Capítulo 3*
Árboles de forzamiento semántico clásico[1]

Manuel Sierra-Aristizábal
Departamento de Ciencias Matemáticas
Universidad EAFIT. Colombia

El análisis de validez de un argumento se puede hacer mediante las tablas de verdad: simplemente se determina si el condicional asociado al argumento es tautología o no. Se reduce el problema de la validez al de la complejidad de la tabla de verdad: mientras más filas tenga, más compleja será.

Surge entonces la pregunta: ¿Cuántas filas tiene la tabla de verdad de un argumento dado? La respuesta, aunque simple, es desalentadora: el número de filas depende del número de enunciados atómicos que figuren en el argumento. Supongamos que figuran n enunciados atómicos, y, como cada uno de ellos puede tomar el valor 1 o el valor 0, se tienen 2^n posibles combinaciones o asignaciones de valores de verdad. ¡Demasiados cálculos! No es eficiente; es necesario otro método.

Los árboles de forzamiento semántico proporcionan tal método.

3.1 Lenguaje de CL

El lenguaje de la Lógica Clásica CL consta de los operadores binarios $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ y $\leftrightarrow$, y del operador monádico $\sim$, además del paréntesis izquierdo y el paréntesis derecho. El conjunto de *fórmulas de* CL es generado por las siguientes reglas y sólo por ellas:

Regla 1. Se tiene un conjunto enumerable de *fórmulas atómicas*.

Regla 2. Si A es una fórmula, entonces $\sim$(A) es una fórmula.

Regla 3. Si A y B son fórmulas, entonces (A)$\wedge$(B), (A)$\vee$(B), (A)$\rightarrow$(B) y (A)$\leftrightarrow$(B) son fórmulas.

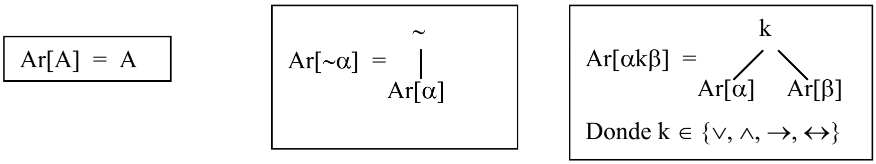
---

[1] Los *Árboles de forzamiento semántico clásico* fueron presentados por primera vez en 1999, en el VII Encuentro de la Escuela Regional de Matemáticas, en la Universidad de Antioquia, Medellín. La presentación aparece publicada en el núm. 123 de la *Revista de la Universidad EAFIT* en 2001. La caracterización deductiva aparece publicada en el vol. 2, núm. 3 de la *Revista Ingeniería y Ciencia* en 2006.

* Capítulo 3 del libro: *Argumentación deductiva con diagramas y Árboles de forzamiento*. Manuel Sierra Aristizábal. ISBN: 978-958-720-054-6. Fondo Editorial Universidad EAFIT. Medellín. Colombia. 2010.

3.2 Árbol de una fórmula

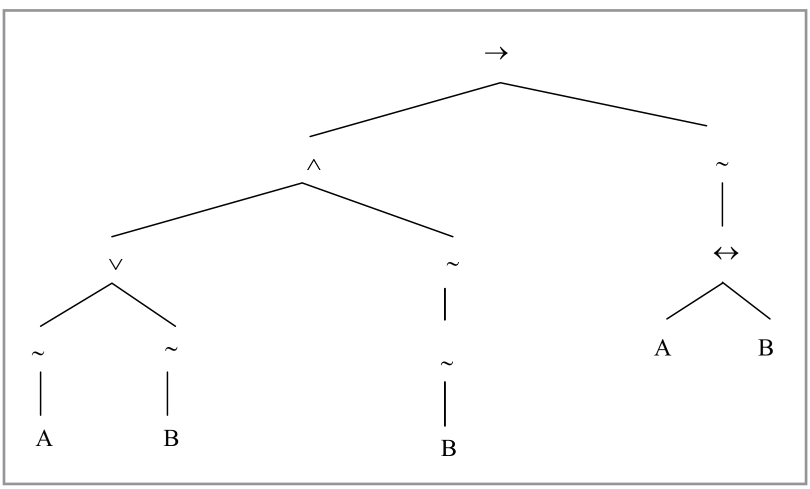
El *árbol de la fórmula* α se representa por Ar[α], y se construye utilizando las siguientes reglas (A: fórmula atómica; α y β: fórmulas arbitrarias):



Definimos el *árbol de un argumento* " de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ se infiere β" como: Ar[$(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$], el árbol del *condicional asociado* al argumento.
El nodo superior del árbol de la fórmula α es llamado la *raíz* del árbol; se denota R[α], y corresponde al conectivo principal de la fórmula α.

Los nodos inferiores, es decir, aquellos de los cuales no salen ramas, son llamados *hojas* y corresponden a las fórmulas atómicas.

Por ejemplo, para el argumento " de $\sim A \vee \sim B$, $\sim\sim B$ se infiere $\sim(A \leftrightarrow B)$", el condicional asociado es $[(\sim A \vee \sim B) \wedge \sim\sim B] \rightarrow \sim(A \leftrightarrow B)$, y su árbol es:



3.3 Marcando los nodos de un árbol

Si un nodo C es el conectivo monádico ~, entonces su único hijo se llama el *alcance de la negación*, y para hacer referencia a él se utiliza la notación *a*~.

Si un nodo K es uno de los conectivos binarios $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ o $\leftrightarrow$, entonces, para sus *hijos izquierdo* y *derecho* se utiliza la notación iK y dK respectivamente.

Para toda sub-fórmula β de α, el *nodo asociado* a β es la raíz de β, R[β], la cual, a su vez, es el conectivo principal de β en el caso de que β sea compuesta, o es la misma β en el caso de que β sea atómica.

Para una fórmula α, sea $H(\alpha)$ el conjunto de hojas de Ar[α], y $N(\alpha)$ el conjunto de nodos de Ar[α].

Para cada fórmula α, una *función de marca de hojas* m (o, simplemente, *función de marca*), es una función de $H(\alpha)$ en $\{0, 1\}$.

Si $m(p) = 1$, entonces se dice que la hoja p está marcada con 1, o que *es aceptada*.

Si $m(p) = 0$, entonces se dice que la hoja p está marcada con 0, o que *es rechazada*.

Cada función de marca de hojas m se extiende a una *función de marca de nodos* M, de $N(\alpha)$ en $\{0, 1\}$, tal que $M(p) = m(p)$, si p es una hoja. Si el nodo no es una hoja, entonces se marca de acuerdo con las siguientes *reglas primitivas y derivadas*:

3.3.1Reglas primitivas para la conjunción

A$\wedge$. *Aceptación de la conjunción*
Si una conjunción es aceptada, entonces tanto el hijo izquierdo como el derecho son aceptados.

$$M(\wedge) = 1 \Rightarrow [M(i\wedge) = 1 \text{ y } M(d\wedge) = 1]$$

AiAd$\wedge$. *Aceptación a la izquierda y aceptación a la derecha en la conjunción*
Si en una conjunción tanto el hijo izquierdo como el derecho son aceptados, entonces la conjunción es aceptada.

$$[M(i\wedge) = 1 \text{ y } M(d\wedge) = 1] \Rightarrow M(\wedge) = 1$$

3.3.2 Reglas primitivas para la disyunción

R$\vee$. *Rechazo de la disyunción*
Si una disyunción es rechazada, entonces tanto el hijo izquierdo como el derecho son rechazados.

$$M(\vee) = 0 \Rightarrow [M(i\vee) = 0 \text{ y } M(d\vee) = 0]$$

RiRd$\vee$. *Rechazo a la izquierda y rechazo a la derecha en la disyunción*
Si en una disyunción tanto el hijo izquierdo como el derecho son rechazados, entonces la disyunción es rechazada.

$$[M(i\vee) = 0 \text{ y } M(d\vee) = 0] \Rightarrow M(\vee) = 0$$

3.3.3 Reglas primitivas para el condicional

R$\rightarrow$. *Rechazo del condicional*
Si un condicional es rechazado, entonces el hijo izquierdo es aceptado y el hijo derecho es rechazado.

$$M(\rightarrow) = 0 \Rightarrow [M(i\rightarrow) = 1 \text{ y } M(d\rightarrow) = 0]$$

AiRd$\rightarrow$. *Aceptación a la izquierda y rechazo a la derecha en el condicional*
Si en un condicional el hijo izquierdo es aceptado y el hijo derecho es rechazado, entonces el condicional es rechazado.

$$[M(i\rightarrow) = 1 \text{ y } M(d\rightarrow) = 0] \Rightarrow M(\rightarrow) = 0$$

3.3.4 Reglas primitivas para el bicondicional

A$\leftrightarrow$. *Aceptación del bicondicional*
Un bicondicional es aceptado si y solamente si ambos hijos tienen la misma marca, ambos son aceptados, o ambos son rechazados.

$$M(\leftrightarrow) = 1 \Leftrightarrow M(i\leftrightarrow) = M(d\leftrightarrow)$$

3.3.5 Reglas primitivas para la negación

A~. *Aceptación de la negación*
Si una negación es aceptada, entonces su alcance es rechazado.

$$M(\sim) = 1 \Rightarrow M(a\sim) = 0$$

Ra~. *Rechazo del alcance de la negación*
Si el alcance una negación es rechazado, entonces la negación es aceptada.

$$M(a\sim) = 0 \Rightarrow M(\sim) = 1$$

Decimos que una fórmula α es A-válida (válida desde el punto de vista de los árboles, $\models_A \alpha$) si y solamente si para toda función de marca m se tiene que $M(R[\alpha]) = 1$.

Decimos que una fórmula α es A-inválida si no es A-válida, es decir, si existe una función de marca m tal que $M(R[\alpha]) = 0$. En este caso, decimos que la *función de marca refuta* la fórmula α. También se dice que el *árbol de* α *está bien marcado* (ABM: todos sus nodos están marcados de acuerdo con las reglas).

3.4 Reglas derivadas para el forzamiento de marcas

Las reglas primitivas para el forzamiento de marcas son suficientes para estudiar las propiedades de los árboles de forzamiento; pero, en la práctica, cuando se trata de marcar todos los nodos de un árbol, es importante tener reglas que cubran todas las posibilidades.

A continuación se presenta un juego completo de *reglas derivadas*.

3.4.1 Proposición

Reglas derivadas para el condicional

AiA$\rightarrow$. *Aceptación a la izquierda y aceptación del condicional*
Si son aceptados tanto el condicional como su hijo izquierdo, entonces es aceptado el hijo derecho.

$$[M(i\rightarrow) = 1 \text{ y } M(\rightarrow) = 1] \Rightarrow M(d\rightarrow) = 1$$

RdA$\rightarrow$. *Rechazo a la derecha y aceptación del condicional*
Si un condicional es aceptado y su hijo derecho es rechazado, entonces es rechazado el hijo izquierdo.

$$[M(d\rightarrow) = 0 \text{ y } M(\rightarrow) = 1] \Rightarrow M(i\rightarrow) = 0$$

Ri$\rightarrow$. *Rechazo a la izquierda en el condicional*
Si en un condicional se rechaza el hijo izquierdo, entonces se acepta el condicional.

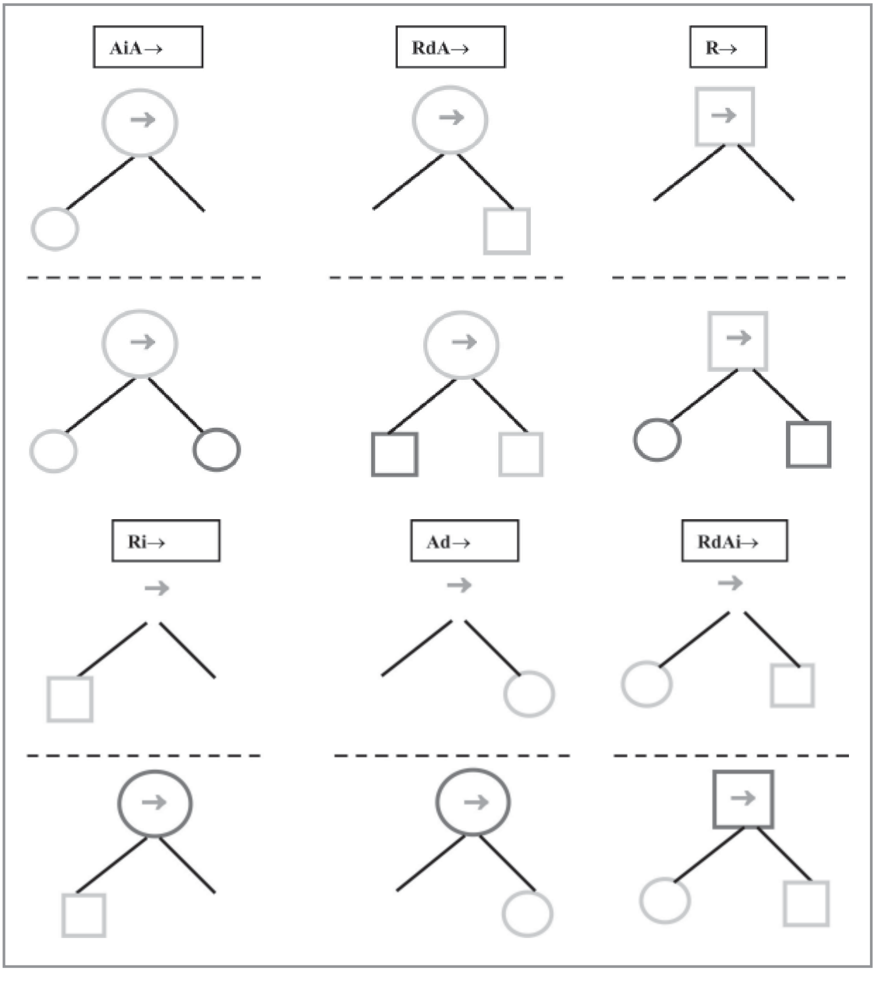
$$M(i\rightarrow) = 0 \Rightarrow M(\rightarrow) = 1$$

Ad$\rightarrow$. *Aceptación a la derecha en el condicional*
Si en un condicional se acepta el hijo derecho, entonces se acepta el condicional.

$$M(d\rightarrow) = 1 \Rightarrow M(\rightarrow) = 1$$

Prueba de AiA→
Sean M(i→)= 1 y M(→)=1. Supóngase que M(d→)=0; entonces se tiene que M(i→) = 1 y M(d→) = 0, y por AiRd→ se infiere M(→) = 0, lo cual no es el caso.
Por lo tanto, forzosamente M(d→) = 1.

Prueba de RdA→
Sean M(d→)= 0 y M(→)=1. Supóngase que M(i→)=1; entonces se tiene que M(i→)=1 y M(d→)= 0, y por AiRd→ se infiere M(→)=0, lo cual no es el caso.
Por lo tanto, forzosamente M(i→) = 0.



Prueba de Ri$\rightarrow$
Sea $M(i\rightarrow) = 0$. Supóngase que $M(\rightarrow) = 0$; entonces por R$\rightarrow$ se infiere $M(i\rightarrow) = 1$, lo cual no es el caso.
Por lo tanto, forzosamente $M(\rightarrow) = 1$.

Prueba de Ad$\rightarrow$
Sea $M(d\rightarrow) = 1$. Supóngase que $M(\rightarrow) = 0$; entonces por R$\rightarrow$ se infiere $M(d\rightarrow) = 0$, lo cual no es el caso.
Por lo tanto, forzosamente $M(\rightarrow) = 1$.

3.4.2 Proposición

Reglas derivadas para la conjunción

AiR$\wedge$. *Aceptación a a la izquierda y rechazo de la conjunción*
Si se rechaza una conjunción pero se acepta su hijo izquierdo, entonces se rechaza su hijo derecho.

$$[M(i\wedge) = 1 \text{ y } M(\wedge) = 0] \Rightarrow M(d\wedge) = 0$$

AdR$\wedge$. *Aceptación a la derecha y rechazo de la conjunción*
Si se rechaza una conjunción pero se acepta su hijo derecho, entonces se rechaza su hijo izquierdo.

$$[M(d\wedge) = 1 \text{ y } M(\wedge) = 0] \Rightarrow M(i\wedge) = 0$$

Ri$\wedge$. *Rechazo a la izquierda en la conjunción*
Si se rechaza el hijo izquierdo de una conjunción, entonces se rechaza la conjunción.

$$M(i\wedge) = 0 \Rightarrow M(\wedge) = 0$$

Rd$\wedge$. *Rechazo a la derecha en la conjunción*
Si se rechaza el hijo derecho de una conjunción, entonces se rechaza la conjunción.

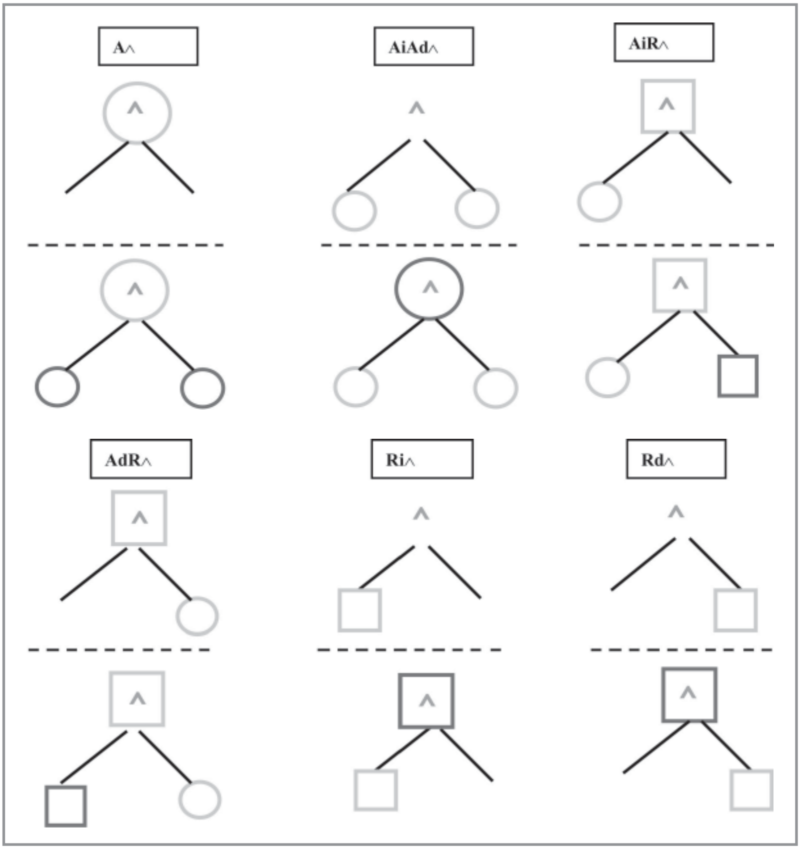
$$M(d\wedge) = 0 \Rightarrow M(\wedge) = 0$$

Prueba de AiR$\wedge$.
Sean $M(i\wedge) = 1$ y $M(\wedge) = 0$. Supóngase que $M(d\wedge) = 1$; entonces se tiene que $M(i\wedge) = 1$ y $M(d\wedge) = 1$, y por AiAd$\wedge$ se infiere $M(\wedge) = 1$, lo cual no es el caso.
Por lo tanto, forzosamente $M(d\wedge) = 0$.

Prueba de AdR∧.
Sean M(d∧) = 1 y M(∧) = 0. Supóngase que M(i∧) = 1; entonces se tiene que M(i∧) = 1 y M(d∧) = 1, y por AiAd∧ se infiere M(∧) = 1, lo cual no es el caso.
Por lo tanto, forzosamente M(i∧) = 0.

Prueba de Ri∧.
Sea M(i∧) = 0. Supóngase que M(∧) = 1; entonces por A∧ se infiere M(i∧) = 1, lo cual no es el caso.
Por lo tanto, forzosamente M(∧) = 0.

Prueba de Rd∧.
Sea M(d∧) = 0. Supóngase que M(∧) = 1; entonces por A∧ se infiere M(d∧) = 1, lo cual no es el caso.
Por lo tanto, forzosamente M(∧) = 0.



3.4.3 Proposición

Reglas derivadas para la disyunción

RiA$\vee$. *Rechazo a la izquierda y aceptación de la disyunción*
Si se acepta una disyunción pero se rechaza su hijo izquierdo, entonces se acepta su hijo derecho.

$$[M(i\vee) = 0 \text{ y } M(\vee) = 1] \Rightarrow M(d\vee) = 1$$

RdA$\vee$. *Rechazo a la derecha y aceptación de la disyunción*
Si se acepta una disyunción pero se rechaza su hijo derecho, entonces se acepta su hijo izquierdo.

$$[M(d\vee) = 0 \text{ y } M(\vee) = 1] \Rightarrow M(i\vee) = 1$$

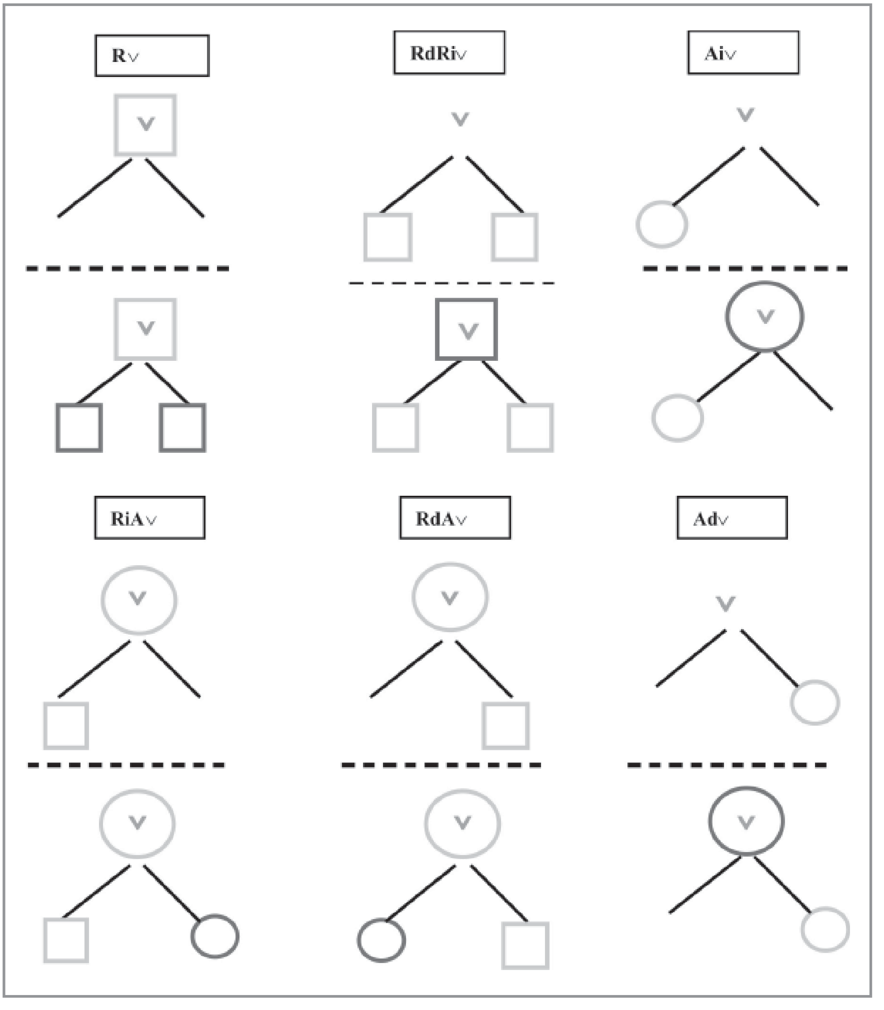
Ai$\vee$.*Aceptación a la izquierda en la disyunción*
Si se acepta el hijo izquierdo de una disyunción, entonces se acepta la disyunción.

$$M(i\vee) = 1 \Rightarrow M(\vee) = 1$$

Ad$\vee$. *Aceptación a la derecha en la disyunción*
Si se acepta el hijo derecho de una disyunción, entonces se acepta la disyunción.

$$M(d\vee) = 1 \Rightarrow M(\vee) = 1$$

Prueba de RiA$\vee$.
Sean $M(i\vee) = 0$ y $M(\vee) = 1$. Supóngase que $M(d\vee) = 0$; entonces se tiene que $M(i\vee) = 0$ y $M(d\vee) = 0$, y por RiRd$\vee$ se infiere $M(\vee) = 0$, lo cual no es el caso.
Por lo tanto, forzosamente $M(d\vee) = 1$.



Prueba de RdA∨.
Sean M(d∨) = 0 y M(∨) = 1. Supóngase que M(i∨) = 0; entonces se tiene que M(i∨) = 0 y M(d∨) = 0, y por RiRd∨ se infiere M(∨) = 0, lo cual no es el caso.
Por lo tanto, forzosamente M(i∨) = 1.

Prueba de Ai∨.
Sea M(i∨) = 1. Supóngase que M(∨) = 0; entonces por R∨ se infiere M(i∨) = 0, lo cual no es el caso.
Por lo tanto, forzosamente M(∨) = 1.

Prueba de Ad$\vee$.
Sea $M(d\vee) = 1$. Supóngase que $M(\vee) = 0$; entonces por R$\vee$ se infiere $M(d\vee) = 0$, lo cual no es el caso.
Por lo tanto, forzosamente $M(\vee) = 1$.

3.4.4 Proposición

Reglas derivadas para el bicondicional

AiAd$\leftrightarrow$. *Aceptación a la izquierda y aceptación a la derecha en el bicondicional*
Si se aceptan ambos hijos de un bicondicional, entonces se acepta el bicondicional.

$$[M(i\leftrightarrow) = 1 \text{ y } M(d\leftrightarrow) = 1] \Rightarrow M(\leftrightarrow) = 1$$

RiRd$\leftrightarrow$. *Rechazo a la izquierda y rechazo a la derecha en el bicondicional*
Si se rechazan ambos hijos de un bicondicional, entonces se acepta el bicondicional.

$$[M(i\leftrightarrow) = 0 \text{ y } M(d\leftrightarrow) = 0] \Rightarrow M(\leftrightarrow) = 1$$

AiRd$\leftrightarrow$. *Aceptación a la izquierda y rechazo a la derecha en el bicondicional*
Si en un bicondicional se acepta el hijo izquierdo pero se rechaza el hijo derecho, entonces se rechaza el bicondicional.

$$[M(i\leftrightarrow) = 1 \text{ y } M(d\leftrightarrow) = 0] \Rightarrow M(\leftrightarrow) = 0$$

AiA$\leftrightarrow$. *Aceptación a la izquierda y aceptación del bicondicional*
Si se aceptan tanto el bicondicional como su hijo izquierdo, entonces se acepta el hijo derecho.

$$[M(i\leftrightarrow) = 1 \text{ y } M(\leftrightarrow) = 1] \Rightarrow M(d\leftrightarrow) = 1$$

RdA$\leftrightarrow$. *Rechazo a la derecha y aceptación del bicondicional*
Si se acepta un bicondicional y se rechaza su hijo derecho, entonces se rechaza el hijo izquierdo.

$$[M(d\leftrightarrow) = 0 \text{ y } M(\leftrightarrow) = 1] \Rightarrow M(i\leftrightarrow) = 0$$

RiAd$\leftrightarrow$. *Rechazo a la izquierda y aceptación a la derecha en el bicondicional*
Si en un bicondicional se rechaza su hijo izquierdo y se acepta su hijo derecho, entonces se rechaza el bicondicional.

$$[M(i\leftrightarrow) = 0 \text{ y } M(d\leftrightarrow) = 1] \Rightarrow M(\leftrightarrow) = 0$$

RiA↔. *Rechazo a la izquierda y aceptación del bicondicional*
Si se acepta un bicondicional y se rechaza su hijo izquierdo, entonces se rechaza el hijo derecho.

$$[M(i\leftrightarrow) = 0 \text{ y } M(\leftrightarrow) = 1] \Rightarrow M(d\leftrightarrow) = 0$$

AdA↔. *Aceptación a la derecha y aceptación del bicondicional*
Si se acepta un bicondicional y se acepta su hijo derecho, entonces se acepta el hijo izquierdo.

$$[M(d\leftrightarrow) = 1 \text{ y } M(\leftrightarrow) = 1] \Rightarrow M(i\leftrightarrow) = 1$$

RiR↔. *Rechazo a la izquierda y rechazo del bicondicional*
Si se rechaza un bicondicional y se rechaza su hijo izquierdo, entonces se acepta el hijo derecho.

$$[M(i\leftrightarrow) = 0 \text{ y } M(\leftrightarrow) = 0] \Rightarrow M(d\leftrightarrow) = 1$$

AiR↔. *Aceptación a la izquierda y rechazo del bicondicional*
Si se rechaza un bicondicional y se acepta su hijo izquierdo, entonces se rechaza el hijo derecho.

$$[M(i\leftrightarrow) = 1 \text{ y } M(\leftrightarrow) = 0] \Rightarrow M(d\leftrightarrow) = 0$$

RdR↔. *Rechazo a la derecha y rechazo del bicondicional*
Si se rechaza un bicondicional y se rechaza su hijo derecho, entonces se acepta el hijo izquierdo.

$$[M(d\leftrightarrow) = 0 \text{ y } M(\leftrightarrow) = 0] \Rightarrow M(i\leftrightarrow) = 1$$

AdR↔. *Aceptación a la derecha y rechazo del bicondicional*
Si se rechaza un bicondicional y se acepta su hijo derecho, entonces se rechaza el hijo izquierdo.

$$[M(d\leftrightarrow) = 1 \text{ y } M(\leftrightarrow) = 0] \Rightarrow M(i\leftrightarrow) = 0$$

Prueba de AiAd↔.
Sean $M(i\leftrightarrow) = 1$ y $M(d\leftrightarrow) = 1$. Se tiene, entonces, que $M(i\leftrightarrow) = M(d\leftrightarrow)$; por A↔ se infiere que forzosamente $M(\leftrightarrow) = 1$.

Prueba de RiRd↔.
Sean $M(i\leftrightarrow) = 0$ y $M(d\leftrightarrow) = 0$. Se tiene, entonces, que $M(i\leftrightarrow) = M(d\leftrightarrow)$; por A↔ se infiere que forzosamente $M(\leftrightarrow) = 1$.

Prueba de AiRd$\leftrightarrow$.
Sean $M(i\leftrightarrow) = 1$ y $M(d\leftrightarrow) = 0$. Se tiene, entonces, que $M(i\leftrightarrow) \neq M(d\leftrightarrow)$; por A$\leftrightarrow$ se infiere que forzosamente $M(\leftrightarrow) = 0$.

Prueba de AiA$\leftrightarrow$.
Sean $M(i\leftrightarrow) = 1$ y $M(\leftrightarrow) = 1$. Al ser $M(\leftrightarrow) = 1$, se tiene por A$\leftrightarrow$ que $M(i\leftrightarrow) = M(d\leftrightarrow)$, y como $M(i\leftrightarrow) = 1$, se infiere que forzosamente $M(d\leftrightarrow) = 1$.

Prueba de RdA$\leftrightarrow$.
Sean $M(d\leftrightarrow) = 0$ y $M(\leftrightarrow) = 1$. Al ser $M(\leftrightarrow) = 1$, se tiene por A$\leftrightarrow$ que $M(i\leftrightarrow) = M(d\leftrightarrow)$, y como $M(d\leftrightarrow) = 0$, se infiere que forzosamente $M(i\leftrightarrow) = 0$.

Prueba de RiAd$\leftrightarrow$.
Sean $M(i\leftrightarrow) = 0$ y $M(d\leftrightarrow) = 1$. Se tiene, entonces, que $M(i\leftrightarrow) \neq M(d\leftrightarrow)$; por A$\leftrightarrow$ se infiere que forzosamente $M(\leftrightarrow) = 0$.

Prueba de RiA$\leftrightarrow$.
Sean $M(i\leftrightarrow) = 0$ y $M(\leftrightarrow) = 1$. Al ser $M(\leftrightarrow) = 1$, se tiene por A$\leftrightarrow$ que $M(i\leftrightarrow) = M(d\leftrightarrow)$, y como $M(i\leftrightarrow) = 0$, se infiere que forzosamente $M(d\leftrightarrow) = 0$.

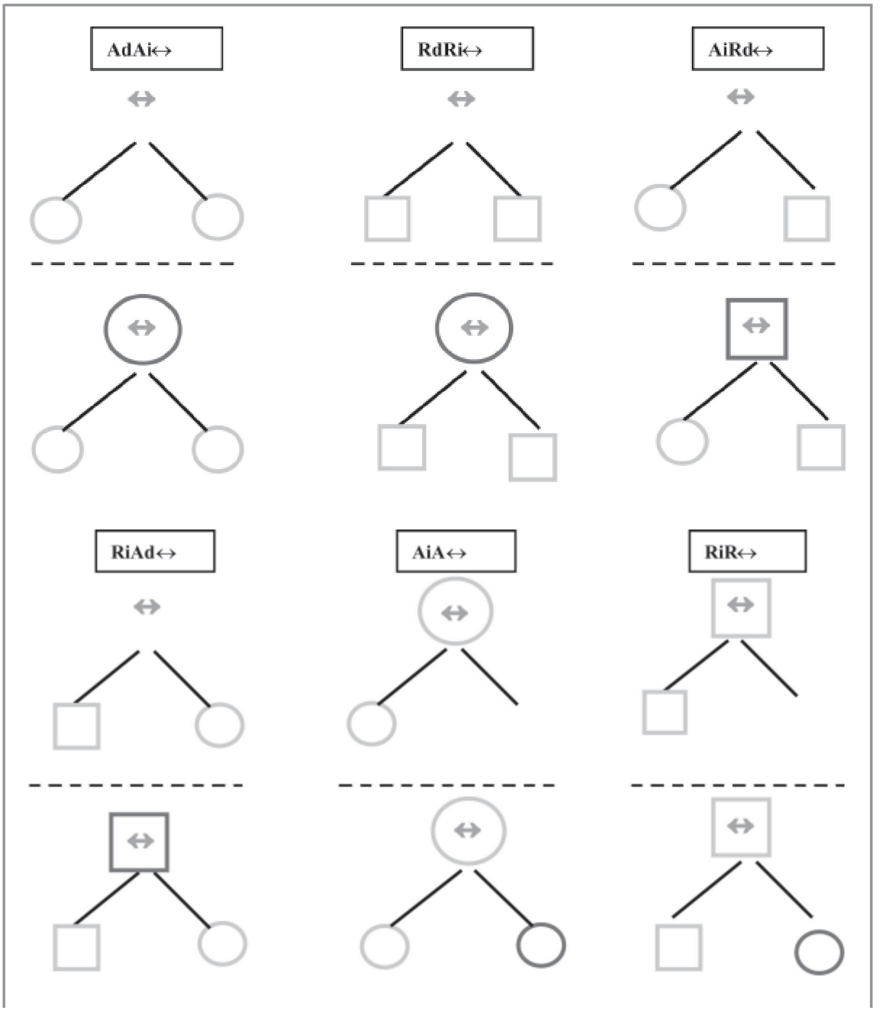
Prueba de AdA$\leftrightarrow$.
Sean $M(d\leftrightarrow) = 1$ y $M(\leftrightarrow) = 1$. Al ser $M(\leftrightarrow) = 1$, se tiene por A$\leftrightarrow$ que $M(i\leftrightarrow) = M(d\leftrightarrow)$, y como $M(d\leftrightarrow) = 1$, se infiere que forzosamente $M(i\leftrightarrow) = 1$.

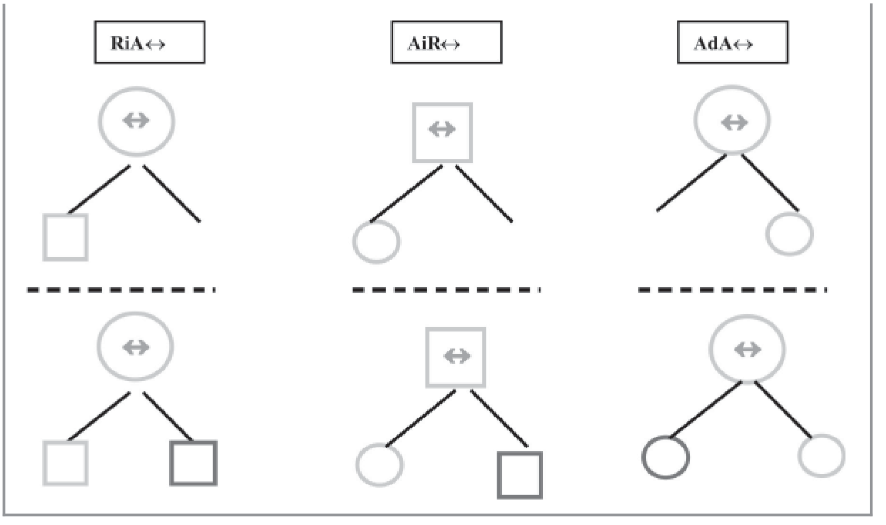
Prueba de RiR$\leftrightarrow$.
Sean $M(i\leftrightarrow) = 0$ y $M(\leftrightarrow) = 0$. Al ser $M(\leftrightarrow) = 0$, se tiene por A$\leftrightarrow$ que $M(i\leftrightarrow) \neq M(d\leftrightarrow)$, y como $M(i\leftrightarrow) = 0$, se infiere que forzosamente $M(d\leftrightarrow) = 1$.

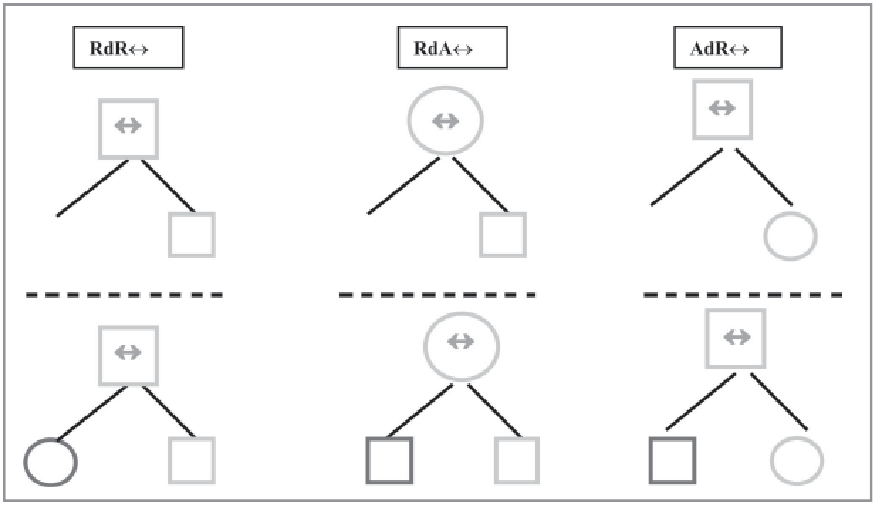
Prueba de AiR$\leftrightarrow$.
Sean $M(i\leftrightarrow) = 1$ y $M(\leftrightarrow) = 0$. Al ser $M(\leftrightarrow) = 0$, se tiene por A$\leftrightarrow$ que $M(i\leftrightarrow) \neq M(d\leftrightarrow)$, y como $M(i\leftrightarrow) = 1$, se infiere que forzosamente $M(d\leftrightarrow) = 0$.

Prueba de RdR↔.
Sean M(d↔) = 0 y M(↔) = 0. Al ser M(↔) = 0, se tiene por A↔ que M(i↔) ≠ M(d↔), y como M(d↔) = 0, se infiere que forzosamente M(i↔) = 1.

Prueba de AdR↔.
Sean M(d↔) = 1 y M(↔) = 0. Al ser M(↔) = 0, se tiene por A↔ que M(i↔) ≠ M(d↔), y como M(d↔) = 1, se infiere que forzosamente M(i↔) = 0.







3.4.5 Proposición

Reglas derivadas para la negación

Aa~. *Aceptación del alcance de la negación*
Si el alcance de una negación es aceptado, entonces la negación es rechazada.

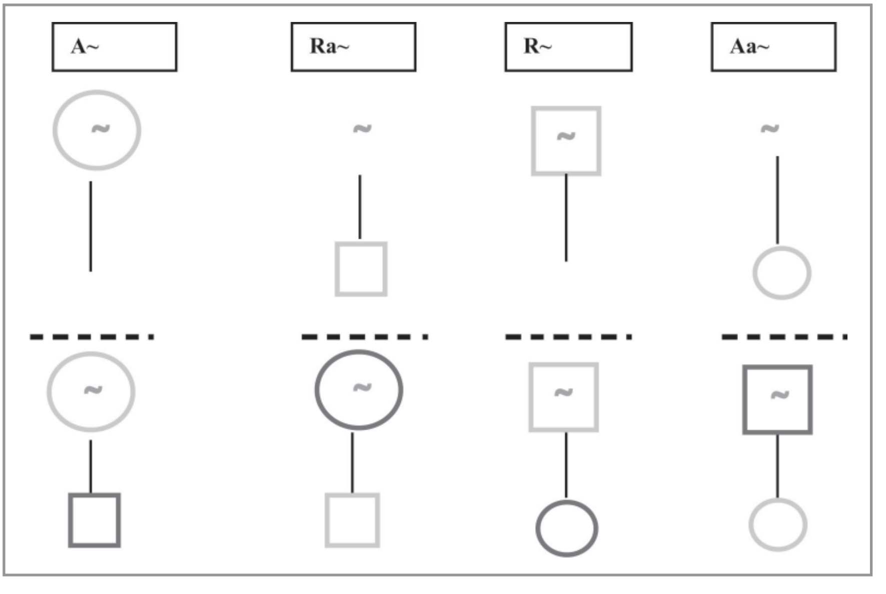
$$M(a\sim) = 1 \Rightarrow M(\sim) = 0$$

R~. *Rechazo de la negación*
Si la negación es rechazada, entonces su alcance es aceptado.

$$M(\sim) = 0 \Rightarrow M(a\sim) = 1$$

Prueba de Aa~.
Sea M(a~) = 1. Supóngase que M(~) = 1; entonces por A~ se infiere M(a~) = 0, lo cual no es el caso.
Por lo tanto, forzosamente M(~) = 0.

Prueba de R~.
Sea M(~) = 0. Supóngase que M(a~) = 0; entonces por Ra~ se infiere M(~) = 1, lo cual no es el caso.
Por lo tanto, forzosamente M(a~) = 1.



3.4.6 Proposición

Reglas de iteración

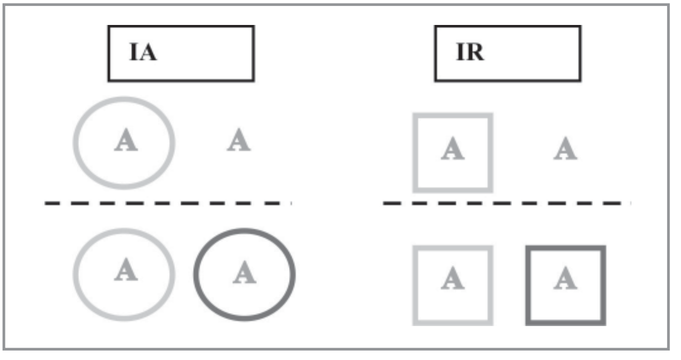
IA. *Iteración de la aceptación*
Sean n y k dos nodos asociados a una misma fórmula; si el nodo n es aceptado, entonces el nodo k también es aceptado.

$$[\text{n asociado a } \beta, \text{ k asociado a } \beta, n \neq k \text{ y } M(n) = 1] \Rightarrow M(k) = 1.$$

IR. *Iteración del rechazo*
Sean n y k dos nodos asociados a una misma fórmula; si el nodo n es rechazado, entonces el nodo k también es rechazado.

[n asociado a β, k asociado a β, $n \neq k$ y $M(n) = 0$] $\Rightarrow M(k) = 0$.

Prueba.
Si n y k son nodos asociados a una misma fórmula β, entonces n y k son, ambas, raíces de Ar[β]; como m es una función, entonces las marcas de n y k no pueden ser diferentes, es decir, $M(n) = 1$ si y solo si $M(k) = 1$.



3.4.7 Proposición

Reglas para la doble marca

OA-DM. *Opción de aceptación que genera doble marca*
Si al suponer que un nodo N está marcado con 1 (opción OA), y al aplicar las reglas para marcar nodos se tiene como consecuencia marcas diferentes en algún par de nodos asociados a una misma fórmula, entonces el nodo N realmente está marcado con 0.

Para cada nodo n, [$M(n) = 1 \Rightarrow$ para algún nodo k, $M(k) = 1$ y $M(k) = 0$] $\Rightarrow M(n) = 0$.

OR-DM. *Opción de rechazo que genera doble marca*
Si al suponer que un nodo N está marcado con 0 (opción OR), y al aplicar las reglas para marcar nodos se tiene como consecuencia marcas diferentes en algún par de nodos asociados a una misma fórmula, entonces el nodo N realmente está marcado con 1.

Para cada nodo n, [$M(n) = 0 \Rightarrow$ para algún nodo k, $M(k) = 1$ y $M(k) = 0$] $\Rightarrow M(n) = 1$.

RR-DM. *Rechazo de la raíz que genera doble marca*
Si en el árbol de la fórmula α se supone que la raíz está marcada con 0, y al aplicar las reglas para marcar nodos se tiene como consecuencia marcas diferentes en algún par de nodos asociados a una misma fórmula, entonces la fórmula α es A-válida.

En este caso, se dice que el árbol es un *árbol mal marcado* AMM.

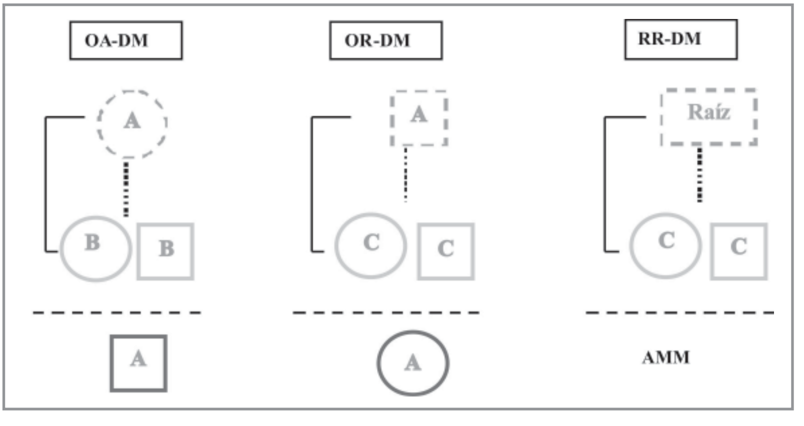
Si m es una función de marca, entonces:

Si $M(R[\alpha]) = 0$ implica que para algún nodo k, $M(k) = 1$ y $M(k) = 0$, entonces α es A-válida.

Prueba de OA-DM
Se tiene que $M(n) = 1 \Rightarrow$ para algún nodo k, $M(k) = 1$ y $M(k) = 0$. Supóngase que $M(n) = 1$; se infiere, entonces, que para algún nodo k, $M(k) = 1$ y $M(k) = 0$; pero esto es imposible, ya que M es una función. Por lo tanto, forzosamente $M(n) = 0$.

Prueba de OR-DM
Se tiene que $M(n) = 0 \Rightarrow$ para algún nodo k, $M(k) = 1$ y $M(k) = 0$. Supóngase que $M(n) = 0$; se infiere, entonces, que para algún nodo k, $M(k) = 1$ y $M(k) = 0$; pero esto es imposible, ya que M es una función. Por lo tanto, forzosamente $M(n) = 1$.

Prueba de RR-DM
Se tiene que $M(R[\alpha]) = 0 \Rightarrow$ para algún nodo k, $M(k) = 1$ y $M(k) = 0$, donde m es una función de marca. Supóngase que α no es A-válido, es decir, existe una función de marca m tal que $M(R[\alpha]) = 0$; se infiere, entonces, que para algún nodo k, $M(k) = 1$ y $M(k) = 0$, lo cual es imposible. Por lo tanto, forzosamente α es A-válido.



La regla RR-DM es frecuentemente utilizada, por lo que en vez de aplicar la *opción de rechazo de la raíz* OR (raíz marcada con cuadro punteado), trabajamos con las reglas *Rechazo de la Raíz* RR y *Doble Marca* DM como reglas primitivas.

3.4.8 Proposición

Reglas de opciones para el condicional

OAi-Ad→. *Opción de aceptación a la izquierda que genera aceptación a la derecha en un condicional*
Si se supone que el antecedente es aceptado, y al aplicar las reglas para marcar nodos se tiene como consecuencia que el consecuente también es aceptado, entonces el condicional realmente es aceptado.

$$[M(i\rightarrow) = 1 \Rightarrow M(d\rightarrow) = 1] \Rightarrow M(\rightarrow) = 1$$

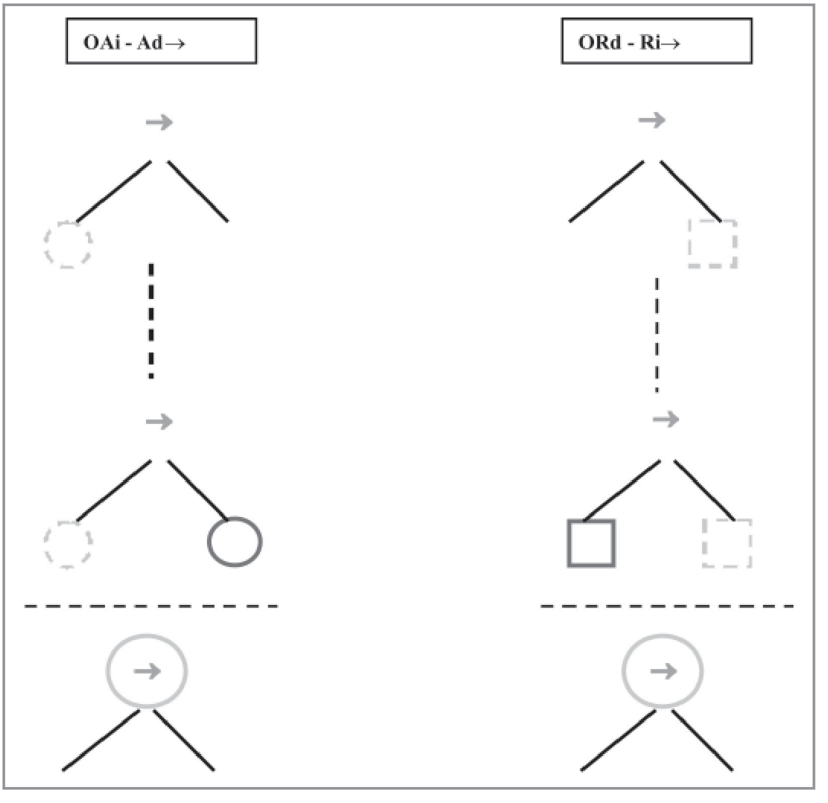
ORd-Ri→. *Opción de rechazo a la derecha que genera rechazo a la izquierda en un condicional*
Si se supone que el consecuente es rechazado, y al aplicar las reglas para marcar nodos se tiene como consecuencia que el antecedente también es rechazado, entonces el condicional realmente es aceptado.

$$[M(d\rightarrow) = 0 \Rightarrow M(i\rightarrow) = 0] \Rightarrow M(\rightarrow) = 1$$

Prueba de OAi-Ad→
Se tiene que $M(i\rightarrow) = 1 \Rightarrow M(d\rightarrow) = 1$. Supóngase que $M(\rightarrow) = 0$; entonces por R→ resulta que $M(i\rightarrow) = 1$ y $M(d\rightarrow) = 0$; pero al tener $M(i\rightarrow) = 1$, se infiere que $M(d\rightarrow) = 1$, pero esto es imposible, ya que se tiene que $M(d\rightarrow) = 0$.
Por lo tanto, forzosamente $M(\rightarrow) = 1$.

Prueba de ORd-Ri→
Se tiene que $M(d\rightarrow) = 0 \Rightarrow M(i\rightarrow) = 0$. Supóngase que $M(\rightarrow) = 0$; entonces por R→ resulta que $M(i\rightarrow) = 1$ y $M(d\rightarrow) = 0$; pero al tener

$M(d\to) = 0$, se infiere que $M(i\to) = 0$, pero esto es imposible ya que se tiene que $M(i\to) = 1$.
Por lo tanto, forzosamente $M(\to) = 1$.



3.4.9 Proposición

Reglas de opciones para la disyunción

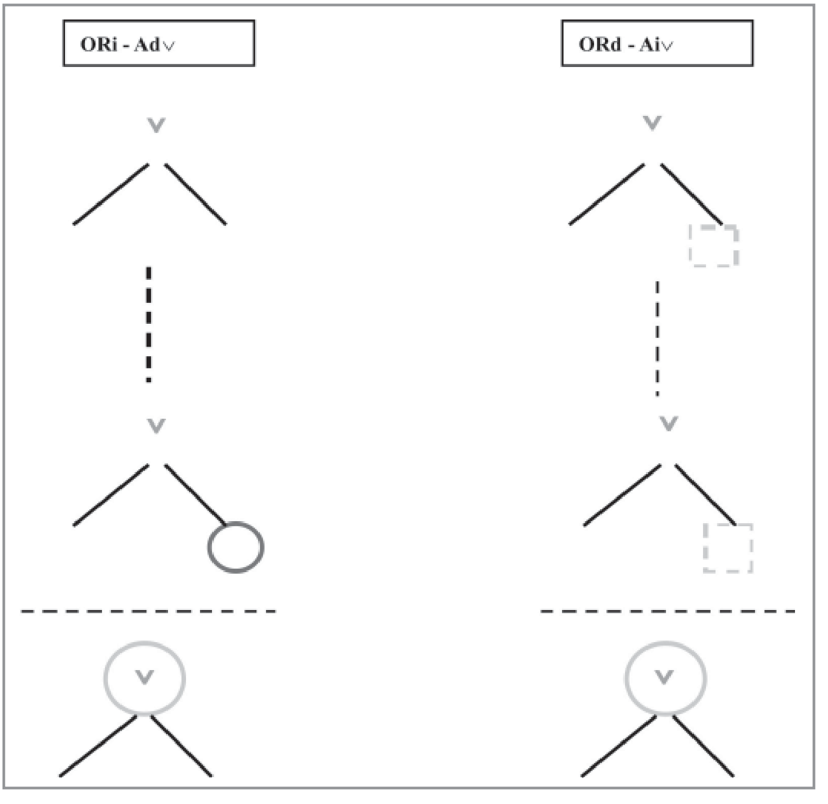
ORi-Ad∨. *Opción de rechazo a la izquierda que genera aceptación a la derecha en una disyunción*
Si se supone que el disyunto izquierdo es rechazado, y al aplicar las reglas para marcar nodos se tiene como consecuencia que el disyunto derecho es aceptado, entonces la disyunción realmente es aceptada.

$$[M(i\vee) = 0 \Rightarrow M(d\vee) = 1] \Rightarrow M(\vee) = 1$$

ORd-Ai∨. *Opción de rechazo a la derecha que genera aceptación a la izquierda en una disyunción*

Si se supone que el disyunto derecho es rechazado, y al aplicar las reglas para marcar nodos se tiene como consecuencia que el disyunto izquierdo es aceptado, entonces la disyunción realmente es aceptada.

$$[M(d\vee) = 0 \Rightarrow M(i\vee) = 1] \Rightarrow M(\vee) = 1$$



Prueba de ORi-Ad∨
Se tiene que $M(i\vee) = 0 \Rightarrow M(d\vee) = 1$. Supóngase que $M(\vee) = 0$; entonces por R∨ resulta que $M(i\vee) = 0$ y $M(d\vee) = 0$; pero al tener $M(i\vee) = 0$, se infiere que $M(d\vee) = 1$, pero esto es imposible ya que se tiene que $M(d\vee) = 0$. Por lo tanto, forzosamente $M(\vee) = 1$.

Prueba de ORd-Ai∨
Se tiene que $M(d\vee) = 0 \Rightarrow M(i\vee) = 1$. Supóngase que $M(\vee) = 0$; entonces por R∨ resulta que $M(i\vee) = 0$ y $M(d\vee) = 0$; pero al tener $M(d\vee) = 0$, se infiere que $M(i\vee) = 1$, pero esto es imposible ya que se tiene que $M(i\vee) = 0$. Por lo tanto, forzosamente $M(\vee) = 1$.

3.4.10 Validez y completitud

Si interpretamos un enunciado marcado con círculo como verdadero y un enunciado marcado con cuadro como falso, podemos verificar que las reglas de forzamiento sólo generan enunciados que se siguen lógicamente de las premisas; también podemos verificar que, dado un sistema deductivo para la lógica clásica, los árboles de forzamiento de todos sus axiomas están mal marcados.

Podemos, así, concluir que:

Un enunciado (*o argumento*) *es válido* (*no existe una asignación de valores de verdad que lo refute*) *si y solamente si el árbol de forzamiento semántico asociado al enunciado* (*o al argumento*) *está mal marcado* (AMM), *o la raíz forzosamente está marcada con* 1 (RM1).

Es decir, *un enunciado* (*o argumento*) *es inválido* (*existe una asignación de valores de verdad que lo refuta*) *si y solamente si el árbol de forzamiento semántico asociado al enunciado* (*o al argumento*) *está bien marcado* (ABM).

(Véase los detalles en el Capítulo 4*).

Si un árbol de forzamiento semántico asociado a un enunciado (o argumento) está bien marcado, *la interpretación de las marcas de sus hojas nos proporciona una asignación de valores de verdad que refuta el enunciado (o argumento).*

Podemos concluir que los árboles de forzamiento semántico nos proporcionan un método de decisión para el cálculo proposicional clásico.

3.5 Ilustraciones

Considérese el siguiente problema:

> *La destrucción*
>
> Un personaje del vecindario destruyó el supermercado del pueblo argumentando que estaban vendiendo alimentos descompuestos. Cierto material utilizado en la destrucción fue encontrado en la casa de los hermanos Tnt, cuyos nombres son: Tnt1, Tnt2 y Tnt3, detenidos y juzgados varios años después.

* La prueba se encuentra publicada en el artículo: *Caracterización deductiva de los árboles de forzamiento semántico*. Volumen 2, número 3, de la revista *Ingeniería y Ciencia,* año 2006.

—¿Por casualidad destruiste tú el supermercado? –preguntó el juez a Tnt1.

[1] [—¡Yo no, yo no fui! –declaró Tnt1].

— ¿Y tú? –preguntó el juez a Tnt2–. ¿Por casualidad eres tú el culpable?

—¡No, no! –dijo Tnt2–. [2] ¡Uno de nosotros es culpable, pero no fui yo!].

—Y, ¿qué pasa contigo? –prosiguió el juez con Tnt3–.

—¿Qué tienes tú que decir a todo esto? ¿Han dicho tus hermanos la verdad?

[3] [—Al menos uno sí –replicó Tnt3–] [$T3 \leftrightarrow (T1 \vee T2)$].

Como reveló la investigación subsiguiente, [4] [Tnt1 y Tnt 3 no decían, ambos, la verdad].

Si la declaración de Tnt2 fue registrada como que dijo que al menos uno de sus hermanos es culpable, garantice que con la información dada no se puede demostrar que Tnt3 sea inocente.

Demuestre también que Tnt1 es el culpable.

Solución

Sean T1: Tnt1 dice la verdad, T2: Tnt2 dice la verdad, T3: Tnt3 dice la verdad, T1C: Tnt1 es culpable, T2C: Tnt2 es culpable, T3C: Tnt3 es culpable, por lo que, se tienen las siguientes interpretaciones: $\sim$T1: Tnt1 miente, $\sim$T2: Tnt2 miente, $\sim$T3: Tnt3 miente, $\sim$T1C: Tnt1 es inocente, $\sim$T2C: Tnt2 es inocente, $\sim$T3C: Tnt3 es inocente.

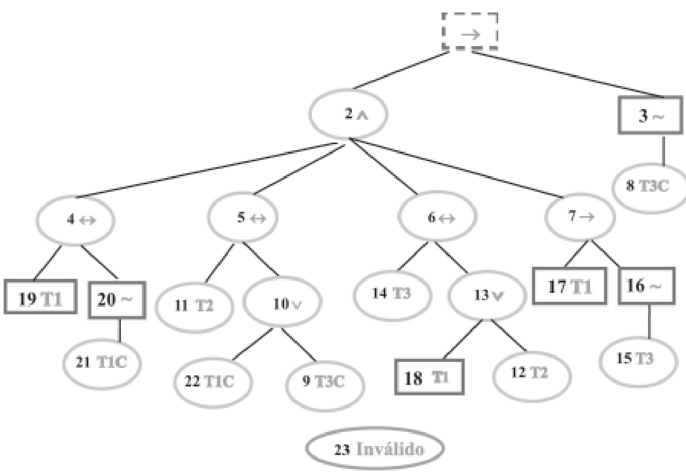
Se trata, entonces, de probar la invalidez del siguiente argumento:

"De [1] [$T1 \leftrightarrow \sim T1C$], [2] [$T2 \leftrightarrow (T1C \vee T3C)$], [3] [$T3 \leftrightarrow (T1 \vee T2)$], y [4] [$T1 \rightarrow \sim T3$], se infiere [5] [$\sim T3C$]".

Para refutar este argumento, se demuestra que el condicional asociado al argumento no es una tautología, es decir, encontrando una asignación de valores de verdad que lo refute, esta asignación se encuentra dibujando el árbol de forzamiento asociado al argumento; y utilizando las reglas de inferencia para el forzamiento de marcas (se marcan todos sus nodos), el resultado final, para que el argumento sea inválido, debe ser un árbol bien marcado; finalmente, de las marcas de sus hojas, se lee la asignación de valores de verdad que refuta la validez del argumento, es decir, que hace que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. El condicional asociado a este argumento es:

$\{[T1\leftrightarrow\sim T1C]\wedge[T2\leftrightarrow(T1C\vee T3C)]\wedge[T3\leftrightarrow(T1\vee T2)]\wedge [T1\rightarrow\sim T3]\}\rightarrow\sim T3C$. Véase el Árbol -1-.

Árbol -1-



Justificación

1. OR	2, 3. R→ en 1	4, 5, 6, 7. A∧ en 2
8. R~ en 3	9. IA en 8	10. Ad∨ en 9
11. AdA↔ en 10 y 5	12. IA en 11	13. Ad∨ en 12

14. AdA↔ en 13 y 6	15. IA en 14	16. Aa~ en 15
17. RdA→ en 16 y 7	18, 19. IR en 17	20. RiA↔ en 19 y 4
21. R~ en 20	22. IA en 21	23. ABM

Se tiene, entonces, que el argumento "de [1] [T1↔~T1C], [2] [T2↔(T1C∨T3C)], [3] [T3↔(T1 ∨T2)] y [4] [T1→~T3], se infiere [5] [~T3C]" es inválido, ya que es refutado cuando T2, T3, T1C y T3C son aceptados y T1 es rechazado (no es relevante la aceptación o el rechazo de T2C), puesto que, bajo esta configuración especifica de los enunciados atómicos, las premisas son verdaderas y la conclusión falsa, tal como lo indican los pasos 4, 5, 6, 7 y 3.

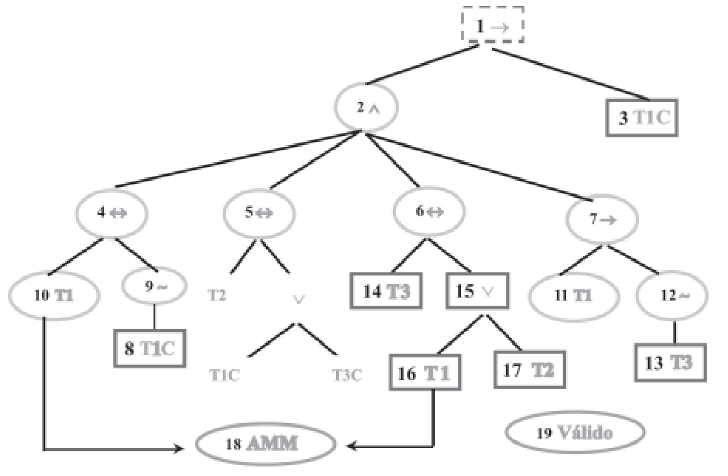
Se trata, también, de probar la validez del siguiente argumento:

"De [1] [T1↔~T1C], [2] [T2↔(T1C∨T3C)], [3] [T3↔(T1∨T2)] y [4] [T1→~T3], se infiere [6] [T1C]".

Para probar este argumento, se demuestra que el condicional asociado al argumento es una tautología, lo cual significa que no existe una asignación de valores de verdad que lo refute; esto se logra dibujando el árbol de forzamiento asociado al argumento, y utilizando las reglas de inferencia para el forzamiento de marcas, de tal manera que se puedan exhibir dos nodos asociados a un mismo enunciado, tales que tengan marcas diferentes, es decir, que un mismo enunciado sea aceptado y rechazado, esta doble marca indica que el árbol está mal marcado, lo que significa que el argumento no puede ser refutado y por lo tanto es válido. El condicional asociado a este argumento es:

{[T1↔~T1C]∧[T2↔(T1C∨T3C)]∧[T3↔(T1∨T2)]∧ [T1→~T3]}→T1C. Véase el Árbol -2-.

Árbol -2-



Justificación

1. OR	2, 3. R$\rightarrow$ en 1	4, 5, 6, 7. A$\wedge$ en 2
8. IR en 3	9. Ra$\sim$ en 8	10.AdA$\leftrightarrow$ en 9 y 4
11. IA en 10	12. AiA$\rightarrow$ en 11 y 7	13. A$\sim$ en 12
14. IR en 13	15. RiA$\leftrightarrow$ en 14 y 6	16, 17. R$\vee$ en 15
18. RR - DM en 1, 16 y 10	19. AMM en 18	

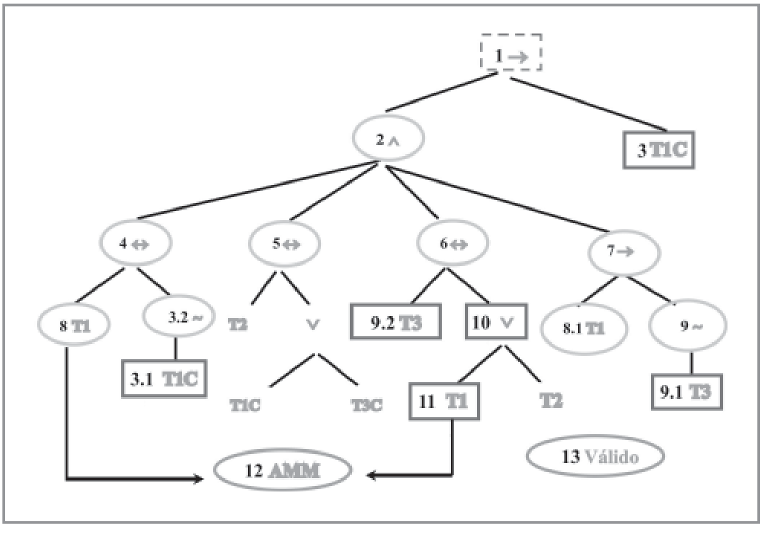
Se tiene, entonces, que el argumento “de [1] [$T1\leftrightarrow\sim T1C$], [2] [$T2\leftrightarrow(T1C\vee T3C)$], [3] [$T3\leftrightarrow(T1 \vee T2)$] y [4] [$T1\rightarrow\sim T3$], se infiere [5] [T1C]” es válido, ya que es imposible refutarlo, puesto que, cuando se intenta hacerlo, aparece una contradicción inaceptable.

3.6 De árboles de forzamiento a diagramas

Los árboles de forzamiento semántico no sólo son útiles para determinar la validez o invalidez de un argumento. En el caso de un argumento válido, los árboles de forzamiento también se pueden utilizar para generar un pasaje argumentativo que lleve de las premisas a la conclusión, *razonando con el método de reducción al absurdo.*

El proceso se ilustra a continuación con el ejemplo de *La destrucción.*

Inicialmente se simbolizan las premisas y la conclusión; luego se construye el árbol de forzamiento semántico y se marcan los nodos hasta que *se genere doble marca.* A fin de simplificar el proceso, y para que el resultado final sea más natural, las *reglas de la negación* y las *reglas de iteración* no se enumeran con números enteros: se utilizan decimales.



Justificaciones

1. OR	2, 3. R→ en 1	4, 5, 6, 7. A∧ en 2
3.1. IR en 3	3.2. Ra~ en 3.1	8. AdA↔ en 3.2 y 4
8.1. IA en 8	AiA→ en 8.1 y 7	9.1. A~ en 9
9.2. IR en 9.1	10. RiA↔ en 9.2 y 6	11. R∨ en 10
12. RR - DM en 1, 8 y 11	13. AMM en 12	

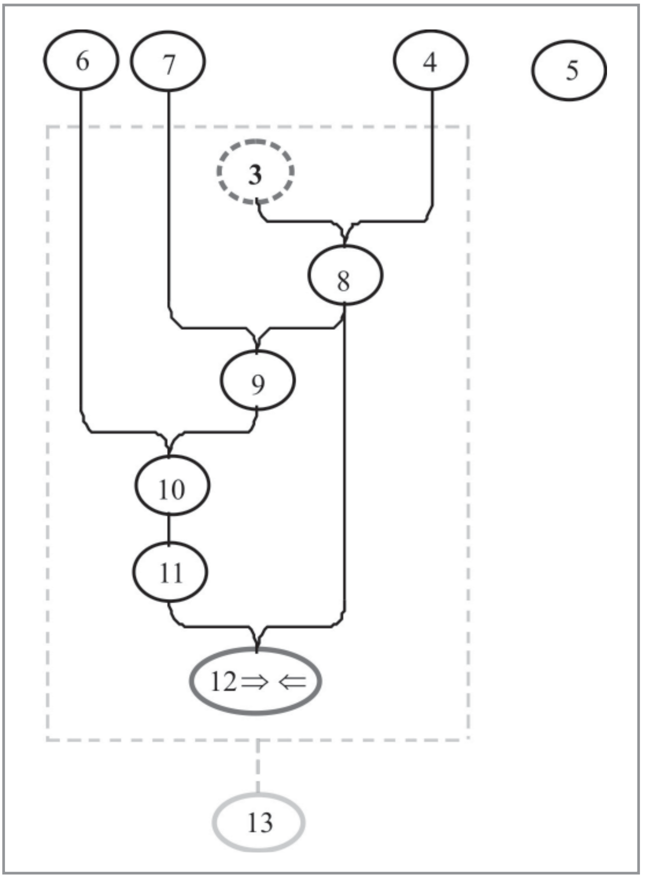
A continuación, dado que se *rechaza la raíz*, entonces se eliminan los pasos iniciales y las referencias a ellos, de tal forma que los nuevos pasos iniciales sean la aceptación de las premisas y el rechazo de la conclusión.

Las marcas de los nodos donde figuran las premisas se justifican como premisas, y la marca del nodo donde figura la conclusión se justifica como rechazo de la conclusión.

3. Rechazo de la conclusión	4, 5, 6, 7. Premisas	3.1. IR en 3
3.2. Ra~ en 3.1	8. AdA↔ en 3.2 y 4	8.1. IA en 8
9. AiA→ en 8.1 y 7	9.1. A~ en 9	9.2. IR en 9.1
10. RiA↔ en 9.2 y 6	11. R∨ en 10	12. RR - DM en 8 y 11
13. AMM en 12		

El siguiente paso consiste en eliminar los pasos cuya enumeración sea decimal.

3. Rechazo de la conclusión	4, 5, 6, 7. Premisas	8. AdA↔ en 3.2 y 4
9. AiA→ en 8.1 y 7	10. RiA↔ en 9.2 y 6	11. R∨ en 10
12. RR - DM en 8 y 11	13. AMM en 12	



Posteriormente, en los pasos en cuya justificación figuren números decimales, se cambian los decimales por lo enteros correspondientes y se diagrama el resultado.

3. Rechazo de la conclusión	4, 5, 6, 7. Premisas	8. AdA↔ en 3 y 4
9. AiA→ en 8 y 7	10. RiA↔ en 9 y 6	11. R∨ en 10
12. RR - DM en 8 y 11	13. AMM en 12	

Ahora, utilizando *los indicadores de premisa y conclusión*, se construye el *esquema argumentativo* del argumento.

> Se quiere probar que [13], para ello se muestra que es [12] [imposible] que [3]. Si se tuviese que [3], como se sabe que [4], entonces se infiere que [8]. Pero además al tener que [7], resulta que [9]. Y como [6], se deduce que [10], es decir [11]. Pero esto es [12] [una contradicción] ya que se tiene que [8]. Por lo tanto, se concluye finalmente que [13].

Se cambian los números de los enunciados, que corresponden a los números de los nodos en el árbol de forzamiento, por la correspondiente simbolización. El paso correspondiente a la afirmación válido se simboliza con la conclusión.

> Se quiere probar que [13] [T1C]; para ello se muestra que es [12] [imposible] que [3] [~T1C].
>
> Si se tuviese que [3] [~T1C], como se sabe que [4] [T1 ↔ ~T1C], entonces se infiere que [8] [T1]. Pero además, al tener que [7] [T1 → ~T3], resulta que [9] [~T3]. Y como [6] [T3 ↔ (T1 ∨ T2)], se deduce que [10] [~(T1 ∨ T2)], es decir [11] [~T1]. Pero esto es [12] [una contradicción], ya que se tiene que [8] [T1]. Por lo tanto, se concluye finalmente que [13] [T1C].

Finalmente, se cambia la representación simbólica por la correspondiente proposición en el lenguaje natural.

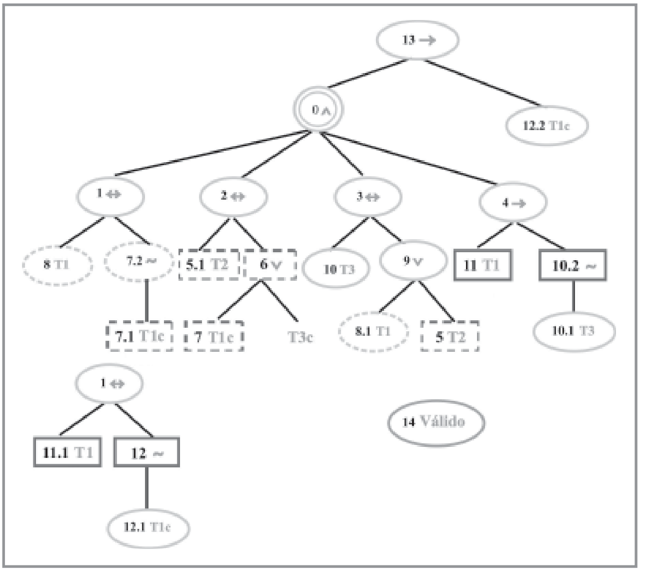
> Se quiere probar que [13] [Tnt1 es culpable]; para ello se muestra que es [12] [imposible] que [3] [Tnt1 sea inocente].

Si se tuviese que [3] [Tnt1 es inocente], como se sabe que [4] [Tnt1 dijo que él era inocente], entonces se infiere que [8] [Tnt1 dice la verdad]. Pero además, al tener que [7] [Tnt1 y Tnt3 no pueden ambos decir la verdad], resulta que [9] [Tnt3 miente]. Y como [6] [Tnt3 dijo que al menos uno de sus hermanos dice la verdad], se deduce que [10] [sus hermanos no dicen la verdad], es decir [11] [Tnt1 miente]. Pero esto es [12] [una contradicción], ya que se tiene que [8] [Tnt1 dice la verdad]. Por lo tanto, se concluye finalmente que [13] [Tnt1 es culpable].

En el caso de un argumento válido, los árboles de forzamiento también se pueden utilizar para generar un pasaje argumentativo que lleve de las premisas a la conclusión, *razonando con el método de demostración condicional.*

El proceso se ilustra a continuación solucionando de nuevo el ejemplo de *La destrucción.*

Inicialmente se simbolizan las premisas y la conclusión; luego se construye el árbol de forzamiento semántico, y se marcan los nodos hasta que *se genere la aceptación de la raíz.* A fin de simplificar el proceso, y para que el resultado final sea más natural, las *reglas de la negación* y las *reglas de iteración* no se enumeran con números enteros: se utilizan decimales.



0. OA	1, 2, 3, 4. A∧ en 0	5. OR
5.1. IR en 5	6. RiA↔ en 5.1 y 2	7. R∨ en 6
7.1 IR en 7	7.2 Ra~ en 7.1	8. AdA↔ en 7.2 y 1
8.1 IA en 8	9. ORd-Ai∨ en 5 y 8.1	10. AdA↔ en 9 y 3
10.1 IA en 10	10.2 Aa~ en 10.1	11. RdA→en 10.2 y 4
11.1 IR en 11	12. RiA↔ en 11.1 y 1	12.1 R~ en 12
12.2 IA en 12.1	13. OAi - Ad→ en 0 y 12.2	14. RM1 en 13

A continuación, dado que en el árbol se *acepta la raíz*, entonces se eliminan los pasos iniciales y finales de tal forma que los nuevos pasos iniciales sean la aceptación de las premisas, y el paso final sea la aceptación de la conclusión.

Las marcas de los nodos donde figuran las premisas se justifican como premisas.

	1, 2, 3, 4. Premisas	5. OR
5.1. IR en 5	6. RiA↔ en 5.1 y 2	7. R∨ en 6
7.1 IR en 7	7.2 Ra~ en 7.1	8. AdA↔ en 7.2 y 1
8.1 IA en 8	9. ORd-Ai∨ en 5 y 8.1	10. AdA↔ en 9 y 3
10.1 IA en 10	10.2 Aa~ en 10.1	11. RdA→en 10.2 y 4
11.1 IR en 11	12. RiA↔ en 11.1 y 1	12.1 R~ en 12
12.2 IA en 12.1		

El siguiente paso consiste en eliminar los pasos cuya enumeración sea decimal.

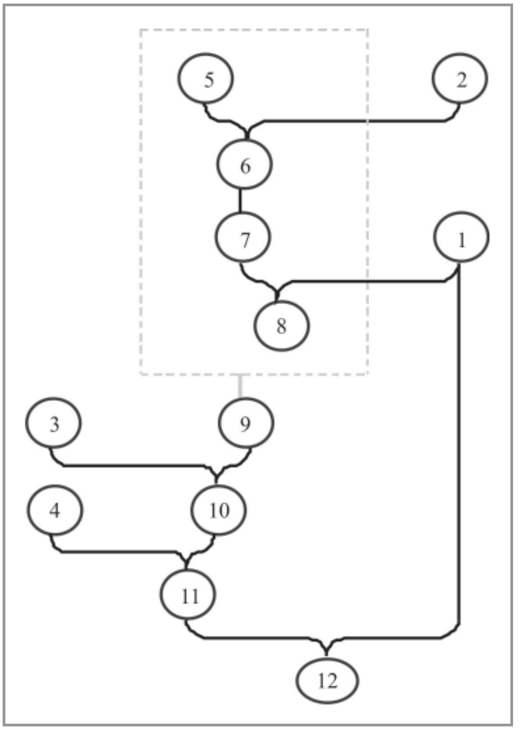
1, 2, 3, 4. Premisas	5. OR	6. RiA↔ en 5.1 y 2
7. R∨ en 6	8. AdA↔ en 7.2 y 1	9. ORd-Ai∨ en 5 y 8.1
10. AdA↔ en 9 y 3	11. RdA→ en 10.2 y 4	12. RiA↔ en 11.1 y 1

Posteriormente, en los pasos en cuya justificación figuren números decimales, se cambian los decimales por lo enteros correspondientes y se diagrama el resultado.

1, 2, 3, 4. Premisas	5. OR	6. RiA↔ en 5 y 2
7. R∨ en 6	8. AdA↔ en 7 y 1	9. ORd-Ai∨ en 5 y 8
10. AdA↔ en 9 y 3	11. RdA→ en 10 y 4	12. Ria↔ en 11 y 1

Ahora, utilizando *los indicadores de premisa y conclusión*, se construye el *esquema argumentativo* del argumento.

Si se tuviese que [5], como se sabe que [2], entonces se infiere que [6], y por lo tanto [7]. Pero además, al tener que [1], resulta que [8]. De esta forma se ha probado [9]. Y como [3], se deduce que [10]. Como además se sabe que [4], también se obtiene [11]. Finalmente utilizando el hecho que [1], se concluye que [12].



Se cambian los números de los enunciados, que corresponden a los números de los nodos en el árbol de forzamiento, por la correspondiente simbolización.

> Si se tuviese que [5] [$\sim$T2], como se sabe que [2] [T2 $\leftrightarrow$ (T1c $\vee$ T3c)], entonces se infiere que [6] [$\sim$(T1c $\vee$ T3c)], y por lo tanto [7] [$\sim$T1c]. Pero además, al tener que [1] [T1 $\leftrightarrow$ ($\sim$T1c)], resulta que [8] [T1]. De esta forma se ha probado que [9] [T1 $\vee$ T2]. Y como [3] [Te $\leftrightarrow$ (T1 $\vee$ T2)], se deduce que [10] [T3]. Como además se sabe que [4] [T1 $\rightarrow$ $\sim$T3], también se infiere que [11] [$\sim$T1]. Finalmente se utiliza el hecho que [1] [T1 $\leftrightarrow$ $\sim$T1c], para concluir que [12] [T1c].

Finalmente, se cambia la representación simbólica por la correspondiente proposición en el lenguaje natural.

> Si se tuviese que [5] [Tnt2 miente], como se sabe que [2] [él dijo que al menos uno de sus hermanos es culpable], entonces se infiere que [6] [no es cierto que uno de sus hermanos es culpable], y, por lo tanto [7] [Tnt1 es inocente]. Pero además, al tener que [1] [Tnt1 dijo que él era inocente], resulta que [8] [dijo la verdad]. De esta forma, se ha probado que [9] [Tnt1 dijo la verdad o Tn2 dijo la verdad]. Y como [3] [Tnt3 dijo que al menos uno de sus hermanos decía la verdad], se deduce que [10] [Tnt3 es sincero]. Como además se sabe que [4] [si Tnt1 dice la verdad, entonces Tnt3 miente], también se infiere que [11] [Tnt1 miente]. Finalmente, se utiliza el hecho que [1] [Tnt1 dijo que era inocente] para concluir que [12] [Tnt1 es culpable].

3.7 Algunos resultados importantes

Las preguntas naturales en este punto están relacionadas con la validez de los siguientes principios:

Principio de no contradicción $\sim(A \wedge \sim A)$

Principio del tercero excluido $A \vee \sim A$

Principio de trivialización $A \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$

Principio de reducción al absurdo débil $(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A]$

Principio de reducción al absurdo fuerte $(\sim A \rightarrow B) \rightarrow [(\sim A \rightarrow \sim B) \rightarrow A$

Negación de la conjunción $\sim(A \wedge B) \leftrightarrow (\sim A \vee \sim B)$

Negación de la disyunción $\sim(A \vee B) \leftrightarrow (\sim A \wedge \sim B)$

Negación del condicional $\sim(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \sim B)$

Negación del bicondicional $\sim(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow [(A \wedge \sim B) \vee (\sim A \wedge B)]$

Negación de la negación $\sim\sim A \leftrightarrow A$

Contra reciproca $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\sim B \rightarrow \sim A)$

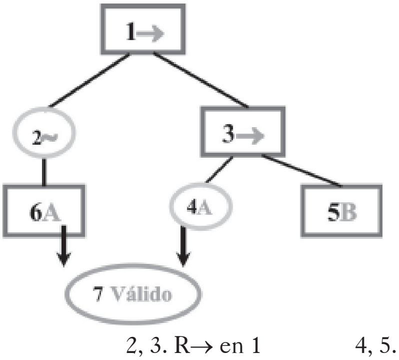
Implicación material $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\sim A \vee B)$

Silogismo disyuntivo $[(A \vee B) \wedge \sim A] \rightarrow B$

Modus tollens $[(A \rightarrow B) \wedge \sim B] \rightarrow \sim A$

3.7.1 Principio de trivialización

$\sim A \rightarrow (A \rightarrow B)$. De $\sim A$ y A se sigue B



1. RR	2, 3. R→ en 1	4, 5. R→ en 3
6. A~ en 2	7. DM en 6 y 4	

El resultado anterior indica que *la lógica clásica no soporta contradicciones*, es decir, que *de un enunciado y su negación se puede deducir cualquier otro enunciado* (el sistema se *trivializa*),[2] por lo que la lógica clásica no sirve de

[2] Una teoría es *inconsistente* con respecto a un operador negación * con una lógica de base L si y sólo si existe un enunciado A tal que la teoría tiene como consecuencia con la lógica L tanto A como *A.
Una teoría es *trivial* con una lógica de base L si y sólo si la teoría tiene como consecuencia con la lógica L todas las fórmulas.

base para *teorías inconsistentes* puesto que las hace triviales, es decir, las teorías serían completamente inútiles.

Para fundamentar teorías inconsistentes pero no triviales, debe tenerse una lógica de base en la cual el principio de trivialización no sea válido, es decir, una *lógica que soporte las inconsistencias*; tales lógicas son llamadas *Lógicas Paraconsistentes*.

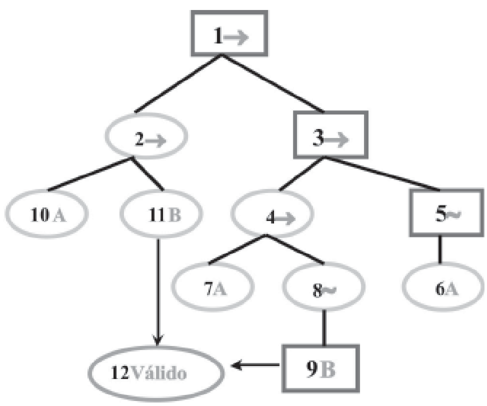
3.7.2 Reducción al absurdo débil

$(A \to B) \to \{(A \to \sim B) \to \sim A\}$

Si de A se sigue B y de A se sigue ~B, entonces se puede concluir ~A.

Si aceptando A, se acepta y se rechaza B, entonces A es rechazada.

Este enunciado puede ser tomado como la formalización del condicional asociado al siguiente argumento: si el sospechoso hubiese cometido el crimen, entonces tendría que haber robado los documentos, pues estos desaparecieron, pero se probó de manera irrefutable que si el sospechoso hubiese cometido el crimen, no podría haberlos robado; por lo tanto, el sospechoso no pudo cometer el crimen.



1. RR	2, 3. R→ en 1	4, 5. R→ en 3
6. R~ en 5	7. IA en 6	8. AiA→ en 7 y 4
9. A~ en 8	10. IA en 6	11. AiA→ en 10 y 2
12. DM en 11 y 9		

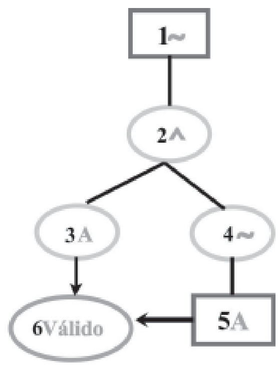
Del resultado anterior se concluye que cuando se quiere probar que un enunciado es rechazado, basta suponer que es aceptado y obtener a partir de este supuesto otro enunciado y la negación de éste, es decir, una contradicción.

3.7.3 Principio de no contradicción

$\sim(A \wedge \sim A)$

No se aceptan las contradicciones.

Un enunciado no puede ser a la vez aceptado y rechazado.



1. RR	2. R~ en 1	3, 4. A∧ en 2
5. A~ en 4	6. DM en 3 y 5	

3.7.4 Eliminación de la doble negación

$\sim\sim A \rightarrow A$

Los enunciados que no son rechazados son aceptados.

Si un enunciado no es falso, entonces es verdadero.

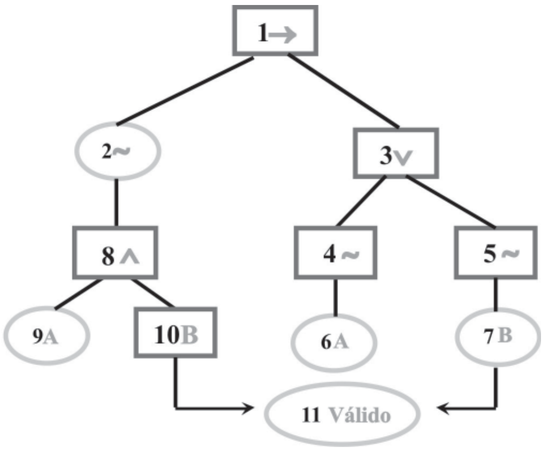
1. OA	2. A~ en 1	3. R~ en 2
4. IA en 3	5. OAi - Ad→ en 1 y 4	6. RM1 en 5

3.7.5 Negación de la conjunción

$\sim(A \wedge B) \rightarrow (\sim A \vee \sim B)$

Si se rechaza una conjunción, entonces se rechaza al menos un coyunto.

Si una conjunción es falsa, al menos un coyunto es falso.



1. RR	2, 3. R→ en 1	4, 5. R∨ en 3
6. R~ en 4	7. R~ en 5	8. A~ en 2
9. IA en 6	10. AiR∧ en 9 y 8	11. DM en 10 y 7

Este enunciado puede ser tomado como la formalización del condicional asociado al siguiente argumento: puesto que no pueden ser ambos culpables, se concluye que alguno de ellos es inocente.

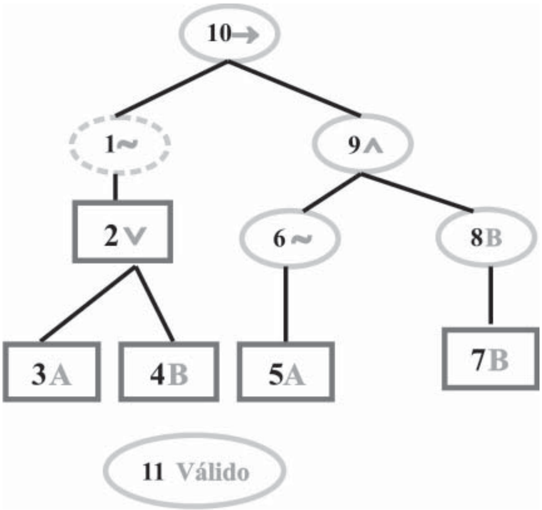
3.7.6 Negación de la disyunción

$\sim(A \vee B) \rightarrow (\sim A \wedge \sim B)$

De $\sim(A \vee B)$ se sigue $\sim A$ y también $\sim B$

Cuando se rechaza una disyunción, se rechazan ambos disyuntos.

Si una disyunción es falsa, entonces ambos disyuntos también son falsos.



1. OA	2. A~ en 1	3,4. R∨ en 2
5. IR en 3	6. Ra~ en 5	7. IR en 4
8. Ra~ en 7	9. A∧ en 6 y 8	10. Ai - Ad→ en 1 y 9
11. RM1 en 10		

Este enunciado puede ser tomado como la formalización del condicional asociado al siguiente argumento: Juan conjeturó que la empresa había fracasado por la mala calidad de sus productos o por la mala comercialización de los mismos, pero Juan estaba equivocado, es decir, la empresa no ha fracasado ni por la mala calidad de sus productos ni por la mala comercialización de los mismos.

3.7.7 Silogismo disyuntivo

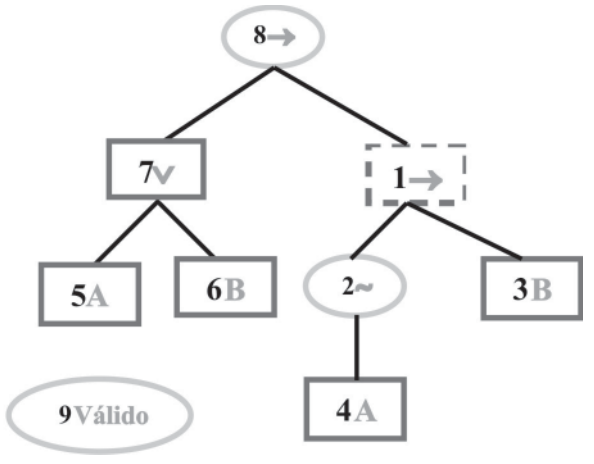
$(A \vee B) \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$

De $A \vee B$ y $\sim A$ se sigue B

Cuando se acepta una disyunción y se rechaza uno de los disyuntos, se acepta el otro.

Si una disyunción es verdadera y uno de los disyuntos es falso, entonces el otro disyunto es verdadero.

Si al menos uno de dos enunciados es aceptado y uno de ellos es rechazado, entonces el otro es aceptado.



1. OR	2, 3. R→ en 1	4. A~ en 2
5. IR en 4	6. IR en 3	7. RdRi∨ en 5 y 6
8. Rd - Ri→ en 1	9. RM1 en 8	

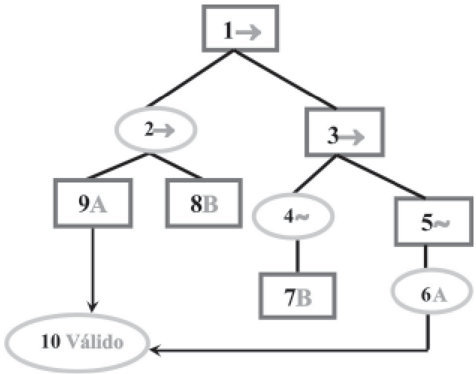
Este enunciado puede ser tomado como la formalización del condicional asociado al siguiente argumento: se sabía que el puente lo había construido una firma constructora, y que el ingeniero encargado era un egresado de una de las universidades de la ciudad; pero inicialmente no se sabía si la universidad es pública o privada. Cuando se consultó a la firma constructora, se supo que en ella no trabajan egresados de las universidades privadas; se concluye, entonces, que el ingeniero encargado es un egresado de una universidad pública.

3.7.8 Contra recíproca débil

$(A \rightarrow B) \rightarrow (\sim B \rightarrow \sim A)$. De $A \rightarrow B$ y $\sim B$ se sigue $\sim A$.

Cuando se acepta un condicional y se rechaza su consecuente, también se rechaza su antecedente.

Se infiere que el antecedente de un condicional verdadero es falso cuando el consecuente es falso.



1. RR 2, 3. R→ en 1 4, 5. R→ en 3
6. R~ en 5 7. A~ en 4 8. IR en 7
9. RdA→ en 8 y 2 10. DM en 9 y 6

Este enunciado puede ser tomado como la formalización del condicional asociado al siguiente argumento: cada vez que los gerentes de las empresas se reúnen con el alcalde, se toman decisiones importantes. En la última reunión no se tomaron decisiones importantes. Por lo tanto, en la última reunión no estuvieron presentes los gerentes de las empresas.

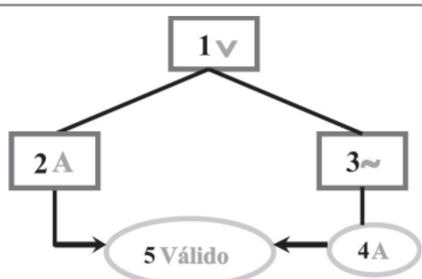
3.7.9 Tercero excluido

A ∨ ~A

Los enunciados son aceptados o rechazados.

Cada enunciado es verdadero o falso.

Este resultado, junto con el principio de no contradicción, dice que un enunciado es aceptado o rechazado pero no ambos, y que cada enunciado es verdadero o falso pero no ambos.



1. RR 2, 3. R∨ en 1 4. R~ en 3 5. DM en 2 y 4

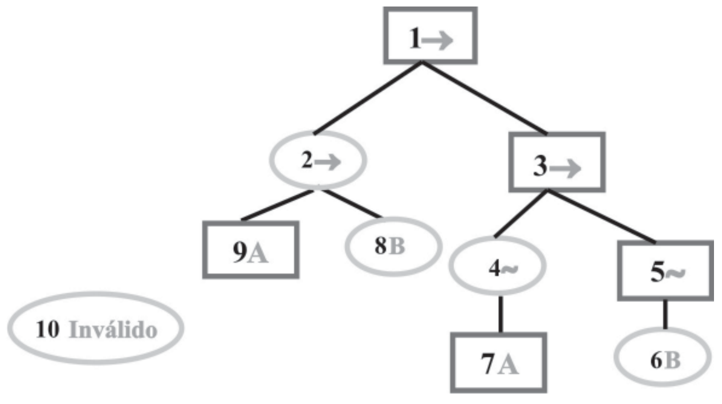
3.7.10 Falacia de negar el antecedente

No es válido $(A \rightarrow B) \rightarrow (\sim A \rightarrow \sim B)$

De $A \rightarrow B$ y $\sim A$ no se sigue $\sim B$

Cuando se acepta un condicional y se rechaza su antecedente, no puede afirmarse que también se rechaza su consecuente.

No se infiere que el consecuente de un condicional verdadero es falso cuando el antecedente es falso.



1. RR	2, 3. R→ en 1	4, 5. R→ en 3
6. R~ en 5	7. A~ en 4	8. IA en 6
9. IR en 7	10. ABM	

Este enunciado puede ser tomado como la formalización del condicional asociado al siguiente argumento inválido: cada vez que los gerentes de las empresas se reúnen con el alcalde, se toman decisiones importantes. En la última reunión no estuvieron presentes los gerentes de las empresas. Por lo tanto, en la última reunión no se tomaron decisiones importantes.

3.7.11 Falacia de afirmar un disyunto

No es válido $(A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow \sim B)$

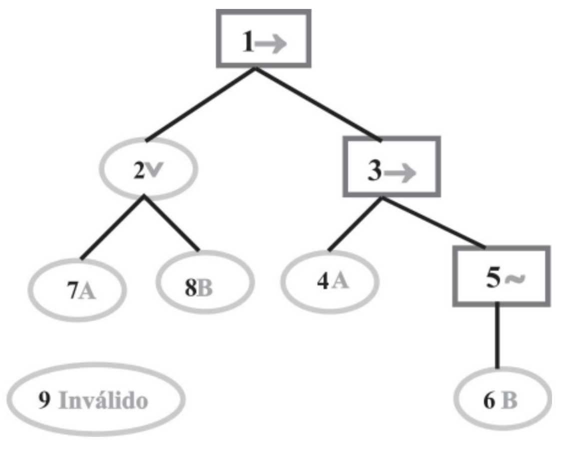
De $A \vee B$ y A no se sigue $\sim B$

Cuando se acepta una disyunción y se acepta uno de los disyuntos, no se infiere que se rechaza el otro.

Si una disyunción es verdadera y uno de los disyuntos es verdadero, entonces no se sigue que el otro disyunto es falso.

Suponga que al menos uno de dos enunciados es aceptado, y se sabe cuál de ellos es aceptado; esto no implica que el otro sea rechazado.

Este enunciado puede ser tomado como la formalización del condicional asociado al siguiente argumento inválido: se sabía que el puente lo había construido una firma constructora, y que el ingeniero encargado era un egresado de una de las universidades de la ciudad; pero inicialmente no se sabía si la universidad es pública o privada. Cuando se consultó a la firma constructora, se supo que el ingeniero encargado es un egresado de una universidad pública; se concluye entonces que el ingeniero encargado no es un egresado de una universidad privada.



1. RR
2, 3. R→ en 1
4, 5. R→ en 3
6. R∼ en 5
7. IA en 4
8. IA en 6
9. ABM

3.8 Ejercicio

Sabiendo que la disyunción exclusiva está caracterizada por $(A \veebar B) \leftrightarrow [(A \vee B) \wedge \sim(A \wedge B)]$, encuentre las reglas de inferencia para el forzamiento semántico de marcas, de la disyunción exclusiva.