo tanto, no hay uniformes de terciopelo. (*Ux*, *Lx*, *Tx*)
9. Sólo los autoritarios son burócratas. Todos los autoritarios son intratables. Por lo tanto, cualquier burócrata es intratable. (*Ax*, *Bx*, *Ix*)
*10. Los dátiles son comestibles. Solamente los alimentos son comestibles. Los alimentos son buenos. Por lo tanto, todos los dátiles son buenos. (*Dx*, *Ex*, *Fx*, *Gx*)
11. Todas las bailarinas son graciosas. María es una estudiante. María es bailarina. Luego algunas estudiantes son graciosas. (*Bx*, *Gx*, *Ex*, *m*)
12. Los tigres son feroces y peligrosos. Algunos tigres son bellos. Por lo tanto, algunas cosas peligrosas son bellas. (*Tx*, *Fx*, *Px*, *Bx*)
13. Los plátanos y las uvas son frutas. Las frutas y las verduras son nutritivas. Luego los plátanos son nutritivos. (*Px*, *Ux*, *Fx*, *Vx*, *Nx*)

14. Un comunista es un tonto o un bribón. Los tontos son ingenuos. No todos los comunistas son ingenuos. Luego, algunos comunistas son bribones. (*Cx, Tx, Bx, Ix*)

*15. Todos los mayordomos y los camareros son obsequiosos y dignos. Luego todos los mayordomos son dignos. (*Bx, Vx, Ox, Dx*)

16. Todas las casas de ladrillo son calientes y acogedoras. Todas las casas de Englewood son de ladrillo. Luego todas las casas de Englewood son calientes. (*Cx, Lx, Wx, Ax, Ex*)

17. Todos los profesores son instruidos. Todos los profesores instruidos son sabios. Luego todos los profesores son sabios instruidos. (*Px, Ix, Sx*)

18. Todos los diplomáticos son estadistas. Algunos diplomáticos son elocuentes. Todos los estadistas elocuentes son oradores. Luego algunos diplomáticos son oradores. (*Dx, Sx, Ex, Ox*)

19. Los doctores y los abogados son egresados de la Universidad. Todo altruista es un idealista. Algunos abogados no son idealistas. Algunos doctores son altruistas. Luego algunos egresados de la Universidad son idealistas. (*Dx, Ax, Ux, Ix, Ax*)

*20. Las abejas y las avispas pican si están o enojadas o asustadas. Luego, cualquier abeja pica si está enojada. (*Bx, Wx, Sx, Ax, Fx*)

21. Cualquier autor tiene éxito si y sólo si es muy leído. Todos los autores son intelectuales. Algunos autores tienen éxito, pero no son muy leídos. Luego todos los intelectuales son autores. (*Ax, Ex, Lx, Ix*)

22. Todo pasajero viaja en primera o en clase turista. Cada pasajero está en clase turista si y sólo si no es rico. Algunos pasajeros son ricos. No todos los pasajeros son ricos. Luego algunos pasajeros viajan en clase turista. (*Px, Prx, Tx, Rx*)

23. Todos los miembros son oficiales y caballerosos. Todos los oficiales son combatientes. Sólo un pacifista es un caballero o no es combatiente. Ningún pacifista es caballero si es combatiente. Algunos miembros son combatientes si y sólo si son oficiales. Luego no todos los miembros son combatientes. (*Mx, Ox, Cx, Cox, Px*)

24. Los perros lobos y los terrier son perros cazadores. Los perros cazadores y los perros falderos son animales domesticados. Los animales domesticados son mansos y útiles. Algunos perros lobos no son ni mansos ni pequeños. Por lo tanto, algunos terrier son pequeños, pero no son mansos. (*Lx, Tx, Cx, Fx, Dx, Mx, Ux, Px*)

25. Ningún individuo que sea candidato será derrotado si hace una buena campaña. Todo individuo que se postula es un candidato. Cualquier candidato que no sea derrotado será elegido. Todo individuo que sea elegido hace una buena campaña. Por lo tanto, todo individuo que se postula será elegido si y sólo si hace buena campaña. (*Ix, Cx, Dx, Bx, Px, Ex*)

4.3. Demostración de Invalidez

En el capítulo precedente demostramos la invalidez de argumentos inválidos que contenían argumentos compuestos función de verdad, asignando valores de verdad a sus enunciados componentes simples, de modo que las premisas se hicieran verdaderas y la conclusión, falsa. Usamos un método muy relacionado para demostrar la invalidez de argumentos inválidos que contienen cuantificadores. El método de demostración de invalidez que a continuación describimos está ligado a nuestro supuesto básico de que existe al menos un individuo.

El supuesto de que existe al menos, un individuo, podría satisfacerse de una infinidad de maneras diferentes: si existe exactamente un individuo, si existen exactamente dos individuos, si existen exactamente tres individuos, etc.... Para cada uno de esos casos hay una equivalencia lógica estricta entre proposiciones generales no compuestas y composiciones, de función de verdad, de proposiciones singulares. Si hay exactamente un individuo, digamos a, entonces

$$[(x)\Phi x] \equiv \Phi a \quad \text{y} \quad [(\exists x)\Phi x] \equiv \Phi a$$

Si hay exactamente dos individuos, digamos a y b, entonces

$$[(x)\Phi x] \equiv [\Phi a \cdot \Phi b] \quad \text{y} \quad [(\exists x)\Phi x] \equiv [\Phi a \vee \Phi b]$$

Y para cualquier número k, si hay exactamente k individuos, digamos $a, b, c, \ldots, k$, entonces

$$[(x)\Phi x] \equiv [\Phi a \cdot \Phi b \cdot \Phi c \cdot \ldots \cdot \Phi k]$$

y

$$[(\exists x)\Phi x] \equiv [\Phi a \vee \Phi b \vee \Phi c \vee \ldots \vee \Phi k]$$

La verdad de estos bicondicionales es una consecuencia inmediata de nuestra definición de los cuantificadores universal y existencial. Ningún uso se hace aquí de las cuatro reglas de cuantificación presentadas en la sección precedente. Así, para cualquier posible universo no vacío o modelo que contenga un número finito cualquiera de individuos, cada proposición general es lógicamente equivalente a algún compuesto función de verdad de proposiciones singulares. Así, para cualquier modelo tal cada argumento que involucra cuantificadores es lógicamente equivalente a algún argumento que sólo contiene proposiciones singulares compuestas función de verdad de las mismas.

Un argumento que involucra cuantificadores es válido si y sólo si es válido no importando cuántos individuos hay, siempre que haya cuando menos uno. Así, un argumento que involucra cuantificadores es válido si y sólo si para todo posible universo o modelo no vacío es lógicamente equivalente a un argumento de función de verdad que es válido. Así, podemos demostrar la invalidez de un argumento dado, exhibiendo o describiendo un modelo para el cual el argumento dado es lógicamente equivalente a un argumento *inválido* de función de verdad. Esto podemos lograrlo traduciendo el argumento dado que involucra cuantificadores en un argumento lógicamente equivalente que sólo involucra proposiciones singulares y composiciones función de verdad de las mismas, y usando entonces el método de asignar valores de verdad para demostrar la invalidez del último. Por ejemplo, dado el argumento

Todas las ballenas son pesadas.
Todos los elefantes son pesados.
Luego, todas las ballenas son elefantes.

primeramente lo simbolizamos como

$$(x)[Wx \supset Hx]$$
$$(x)[Ex \supset Hx]$$
$$\therefore (x)[Wx \supset Ex]$$

En el caso de un modelo que contiene exactamente un individuo, digamos a, el argumento dado es lógicamente equivalente a

$$Wa \supset Ha$$
$$Ea \supset Ha$$
$$\therefore Wa \supset Ea$$

que se demuestra inválido asignando el valor de verdad **T** a "Wa" y "Ha" y **F** a "Ea". (Esta asignación de valores de verdad es un método abreviado de describir el modelo en cuestión como uno que contiene solamente el único individuo a que es un W (una ballena) y H (pesado), pero no E (un elefante).)[6] Luego, el argumento original no es válido para un modelo que contenga exactamente un individuo, y es, por lo tanto, *inválido*.

Hay que enfatizar que al demostrar la invalidez de argumentos que involucran cuantificadores *no se hace uso de nuestras reglas de cuantificación*. Para un modelo que sólo contenga el individuo a no *inferimos* el enunciado "$Wa \supset Ha$" del enunciado "$(x)[Wx \supset Hx]$" por **UI**; esos dos enunciados son lógicamente equivalentes para ese modelo porque en el mismo "$Wa \supset Ha$" es la *única* instancia de sustitución de la función proposicional "$Wx \supset Hx$".

[6] Aquí suponemos que las funciones proposicionales simples "Ax", "Bx", "Cx" ... no son ni necesarias, esto es, lógicamente verdaderas, para todos los individuos (por ejemplo, x es idéntico a sí mismo), ni imposibles, esto es, lógicamente falsas para todos los individuos (por ejemplo, X es diferente de sí mismo). También suponemos que las únicas relaciones lógicas entre las funciones proposicionales simples son las afirmadas o lógicamente implicadas por las premisas del argumento que se demuestra inválido. El propósito de estas restricciones es permitir la asignación arbitraria de valores de verdad a las instancias de sustitución de estas funciones proposicionales simples sin inconsistencia, pues nuestras descripciones por modelos deben, desde luego, ser consistentes.

Puede ocurrir que un argumento inválido que involucra cuantificadores sea lógicamente equivalente, para cualquier modelo que exactamente contenga un individuo, a un argumento válido función de verdad, aunque será equivalente, para todo modelo que contenga más de un individuo, a un argumento inválido función de verdad. Por ejemplo, consideramos el argumento.

Todas las ballenas son pesadas.
Algunos elefantes son pesados.
Por lo tanto, todas las ballenas son elefantes.

que se simboliza como

$$\begin{array}{l} (x)[Wx \supset Hx] \\ (\exists x)[Ex \cdot Hx] \\ \therefore (x)[Wx \supset Ex] \end{array}$$

Para un modelo que sólo contiene un individuo a este argumento es lógicamente equivalente a

$$\begin{array}{l} Wa \supset Ha \\ Ea \cdot Ha \\ \therefore Wa \supset Ea \end{array}$$

que es un argumento válido. Pero para un modelo que consiste en los dos individuos a y b, el argumento dado es lógicamente equivalente a

$$\begin{array}{l} (Wa \supset Ha) \cdot (Wb \supset Hb) \\ (Ea \cdot Ha) \vee (Eb \cdot Hb) \\ \therefore (Wa \supset Ea) \cdot (Wb \supset Eb) \end{array}$$

que se demuestra inválido asignando el valor de verdad **T** a "*Wa*", "*Wb*", "*Ha*", *Hb*", "*Eb*", y el valor de verdad **F** a "*Ea*". Luego, el argumento original es inválido, porque hay un modelo en el que es lógicamente equivalente a un argumento función de verdad inválido. Otra ilustración es

Algunos perros son perros de aguas.
Algunos perros son perros de punta y vuelta.
Luego, algunos perros de aguas son de punta y vuelta.

que simbolizamos como

$$\begin{array}{l} (\exists x)[Dx \cdot Px] \\ (\exists x)[Dx \cdot Sx] \\ \therefore (\exists x)[Px \cdot Sx] \end{array}$$

Para un modelo que contenga el individuo a es lógicamente equivalente a

$$\begin{array}{l} Da \cdot Pa \\ Da \cdot Sa \\ \therefore Pa \cdot Sa \end{array}$$

que es válido. Pero para un modelo que consiste en los dos individuos a y b es equivalente a

$$\begin{array}{l} (Da \cdot Pa) \vee (Db \cdot Pb) \\ (Da \cdot Sa) \vee (Db \cdot Sb) \\ \therefore (Pa \cdot Sa) \vee (Pb \cdot Sb) \end{array}$$

que se demuestra inválido asignando el valor de verdad **T** a "*Da*", "*Db*", "*Pa*", "*Sb*" y el valor de verdad **F** a "*Pb*" y "*Sa*". Aquí también el argumento original es inválido pero hay un modelo para el cual es lógicamente equivalente a un argumento función de verdad inválido.

Un argumento inválido que involucra cuantificadores puede ser válido para cualquier modelo que contenga menos de k individuos, aunque sea inválido para todo modelo que contenga k o más individuos. Así, al usar este método para demostrar la invalidez de un argumento que involucra cuantificadores podría ser necesario considerar modelos más y más grandes, Se plantea naturalmente la pregunta: ¿qué tan grande debe ser el modelo considerado al tratar de demostrar la invalidez de un argumento de este tipo? Se ha encontrado una respuesta teóricamente satisfactoria a esta pregunta. Si un argumento contiene n símbolos de predicados diferentes, entonces, si es válido para un modelo que contenga 2^n individuos, entonces es válido en cualquier modelo, o universalmente válido.[7] Este resultado sólo vale para las funciones proposicionales de una variable, y no es verdadero para los predicados relacionales discutidos en el Cap. 5. Aunque teóricamente satisfactoria, esta solución no es de mucha ayuda en la práctica. Yendo directamente al caso técnicamente crucial para decidir la validez o invalidez de cualquiera de los argumentos ya considerados en esta sección deberíamos considerar modelos conteniendo ocho individuos. Y para algunos de los ejercicios siguientes el caso teóricamente crucial será un modelo con $2^8 = 256$ individuos. Sin embargo, ninguno de los siguientes ejercicios requiere la consideración de modelos que contengan más de tres individuos para demostrar su invalidez.

---

[7] Ver Paul Bernays y Moses Schönfinkel, "Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik", *Mathematische Annalen*, Vol. 99 (1928), y Wilhelm Ackermann, *Solvable Cases of the Decision Problem*, Amsterdam, 1954, Cap. IV.

EJERCICIOS

I. Demuestre que cada uno de los siguientes argumentos es inválido:

*1. $(\exists x)[Ax \cdot Bx]$
Ac
$\therefore Bc$

2. $(x)[Cx \supset \sim Dx]$
$\sim Cj$
$\therefore Dj$

3. $(x)[Ex \supset Fx]$
$(x)[Gx \supset Fx]$
$\therefore (x)[Ex \supset Gx]$

4. $(x)[Hx \supset \sim Ix]$
$(\exists x)[Jx \cdot \sim Ix]$
$\therefore (x)[Hx \supset Jx]$

*5. $(\exists x)[Kx \cdot Lx]$
$(\exists x)[\sim Kx \cdot \sim Lx]$
$\therefore (\exists x)[Lx \cdot \sim Kx]$

6. $(x)[Mx \supset (Nx \cdot Ox)]$
$(\exists x)[Px \cdot Nx]$
$(\exists x)[Px \cdot \sim Ox]$
$\therefore (x)[Mx \supset \sim Px]$

7. $(x)[Qx \supset (Rx \cdot Sx)]$
$(\exists x)[Tx \cdot Rx]$
$(\exists x)[Tx \cdot \sim Sx]$
$\therefore (x)[Qx \supset Tx]$

8. $(x)[Ux \supset (Vx \supset Wx)]$
$(x)[Vx \supset (Ux \supset \sim Wx)]$
$(\exists x)[Ux \cdot Wx]$
$\therefore (\exists x)[Ux \cdot Vx]$

9. $(\exists x)[Xx \cdot Yx]$
$(x)[Xx \supset Zx]$
$(\exists x)[Zx \cdot \sim Xx]$
$\therefore (\exists x)[Zx \cdot \sim Yx]$

10. $(x)[Ax \supset Bx]$
$(\exists x)[Cx \cdot Bx]$
$(\exists x)[Cx \cdot \sim Bx]$
$\therefore (x)[Ax \supset Cx]$

II. Demostrar que cada uno de los argumentos siguientes es inválido:

*1. Todos los astronautas son valientes. Jaime es valiente. Luego Jaime es un astronauta.
2. Ningún vaquero es un novato. Bill no es un novato. Luego, Bill es un vaquero.
3. Todas las siemprevivas son fragantes. Algunos árboles de chicle no son fragantes. Luego, algunas siemprevivas no son árboles de chicle.
4. Todos los paganos son idólatras. Ningún pagano es alegre. Luego ningún idólatra es alegre.
*5. No hay gatitos grandes. Algunos mamíferos son grandes. Luego los gatitos no son mamíferos.
6. Todos los novelistas son observadores. Algunos poetas no son observadores. Por lo tanto, ningún novelista es poeta.
7. Todos los hombres de estado son inteligentes. Algunos políticos son inteligentes. No todos los políticos son inteligentes. Luego ningún estadista es político.
8. Todos los estadistas son inteligentes. Algunos políticos son inteligentes. No todos los políticos son inteligentes. Luego, todos los estadistas son políticos.
9. Todos los hombres de estado son políticos. Algunos hombres de estado son inteligentes. Algunos políticos no son hombres de estado. Luego, algunos políticos no son inteligentes.
10. Los caballos y las vacas son mamíferos. Algunos animales son mamíferos. Algunos animales no son mamíferos. Luego todos los caballos son animales.

III. Demostrar la validez o invalidez de cada uno de los argumentos:

*1. Todos los aviadores son valientes. James es valiente. Luego James es un aviador.

2. Todos los investigadores son joviales. Smith es investigador. Luego Smith es jovial.

3. Ningún educador es tonto. Todos los apostadores son tontos. Luego ningún educador es apostador.

4. Ningún historiador es analfabeto. Todos los analfabetos son marginados. Luego ningún historiador es marginado.

*5. Sólo los ciudadanos votan. No todos los residentes son ciudadanos. Luego algunos residentes no votan.

6. Sólo los ciudadanos votan. No todos los ciudadanos son residentes. Luego algunos que votan no son residentes.

7. Los automóviles y los furgones son vehículos. Algunos autos son Ford. Algunos automóviles son camiones. Todos los camiones son vehículos. Luego algunos Ford son camiones.

8. Los automóviles y los furgones son vehículos. Algunos automóviles son Ford. Algunos automóviles son camiones. Todos los vehículos son camiones. Luego algunos Ford son camiones.

9. Los automóviles y los furgones son vehículos. Algunos automóviles son Ford. Algunos automóviles son camiones. Algunos furgones no son vehículos. Luego algunos Ford son camiones.

*10. Todos los tenores son u obesos o afeminados. Ningún tenor obeso es afeminado. Algunos tenores son afeminados. Luego algunos tenores son obesos.

11. Todos los tenores o son obesos o son afeminados. Ningún tenor obeso es afeminado. Algunos tenores son afeminados. Luego algunos tenores no son obesos.

12. Ningún solicitante será contratado o considerado si es o inexperimentado o sin entrenamiento. Algunos solicitantes son novatos inexperimentados. Todos los solicitantes que son mujeres se sentirán decepcionados si no son contratados. Todo solicitante es una mujer. Algunas mujeres serán contratadas. Luego algunos solicitantes se sentirán decepcionados.

13. Ningún candidato será elegido o llamado si es o liberal o radical. Algunos candidatos son liberales ricos. Todos los candidatos que son políticos se sentirán decepcionados si no son elegidos. Todo candidato es un político. Algunos políticos son elegidos. Luego algunos candidatos no se sentirán decepcionados.

14. Los abates y los obispos son clérigos. Ningún miembro del clero es desaliñado o y elegante. Algunos obispos son elegantes y fastidiosos. Algunos abates no son fastidiosos. Luego, algunos abates son desaliñados.

15. Los abates y los obispos son clérigos. Ningún clérigo es desaliñado y elegante. Algunos obispos son elegantes y fastidiosos. Algunos abates no son fastidiosos. Luego algunos abates no son desaliñados.

4.4. Proposiciones Múltiplemente Generales

Hasta este punto hemos limitado nuestra atención a las proposiciones generales que contienen un solo cuantificador. Una proposición general que exactamente contenga un cuantificador se dice que es *singularmente* general. Ahora estudiaremos las proposiciones *múltiplemente* generales, que contienen dos o más cuantificadores. En nuestro uso del término, todo enunciado compuesto cuyos componentes sean proposiciones generales deberá considerarse como una proposición múltiplemente general. Por ejemplo, el condicional "Si todos los perros son carnívoros, entonces algunos animales son canívoros" que simbolizamos como "$(x)[Dx \supset Cx] \supset (\exists\ x)[Ax \cdot Cx]$", es una proposición múltiplemente general. Otras proposiciones múltiplemente generales son más complejas y requieren de una notación más complicada. Para desarrollar la nueva notación debemos volver a la noción de una función proposicional.

Todas las funciones proposicionales consideradas hasta este punto, tenían como instancias de sustitución, o proposiciones singulares o composiciones función de verdad de proposiciones singulares con los mismos términos sujetos. Si consideramos un enunciado compuesto cuyos componentes son proposiciones singulares con *diferentes* términos sujetos, tal como "$Fa \cdot Gb$" podemos considerarla como una instancia de sustitución de la función proposicional "$Fx \cdot Gb$" o de la función proposicional "$Fa \cdot Gx$". Vemos que algunas funciones proposicionales pueden contener proposiciones singulares como partes. Si consideramos un enunciado compuesto del cual un componente es una proposición general y el otro una proposición singular, tal como "Si todos los perros son carnívoros, entonces Rover es carnívoro" que se simboliza "$(x)[Dx \supset Cx] \supset Cr$" podemos considerarla como instancia de sustitución de la función proposicional "$(x)[Dx \supset Cx] \supset Cx$". Vemos pues que algunas funciones proposicionales pueden contener proposiciones generales como partes.

En este punto se pueden propiamente introducir dos nuevos términos técnicos. Una ocurrencia de la variable x que no ocurre dentro, o que no se encuentra dentro del alcance de un cuantificador universal o existencial[8] "(x)" o "$(\exists x)$" se llamará una *ocurrencia libre* de esa variable. Por otro lado, una ocurrencia de la variable x que es o parte de un cuantificador o se haya dentro del alcance de un cuantificador "(x)" o "$(\exists x)$" se llamará una *ocurrencia ligada* de esa variable.[9] Así, en la expresión "$(x)[Dx \supset Cx] \supset Cx$" la pri-

[8] Como se explicó en la Pág. 91 en este mismo capítulo.

[9] Otra nomenclatura no tan común se refiere a las variables libres como variables "reales", y a las variables ligadas como variables "aparentes".

mera ocurrencia de la variable "x" es *parte de un cuantificador* y, por lo tanto, se considera *ligada*. También la segunda y tercera ocurrencias son ligadas. Pero la cuarta ocurrencia es una ocurrencia libre. Vemos que las funciones proposicionales pueden tener tanto ocurrencias libres como ocurrencias ligadas de las variables; por otro lado, toda ocurrencia de una variable, en una proposición, debe ser ligada, pues toda proposición o es verdadera o es falsa. Una función proposicional debe al menos contener una ocurrencia libre de una variable, pero ninguna proposición puede contener ocurrencias libres de ninguna variable.

La proposición "$Fa \cdot Gb$" puede también ser considerada como instancia de sustitución de "$Fx \cdot Gy$" donde la última es una funcional proposicional que contiene *dos variables diferentes*. Hasta el momento, hemos admitido explícitamente sólo una variable individual, la letra "x". Sin embargo, con nuestro *uso* previo de la letra "y" para denotar *cualquier* individuo *arbitrariamente elegido*, estábamos de hecho usándola como variable sin admitir ese hecho. Y al introducir una letra por **EI** para denotor *algún* individuo *particular* que tuviese un atributo especificado sin realmente saber *cuál* individuo era el denotado, estábamos de hecho usando también esa letra como variable. Ahora procedemos a reconocer explícitamente lo que había implícito en nuestro uso anterior. Algunas funciones proposicionales pueden contener dos o más variables individuales diferentes. Será conveniente disponer de una mayor provisión de variables, de modo que se reajusta nuestra notación convenida para incluir las letras "u", "v", "w", "x", "y" y "z" como variables individuales. Ahora las funciones proposicionales incluyen expresiones como "Fu", "$Fu \vee Gw$", "$(Fx \cdot Gy) \supset Hz$", "$Fx \vee (Gy \cdot Hx)$" y similares.

Al reemplazar variables por constantes para obtener una proposición a partir de una función proposicional la misma constante debe reemplazar cada ocurrencia libre de la misma variable. Así, entre las instancias de sustitución de la función proposicional "$Fx \vee (Gy \cdot Hx)$" están

$$Fa \vee (Gb \cdot Ha),\ Fa \vee (Gc \cdot Ha),\ Fa \vee (Gd \cdot Ha), \ldots$$
$$Fb \vee (Ga \cdot Hb),\ Fb \vee (Gc \cdot Hb),\ Fb \vee (Gd \cdot Hb), \ldots$$
$$Fc \vee (Ga \cdot Hc),\ Fc \vee (Gb \cdot Hc),\ Fc \vee (Gd \cdot Hc), \ldots.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

pero *no* proposiciones tales como "$Fa \vee (Gb \cdot Hc)$". Por otro lado, la *misma* constante puede reemplazar ocurrencias libres de *diferentes* variables a condición de que si reemplaza cualquier ocurrencia libre de una variable debe reemplazar todas las ocurrencias libres de esa variable. De modo que otras instancias de sustitución de la función proposicional. "$Fx \vee (Gy \cdot Hx)$" son "$Fa \vee (Ga \cdot Ha)$", "$Fb \vee (Gb \cdot Hb)$", "$Fc \vee (Gc \cdot Hc)$", . . .

Habiendo admitido las letras "u", "v", "w", "y" y "z" como variables individuales, además de "x", ajustamos ahora nuestra notación para que la cuantificación existencial y universal se conforme a nuestra provisión aumentada de variables. La proposición "Todos los F son G" puede simbolizarse alternativamente como "$(u)[Fu \supset Gu]$", "$(v)[Fv \supset Gv]$", "$(w)[Fw \supset Gw]$", "$(x)[Fx \supset Gx]$", "$(y)[Fy \supset Gy]$", o "$(z)[Fz \supset Gz]$". De manera similar, la proposición "Hay algunos H" puede simbolizarse alternativamente como "$(\exists u)Hu$", "$(\exists v)Hv$", "$(\exists w)Hw$", "$(\exists x)Hx$", "$(\exists y)Hy$", o "$(\exists z)Hz$". La diferencia entre "$(x)Fx$" y "$(y)Fy$" (así como entre "$(\exists x)Gx$" y "$(\exists y)Gy$") es puramente de notación y cualquiera podría escribirse en lugar de la otra dondequiera que se presente. Desde luego que si una función proposicional contiene ocurrencias libres de dos o más variables diferentes, tal como "$Fx \cdot Gy$", las dos funciones proposicionales que resultan al cuantificarla como

$$(x)[Fx \cdot Gy] \quad \text{y} \quad (y)[Fx \cdot Gy]$$

son realmente muy diferentes y su diferencia es más que de notación. Las instancias de sustitución de la primera son

$$(x)[Fx \cdot Ga],\ (x)[Fx \cdot Gb],\ (x)[Fx \cdot Gc], \ldots$$

mientras que las instancias de sustitución de la segunda son

$$(y)[Fa \cdot Gy],\ (y)[Fb \cdot Gy],\ (y)[Fc \cdot Gy], \ldots$$

Si cada individuo tiene el atributo F, y algunos pero no todos los individuos tienen el atributo G, entonces algunas instancias de sustitución de la primera serán proposiciones verdaderas, mientras que todas las instancias de sustitución de la segunda serán falsas, una diferencia considerable. Este ejemplo debiera servir para indicar la necesidad de hablar no de "*la* cuantificación universal (o existencial) de una función proposicional" sino de "la cuantificación universal (o existencial) de una función proposicional *con respecto a la variable* "x" ", o "la cuantificación universal (o existencial) de una función proposicional *con respecto a la variable* "y" ", y así sucesivamente.

Debiera ser claro que por ser "$(x)[Fx \supset Gx]$" y "$(y)[Fy \supset Gy]$" traducciones alternativas de la proposición "Todo lo que sea un F es también un G", la cuantificación universal de "$Fx \supset Gx$" con respecto a "x" tiene el mismo significado que, y es lógicamente equivalente a, la cuantificación universal con respecto a "y" de la función proposicional que resulta al reemplazar todas las ocurrencias libres de "x" en la "$Fx \supset Gx$" por "y" —pues lo que resulta de hacer este reemplazo es "$Fy \supset Gy$"—. En las primeras etapas de nuestro trabajo será deseable tener a lo más una cuantificación con respecto a una variable dada en una proposición sencilla. Esto no es estrictamente *necesario* pero es útil para evitar confusiones. Así, la primera proposición múltiplemente general que se consideró "Si todos los perros son carnívoros, entonces algunos animales son carnívoros" se simboliza mejor como "$(x)[Dx \supset Cx] \supset (\exists y)[Ay \cdot Cy]$" que como "$(x)[Dx \supset Cx] \supset (\exists x)[Ax \cdot Cx]$" aunque ninguna de las dos es *incorrecta.*

Se ha observado que ninguna proposición puede contener ninguna ocurrencia libre de variable alguna. Así, al simbolizar cualquier proposición se tendrá cuidado de que toda ocurrencia de toda variable usada esté dentro del alcance de un cuantificador respecto a esa variable. Algunos ejemplos aclararán el asunto. La proposición

Si algo anda mal en la casa entonces todos los de la casa se quejan.

se simboliza propiamente como un condicional cuyo antecedente y consecuente contienen cuantificadores diferentes:

$(\exists x)[x$ anda mal en la casa$] \supset (y)$ $[(y$ es una persona de la casa$) \supset (y$ se queja$)]$

Aquí el cuantificador inicial no se extiende más allá del signo principal de implicación. Pero si ahora leemos otra proposición que tiene un parecido superficial con la primera:

Si algo anda mal entonces debiera rectificarse.

sería *incorrecto* simbolizarla como

$(\exists x)[x$ anda mal$] \supset (x$ debiera rectificarse$)$

Puesto que al terminar el alcance del cuantificador inicial en el signo de implicación, la ocurrencia de "x" en el *consecuente* no puede referirse hacia atrás al cuantificador inicial, pues no está ya dentro de su alcance. Tenemos aquí la ocurrencia libre de una variable, lo que significa que la simbolización propuesta no es una proposición y, por lo tanto, no es una traducción adecuada del enunciado dado. El error no se corregirá *simplemente* por extensión del alcance del cuantificador inicial, por reinstalación de los corchetes, pues la expresión simbólica

$(\exists x)[(x$ anda mal$) \supset (x$ debiera rectificarse$)]$.

aunque es una proposición, no tiene el mismo significado que la proposición original en español. En lugar de ese significado, solamente dice que existe al menos una cosa que debiera rectificarse si anda mal, pero el sentido de la oración en español claramente es que *cualquier* cosa que ande mal debiera rectificarse. Luego, una simbolización correcta no es ninguna de las anteriores sino

$(x)[(x \text{ anda mal}) \supset (x \text{ debiera rectificarse})]$.

La situación es más complicada, pero no es diferente, en principio, cuando un cuantificador ocurre *dentro del alcance de otro cuantificador*. Aquí hay que dar el mismo aviso contra las variables "en el aire"* o no cuantificadas. La proposición

Si algo falta entonces si nadie llama a la policía, habrá un descontento

propiamente se simboliza como

$$(\exists x)[x \text{ falta}] \supset \{(y)[(y \text{ es una persona}) \supset \sim (y \text{ llama la policía})] \supset (\exists z)[(z \text{ es una persona}) \cdot (z \text{ quedará descontento})]\}.$$

Pero la siguiente proposición, que superficialmente es análoga a la precedente:

Si algo falta entonces si nadie llama a la policía, no será recuperado.

no se debe simbolizar como

$$(\exists x)[x \text{ falta}] \supset \{(y)[(y \text{ es una persona}) \supset \sim(y \text{ llama a la policía})] \supset \sim(x \text{ será recuperado})\}$$

pues la última ocurrencia de la variable "x" está fuera del alcance del cuantificador inicial, quedándose "en el aire". No se le puede corregir por simple reescritura de los corchetes como

$$(\exists x)\{(x \text{ falta}) \supset \{(y)[(y \text{ es una persona}) \supset \sim(y \text{ llama a la policía})] \supset \sim(x \text{ será recuperado})\}\}$$

pues esta expresión tampoco preserva el sentido de la oración dada, como en el ejemplo anterior. Ese sentido queda expresado por la forma

$$(x)\{(x \text{ falta}) \supset \{(y)[(y \text{ es una persona}) \supset \sim(y \text{ llama a la policía})] \supset \sim(x \text{ será recuperado})\}\}$$

que es, por lo tanto, una simbolización correcta de la proposición dada.

EJERCICIOS

Simbolizar cada una de las proposiciones siguientes usando en cada caso la notación sugerida, de modo que la fórmula simbólica sea lo más próxima posible a la expresión en español:

*1. Si algo se descompone alguien será culpado. (Dx: x se descompone. Px: x es una persona. Bx: x será culpado.)

* Variables "colgando" o "bailando". (N. del T.)

2. Si algo se daña el inquilino tendrá que pagarlo. (Dx: x se daña. Cx: x se cobrará al inquilino.)
3. Si nada se descompone nadie será culpado. (Dx: x se descompone. Px: x es una persona. Cx: x será culpado.)
4. Si algo se daña, pero no se culpa a nadie, el inquilino no tendrá que pagar. (Dx: x se daña. Px: x es una persona. Cx: x es culpado.)
*5. Si cualesquier plátanos están amarillos, entonces están maduros. (Bx: x es un plátano. Yx: x es amarillo. Rx: x está maduro.)
6. Si hay plátanos amarillos, entonces algunos plátanos están maduros. (Px: x es un plátano. Ax: x está amarillo. Mx: x está maduro.)
7. Si hay plátanos amarillos, entonces si todos los plátanos amarillos están maduros, están maduros. (Px: x es un plátano. Ax: x está amarillo. Mx: x está maduro.)
8. Si todos los plátanos maduros son amarillos, entonces algunas cosas amarillas están maduras. (Mx: x está maduro. Px: x es un plátano. Ax: x es amarillo.)
9. Si todos los oficiales presentes son o capitanes o mayores, entonces o están presentes algunos capitanes o están presentes algunos mayores. (Ox: x es un oficial. Px: x está presente. Cx: x es un capitán. Mx: x es un mayor.)
*10. Si hay algún oficial presente, entonces, o no hay mayores o él es un mayor. (Ox: x es un oficial. Px: x está presente. Mx: x es un mayor.)
11. Si algunos oficiales están presente y si todos los oficiales presentes son capitanes, entonces algunos capitanes están presentes. (Ox: x es un oficial. Px: x está presente. Cx: x es un capitán.)
12. Si algunos oficiales están presentes, entonces si todos los oficiales presentes son capitanes, entonces son capitanes. (Ox: x es un oficial. Px: x está presente. Cx: x es un capitán.)
13. Si todos los sobrevivientes son afortunados y si sólo las mujeres sobrevivieron, entonces si hay sobrevivientes, entonces algunas mujeres son afortunadas. (Sx: x es un sobreviviente. Ax: x es afortunado. Mx: x es mujer.)
14. Si cualesquier sobrevivientes son mujeres, entonces si todas las mujeres son afortunadas, son afortunadas. (Sx: x es un sobeviviente. Mx: x es una mujer. Ax: x es afortunado.)
*15. Si hay sobrevivientes y sólo las mujeres fueron sobrevivientes, entonces son mujeres. (Sx: x es un sobreviviente. Wx: x es mujer.)
16. Si toda posición tiene un futuro y no hay empleados flojos, entonces algunos empleados tendrán éxito. (Px: x es una posición. Fx: x tiene un futuro. Ex: x es un empleado.) Lx: x es flojo. Tx: x tendrá éxito.)
17. Si algunos empleados son flojos entonces si algunas posiciones no tienen futuro entonces no tendrán éxito (Ex: x es un empleado Fx: x es flojo. Px: x es una posición. Tx: x tiene futuro. Sx: x tendrá éxito.)
18. Si cualesquier empleados son flojos y algunas posiciones no tienen futuro entonces algunos empleados no tendrán éxito. (Ex: x es un empleado Fx: x es flojo. Px: x es una posición. Lx: x tienen futuro. Sx: x tendrá éxito.)
19. Si cualquier marido fracasa, entonces, si todas las esposas son ambiciosas entonces algunas esposas estarán decepcionadas. (Mx: x es un marido. Ex: x tiene éxito. Ax: x es ambiciosa. Dx: x será decepcionada.)

20. Si algún marido fracasa, entonces, si algunas esposas son ambiciosas, él se sentirá infeliz. (Mx: x es un marido, Fx: x no fracasa. Ex: x es una esposa. Ax: x es ambiciosa. Ix: x se sentirá infeliz.)

4.5. Reglas de Cuantificación

1. Inferencias que Involucran Funciones Proposicionales. Al construir una demostración formal de validez para un argumento dado, las premisas con que empezamos y la conclusión con que terminamos son proposiciones. Pero donde se utilicen reglas de la Instanciación Existencial o de la Generalización Universal algunos de los renglones intermedios deberán contener variables libres, y serán funciones proposicionales y no proposiciones. Cada renglón de una demostración formal de validez debe, o ser una premisa o un supuesto de alcance limitado, o seguirse válidamente de los renglones precedentes por medio de una forma de argumento válido elemental aceptada como Regla de Inferencia o seguirse por una secuencia de pasos como los anteriores como por el principio de Demostración Condicional. Surgen naturalmente tres preguntas en este momento: ¿En qué sentido puede decirse que una función proposicional *válidamente* se sigue de otras funciones proposicionales? ¿En qué sentido puede decirse que una función proposicional *válidamente* se sigue de ciertas proposiciones?; ¿y en qué sentido puede decirse que una proposición *válidamente* se sigue de funciones proposicionales?

Para contestar estas preguntas es útil introducir un sentido más general y revisado de la palabra "válido". Las funciones proposicionales contienen variables libres y, por lo tanto, no son ni verdaderas ni falsas. Pero una función proposicional se convierte en una proposición reemplazando todas sus variables libres por constantes y la instancia de sustitución que así resulta o es verdadera o es falsa. Una función proposicional puede decirse que se sigue *válidamente* como conclusión de una o más funciones proposicionales tomadas como premisas cuando cualquier reemplazo de las ocurrencias libres de las variables por constantes (siendo las mismas constantes las que reemplazan a las mismas variables en premisas y conclusión, desde luego) da lugar a un argumento válido. Así, por ejemplo, la función proposicional "Gx" se sigue válidamente de las funciones proposicionales "$Fx \supset Gx$" y "Fx", porque todo reemplazo de "x" por una constante da un argumento de la forma *Modus Ponens*. Podemos decir de tal inferencia que es válida por *Modus Ponens* a pesar de que lo involucrado son funciones proposicionales y no proposiciones. Debiera estar claro que cualquier inferencia es válida si procede por cualquiera de las 19 Reglas de Inferencia de nuestra lista original, independientemente de que las premisas y conclusión sean proposiciones o funciones proposicionales. Nótese de pasada, que esto es así, aun cuando la conclusión contenga más variables libres que las premisas, como cuando por el principio de adición válidamente inferimos la función proposicional de dos variables "Fx v Gy" de la función proposicional de una variable "Fx".

La lista original de diecinueve Reglas de Inferencia también permite la inferencia de funciones proposicionales a partir de proposiciones, como cuando por el principio de Adición inferimos la función proposicional "Fa v Gx" a partir de la proposición "Fa". Es obvio que tales inferencias son válidas en el nuevo sentido explicado. Más aún, se pueden inferir válidamente proposiciones a partir de funciones proposicionales por nuestras Reglas de Inferencia, así como cuando por el principio de Simplificación inferimos la proposición "Fa" a partir de la función proposicional "$Fa \cdot Gx$". Luego, las letras "p", "q", "r", "s" en nuestras diecinueve Reglas de Inferencia ahora corren sobre, o representan, *o* proposiciones *o* funciones proposicionales.

Ahora podemos adoptar una definición más general de demostración formal de validez, que corre paralela a nuestra definición anterior, excepto en que los renglones de una demostración pueden ser o proposiciones o funciones proposicionales. Si cada renglón siguiendo a las premisas iniciales válidamente se sigue de los renglones que le preceden en el sentido generalizado del término "válido" que hemos explicado, entonces el último renglón válidamente se infiere de las premisas iniciales. Y si nuestras premisas iniciales y nuestra conclusión son proposiciones y no funciones proposicionales, entonces la conclusión válidamente se sigue de las premisas iniciales en el sentido original del término "válido" que se aplica a argumentos cuyas premisas y conclusiones todas son enunciados o proposiciones. Esto puede verse mediante las consideraciones que damos a continuación. Al pasar de nuestras premisas originales a funciones proposicionales, si lo hacemos válidamente, entonces, si las premisas son verdaderas, todas las instancias de sustitución de las funciones proposicionales inferidas también deben ser verdaderas. Y al pasar de las funciones proposicionales, si lo hacemos válidamente, entonces todas las instancias de sustitución de las últimas también deben ser verdaderas. Finalmente, cuando pasamos de funciones proposicionales inferidas válidamente a la conclusión final que es una proposición, entonces, si lo hacemos válidamente, como todas las instancias de sustitución de las anteriores son verdaderas la conclusión final debe ser verdadera también.

Las observaciones anteriores requieren alguna modificación para tomar en cuenta los supuestos de alcance limitado que contienen variables libres, pero las modificaciones se introducen mejor como alteraciones en las reglas de cuantificación mismas. Las versiones preliminares de nuestras reglas de cuantificación han de reemplazarse en todo caso, pues como se dijo, sólo se aplican a las proposiciones y no a las funciones proposicionales. Las dos reglas de generalización, **UG** y **EG** deben ahora permitir la cuantificación (o ligazón) de las variables libres, mientras que las reglas de instanciacion **UI** y **EI** deben ahora permitir que se liberen las variables ligadas para permitir la introducción de funciones proposicionales más que las (pretendidas) instancias de sustitución de ellas.

En nuestra discusión anterior de las funciones proposicionales (de la única variable "x") introdujimos las letras griegas Φ y Ψ, y con "Φx" y "Ψx" denotamos cualquier función proposicional de "x" tal como "Fx", "Gx", "$Fx \cdot Hx$", "$(Fx \vee Gx) \supset Hx$", ... sin importar qué tan complicadas puedan ser estas funciones. Será útil continuar usando las letras griegas, dejando "Φx" para denotar cualquier función proposicional que contenga a lo menos una ocurrencia libre de la variable "x", incluyendo aun aquellas funciones proposicionales que contienen ocurrencias libres de otras variables. Entonces "Φx" puede denotar cualquiera de las siguientes:

$$Fx,\ Fx \vee Gx,\ Ga \supset Hx,\ Fw \cdot Fx,\ (\exists z)[Gz \equiv Hx], \ldots$$

De manera semejante, "Φy" puede denotar cualquiera de las funciones proposicionales

$$Fy,\ Fy \vee Gy,\ Ga \supset Hy,\ Fw \cdot Fy,\ (\exists z)[Gz \equiv Hy], \ldots$$

Para podernos referir a *cualquier* función proposicional *en cualquiera* de los grupos precedentes, será conveniente introducir las letras griegas *mu* y *nu* ("μ" y "ν") para denotar símbolos individuales. De este modo, "$\Phi\mu$" puede denotar cualquiera de las funciones proposicionales precedentes, ya sea de "x" o "y" según que "μ" se tome como denotando "x" o "y". De manera semejante, según que "μ" se tome como denotando "x" o "y", "$(\mu)\Phi\mu$" denotará la cuantificación universal con respecto a "x" o "y" de cualquiera de las funciones proposicionales que preceden, de "x" o "y" y "$(\exists\mu)\Phi\mu$" denotará la cuantificación existencial.

Es conveniente permitir que "$\Phi\mu$" denote también o una proposición o una función proposicional que *no* contenga ocurrencia libre de la variable denotada por "μ". En tal caso $(\mu)\Phi\mu$ y $(\exists\mu)\Phi\mu$ se llamarán cuantificaciones "vacías" y serán equivalentes la una a la otra y a $\Phi\mu$ misma. Esta noción no muy natural se incluye solamente por la completud descrita y demostrada para el desarrollo axiomático de la teoría de la cuantificación que se presenta en el Cap. 9. Hasta entonces no haremos uso de la misma.

Las letras griegas Φ y Ψ también pueden usarse en conjunción con alguna constante para denotar o proposiciones o funciones proposicionales que contengan esa constante. De esta manera "Φa" puede denotar cualquiera de las expresiones

$$Fa,\ Fa \vee Ga,\ Gc \supset Ha,\ Fw \cdot Fa,\ (\exists z)[Gz \equiv Ha], \ldots$$

y "Φb" puede denotar cualquiera de las expresiones

$$Fb,\ Fb \vee Gb,\ Gc \supset Hb,\ Fw \cdot Fb,\ (\exists z)[Gz \equiv Hb], \ldots$$

Por el convenio que hemos introducido "$\Phi \nu$" puede denotar cualquier expresión de los dos grupos precedentes según que "ν" se tome como denotando "a" o "b". Esta notación será útil al reformular nuestras reglas de cuantificación.

2. Instanciación Universal. La presentación de nuestras reglas de cuantificación vendrá acompañada con ejemplos de argumentos válidos que deben permitir, y también con ejemplos de argumentos inválidos por evitar mediante restricciones impuestas a estas reglas. Las siguientes inferencias son claramente válidas:

$$\frac{(x)Fx}{\therefore Fa},\ \frac{(y)[Fy \vee Gb]}{\therefore Fa \vee Gb},\ \frac{(z)[Fz \supset Gb]}{\therefore Fb \supset Gb},\ \frac{(x)[Fx \equiv Gy]}{\therefore Fc \equiv Gy},\ \frac{(x)\{Fx \cdot (\exists x)[Gx \cdot Hy]\}}{\therefore Fb \cdot (\exists x)[Gx \cdot Hy]}$$

Se les puede describir generalmente como siendo de la forma

$$\frac{(\mu)\Phi\mu}{\therefore \Phi\nu}$$

donde μ es una variable individual, ν es una constante individual y $\Phi\nu$ resulta de $\Phi\mu$ reemplazando todas las ocurrencias libres de μ en $\Phi\mu$ por ν. Desde luego, no puede haber ocurrencia libre de μ en $(\mu)\Phi\mu$ pero puede haber cualquier número de ocurrencias libres de μ en $\Phi\mu$. Por otro lado, no cualquier ocurrencia de μ en $\Phi\mu$ necesita ser libre: por ejemplo, en donde "μ" denote "x" y "$\Phi\mu$" denote "$Fx \supset (\exists x)[Gx \vee Hy]$" sólo la primera ocurrencia de μ en $\Phi\mu$ es libre, pues la segunda es parte del cuantificador existencial $(\exists\mu)$ y la tercera está dentro del alcance de ese cuantificador.

También son válidas inferencias como

$$\frac{(x)Fx}{\therefore Fy},\ \frac{(x)Fx}{\therefore Fx},\ \frac{(y)[Fy \vee Gb]}{\therefore Fx \vee Gb},\ \frac{(z)[Fz \supset Gx]}{\therefore Fx \supset Gx},\ \frac{(x)\{Fx \cdot (\exists x)[Gx \cdot Hy]\}}{\therefore Fz \cdot (\exists x)[Gx \cdot Hy]}, \ldots$$

que también son de la forma

$$\frac{(\mu)\Phi\mu}{\therefore \Phi\nu}$$

excepto que aquí *tanto* μ como ν son variables individuales. Aquí la premisa $(\mu)\Phi\mu$ puede ser una proposición, pero la conclusión $\Phi\nu$ debe ser una función proposicional.

Así como contamos válida la inferencia

$$\frac{(z)[Fz \vee Gb]}{\therefore Fb \vee Gb}$$

en donde la constante de instanciación "*b*" ocurre tanto en la premisa como en la conclusión, también queremos contar como válidas inferencias del tipo

$$\frac{(x)[Fx \vee Gy]}{\therefore Fy \vee Gy}, \quad \frac{(y)[Fx \supset Gy]}{\therefore Fx \supset Gx}, \quad \frac{(z)[Fx \supset (Gy \cdot Hz)]}{\therefore Fx \supset (Gy \cdot Hy)}, \ldots$$

en las que la *variable* de instanciación ocurre libremente tanto en las premisas como en la conclusión. En general, cuando $\Phi\nu$ se infiera de $(\mu)\Phi\mu$, válidamente, ν debe ocurrir libremente en $\Phi\nu$ en cualquier lugar en que μ ocurra libre en $\Phi\mu$, pero *puede* haber más ocurrencias libres de ν en $\Phi\nu$ que ocurrencias libres de μ en $\Phi\mu$. Habrá más siempre que ν ocurra libre en $\Phi\mu$.

Todas las inferencias precedentes se pueden hacer legítimas por nuestro principio de Instanciación Universal. Será conveniente establecer para el capítulo presente dos convenios definidos que gobiernen las expresiones "$\Phi\mu$" y "$\Phi\nu$", de modo que cada una pueda usarse en el mismo sentido en los enunciados de las 4 reglas de cuantificación. El primer convenio es que *mu* ("μ") denote exclusivamente variables individuales, mientras que *nu* ("ν") pueda denotar, ya una variable individual ya una constante individual. El segundo convenio es el siguiente:

La expresión "$\Phi\mu$" denota cualquier función proposicional o proposición. La expresión "$\Phi\nu$" denota el resultado de reemplazar toda ocurrencia libre de μ en $\Phi\mu$ por ν, a condición de que si ν es una variable debe ocurrir libre en $\Phi\nu$ en todos los sitios en que μ ocurra libre en $\Phi\mu$. (Si $\Phi\mu$ no contiene ocurrencia libre de μ entonces $\Phi\nu$ y $\Phi\mu$ son idénticas. ν y μ pueden, desde luego, ser la misma variable: si lo son, también son idénticas $\Phi\nu$ y $\Phi\mu$.)

Este convenio general ayuda a prevenir inferencias indeseadas (esto es, inválidas), que podrían permitir nuestras cuatro reglas de cuantificación. De qué manera contribuye el convenio a alcanzar este fin se explicará siguiendo las formulaciones de cada una de las cuatro reglas.

Nuestra primera Regla de Cuantificación, la Instanciación Universal, se enuncia como

$$\textbf{UI: } \frac{(\mu)\Phi\mu}{\therefore\ \Phi\nu}$$

La convención general que gobierna $\Phi\mu$ y $\Phi\nu$ sirve para prevenir inferencias erróneas como

$$\frac{(x)[(\exists y)(Fx \equiv \sim Fy)]}{\therefore\ (\exists y)(Fy \equiv \sim Fy)}$$

que podría permitir el principio **UI** porque ν ("y") no ocurre libre en $\Phi\nu$("$(\exists y)(Fy \equiv \sim Fy)$") en todos los lugares en que μ ("x") ocurre libre en $\Phi\mu$("$(\exists y)(Fx \equiv \sim Fy)$"). Luego "$(\exists y)(Fy \equiv \sim Fy)$" no es una $\Phi\nu$ legítima para usarse en la aplicación de **UI** donde $(\mu)\Phi\mu$ es "$(x)[(\exists y)(Fx \equiv \sim Fy)]$". Debiera ser obvio que la inferencia es inválida: falla para un universo que contenga cosas que son F y algunas otras que no son F, porque esto hará verdadera la premisa, mientras que la conclusión sería falsa para todo universo posible, desde el momento que es autocontradictoria.

3. Generalización Existencial. Pasando ahora a la Generalización Existencial observamos que todas las siguientes son inferencias válidas:

$$\frac{Fa}{\therefore\ (\exists x)Fx},\ \frac{Fa}{\therefore\ (\exists y)Fy},\ \frac{Fa \vee Gb}{\therefore\ (\exists x)(Fx \vee Gb)},\ \frac{Fa \supset Gb}{\therefore\ (\exists y)(Fa \supset Gy)},\ \ldots$$

Se les puede describir generalmente como siendo de la forma

$$\frac{\Phi\nu}{\therefore\ (\exists\mu)\Phi\mu}$$

Aquí, tanto premisas como conclusiones son proposiciones. También son válidas las inferencias que contengan funciones proposicionales y sean como

$$\frac{Fx}{\therefore\ (\exists y)Fy},\ \frac{Fa \vee Gy}{\therefore\ (\exists x)(Fa \vee Gx)},\ \frac{Fx \supset Gy}{\therefore\ (\exists y)(Fx \supset Gy)},\ \frac{Fx \cdot Gx}{\therefore\ (\exists y)(Fy \cdot Gx)},\ \ldots$$

que son del mismo esquema que el precedente, excepto en que ν es una variable en lugar de una constante.

Nuestra segunda Regla de Cuantificación, la Generalización Existencial se enuncia como

$$\textbf{EG: } \frac{\Phi\nu}{\therefore\ (\exists\mu)\Phi\mu}$$

El convenio general que rige $\Phi\mu$ y $\Phi\nu$ sirve para evitar una inferencia errónea como

$$\frac{Fx \equiv \sim Fy}{\therefore\ (\exists x)(Fx \equiv \sim Fx)}$$

que sería permitida por **EG** porque ν ("y") no ocurre libre en $\Phi\nu$ ("$Fx \equiv \sim Fy$") en todos lugares en que μ ("x") ocurre libre en $\Phi\mu$ ("$Fx \equiv \sim Fx$"). Por lo tanto "$Fx \equiv \sim Fy$" no es una $\Phi\nu$ legítima de la cual "$(\exists x)(Fx \equiv \sim Fx)$" pueda obtenerse como $(\exists \mu)\Phi\mu$ por **EG**. Debiera ser obvio inferencia es inválida: pues aunque la conclusión es falsa por ser una contradicción en sí, la premisa tiene instancias de sustitución que son verdaderas.

Teniendo a nuestra disposición tanto **UI** como **EG** podemos ilustrar su uso al demostrar la validez del argumento

> Todos los hombres son mortales.
> ___
> Por lo tanto, si Sócrates es un hombre, entonces algunos hombres son mortales.

por medio de la siguiente demostración condicional:

1.	$(x)(Hx \supset Mx)$	$/ \therefore Hs \supset (\exists x)(Hx \cdot Mx)$
→ 2.	Hs	
3.	$Hs \supset Ms$	1, **UI**
4.	Ms	3, 2, M.P.
5.	$Hs \cdot Ms$	2, 4, Conj.
6.	$(\exists x)(Hx \cdot Mx)$	5, **EG**
7.	$Hs \supset (\exists x)(Hx \cdot Mx)$	2–6, C.P.

Un esquema simple de deducción es suficiente para establecer la validez de cualquier argumento de la forma

$$\frac{(\mu)\Phi\mu}{\therefore (\exists\mu)\Phi\mu}$$

Aquí, el esquema de demostración es

1.	$(\mu)\Phi\mu$	$/ \therefore (\exists\mu)\Phi\mu$
2.	$\Phi\nu$	1, **UI**
3.	$(\exists\mu)\Phi\mu$	2, **EG**

4. Instanciación Existencial. Antes de discutir nuestra nueva formulación de la Instanciación Existencial será útil establecer la verdad lógica de equivalencias de la forma

$$\text{(E)} \qquad (\nu)[\Phi\nu \supset p] \equiv [(\exists\mu)\Phi\mu \supset p]$$

donde ν ocurre libre en $\Phi\nu$ en todos *y sólo* en aquellos lugares en que μ ocurre libremente en $\Phi\mu$ y donde p no contiene ocurrencias libres de la variable ν. En el caso de que p sea verdadera los dos lados de la equivalencia deben ser verdaderos: porque si p es verdadera, entonces $\Phi\nu \supset p$ es verdadera para cada valor de

ν, luego $(\nu)[\Phi\nu \supset p]$ es verdadera. Y la verdad de $(\exists\mu)\Phi\mu \supset p$ también se sigue inmediatamente de la verdad de p. En el caso en que p sea falsa y $(\nu)[\Phi\nu \supset p]$ verdadera toda instancia de sustitución de $\Phi\nu \supset p$ es verdadera y, por tanto, toda instancia de sustitución de $\Phi\nu$ debe ser falsa, luego $(\exists\mu)\Phi\mu$ debe ser falsa y, por tanto, $(\exists\mu)\Phi\mu \supset p$ verdadera. En caso de que p sea falsa y $(\exists\mu)\Phi\mu \supset p$ verdadera, $(\exists\mu)\Phi\mu$ debe ser falsa y así, toda instancia de sustitución de $\Phi\nu$ debe ser falsa, por lo que cada instancia de sustitución de $\Phi\nu \supset p$ debe ser verdadera y, por tanto, $(\nu)[\Phi\nu \supset p]$ también es verdadera. Este argumento establece la verdad de cada equivalencia de la forma (E), pues si p es verdadera ambos lados son verdaderos y si p es falsa cada lado implica el otro.

Pasando ahora a la Instanciación Existencial queremos permitir el paso de $(\exists x)Fx$ a Fx o Fy únicamente bajo condiciones muy estrictas. No sólo debe la variable de instanciación no tener ocurrencia libre previa (como se discutió en el número 4 del párrafo 4.2) sino que no debemos permitir que $(x)Fx$ se infiera de $(\exists x)Fx$ por la Instanciación Existencial y la Generalización Universal. Hay muchas maneras de imponer tales restricciones. Una de ellas es formular la regla de Instanciación Existencial de modo que la fórmula o renglón *finalmente* inferidos por medio de ella no contenga variables libres introducidas por la misma. Lo factible de este procedimiento puede verse a través de las consideraciones siguientes.

Aquí, como en secciones previas, nos concierne la construcción de demostraciones de validez sólo para argumentos cuyas premisas y conclusiones sean proposiciones, no funciones proposicionales conteniendo variables libres. Luego, nunca terminamos una demostración con una función proposicional conteniendo una variable libre. De este modo, cualquier demostración de validez en la que la regla de la Instanciación Existencial involucre el paso de $(\exists\mu)\Phi\mu$ a $\Phi\nu$, la función proposicional $\Phi\nu$ sólo sirve para permitir la inferencia subsecuente de una fórmula sin ocurrencia libre de la variable ν.

Supongamos que ya tenemos $(\exists\mu)\Phi\mu$ como renglón en una demostración y sabemos que en presencia de otros renglones ya obtenidos, si tuviésemos también $\Phi\nu$ podríamos deducir una fórmula deseada p que no contiene ocurrencia libre de la variable ν. Podemos proceder escribiendo $\Phi\nu$ como un supuesto de alcance limitado. Entonces, después de haber reducido p, podemos cerrar el alcance del supuesto e inferir la fórmula $\Phi\nu \supset p$ por la regla de Demostración Condicional reforzada. De este renglón (con restricciones razonables) la fórmula $(\nu)[\Phi\nu \supset p]$ puede inferirse por Generalización Universal. Y de la última fórmula, por la equivalencia (E), podemos inferir $(\exists\mu)\Phi\mu \supset p$. Ahora, de esta fórmula y el renglón anterior $(\exists\mu)\Phi\mu$

podemos obtener p por *Modus Ponens.* Todo este proceso lo podemos representar esquemáticamente de la manera que sigue

$$
\begin{array}{lll}
\text{i.} & (\exists\mu)\Phi\mu & \\
\to\text{j.} & \Phi\nu & \\
 & \cdot & \\
 & \cdot & \\
 & \cdot & \\
\text{k.} & p & \\
\hline
\text{k+1.} & \Phi\nu \supset p & \text{j}-\text{k, C.P.} \\
\text{k+2.} & (\nu)[\Phi\nu \supset p] & \text{k+1, }\mathbf{UG} \\
\text{k+3.} & (\exists\mu)\Phi\mu \supset p & \text{k+2, equivalencia (E)} \\
\text{k+4.} & p & \text{k+3, i, M.P.}
\end{array}
$$

La discusión precedente puede verse como proporcionando una justificación informal para la regla de Instanciación Existencial que ahora se puede enunciar como

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{EI}: & (\exists\mu)\Phi\mu \\
 & \to \Phi\nu \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & p \\
\hline
 & \therefore p
\end{array}
$$

con la condición de que ν sea una variable sin ocurrencias libres ni en p ni en cualquier renglón anterior a $\Phi\nu$.

Antes de discutir las restricciones que se han de imponer al enunciado de **EI** puede ser útil presentar una demostración de validez que hace uso de la nueva regla:

$$
\begin{array}{lll}
1. & (x)(Fx \supset Gx) & \\
2. & (\exists y)Fy & /\therefore (\exists z)Gz \\
\to 3. & Fu & \\
4. & Fu \supset Gu & 1, \mathbf{UI} \\
5. & Gu & 4, 3, \text{M.P.} \\
6. & (\exists z)Gz & 5, \mathbf{EG} \\
\hline
7. & (\exists z)Gz & 2, 3\text{–}6, \mathbf{EI}
\end{array}
$$

Puede, aunque no es necesario, haber otros renglones interviniendo entre la premisa $(\exists\mu)\Phi\mu$ (renglón 2 anterior) y la función proposicional $\Phi\nu$ (renglón 3 anterior) marcada como supuesto de alcance limitado. Cuando la fórmula deseada p (renglón 6 anterior) ha sido alcanzada, el siguiente renglón, de nuevo, es p simplemente, y la justificación escrita a su lado es el número del renglón que consiste en $(\exists\mu)\Phi\mu$ y unidas por un guión el número del renglón que consiste en $\Phi\nu$ y el primer renglón que consiste en p, y la notación **EI**.

El convenio general que rige $\Phi\mu$ y $\Phi\nu$ sirve para evitar que una "demostración" errónea como

1.	$(\exists x)(Fx \cdot Gx)$	$/ \therefore (x)Fx$
→ 2.	$Fx \cdot Gy$	(incorrecto como parte de **EI**)
3.	Fx	2, Simp.
4.	Fx	1, 2–3, **EI** (incorrecto)
5.	$(x)Fx$	4, **UG**

sea permitida por **EI**, porque ν ("y") no ocurre libre en $\Phi\nu$ ("$Fx \cdot Gy$") en todos los lugares en que μ ("x") ocurre libre en $\Phi\mu$ ("$Fx \cdot Gx$"); por lo tanto, "$Fx \cdot Gy$" no es un $\Phi\nu$ legítimo para usarse en la aplicación de **EI** donde $(\exists\mu)\Phi\mu$ es "$(\exists x)(Fx \cdot Gx)$". Debiera ser obvio que el argumento es inválido: el que una cosa sea un F y un G claramente no trae consigo que cada cosa sea un F.

La restricción que ν no ocurra libre en cualquier renglón anterior a $\Phi\nu$ asegura que ν no ocurre libre en $(\exists\mu)\Phi\mu$ y, por lo tanto, si ν es diferente de μ, ν no ocurre libre en $\Phi\mu$ tampoco. El convenio general nos asegura ya que no hay ocurrencia libre de μ en $\Phi\nu$. De modo que la restricción presente hecha sobre **EI** junto con el convenio general implica la restricción asociada con la equivalencia lógica (E), que ν ocurre libre en $\Phi\nu$ en todos los lugares *y solamente* en los lugares en que μ ocurre libre en $\Phi\mu$.

La restricción que ν no ocurra libre en p sirve para evitar todo uso (erróneo) subsecuente de la Generalización Universal para deducir $(\mu)\Phi\mu$ como conclusión de $(\exists\mu)\Phi\mu$ como premisa que por otro lado sería posible: porque si p se permitiese que contuviera una ocurrencia libre de ν podría ser $\Phi\nu$ misma, de lo que **UG** podría usarse para deducir la conclusión $(\mu)\Phi\mu$.

La restricción que ν no ocurra libre en ningún renglón anterior a $\Phi\nu$ sirve para prevenir que **EI** dé lugar a una "demostración" errónea como

1.	$(x)(\exists y)(Fx \equiv \sim Fy)$	$/ \therefore (\exists x)(Fx \equiv \sim Fx)$
2.	$(\exists y)(Fx \equiv \sim Fy)$	1, **UI**
→ 3.	$Fx \equiv \sim Fx$	(incorrecto como parte de **EI**)
4.	$(\exists x)(Fx \equiv \sim Fx)$	3, **EG**
5.	$(\exists x)(Fx \equiv \sim Fx)$	2, 3–4, **EI** (incorrecto)

porque ν ("x") ocurre libre en el renglón 2 que precede a $\Phi\nu$ ("$Fx \equiv \sim Fx$") en el renglón 3. Luego, "$Fx \equiv \sim Fx$" no es una $\Phi\nu$ legítima para usarse en la aplicación de **EI** donde $(\exists\mu)\Phi\mu$ es "$(\exists y)(Fx \equiv \sim Fy)$". Es obvio que el argumento es inválido: falla para un modelo que contenga cosas que son F y otras cosas que no son F, lo que haría verdadera la premisa mientras que la conclusión es falsa en todo modelo porque es una autocontradicción.

5. Generalización Universal. La formulación complicada y altamente restringida de **EI** que acabamos de dar permite una formulación un tanto menos restringida de la regla de Generalización Universal que ahora enunciamos como

$$\text{UG: } \frac{\Phi\nu}{\therefore (\mu)\Phi\mu}$$

bajo la condición que ν sea una variable que no ocurre libre en $(\mu)\Phi\mu$ o en cualquier supuesto dentro de cuyo alcance esté $\Phi\nu$.

El convenio general que rige $\Phi\mu$ y $\Phi\nu$ sirve para prevenir que **UG** permita una "demostración" errónea como

1.	$(\exists x)(y)(Fx \supset \sim Fy)$ $/ \therefore (x)(Fx \supset \sim Fx)$	
→ 2.	$(y)(Fx \supset \sim Fy)$	
3.	$Fx \supset \sim Fy$	2, **UI**
4.	$(x)(Fx \supset \sim Fx)$	3, **UG** (incorrecto)
5.	$(x)(Fx \supset \sim Fx)$	1, 2–4, **EI**

porque ν ("y") no ocurre libre en $\Phi\nu$ ("$Fx \supset \sim Fy$") en todos los lugares en que μ ("x") ocurre libre en $\Phi\mu$ ("$Fx \supset \sim Fx$"). Por lo tanto, "$Fx \supset \sim Fy$" no es una $\Phi\nu$ legítima de la cual pueda obtenerse "$(x)(Fx \supset \sim Fx)$" como $(\mu)\Phi\mu$ por **UG**. Debe ser obvio que el argumento es inválido porque su premisa es verdadera si existe al menos una cosa que no es un F mientras que su conclusión asevera que no hay F en absoluto.

La restricción que ν no ocurre libre en $(\mu)\Phi\mu$ sirve para prevenir que **UG** dé lugar a una "demostración" errónea como

1.	$(x)(Fx \equiv Fx)$ $/ \therefore (x)(y)(Fx \equiv Fy)$	
2.	$Fx \equiv Fx$	1, **UI**
3.	$(y)(Fx \equiv Fy)$	2, **UG** (incorrecto)
4.	$(x)(y)(Fx \equiv Fy)$	3, **UG**

porque ν ("x") ocurre libre en $(\mu)\Phi\mu$("$(y)(Fx \equiv Fy)$"). Luego "$Fx \equiv Fx$" no es una $\Phi\nu$ legítima de lo cual pueda deducirse "$(y)(Fx \equiv Fy)$"

como $(\mu)\Phi\mu$ por **UG**. Debe parecer obvia la invalidez del argumento porque su premisa afirma solamente que una cosa es una F si y sólo si es un F mientras que su conclusión afirma que de cualesquier cosas x y y, x es un F si y sólo si y es un F también.

La restricción que ν no ocurra libre en cualquier supuesto dentro de cuyo alcance se encuentre $\Phi\nu$ sirve para prevenir que **UG** permita una "demostración" errónea como

1. $(\exists x)Fx \quad /\therefore (x)Fx$
→ 2. Fy
3. $(x)Fx$ — 2, **UG** (incorrecto)
4. $(x)Fx$ — 1, 2–3, **EI**

porque ν ("y") ocurre libre en el supuesto "Fy" dentro de cuyo alcance se encuentra la premisa $\Phi\nu$ ("Fy"). Luego, en este caso "Fy" no es una $\Phi\nu$ legítima de la cual pueda deducirse "$(x)Fx$" como $(\mu)\Phi\mu$ por **UG**. El argumento desde luego, es obviamente inválido.

EJERCICIOS

Identificar y explicar todos los errores de las siguientes "demostraciones" erróneas:

1.
→ 1. Fx
2. $(y)Fy$ — 1, **UG**
3. $Fx \supset (y)Fy$ — 1–2, C.P.
4. $(x)[Fx \supset (y)Fy]$ — 3, **UG**

2.
1. $(\exists x)(Fx \cdot Gx) \quad /\therefore (\exists x)Fx$
→ 2. $Fx \cdot Gx$
3. Fx — 2, Simp.
4. Fx — 1, 2–3, **EI**
5. $(\exists x)Fx$ — 4, **EG**

***3.**
1. $(x)(\exists y)(Fx \equiv Gy) \quad /\therefore (\exists y)(x)(Fx \equiv Gy)$
2. $(\exists y)(Fx \equiv Gy)$ — 1, **UI**
→ 3. $Fx \equiv Gy$
4. $(x)(Fx \equiv Gy)$ — 3, **UG**
5. $(\exists y)(x)(Fx \equiv Gy)$ — 4, **EG**
6. $(\exists y)(x)(Fx \equiv Gy)$ — 2, 3–5, **EI**

4.
1. $(x)(\exists y)(Fx \supset Gy) \quad /\therefore (\exists y)(x)(Fx \supset Gy)$
2. $(\exists y)(Fx \supset Gy)$ — 1, **UI**
→ 3. $Fx \supset Gx$
4. $(x)(Fx \supset Gx)$ — 3, **UG**
5. $(\exists y)(x)(Fx \supset Gy)$ — 4, **EG**
6. $(\exists y)(x)(Fx \supset Gy)$ — 2, 3–5, **EI**

5. 1. $(y)(\exists x)(Fx \lor Gy)$ $\quad /\therefore (\exists x)(y)(Fx \lor Gy)$
2. $(\exists x)(Fx \lor Gy)$ — 1, **UI**
3. $Fx \lor Gy$
4. $(y)(Fx \lor Gy)$ — 3, **UG**
5. $(\exists x)(y)(Fx \lor Gy)$ — 4, **EG**
6. $(\exists x)(y)(Fx \lor Gy)$ — 2, 3–5, **EI**

***6.** 1. $(\exists x)(y)[(Fx \cdot Gx) \supset Hy]$ $\quad /\therefore (\exists x)[(Fx \cdot Gx) \supset Hx]$
2. $(y)[(Fz \cdot Gz) \supset Hy]$
3. $(Fz \cdot Gz) \supset Hy$ — 2, **UI**
4. $(\exists x)[(Fx \cdot Gz) \supset Hy]$ — 3, **EG**
5. $(y)(\exists x)[(Fx \cdot Gy) \supset Hy]$ — 4, **UG**
6. $(y)(\exists x)[(Fx \cdot Gy) \supset Hy]$ — 1, 2–5, **EI**
7. $(\exists x)[(Fx \cdot Gx) \supset Hx]$ — 6, **UI**

7. 1. $(\exists x)Fx$
2. $(\exists x)Gx$ $\quad /\therefore (\exists x)(Fx \cdot Gx)$
3. Fy
4. Gy
5. $Fy \cdot Gy$ — 3, 4. Conj.
6. $(\exists x)(Fx \cdot Gx)$ — 5, **EG**
7. $(\exists x)(Fx \cdot Gx)$ — 2, 4–6, **EI**
8. $(\exists x)(Fx \cdot Gx)$ — 1, 3–7, **EI**

8. 1. $(\exists x)(\exists y)[(Fx \lor Gy) \cdot Hy]$ $\quad /\therefore (x)(y)(Fy \lor Gx)$
2. $(\exists y)[(Fx \lor Gy) \cdot Hy]$
3. $(Fx \lor Gx) \cdot Hx$
4. $Fx \lor Gx$ — 3, Simp.
5. $Fx \lor Gx$ — 2, 3–4, **EI**
6. $Fx \lor Gx$ — 1, 2–5, **EI**
7. $(y)(Fy \lor Gx)$ — 6, **UG**
8. $(x)(y)(Fy \lor Gx)$ — 7, **UG**

***9.** 1. $(\exists x)(Fx \cdot Gx)$
2. $(\exists x)(\sim Fx \cdot Gx)$ $\quad /\therefore (\exists x)(Fx \cdot \sim Fx)$
3. $Fx \cdot Gy$
4. Fx — 3, Simp.
5. Fx — 1, 3–4, **EI**
6. $\sim Fx \cdot Gx$
7. $\sim Fx$ — 6, Simp.
8. $\sim Fx$ — 2, 6–7, **EI**
9. $Fx \cdot \sim Fx$ — 5, 8, Conj.
10. $(\exists x)(Fx \cdot \sim Fx)$ — 9, **EG**

10.

1.	$(x)[(Fx \supset Gx) \cdot \sim Ga]$	$/ \therefore (x) \sim Fx$
→2.	$(x)[(Fx \supset Gx) \cdot \sim Gy]$	
3.	$(Fz \supset Gz) \cdot \sim Gy$	2, UI
4.	$(y)[(Fy \supset Gy) \cdot \sim Gy]$	3, UG
5.	$(Fu \supset Gu) \cdot \sim Gu$	4, UI
6.	$Fu \supset Gu$	5, Simp.
7.	$\sim Gu \cdot (Fu \supset Gu)$	5, Conm.
8.	$\sim Gu$	7, Simp.
9.	$\sim Fu$	6, 8, M.T.
10.	$(x) \sim Fx$	9, UG
11.	$(x)[(Fx \mathrm{D} Gx) \cdot \sim Gy] \supset (x) \sim Fx$	2–10, C.P.
12.	$(w)\{(x)[(Fx \supset Gx) \cdot \sim Gw] \supset (x) \sim Fx\}$	11, UG
13.	$(x)[(Fx \supset Gx) \cdot \sim Ga] \supset (x) \sim Fx$	12, UI
14.	$(x) \sim Fx$	13, 1, M.P.

6. Demostraciones de Validez Abreviadas. En esta etapa de nuestro trabajo es deseable abreviar la longitud de nuestras demostraciones formales de validez permitiendo cortar camino en la aplicación de la lista original de Reglas de Inferencia. Podemos combinar cualquier aplicación del principio de Doble Negación con cualquier otro paso, lo que nos va a permitir pasar directamente de "$\sim A \supset B$" a "$A \vee B$", o viceversa sin tener que escribir el paso intermedio "$\sim\sim A \vee B$". Podemos acortar tediosas aplicaciones del principio de Conmutación permitiendo no sólo "$A \therefore A \vee B$" por el principio de Adición sino inferencias tales como "$A \therefore B \vee A$". También permitimos inferencias tales como "$A \vee B, \sim B \therefore A$" por el principio del Silogismo Disyuntivo así como "$A \vee B, \sim A \therefore B$". Dado que la definición de la Implicación Material y el principio de Distribución pueden siempre usarse para obtener "$A \supset (B \cdot C)$" a partir de "$(A \supset B) \cdot (A \supset C)$" y viceversa, nuestras demostraciones pueden abreviarse permitiendo aplicar la Distribución a condicionales cuyos consecuentes sean conjunciones. Esto equivale a agregar la forma "$[p \supset (q \cdot r)] \equiv [(p \supset q) \cdot (p \supset r)]$" a nuestra lista como una versión alternativa del principio de Distribución. Aplicando repetidamente los principios de Asociación y Conmutación podemos redisponer los términos de cualquier conjunción o disyunción como deseemos. Así, podemos acortar nuestras demostraciones omitiendo paréntesis, corchetes, etc., de las conjunciones de 3 cualesquiera o más proposiciones. Así, proposiciones tales como "$A \cdot \{B \cdot [C \cdot (D \cdot E)]\}$", "$[(A \cdot B) \cdot [C \cdot (D \cdot E)]$", "$(A \cdot B) \cdot [(C \cdot D) \cdot E]$", "$[(A \cdot B) \cdot C] \cdot (D \cdot E)$", "$[A \cdot (B \cdot C)] \cdot (D \cdot E)$", "$\{[(A \cdot B) \cdot C] \cdot D\} \cdot E$", "$A \cdot [(B \cdot C) \cdot (D \cdot E)]$", . . . todas se escribirán indiferentemente como "$A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot E$", y *cualquier* permutación se justificará simplemente por el principio de Conmutación. Aún más, si se desea inferir la conclusión de *algunos* de los conjuntos indicados, en cualquier orden, puede hacerse esto en un solo paso y puede justificarse por el principio de Simplificación. Así, de "$A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot E$" podemos inferir "$E \cdot B \cdot D$" en un solo paso. También el principio de Conjunción puede aplicarse a cualquier número de renglones para dar lugar a un nuevo renglón que es la Conjunción de todos ellos. Finalmente, se permitirá la reducción telescópica de las reglas de Implicación Material, de De Morgan, y Doble Negación para obtener "$\sim(A \supset B)$" a partir de "$A \cdot \sim B$" y viceversa, lo que viene a ser, agregar la forma "$\sim(p \supset q) \equiv (p \cdot \sim q)$" a nuestra lista como una versión alternativa de la Implicación Material.

Al demostrar la validez de algunos argumentos deben usarse las cuatro reglas de cuantificación. Consideremos el argumento siguiente moderadamente complejo:

> Si todas las medicinas están contaminadas, entonces todos los técnicos negligentes son unos bribones. Si hay medicinas contaminadas, entonces todas las medicinas están contaminadas y son peligrosas. Todos los germicidas son drogas. Sólo los negligentes son distraídos. Por lo tanto, si cualquier técnico es distraído y si algunos germicidas están contaminados, entonces él es un bribón.

Utilizando abreviaciones más o menos obvias se puede simbolizar y demostrar como válido de la manera siguiente:

1.	$(x)[Dx \supset Cx] \supset (y)[(Ny \cdot Ty) \supset Sy]$	
2.	$(\exists x)[Dx \cdot Cx] \supset (y)[Dy \supset (Cy \cdot Uy)]$	
3.	$(x)[Gx \supset Dx]$	
4.	$(x)[Ax \supset Nx]$ $\quad /\therefore (x)\{(Tx \cdot Ax) \supset \{(\exists y)[Gy \cdot Cy] \supset Sx\}\}$	
5.	$Tu \cdot Au$	
6.	$(\exists y)[Gy \cdot Cy]$	
7.	$Gw \cdot Cw$	
8.	$Gw \supset Dw$	3, UI
9.	Gw	7, Simp.
10.	Dw	8, 9, M.P.
11.	Cw	7, Simp.
12.	$Dw \cdot Cw$	10, 11, Conj.
13.	$(\exists x)[Dx \cdot Cx]$	12, EG
14.	$(y)[Dy \supset (Cy \cdot Uy)]$	2, 13, M.P.
15.	$Dz \supset (Cz \cdot Uz)$	14, UI
16.	$(Dz \supset Cz) \cdot (Dz \supset Uz)$	15, Dist.
17.	$Dz \supset Cz$	16, Simp.
18.	$(x)[Dx \supset Cx]$	17, UG
19.	$(y)[(Ny \cdot Ty) \supset Sy]$	1, 18, M.P.
20.	$(Nu \cdot Tu) \supset Su$	19, UI
21.	Au	5, Simp.
22.	$Au \supset Nu$	4, UI
23.	Nu	22, 21, M.P.
24.	Tu	5, Simp.
25.	$Nu \cdot Tu$	23, 24, Conj.
26.	Su	20, 25, M.P.
27.	Su	6, 7–26, EI
28.	$(\exists y)[Gy \cdot Cy] \supset Su$	6–27, C.P.
29.	$(Tu \cdot Au) \supset \{(\exists y)[Gy \cdot Cy] \supset Su\}$	5–28, C.P.
30.	$(x)\{(Tx \cdot Ax) \supset \{(\exists y)[Gy \cdot Cy] \supset Sx\}\}$	29, UG

EJERCICIOS

I. Construir una demostración formal de validez para cada argumento:

*1. $(x)(Ax \supset Bx)$
$\therefore (x)(Bx \supset Cx) \supset (Ak \supset Ck)$

2. $(x)(Dx \supset Ex)$
$\therefore Da \supset [(y)(Ey \supset Fy) \supset Fa]$

3. $(x)[Gx \supset (y)(Hy \supset Iy)]$
$\therefore (x)Gx \supset (y)(Hy \supset Iy)$

4. $(\exists x)Jx \supset (\exists y)Ky$
$\therefore (\exists x)[Jx \supset (\exists y)Ky]$

*5. $(\exists x)Lx \supset (y)My$
$\therefore (x)[Lx \supset (y)My]$

6. $(x)(Nx \supset Ox)$
$\therefore (x)\{Px \supset [(y)(Py \supset Ny) \supset Ox]\}$

7. $(x)(Qx \supset Rx)$
$(x)(Sx \supset Tx)$
$\therefore (x)(Rx \supset Sx) \supset (y)(Qy \supset Ty)$

8. $(\exists x)Ux \supset (y)[(Uy \vee Vy) \supset Wy]$
$(\exists x)Ux \cdot (\exists x)Wx$
$\therefore (\exists x)(Ux \cdot Wx)$

9. $(\exists x)Xx \supset (y)(Yy \supset Zy)$
$\therefore (\exists x)(Xx \cdot Yx) \supset (\exists y)(Xy \cdot Zy)$

*10. $(\exists x)Ax \supset (y)(By \supset Cy)$
$(\exists x)Dx \supset (\exists y)By$
$\therefore (\exists x)(Ax \cdot Dx) \supset (\exists y)Cy$

11. $(x)(\exists y)(Ex \vee Fy)$
$\therefore (x)Ex \vee (\exists y)Fy$

12. $(\exists x)Gx \vee (y)(Gy \supset Hy)$
$(x)(Ix \supset \sim Gx)$
$\therefore (x)(Gx \supset Ix) \supset (y)(Gy \supset Hy)$

13. $(\exists x)Jx \vee (\exists y)Ky$
$(x)(Jx \supset Kx)$
$\therefore (\exists y)Ky$

14. $(x)(Lx \supset Mx)$
$(x)(Mx \supset Nx)$
$\therefore (\exists x)Lx \supset (\exists y)Ny$

*15. $(x)\{Ox \supset [(y)(Py \supset Qy) \supset Rx]\}$
$(x)\{Rx \supset [(y)(Py \supset Sy) \supset Tx]\}$
$\therefore (y)[Py \supset (Qy \cdot Sy)] \supset (x)(Ox \supset Tx)$

16. $(\exists x)[Ux \cdot (y)(Vy \supset Wy)]$
$(x)\{Ux \supset [(\exists y)(Xy \cdot Wy) \supset Yx]\}$
$\therefore (\exists y)(Xy \cdot Vy) \supset (\exists x)Yx$

17. $(x)\{Ax \supset [(\exists y)By \supset Cx]\}$
$(x)\{Cx \supset [(\exists y)Dy \supset Ex]\}$
$\therefore (\exists x)(Bx \cdot Fx) \supset [(y)(Fy \supset Dy) \supset (z)(Az \supset Ez)]$

18. $(x)(\exists y)(Gx \cdot Hy)$
$\therefore (x)Gx \cdot (\exists y)Hy$

19. $(\exists x)(y)(Ix \equiv Jy)$
$\therefore (y)(\exists x)(Ix \equiv Jy)$

20. $(x)(\exists y)(Kx \cdot Ly)$
$\therefore (\exists y)(x)(Kx \cdot Ly)$

II. Al construir una demostración formal de validez para cada uno de los argumentos que siguen, usar en cada caso la notación sugerida procurando que las fórmulas simbólicas sean tan paralelas al castellano como se pueda:

1. Ningún acróbata es torpe. Por lo tanto, si Alberto es un mesero y si todos los meseros son torpes Alberto no es un acróbata. (*Ax, Tx, Mx, a.*)
2. Todos los perros falderos son mansos. Por lo tanto, si algunos perros son excitables y ningún perro excitable es manso, entonces no son perros falderos. (*Fx, Mx, Px, Ex.*)
3. Todos los acusados son culpables. Todos los convictos serán colgados. Por lo tanto, si todos los que son culpables son convictos, entonces todos los acusados serán colgados. (*Ax, Gx, Cx, Hx.*)

*4. Si hay genios entonces todos los grandes compositores son genios. Si alguien es temperamental, todos los genios son temperamentales. Por lo tanto, si alguien es un genio temperamental, entonces todos los grandes compositores son temperamentales. (Gx: x es un genio. Cx: x es un gran compositor. Px: x es una persona. Tx: x es temperamental.)

5. Cualquier automóvil que tenga buenos frenos es seguro para el conductor y seguro para los pasajeros. Por lo tanto, si un automóvil es nuevo, entonces, si todos los automóviles nuevos tienen buenos frenos, es seguro para el conductor. (Ax; x es un automóvil. Fx; x tiene buenos frenos. Cx: x es seguro para el conductor. Px: x es seguro para los pasajeros. Nx: x es nuevo.)

6. O todos los invitados se divirtieron o algunos invitados disimularon sus sentimientos. Ninguna persona honesta debiera disimular sus sentimientos. Por lo tanto, si todos los invitados son personas honestas entonces todos los invitados se divirtieron. (Ix: x es un invitado. Dx: x se divirtió. Dx: x disimula sus sentimientos. Hx: x es honesto. Px: x es una persona.)

7. Cualquier hombre de negocios que sea un poeta debe ser rico. Todos los hombres ricos son conservadores. Si algún conservador no ama la poesía entonces ningún poeta es conservador. Por lo tanto, si hay un hombre rico que no ama la poesía entonces ningún hombre de negocios es poeta. (Nx: x es un hombre de negocios. Px: x es un poeta. Rx: x es un hombre rico. Cx: x es un conservador. Ax: x ama la poesía.)

*8. Todas las sustancias radiactivas o son de corta vida o tienen valor médico. Ningún isótopo del uranio que sea radiactivo tiene una vida corta. Por lo tanto, si todos los isótopos del uranio son radiactivos, entonces todos los isótopos del uranio tienen valor médico. (Rx: x es radiactivo. Sx: x tiene una vida corta. Mx: x tiene valor médico. Ux: x es un isótopo del uranio.)

9. Ningún testigo cuerdo mentiría si su mentira lo implicase en un crimen. Por lo tanto, si cualquier testigo se implicara en un crimen, entonces, si todos los testigos fuesen cuerdos, ese testigo no mintió. (Cx: x está cuerdo. Tx: x es un testigo. Mx: x miente. Ix: x se implica en un crimen.)

10. Si falta alguna joya, entonces, si todos los sirvientes son honestos será devuelta. Si cualquier sirviente es honesto todos lo son. De modo que si falta alguna joya, entonces si al menos un sirviente es honesto, será devuelta. (Jx: x es una joya. Fx: x falta. Sx: x es un sirviente. Hx: x es honesto. Dx: x será devuelta.)

11. Si hay liberales todos los filósofos son liberales. Si hay humanistas, entonces todos los liberales son humanistas. Por lo tanto, si hay humanistas que sean liberales, entonces todos los filósofos son humanistas. (Lx: x es un liberal. Fx: x es un filósofo. Hx: x es un humanista.)

*12. Si algo se pierde entonces si cada cual aprecia sus pertenencias se sabrá que se ha perdido. Si alguien aprecia sus pertenencias, entonces todos las aprecian. Por lo tanto, si algo se pierde, entonces, si alguien aprecia sus pertenencias entonces algo se habrá perdido. (Hx: x se ha perdido. Px: x es una persona. Ax: x aprecia sus pertenencias. Mx: x se sabrá que se ha perdido.)

4.6. Verdades Lógicas que Involucran Cuantificadores

En el Cap. 2 las tablas de verdad se usaron no solamente para establecer la *validez* de los argumentos sino también para certificar la *verdad lógica* de los proposiciones (tautologías tales como "$A \vee \sim A$") la noción de una proposición lógicamente verdadera es, por lo tanto, familiar. Como hemos visto, no cualquier argumento válido puede establecerse por el método de las tablas de verdad: algunos de ellos se demuestran como válidos usando reglas de cuantificación. De manera semejante, no cualquier proposición lógicamente verdadera se puede certificar por el método de las tablas de verdad: algunas de ellas se *demuestran* usando reglas de cuantificación.

El método usado al demostrar la verdad lógica de las tautologías fue presentado en el Cap. 3. Una demostración de la verdad lógica de la tautología "$A \supset (A \vee B)$" puede escribirse como

→ 1.	A	
2.	$A \vee B$	1, Ad.
3.	$A \supset (A \vee B)$	1–2, C.P.

Al demostrar la verdad lógica de proposiciones que involucran cuantificadores tendremos que recurrir no solamente a la lista original de formas de argumento válidas elementales y al principio reforzado de la Demostración Condicional, sino también a nuestras reglas de cuantificación. Así, una demostración de la verdad lógica de la proposición "$(x)Fx \supset (\exists x)Fx$" se puede escribir como

→ 1.	$(x)Fx$	
2.	Fy	1, **UI**
3.	$(\exists x)Fx$	2, **EG**
4.	$(x)Fx \supset (\exists x)Fx$	1–3, C.P.

(Tal como al discutir la validez de los argumentos, en la discusión de la verdad lógica de las proposiciones explícitamente limitamos nuestras consideraciones a universos o modelos posibles no vacíos.)

Otras proposiciones lógicamente verdaderas que involucran cuantificadores requieren demostraciones más complicadas. Así, por ejemplo, la proposición lógicamente verdadera "$(x)Fx \supset \sim(\exists x) \sim Fx$" tiene la siguiente demostración:

1.	$(\exists x)\sim Fx$	
2.	$\sim Fy$	
3.	$(x)Fx$	
4.	Fy	3, **UI**
5.	$(x)Fx \supset Fy$	3–4, C.P.
6.	$\sim(x)Fx$	5, 2, M.T.
7.	$\sim(x)Fx$	1, 2–6, **EI**
8.	$(\exists x)\sim Fx \supset \sim(x)Fx$	1–7, C.P.
9.	$(x)Fx \supset \sim(\exists x)\sim Fx$	8, Trans., D.N.

De manera semejante, la verdad de "$\sim(\exists x)\sim Fx \supset (x)Fx$" se demuestra como sigue:

1.	$\sim(\exists x)\sim Fx$	
2.	$\sim Fy$	
3.	$(\exists x)\sim Fx$	2, **EG**
4.	$\sim Fy \supset (\exists x)\sim Fx$	2–3, C.P.
5.	Fy	4, 1, M.T., D.N.
6.	$(x)Fx$	5, **UG**
7.	$\sim(\exists x)\sim Fx \supset (x)Fx$	1–6, C.P.

Dadas las verdades lógicas establecidas por las dos demostraciones precedentes, las conjuntamos para obtener la equivalencia "$(x)Fx \equiv \sim(\exists x)\sim Fx$", que es una verdad lógica ya señalada en la Sec. 4.1. Como nuestra demostración de esta equivalencia no depende de las peculiaridades de la función proposicional "Fx", la equivalencia es válida para toda función proposicional. Y como nuestra demostración no depende de las particularidades de la variable "x", la equivalencia es válida no solamente para cualquier función proposicional sino también para cualquier variable individual. La *forma* de equivalencia $(\nu)\Phi\nu \equiv \sim(\exists\nu)\sim\Phi\nu$ se ve así que es *lógicamente verdadera* y puede agregarse a las otras equivalencias de nuestra lista de Reglas de Inferencia. Nos permite intercambiar válidamente $(\nu)\Phi\nu$ y $\sim(\exists\nu)\sim\Phi\nu$ siempre que ocurran. Esta conexión entre los dos cuantificadores por medio de la negación se adoptará ahora como una regla adicional de inferencia, y puede usarse al construir demostraciones formales de validez y demostraciones de verdad lógica. Cuando se use así las letras "**QN**" (para *negación de cuantificador*) debieran escribirse indicando el principio al que se está recurriendo. Debiera ser obvio que las formas

$$\sim(\nu)\Phi\nu \equiv (\exists\nu)\sim\Phi\nu$$
$$(\nu)\sim\Phi\nu \equiv \sim(\exists\nu)\Phi\nu$$
$$\sim(\nu)\sim\Phi\nu \equiv (\exists\nu)\Phi\nu$$

son lógicamente equivalentes entre sí y con la forma **QN** y, por lo tanto, son lógicamente verdaderas.

Algunas verdades lógicas obvias se enuncian en forma simple y con facilidad se demuestran con nuestra herramienta simbólica presente. Un bicondicional lógicamente verdadero para cualesquier funciones proposicionales "Fx" y "Gx" es

$$[(x)Fx \cdot (x)Gx] \equiv (x)(Fx \cdot Gx)$$

que asevera lo siguiente: cada cosa tiene el atributo F y cada cosa tiene el atributo G si y sólo si cada cosa tiene ambos atributos F y G. Las demostraciones de las dos implicaciones involucradas pueden escribirse una al lado de la otra:

1.	$(x)Fx \cdot (x)Gx$	
2.	$(x)Fx$	1, Simp.
3.	$(x)Gx$	1, Simp.
4.	Fy	2, **UI**
5.	Gy	3, **UI**
6.	$Fy \cdot Gy$	4, 5, Conj.
7.	$(x)(Fx \cdot Gx)$	6, **UG**
8.	$[(x)Fx \cdot (x)Gx] \supset (x)(Fx \cdot Gx)$	1–7, C.P.

1.	$(x)(Fx \cdot Gx)$	
2.	$Fy \cdot Gy$	1, **UI**
3.	Fy	2, Simp.
4.	Gy	2, Simp.
5.	$(x)Fx$	3, **UG**
6.	$(x)Gx$	4, **UG**
7.	$(x)Fx \cdot (x)Gx$	5, 6, Conj.
8.	$(x)(Fx \cdot Gx) \supset [(x)Fx \cdot (x)Gx]$	1–7, C.P.

Otra verdad lógica está en la forma de un condicional y no de un bicondicional. Se le escribe, como

$$[(x)Fx \vee (x)Gx] \supset (x)(Fx \vee Gx)$$

y afirma que si cada cosa o es un F o cada cosa es un G, entonces cada cosa es un F o un G. Su demostración involucra hacer varios supuestos de alcance limitado y se le puede escribir como

1.	$(x)Fx \vee (x)Gx$	
2.	$(x)Fx$	
3.	Fy	2, **UI**
4.	$Fy \vee Gy$	3, Ad.
5.	$(x)(Fx \vee Gx)$	4, **UG**
6.	$(x)Fx \supset (x)(Fx \vee Gx)$	2–5, C.P.
7.	$(x)Gx$	
8.	Gy	7, **UI**
9.	$Fy \vee Gy$	8, Ad.
10.	$(x)(Fx \vee Gx)$	9, **UG**
11.	$(x)Gx \supset (x)(Fx \vee Gx)$	7–10, C.P.
12.	$[(x)Fx \supset (x)(Fx \vee Gx)] \cdot [(x)Gx \supset (x)(Fx \vee Gx)]$	6, 11, Conj.
13.	$(x)(Fx \vee Gx) \vee (x)(Fx \vee Gx)$	12, 1, C.D.
14.	$(x)(Fx \vee Gx)$	13, Taut.
15.	$[(x)Fx \vee (x)Gx] \supset (x)(Fx \vee Gx)$	1–14, C.P.

El recíproco de este condicional, sin embargo, *no* es lógicamente verdadero. El recíproco afirma que si todo elemento es un F o un G entonces o todo es F o todo es G. El que este recíproco no es siempre verdadero puede verse al reemplazar "G" por "$\sim F$" ya que "$(x)(Fx \vee \sim Fx)$" es verdadero para cualquier predicado "F" mientras que hay pocos predicados para los cuales se tiene "$(x)Fx \vee (x)\sim Fx$". Otra verdad lógica condicional en la forma es

$$(\exists x)(Fx \cdot Gx) \supset [(\exists x)Fx \cdot (\exists x)Gx]$$

Su demostración es totalmente directa y se deja como un ejercicio. Que su recíproca no es verdadera, en general, puede verse nuevamente al reemplazar "G" por "$\sim F$". Para la mayoría de los predicados "F" la proposición "$(\exists x)Fx \cdot (\exists x)\sim Fx$" es verdadera (es decir, "algo es redondo y algo no es redondo"), pero para cualquier "F" la proposición "$(\exists x)(Fx \cdot \sim Fx)$" es lógicamente falsa.

Ya se ha visto que las funciones proposicionales pueden contener proposiciones y/u otras funciones proposicionales como componentes. Ejemplos de funciones proposicionales semejantes son

$$Fx \cdot Ga,\ Fx \vee Fy,\ Gy \vee (z)Hz,\ Gw \supset Fz, \ldots$$

Cuando funciones proposicionales tales como éstas se cuantifican para obtener

$$(x)[Fx \cdot Ga],\ (x)[Fx \vee Fy],\ (\exists y)[Gy \vee (z)Hz],\ (z)[Gw \supset Fz], \ldots$$

tenemos proposiciones y/o funciones proposicionales que están dentro de los alcances de los cuantificadores, aunque los cuantificadores no tienen un efecto real sobre estas expresiones. Cuando un cuantificador respecto a una variable dada es prefijado a una expresión, su único efecto es el de ligar ocurrencias previamente libres de esa variable. En las expresiones antes escritas, las proposiciones "Ga" y "$(z)Hz$" y las funciones proposicionales "Fy" y "Gw", aunque se encuentran dentro de los alcances de los cuantificadores "(x)", "$(\exists y)$", "(x)" y "(z)" respectivamente, no están realmente afectadas por ellos. En dondequiera que se tenga una expresión que contiene un cuantificador sobre la variable μ y dentro de cuyo alcance se encuentra o una proposición o una función proposicional que no contiene ocurrencias libres de μ, la expresión total es lógicamente equivalente a otra expresión en la que el alcance del cuantificador sobre μ *no* se extiende sobre esta proposición o función proposicional. Un ejemplo o dos aclararán esta cuestión. En lo que sigue, sea "Q" o una proposición o una función proposicional que no contiene ocurrencias libres de la variable "x" y sea "Fx" una función proposicional que al menos contiene una ocurrencia libre de la variable "x". Nuestra primera equivalencia lógica es aquí entre la cuantificación universal de "$Fx \cdot Q$" y la conjunción de la cuantificación universal de "Fx" con "Q" que más brevemente se expresa como

$$(x)(Fx \cdot Q) \equiv [(x)Fx \cdot Q]$$

La demostración de esta equivalencia se puede escribir como

1.	$(x)(Fx \cdot Q)$	
2.	$Fx \cdot Q$	1, UI
3.	Fx	2, Simp.
4.	$(x)Fx$	3, UG
5.	Q	2, Simp.
6.	$(x)Fx \cdot Q$	4, 5, Conj.
7.	$(x)(Fx \cdot Q) \supset [(x)Fx \cdot Q]$	1–6, C.P.

1.	$(x)Fx \cdot Q$	
2.	$(x)Fx$	1, Simp.
3.	Fx	2, UI
4.	Q	1, Simp.
5.	$Fx \cdot Q$	3, 4, Conj.
6.	$(x)(Fx \cdot Q)$	5, UG
7.	$[(x)Fx \cdot Q] \supset (x)(Fx \cdot Q)$	1–6, C.P.

Otra equivalencia lógica también existe entre la cuantificación universal de "$Q \supset Fx$" y el enunciado condicional cuyo antecedente es "Q" y cuyo consecuente es la cuantificación universal de "Fx". La primera afirma que *dado cualquier individuo x, Q implica que x tiene F* y es equivalente a *Q implica que dado cualquier individuo x, x tiene F*. Nuestra expresión simbólica de esta equivalencia es

$$(x)(Q \supset Fx) \equiv [Q \supset (x)Fx]$$

Su demostración se construye fácilmente:

1.	$(x)(Q \supset Fx)$	
2.	$Q \supset Fx$	1, UI
3.	Q	
4.	Fx	2, 3, M.P.
5.	$(x)Fx$	4, UG
6.	$Q \supset (x)Fx$	3–5, C.P.
7.	$(x)(Q \supset Fx) \supset [Q \supset (x)Fx]$	1–6, C.P.

1.	$Q \supset (x)Fx$	
2.	Q	
3.	$(x)Fx$	1, 2, M.P.
4.	Fx	3, UI
5.	$Q \supset Fx$	2–4, C.P.
6.	$(x)(Q \supset Fx)$	5, UG
7.	$[Q \supset (x)Fx] \supset (x)(Q \supset Fx)$	1–6, C.P.

El mismo esquema de equivalencia se tiene para la cuantificación existencial de "$Q \supset Fx$" y el enunciado condicional "$Q \supset (\exists x)Fx$". El primero asegura *que al menos hay un individuo x tal que Q implica que x tiene F* y es equivalente a *Q implica que cuando menos hay un individuo x tal que x tiene F* que es lo afirmado por el segundo. Su demostración se construye muy fácilmente, y queda como ejercicio.

Sin embargo, el esquema de equivalencia es diferente cuando "Q" ocurre como consecuente y no como antecedente. Aunque la cuantificación universal de "$Fx \supset Q$" implica "$(x)Fx \supset Q$" no es implicada por la última. Hay una equivalencia, sin embargo, entre *dado cualquier x, si x tiene F entonces* Q y *si hay cuando menos un x tal que x tiene F, entonces* Q, que se estableció informalmente en el párrafo 4 de este capítulo y se expresa simbólicamente como

$$(x)(Fx \supset Q) \equiv [(\exists x)Fx \supset Q]$$

Y aunque la cuantificación existencial de "$Fx \supset Q$" está implicada por "$(\exists x)Fx \supset Q$", no implica la última. Hay una equivalencia, sin embargo, entre *hay cuando menos un x tal que si x tiene F entonces* Q y *si dado cualquier x, x tiene F entonces* Q que se expresa simbólicamente como

$$(\exists x)(Fx \supset Q) \equiv [(x)Fx \supset Q]$$

Esta equivalencia lógica proporciona un método alternativo para simbolizar una de las proposiciones discutidas en la Sec. 4.4:

Si algo está mal en la casa, entonces todos en la casa se quejan.

La traducción dada ahí se abrevia a

$$(\exists x)Wx \supset (y)(Py \supset Cy)$$

que como acabamos de observar es lógicamente equivalente a

$$(x)[Wx \supset (y)(Py \supset Cy)]$$

Concluiremos nuestra discusión de las proposiciones lógicamente verdaderas que involucran cuantificadores dirigiendo nuestra atención a cuatro proposiciones lógicamente verdaderas que no son equivalencias ni condicionales. Corresponden en cierto sentido a nuestras reglas de cuantificación:

1. $(y)[(x)Fx \supset Fy]$
2. $(y)[Fy \supset (\exists x)Fx]$
3. $(\exists y)[Fy \supset (x)Fx]$
4. $(\exists y)[(\exists x)Fx \supset Fy]$

La primera de éstas corresponde a **UI** al decir, como de hecho dice, que dado cualquier individuo y si cualquier individuo tiene el atributo F entonces y lo tiene. Su demostración es casi trivialmente obvia y procede como a continuación:

→ 1.	$(x)Fx$	
2.	Fz	1, **UI**
3.	$(x)Fx \supset Fz$	1–2, C.P.
4.	$(y)[(x)Fx \supset Fy]$	3, **UG**

La segunda corresponde a **EG** al afirmar que si cualquier individuo dado y tiene el atributo F entonces algo tiene F. La tercera y la cuarta correspondientes a **UG** y **EI** no son tan obvias de forma inmediata, pero son lógicamente verdaderas y se demuestran con mucha facilidad. Puede darse una explicación intuitiva por referencia al general y estadista ateniense Arístides, con frecuencia llamado "El justo". Tan sobresaliente era Arístides por su rectitud que los atenienses adoptaron el dicho:

Si alguien es justo, Arístides es justo.

Con respecto a *cualquier* atributo, siempre hay un individuo y tal que si cualquier cosa tiene el atributo, y lo tiene. Eso es lo afirmado por la cuarta proposición de antes que corresponde a **EI**. El asunto puede describirse de otra manera. Si nos ocupamos no del atributo de ser justo sino de su inverso, el atributo de ser corruptible, entonces el sentido del primer dicho ateniense también se expresa

Si Arístides es corruptible, entonces cualquiera es corruptible.

Generalizando otra vez, podemos observar que respecto a *cualquier* atributo siempre hay algún individuo y tal que si y tiene ese atributo todo tiene ese atributo. Esto es lo que se afirma en la tercera proposición de antes que corresponde a **UG**. Su demostración procede como:

→ 1.	$\sim(\exists y)[Fy \supset (x)Fx]$	
2.	$(y)\sim[Fy \supset (x)Fx]$	1, **QN**
3.	$\sim[Fy \supset (x)Fx]$	2, **UI**
4.	$Fy \cdot \sim(x)Fx$	3, Impl.
5.	Fy	4, Simp.
6.	$(x)Fx$	5, **UG**
7.	$(x)Fx \vee (\exists y)[Fy \supset (x)Fx]$	6, Ad.
8.	$\sim(x)Fx$	4, Simp.
9.	$(\exists y)[Fy \supset (x)Fx]$	7, 8, D.S.
10.	$\sim(\exists y)[Fy \supset (x)Fx] \supset (\exists y)[Fy \supset (x)Fx]$	1-9, C.P.
11.	$(\exists y)[Fy \supset (x)Fx] \vee (\exists y)[Fy \supset (x)Fx]$	10, Impl., D.N.
12.	$(\exists y)[Fy \supset (x)Fx]$	11, Taut.

Aunque no lo demostraremos sino en el Cap. 9, los métodos de demostración hasta ahora construidos (técnicas para la "Deducción Natural", como a veces se les llama) permiten la demostración de todas las proposiciones lógicamente verdaderas formadas mediante conectivos de función de verdad y la cuantificación de variables individuales. También se demostrará que *solamente* las proposiciones que son lógicamente verdaderas se pueden demostrar con estas técnicas.

EJERCICIOS

Construir demostraciones para las siguientes en donde Q es o una proposición o una función proposicional sin ocurrencias libres de la variable "x":

1. $(x)(Fx \supset Q) \equiv [(\exists x)Fx \supset Q]$
2. $(\exists x)(Fx \cdot Gx) \supset [(\exists x)Fx \cdot (\exists x)Gx]$
3. $(x)(Fx \supset Gx) \supset [(x)Fx \supset (x)Gx]$
*4. $[(\exists x)Fx \supset (\exists x)Gx] \supset (\exists x)(Fx \supset Gx)$
5. $(\exists x)(Q \supset Fx) \equiv [Q \supset (\exists x)Fx]$
6. $(\exists x)(Fx \cdot Q) \equiv [(\exists x)Fx \cdot Q]$
7. $(x)(Fx \vee Q) \equiv [(x)Fx \vee Q]$
*8. $(\exists x)(Fx \vee Q) \equiv [(\exists x)Fx \vee Q]$
9. $(\exists x)(Fx \supset Q) \equiv [(x)Fx \supset Q]$
10. $(y)[Fy \supset (\exists x)Fx]$
11. $(\exists y)[(\exists x)Fx \supset Fy]$
*12. $[(\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx] \equiv (\exists x)(Fx \vee Gx)$
13. $(x)(\exists y)(Fx \cdot Gy) \equiv (\exists y)(x)(Fx \cdot Gy)$
14. $(x)(\exists y)(Fx \vee Gy) \equiv (\exists y)(x)(Fx \vee Gy)$
15. $(x)(\exists y)(Fx \supset Gy) \supset [(x)Fx \supset (\exists y)Gy]$