La Lógica de las Relaciones

5.1. Símbolos para las Relaciones

Algunas proposiciones que contienen dos o más nombres propios (de individuos) correctamente se entienden como compuestos de función de verdad de proposiciones singulares con diferentes términos sujetos. Por ejemplo, la proposición

Lincoln y Grant fueron presidentes.

se comprende correctamente como la conjunción de las dos proposiciones singulares

Lincoln fue un presidente y Grant fue un presidente.

Pero para algunas otras proposiciones que tienen el mismo esquema verbal ese análisis es enteramente insatisfactorio. Así, la proposición

Lincoln y Grant eran amigos.

definitivamente *no* es una conjunción o cualquier otra función de verdad de

Lincoln era amigo y Grant era amigo*

Por el contrario, al dividir la proposición de esta manera se destruye su significación, puesto que lo que quiere decir no es que ambos Lincoln y Grant fuesen amigos sino que eran *amigos el uno del otro*. La proposición dada no asevera que Lincoln y Grant tuviesen ambos un cierto *atributo* sino que estaban en cierta *relación*. No se dice simplemente que Lincoln fuese amigo (signifique esto lo que signifique), sino que era *amigo* de Grant. Otras proposiciones que expresan relaciones entre dos individuos son

Juan ama a María.

Platón fue un estudiante de Sócrates.

* En el original, "were acquainted" r dein "se conocían". En la forma traducida es más claro el ejemplo aunque *no* históricamente verdadero. (N. del T.)

Isaac era un hijo de Abraham.
Nueva York está al oriente de Chicago.
Chicago es más pequeño que Nueva York.

Relaciones como éstas que pueden darse entre dos individuos son llamadas *binarias* o *diádicas*. Otras relaciones pueden relacionar tres o más individuos. Por ejemplo las proposiciones

Detroit está entre Nueva York y Chicago.
Elena presentó a Juan, a María.
Norteamérica le ganó las Filipinas a España.

expresan relaciones *ternarias* o *triádicas*, mientras que las proposiciones siguientes expresan relaciones *cuaternarias* o *tetrádicas:*

Estados Unidos compró Alaska a Rusia por 7 millones de dólares.
Juan trocó su vaca al traficante por un puñado de habas.
Alberto, Guillermo, Carlos y Ricardo jugaron bridge juntos.

Las relaciones entran en los argumentos de varias maneras. Un ejemplo de un argumento relacional es

Alberto es mayor que Guillermo.
Guillermo es mayor que Carlos.

Por lo tanto, Alberto es mayor que Carlos.

Un ejemplo un tanto más complicado que involucra la cuantificación es

A Elena le gusta David.
cualquiera A que le guste David le gusta Tomás.
A Elena sólo le gustan los hombres bien parecidos.

Por lo tanto, Tomás es un hombre bien parecido.

Una inferencia aún un poco más compleja que involucra cuantificación múltiple es la siguiente:

Todos los caballos son animales.

Por lo tanto, la cabeza de un caballo es la cabeza de un animal.

Esta última es una inferencia válida que, como observó De Morgan, no podría hacerse con toda la lógica aristotélica. Hacerla válida con nuestra herramienta de cuantificadores y funciones proposicionales es lo que nos proponemos en la sección siguiente.

Antes de discutir demostraciones de validez para argumentos relacionales (que no requerirán más métodos de demostración que los que desarrollamos en el capítulo precedente) debemos tratar el problema de *simbolizar* las proposiciones relacionales. Así como un símbolo de predicado puede ocurrir en diferentes proposiciones, también un solo símbolo de relación puede ocurrir en diferentes proposiciones. Así como tenemos el predicado "humano" común a las proposiciones:

Aristóteles es humano.
Platón es humano.
Sócrates es humano.

así también tenemos la palabra de relación "enseñó" común a las proposiciones

Sócrates enseñó a Platón.
Platón enseñó a Aristóteles.

Y así como consideramos las tres proposiciones sujeto-predicado como instancias de sustitución diferentes de la función proposicional "x es humano", así también podemos considerar las dos proposiciones relacionales como instancias diferentes de sustitución de la función proposicional "x enseñó a y". Reemplazando la variable "x" por la constante "Sócrates" y la variable "y" por la constante "Platón" obtenemos la primera proposición; reemplazando la "x" por "Platón" y la "y" por "Aristóteles" nos da la segunda. El *orden* del reemplazo es de mucha importancia aquí: si "x" se reemplaza por "Aristóteles" y "y" por "Platón", el resultado es la proposición *falsa*

Aristóteles enseñó a Platón.

Así como una función proposicional de una variable tal como "x es humano" se abreviaba "Hx", así también una función proposicional de dos variables tal como "x enseñó a y" se abrevia "Exy". De manera semejante, la función proposicional "x está entre y y z" se abreviará "$Bxyz$", y la función proposicional "x cambió y a z por w" se abreviará "$Txyzw$". Nuestro primer ejemplo de un argumento relacional no involucra cuantificadores y se simboliza muy fácilmente. Usando las constantes individuales a, b y c para denotar Alberto, Guillermo y Carlos y la expresión "Mxy" para abreviar "x es mayor que y" tenemos

$$\begin{array}{l} Mab \\ \underline{Mbc} \\ \therefore Mac \end{array}$$

Nuestro segundo argumento no es mucho más difícil, pues ninguna de sus proposiciones contiene más de un solo cuantificador. Usando las constantes individuales "h", "d" y "t" para denotar Helen, David y Tomás, respectivamente, "Gx" para abreviar "x es un hombre bien parecido" y el símbolo "Lxy" para abreviar "a x le gusta y", el argumento se puede simbolizar como

1. Lhd
2. $(x)(Lxd \supset Lxt)$
3. $(x)(Lhx \supset Gx)$

$\therefore Gt$

Una demostración de su validez se construye con tanta facilidad que podemos escribirla de una vez. Refiriéndonos a las premisas numeradas anteriormente la demostración procede como:

4.	$Lhd \supset Lht$	2, UI
5.	Lht	4, 1, M.P.
6.	$Lht \supset Gt$	3, UI
7.	Gt	6, 5, M.P.

Simbolizar las proposiciones relacionales se hace más complicado cuando son varios los cuantificadores que ocurren en una proposición. Nuestra discusión del problema se verá simplificada limitando nuestras consideraciones para empezar a las dos constantes individuales "a" y "b" y la función proposicional "x atrae y" que se abrevia "Axy". Los dos enunciados "a atrae b" y "b es atraído por a" tienen obviamente el mismo significado, el primero expresando el significado con el uso de una *voz activa*, y el segundo con el uso de una *voz pasiva*. Ambos enunciados se traducen directamente en la única fórmula "Aab". De manera semejante, los dos enunciados "b atrae a" y "a es atraído por b" se simbolizan ambos por la fórmula "Aba". Estas dos diferentes instancias de sustitución de "Axy" son lógicamente independientes entre sí, pues una puede ser verdadera sin acarrear la verdad de la otra.

Estamos todavía en un terreno elemental y bien conocido cuando simbolizamos

"a atrae todo"
"todo es atraído por a" } como "$(x)Aax$",

"a atrae algo"
"algo es atraído por a" } como "$(\exists x)Aax$",

"todo atrae a"
"a es atraído por todo" } como "$(x)Axa$",

"algo atrae a"
"a es atraído por algo" } como "$(\exists x)Axa$".

Pero el problema de simbolizar se hace más complejo cuando dejamos por completo de usar las constantes individuales y consideramos proposiciones relacionales que son completamente generales. Las más simples proposiciones de esta clase son

1. Todo atrae todo.
2. Todo es atraído por todo.
3. Algo atrae algo.
4. Algo es atraído por algo.
5. Nada atrae cosa alguna.
6. Nada es atraído por cosa alguna.

que se simbolizan con las fórmulas:

1. $(x)(y)Axy$
2. $(y)(x)Axy$
3. $(\exists x)(\exists y)Axy$
4. $(\exists y)(\exists x)Axy$
5. $(x)(y){\sim}Axy$
6. $(y)(x){\sim}Axy$

En sus formulaciones en el lenguaje español las proposiciones 1 y 2 son claramente equivalentes entre sí, como lo son 3 y 4 y 5 y 6. Las dos primeras equivalencias fácilmente se establecen para las traducciones simbólicas correspondientes:

→ 1.	$(x)(y)Axy$	
2.	$(y)Awy$	1, **UI**
3.	Awv	2, **UI**
4.	$(x)Axv$	3, **UG**
5.	$(y)(x)Axy$	4, **UG**
6.	$(x)(y)Axy \supset (y)(x)Axy$	1–5, C.P.

→ 1.	$(\exists x)(\exists y)Axy$	
→ 2.	$(\exists y)Awy$	
→ 3.	Awv	
4.	$(\exists x)Axv$	3, **EG**
5.	$(\exists y)(\exists x)Axy$	4, **EG**
6.	$(\exists y)(\exists x)Axy$	2, 3–5, **EI**
7.	$(\exists y)(\exists x)Axy$	1, 2–6, **EI**
8.	$(\exists x)(\exists y)Axy \supset (\exists y)(\exists x)Axy$	1–7, C.P.

Estas demuestran la verdad lógica de los condicionales más que de las equivalencias, pero sus inversos se pueden establecer siguiendo el mismo esquema de argumento. (La equivalencia entre las Fórmulas 5 y 6 claramente se establece siguiendo el mismo modelo de argumento que demuestra la equivalencia entre 1 y 2.)

Cuando consideramos los 2 siguientes enunciados

7. Todo atrae algo.
8. Algo es atraído por todo.

no hay ya equivalencia lógica o el mismo significado. La oración 7 no es enteramente libre de ambigüedad y en algunos contextos excepcionales podría alterarse su significado, pero su interpretación más natural *no* es que hay una cosa que es atraída por todas las cosas, sino que todo atrae *una cosa u otra.* La simbolizamos por sucesivas paráfrasis escribiendo primero

$$(x)(x \text{ atrae algo})$$

y entonces simbolizando la expresión "x atrae algo" del mismo modo en que simbolizamos "a atrae algo". Esto nos da la fórmula

7. $(x)(\exists y)Axy$

La oración 8 también es susceptible de interpretaciones alternativas una de las cuales la haría sinónima de la oración 7 significando que una u otra cosa es atraída por una cosa (dada). Pero una manera perfectamente directa de entender la oración 8 es tomarla como aseveración de que *alguna cosa* es atraída por todas las cosas. También se le simboliza paso a paso escribiendo primero

$$(\exists y)(y \text{ es atraído por todas las cosas})$$

y entonces simbolizando la expresión "y es atraído por todo" del mismo modo que simbolizamos "a es atraído por todo". Esto nos da la fórmula

8. $(\exists y)(x)Axy$

Hay cierta semejanza *equívoca* entre las Fórmulas 7 y 8. Ambas consisten en una función proposicional, "Axy", a la que se aplica un cuantificador universal con respecto a "x" y un cuantificador existencial con respecto a "y". Pero el *orden* en el que los cuantificadores están escritos es diferente en cada caso, y eso hace un mundo de diferencia entre sus significados. La Fórmula 7 en la que el cuantificador universal se presenta primero afirma que dada cualquier cosa hay alguna u otra cosa que la cosa dada atrae. Pero la Fórmula 8 en que el cuantificador existencial viene primero afirma que hay cierta cosa tal que cada cosa *la* atrae. Si 2 cuantificadores se aplican sucesivamente a una función proposicional y si ambos son universales o ambos existenciales su orden no importa como se muestra con la equivalencia de las Fórmulas 1 y 2, 3 y 4, y 5 y 6. Pero si un cuantificador es universal y el otro existencial, el orden de generalización o cuantificación es de gran importancia.

Aunque las Fórmulas 7 y 8 no son equivalentes, no son independientes. La primera es válidamente deducible de la segunda. La demostración es fácil como se ve a continuación:

1.	$(\exists y)(x)Axy$	
→ 2.	$(x)Axv$	
3.	Auv	2, **UI**
4.	$(\exists y)Auy$	3, **EG**
5.	$(\exists y)Auy$	1, 2–4, **EI**
6.	$(x)(\exists y)Axy$	5, **UG**

Pero la inferencia es válida solamente en una dirección. Todo intento de deducir la Fórmula 8 a partir de la 7 inevitablemente violará una de las restricciones impuestas a **UG**. El argumento

$$(x)(\exists y)Axy$$
$$\therefore (\exists y)(x)Axy$$

fácilmente se demuestra que es inválido por el método de la Sec. 4.3. Para un modelo que sólo contenga los 2 individuos a y b, el argumento dado es lógicamente equivalente al argumento de función de verdad

$$(Aaa \vee Aab) \cdot (Aba \vee Abb)$$
$$\therefore (Aaa \cdot Aba) \vee (Aab \cdot Abb)$$

que se demuestra que es inválido asignándole el valor **T** a "*Aaa*" y "*Abb*" y el valor **F** a "*Aab*" y "*Aba*".

Un par semejante de proposiciones no equivalentes puede escribirse como

9. Todo es atraído por algo.
10. Algo atrae todo.

Estas claramente son no equivalentes cuando el "algo" de 9 que viene al final se entiende como "una u otra cosa" y el algo en 10 que viene al principio se entiende como "una cierta cosa". Se les simboliza como

9. $(y)(\exists x)Axy$
10. $(\exists x)(y)Axy$

Las proposiciones relacionales a veces se formulan como si fueran simples aseveraciones sujeto-predicado. Por ejemplo, "*a* fue golpeado" tiene como interpretación más plausible que "*algo golpeó a a*". Estas ocurrencias implícitas de relaciones frecuentemente se señalan usando la voz pasiva de un verbo transitivo. Nuestra simbolización de proposiciones que contienen relaciones implícitas debiera guiarse por la consideración del uso al que se destinan. Nuestro propósito al simbolizar argumentos es el de ponerlos en una forma conveniente para probar su validez. Nuestro objeto, por lo tanto, con respecto a un argumento dado, no es el de proporcionar un análisis teórico completo sino proporcionar un análisis suficientemente completo para el propósito en cuestión —probar la validez—. En consecuencia, algunas relaciones implícitas pueden dejarse implícitas mientras que otras requieren un análisis mayor, como quedará claro en un ejemplo. Considerar el argumento

> Quienquiera que haya visitado el edificio fue observado. Cualquiera que haya observado a Andrews tendría que recordarle. Nadie recordó a Andrews. Por lo tanto, Andrews no visitó el edificio.

La primera proposición de este argumento contiene dos relaciones, explícita la una, implícita la otra. Explícitamente tenemos la relación de *alguien visitando el edificio.* Es explícita porque se hace mención tanto del visitante como de lo que fue visitado por él. Implícitamente tenemos la relación de *alguien observando a alguien,* que queda implícita porque no se hace mención del alguien que observa —marcando la omisión por el uso de la voz pasiva—. Sin embargo, como la única otra ocurrencia de "x visitó el edificio" es también una *unidad,* en la conclusión, no necesita tratarse como relación en absoluto, sino que se le puede simbolizar como un simple predicado. Por otro lado, como "x observó a y", a pesar de que su ocurrencia es meramente implícita en la primera premisa, se le debe explícitamente simbolizar como una relación si se quiere demostrar la validez del argumento. Pues su segunda ocurrencia no es una simple repetición de la unidad original; en lugar de eso aparece como una relación explícita con la primera variable cuantificada y la segunda reemplazada por el nombre propio "Andrews". Usando "a" para denotar Andrews, "Vx" para abreviar "x visitó el edificio", "Oxy" para abreviar "x observó a y" y "Rxy" para abreviar "x recuerda a y", una traducción simbólica y demostración de validez para el argumento dado se puede escribir como,

1.	$(x)[Vx \supset (\exists y)Oyx]$	
2.	$(x)[Oxa \supset Rxa]$	
3.	$(x){\sim}Rxa$	$/ \therefore {\sim}Va$
4.	$Oza \supset Rza$	2, **UI**
5.	${\sim}Rza$	3, **UI**
6.	${\sim}Oza$	4, 5, M.T.
7.	$(y){\sim}Oya$	6, **UG**
8.	${\sim}(\exists y)Oya$	7, **QN**
9.	$Va \supset (\exists y)Oya$	1, **UI**
10.	${\sim}Va$	9, 8, M.T.

Nuestra demostración de validez para este argumento no se hubiera mejorado en lo absoluto simbolizando "Andrews visitó el edificio" como una instancia de sustitución de la proposición relacional "x visitó y" en lugar de la más simple "Vx". Pero nuestra demostración de validez dependía de nuestra manera de simbolizar "fue observado" explícitamente como una relación.

Casi todos nuestros ejemplos anteriores eran ilustraciones de generalidad *ilimitada*, en los que se aseguraba que *toda cosa* estaba en tal y cual relación, o algo lo estaba, o nada lo estaba. Muchas proposiciones relacionales no son tan "categóricas". La mayoría de las aserciones son más modestas afirmando no que *toda cosa* está en tal y cual relación sino que toda cosa lo hace *si* satisface ciertas condiciones o restricciones. Así podemos decir que

Todo es atraído por todos los imanes.

o que

Todo lo que sea de hierro es atraído por todos los imanes.

La segunda es, desde luego, la más modesta de las dos afirmaciones siendo menos *general* que la primera. Mientras que la primera se simboliza adecuadamente como

$$(x)(y)[My \supset Ayx]$$

donde "Mx" abrevia "x es un imán"; la segunda se simboliza

$$(x)[Ix \supset (y)(My \supset Ayx]$$

donde "Ix" abrevia "x está hecho de hierro". Que esta traducción simbólica es correcta podemos verlo parafraseando la segunda proposición como,

Dada cualquier cosa, en absoluto, *si* está hecha de hierro entonces es atraída por todos los imanes.

Tal vez la mejor manera de traducir las proposiciones relacionales a nuestro simbolismo lógico es el proceso paso a paso que ya hemos ilustrado. Usémoslo nuevamente esta vez para proposiciones de generalidad limitada. Consideremos primero la proposición

Cualquier buen aficionado puede vencer a algún profesional.

Como primer paso escribimos

$(x)\{(x$ es un buen aficionado$) \supset (x$ puede vencer a algún profesional$)\}$.

A continuación el consecuente del condicional entre corchetes

x puede vencer a algún profesional

se simboliza como una generalización de la expresión cuantificada:

$(\exists y)[(y$ es un profesional$) \cdot (x$ puede vencer a $y)]$

Ahora, usando las abreviaciones obvias, "Gx", "Px" y "Bxy" para "x es un buen aficionado", "x es un profesional" y "x puede vencer a y", la proposición dada se simboliza mediante la fórmula

$$(x)[Gx \supset (\exists y)(Py \cdot Bxy)]$$

Usando el mismo método de parafrasear por etapas podemos simbolizar

Algunos profesionales pueden vencer a todos los aficionados.

primeramente como

$(\exists x)[(x$ es un profesional$) \cdot (x$ puede vencer a todos los aficionados$)]$

luego como

$(\exists x)\{(x$ es un profesional$) \cdot (y)[(y$ es aficionado$) \supset (x$ puede vencer a $y)]\}$.

Y finalmente (usando abreviaciones) como

$$(\exists x)[Px \cdot (y)(Ay \supset Bxy)]$$

El mismo método es aplicable en casos más complejos en los que se ve involucrada más de una relación. Podemos simbolizar la proposición

Cualquiera que prometa todo a todos está seguro de decepcionar a alguien.

la parafraseamos primeramente como

$(x)\{[(x$ es una persona$) \cdot (x$ promete todo a todos$)]$
$\supset [x$ decepciona a alguien$]\}$

El segundo conyunto del antecedente

x promete todo a todos

puede parafrasearse primeramente como

$(y)[(y$ es una persona$) \supset (x$ promete todo a $y)]$

y entonces como

$(y)[(y$ es una persona$) \supset (z)(x$ promete z a $y)]$

El consecuente en nuestra primera paráfrasis

x decepciona a alguien

tiene su estructura más explícitamente revelada escribiéndola de nuevo como

$(\exists u)[(u$ es una persona$) \cdot (x$ decepciona a $u)]$

La proposición original puede ahora reescribirse como

$(x)\{\{(x \text{ es una persona}) \cdot (y)[(y \text{ es una persona})$
$\supset (z)(x \text{ promete } z \text{ a } y)]\} \supset (\exists u)[(u \text{ es una}$
$\text{persona}) \cdot (x \text{ decepciona a } u)]\}$

Usando las abreviaciones obvias, "Px", "$Pxyz$", "Dxy" para "x es una persona", "x promete y a z" y "x decepciona a y", la proposición puede expresarse de forma más compacta en la fórmula

$$(x)\{\{Px \cdot (y)[Py \supset (z)Pxzy]\} \supset (\exists u)(Pu \cdot Dxu)\}$$

Con la práctica, desde luego, no se hace necesario escribir todos estos pasos intermedios explícitamente.

Las palabras de cuantificación tales como "quienquiera" se refieren a *todas las personas* y no a *todas las cosas*; y palabras de cuantificación tales como "alguien" se refieren a *algunas personas* y no a *algunas cosas*. Frecuentemente, es deseable representar esta referencia en nuestro simbolismo. Pero hacerlo no siempre es necesario, si de lo que se trata es de evaluar argumentos que contienen a estas palabras y la elección de los símbolos se determina sobre la misma base sobre la que se decide si una cláusula o frase relacional ha de simbolizarse explícitamente como una relación o como un simple atributo.

Las palabras "siempre", "nunca" y "algunas veces" frecuentemente tienen un significado intemporal como en las proposiciones

Los hombres buenos siempre tienen amigos.
Los hombres malos nunca tienen amigos.
Los hombres que no tienen esposa a veces tienen amigas.

que se pueden simbolizar con las abreviaciones obvias, como

$$(x)[(Gx \cdot Mx) \supset (\exists y)Fxy]$$
$$(x)[(Bx \cdot Mx) \supset \sim(\exists y)Fxy]$$
$$(\exists x)\{[Mx \cdot \sim(\exists y)(Wy \cdot Hxy)] \cdot (\exists z)Fxz\}$$

Sin embargo, algunos usos de estas palabras son definitivamente temporales, y cuando lo sean es posible simbolizarlas usando la maquinaria lógica ya disponible, así como se puede con otras palabras temporales tales como "mientras que", "cuando", "siempre que" y similares. Un ejemplo o dos debieran aclarar este asunto. La proposición

Ricardo siempre escribe a Martha cuando están separados.

afirma que todas las veces en que Ricardo y Martha se separan son veces en que Ricardo escribe a Martha. Esto se puede simbolizar usando "Tx" para "x es un tiempo (o una vez)", "$Wxyz$", para "x escribe a y en el tiempo z" y "$Sxyz$" para simbolizar "x y y están separados en el tiempo z", de la forma

$$(x)\{Tx \supset [Sdjx \supset Wdjx]\}$$

Tal vez la ilustración más gráfica de la adaptabilidad de nuestra actual notación la tenemos al simbolizar la siguiente observación, usualmente atribuida a Lincoln:

> **Se puede engañar a alguna gente todo el tiempo, y a toda la gente parte del tiempo, pero no se puede engañar a toda la gente todo el tiempo.**

El primer conjunto: "se puede engañar a alguna gente todo el tiempo" es ambiguo. Se puede tomar como significado o que *existe al menos una persona que siempre puede ser engañada* o que *para cualquier tiempo existe al menos una persona (u otra) que puede ser engañada en ese tiempo o esa vez.* Adoptando la primera interpretación y usando Px para "x es una persona", "Tx" para "x es un tiempo" y "Fxy" para "se puede engañar a x en (o durante) y" lo anterior se puede simbolizar como

$$\{(\exists x)[Px\cdot(y)(Ty \supset Fxy)]\cdot(\exists y)[Ty\cdot(x)(Px \supset Fxy)]\}\cdot(\exists y)(\exists x)[Ty\cdot Px\cdot{\sim}Fxy]$$

Probar los argumentos relacionales no presenta nuevos problemas una vez efectuada la traducción al simbolismo lógico. Esta parte es la más problemática de modo que proveemos un buen número de ejercicios para que el estudiante los haga antes de proseguir.

EJERCICIOS

I. Usando el siguiente "vocabulario", traducir cada una de las fórmulas dadas al lenguaje ordinario:

Ax-x es plata	*Axy-x* ayuda *y*
Bx-x es dichoso	*Bxy-x* pertenece a *y*
Cx-x es una nube	*Bxyz-x* pide prestado *y* a *z*
Dx-x es un perro	*Cxy-x* puede ordenar a *y*
Ex-x es humo	*Dxy-x* es realizado en (o por) *y*
Fx-x es fuego	*Exy-x* trasquila a *y*, *x* rapa a *y*
Gx-x es vidrio	*Fxy-x* es justo con *y*
Hx-x es una casa	*Gxy-x* recolecta *y*
Ix-x está enfermo	*Hxy-x* oye a *y*
Jx-x es trabajo	*Ixy-x* vive en *y*
Kx-x es un lino	*Jxy-x* es compadre de *y*
Lx-x es una oveja	*Kxy-x* conoce a *y*
Mx-x es musgo	*Lxy-x* le gusta *y*
Nx-x es bueno	*Mxy-x* es el patrón de *y*
Ox-x es un tonto	*Nxy-x* pierde *y*

Px-x es una persona	Oxy-x es juzgado por y
Qx-x es un lugar	$Pxyz$-x echa a perder y a z
Rx-x rueda	Qxy-x le hace compañía a y
Sx-x es una piedra	Rxy-x es como y
Tx-x es un negocio	Sxy-x dice y
Ux-x es una casa	Txy-x debiera lanzar y
Vx-x es una mujer	$Txyz$-x modera y a z
Wx-x es viento	Uxy-x viene a y
Xx-x es un tiempo	Vxy-x se aventura a y
Yx-x es un día	Wxy-x está en y
Zx-x espera	Xxy-x es padre de y

g-Dios

Fórmulas

*1. $(x)[Dx \supset (\exists y)(Yy \cdot Byx)]$

2. $(x)[(\exists y)(Py \cdot Fxy) \supset (z)(Pz \supset Fxz)]$

3. $(x)[(Rx \cdot Sx) \supset (y)(My \supset \sim Gxy)]$

4. $(x)[(Px \cdot Axx) \supset (Agx)]$

*5. $(x)[(Px \cdot Zx) \supset (y)(Uyx)]$

6. $(x)[Hx \supset (y)(Qy \supset \sim Ryx)]$

7. $(x)[(Px \cdot \sim Nxg) \supset (y)(\sim Nxy)]$

8. $(x)[(Px \cdot \sim Cxx) \supset (y)(Py \supset \sim Cxy)]$

9. $(x)\{Cx \supset (\exists y)[(Ay \cdot Ky) \cdot Byx]\}$

*10. $(x)[Px \supset (y)(Qxy \supset Oxy)]$

11. $(x)\{Qx \supset [(\exists y)(Ey \cdot Wyx) \supset (\exists z)(Fz \cdot Wzx)]\}$

12. $(x)\{[Px \cdot (y)(Ty \supset Jxy)] \supset (z)(Tz \supset \sim Mxz)\}$

13. $(x)\{[Px \cdot (\exists y)[(Gy \cdot Uy) \cdot Ixy]] \supset (z)(Sz \supset \sim Txz)\}$

14. $(x)\{[Px \cdot (y)(Lxy \supset Sxy)] \supset (\exists z)(Hxz \cdot \sim Lxz)\}$

*15. $(x)\{[Wx \cdot (y)[Py \supset \sim(\exists z)(Nz \cdot Pxzy)]] \supset Ix\}$

16. $(x)\{[Px \cdot (y)(\sim Vxy)] \supset (z)(\sim Gxz)\}$

17. $(x)\{Vx \supset (y)[Xy \supset (\exists z)[(Jz \cdot Bzx) \cdot \sim Dzy]]\}$

18. $(x)\{[Lx \cdot (\exists y)(Py \cdot Eyx)] \supset (z)(Wz \supset Tgzx)\}$

19. $(x)\{Px \supset (\exists y)[Py \cdot (\exists z)(Bxzy)]\}$

*20. $(x)\{Px \supset (\exists y)[Py \cdot (\exists z)(\sim Bxzy)]\}$

21. $(x)\{Px \supset (y)[Py \supset (z)(\sim Bxzy)]\}$

22. $(x)\{Px \supset (y)[Py \supset (\exists z)(\sim Bxzy)]\}$

23. $(x)[(Nx \cdot Dx) \supset (y)(Lxy \supset \mathrm{Myx})]$

24. $(x)[Px \supset (\exists y)(Py \cdot Xyx)] \cdot (\exists u)[Pu \cdot (v)(Pv \supset \sim Xuv)]$

25. $(x)\{[Qx \cdot (y)\{[(Py \cdot Wyx) \cdot (z)(\sim Kyz)] \supset By\}] \supset$
$(u)\{[(Pu \cdot Wux) \cdot (v)(Kuv)] \supset Ou\}\}$

II. Simbolizar las siguientes oraciones usando en cada caso los símbolos indicados:

*1. Los hombres muertos no cuentan cuentos. (Dx: x está muerto. Mx: x es un hombre. Tx: x es un cuento. Txy: x cuenta y.)

2. Un abogado que aboga por su propio caso tiene a un tonto como cliente. (Ax: x es un abogado. Tx: x es un tonto. Axy: x aboga por el caso de y. Cxy: x es un cliente de y.)
3. Un león muerto es más peligroso que un perro vivo. (Lx: x es un león. Vx: x está vivo. Px: x es un perro. Pxy: x es más peligroso que y.)
4. Difícilmente miente una cabeza que porta corona. (Mx: x miente difícilmente. Cx: x es una cabeza. Dx: x es una corona. Pxy: x porta y.)
*5. Cada rosa tiene su espina. (Rx: x es una rosa. Tx: x es una espina. Hxy: x tiene y.)
6. Cualquiera que consulte a un siquiatra debiera hacerse examinar de la cabeza. (Px: x es una persona. Sx: x es un siquiatra. Dx: x debiera hacerse examinar de la cabeza. Cxy: x consulta a y.)
7. Nadie aprende nada si no se lo enseña a sí mismo. (Px: x es una persona. Axy: x aprende y. $Exyz$: x le enseña y a z.)
8. Dalila llevaba un anillo en cada dedo, y tenía un dedo dentro de cada pastel. (d: Dalila. Ax: x es un anillo. Dxy: x es un dedo de y. Exy: x está en y. Px: x es un pastel. Ixy: x está dentro de y.)
9. Cualquier hombre que odia a los niños y a los perros no puede ser completamente malo. (Hx: x es un hombre. Nx: x es un niño. Px: x es un perro. Mx: x es completamente malo. Oxy: x odia a y.)
*10. Cualquiera que logre algo será la envidia de todos. (Px: x es una persona. Axy: x logra y. Exy: x envidia a y.)
11. Para pescar algún pez hay que tener alguna carnada. (Px: x es una persona. Fx: x es un pez. Cx: x es una carnada. Pxy: x pesca y. Txy: x tiene y.)
12. Todo estudiante hace algunos problemas pero ningún estudiante hace todos los problemas. (Ex: x es un estudiante. Px: x es un problema. Hxy: x hace y.)
13. Todo concursante que conteste todas las preguntas que se le hagan ganará cualquier premio que elija. (Cx: x es un concursante. Qx: x es una pregunta. Px: x es un premio. Cxy: x contesta y. Hxy: x se le hace a y. Gxy: x gana y. Exy: x elige y.)
14. Todo hijo tiene un padre, pero no todo padre tiene un hijo. (Px: x es una persona. Hx: x es un hombre. Pxy: x es padre de y.)
*15. Una persona mantiene un estorbo si tiene un perro que le ladra a cualquiera que visite a su dueño. (Px: x es una persona. Nx: x es un estorbo. Mxy: x mantiene y. Dx: x es un perro. Bxy: x ladra a y. Vxy: x visita y. Hxy: x tiene y.)
16. Un doctor que trata un paciente sin enfermedad no tiene escrúpulos. (Dx: x es un doctor. Ex: x es un escrúpulo. Hxy: x tiene y. Px: x es un paciente. Fx: x es una enfermedad. Txy: x trata a y.)
17. Un doctor que trata a una persona que tiene todas las enfermedades tiene un trabajo que nadie le envidiaría. (Dx: x es un doctor. Px: x es una persona. Txy: x trata a y. Ex: x es una enfermedad. Hxy: x tiene y. Tx: x es un trabajo. $Exyz$: x le envidia a y su z.)
18. Si un granjero sólo cría gallinas ninguna de ellas pondrá huevos que valga la pena incubar. (Gx: x es un granjero. Cxy: x cría y. Ax: x es una gallina. Hx: x es un huevo Pxy: x pone y. Vx: vale la pena incubar x.)

Al simbolizar las siguientes, usar solamente las abreviaciones: Px: x es una persona. Tx: x es una tienda. $Cxyz$: x compra y en z.

19. Todos compran algo en una (u otra) tienda.
*20. Hay una tienda en la que cada cual compra una (u otra) cosa.
21. Algunas personas hacen todas sus compras en una sola tienda.
22. Nadie compra todas sus cosas en una sola tienda.
23. Nadie compra cosas en todas las tiendas.
24. Ninguna tienda tiene a todos como clientes.
*25. Ninguna tienda hace todas sus ventas a una sola persona.

Al simbolizar las siguientes, usar solamente las abreviaciones: Bx: x es una beneficencia; Dx: x es dinero; Px: x es una persona; Pxy: x pertenece a y; $Dxyz$: x hace la donación de y a z.

26. Nadie hace donaciones a todas las beneficencias.
27. Nadie dona dinero a todas las beneficencias.
28. Nadie hace donación de todo su dinero a beneficencias.
29. Nadie hace donación de todo su dinero a una sola beneficencia.
*30. Nadie hace donación de todas sus pertenencias a una sola beneficencia.

(En este ejercicio, el número 35 y el 40, usar las abreviaciones Cx, Mx, Px, Bxy y $Dxyz$ para confrontar las respuestas al final del libro).

31. Nadie hace todas sus donaciones a una sola beneficencia.
32. Ninguna beneficencia recibe todo su dinero de una sola persona.
33. Ninguna beneficencia recibe todo el dinero de una sola persona.
34. Ninguna beneficiencia recibe todas las donaciones de una sola persona.
*35. Ninguna beneficencia recibe todas las donaciones de un solo donante.
36. Ninguna beneficencia recibe solamente donaciones en dinero.
37. Alguien da dinero a las beneficencias.
38. Alguien da todo su dinero a las beneficencias.
39. Cuando menos una persona hace donación de todas sus pertenencias a una sola beneficencia.
*40. Cuando menos una persona hace todas sus donaciones a una sola beneficencia.
41. Algunas beneficencias reciben donaciones de todas las personas.
42. Algunas beneficencias reciben donaciones de cada donante.
43. Algunas donaciones no son hechas a beneficencias.
44. Algunos donantes hacen donaciones a todas las beneficencias.
45. Cada beneficencia recibe donaciones de cuando menos un donante.

III. Simbolizar cada una de las siguientes:

*1. El que derramare sangre de hombre, por el hombre su sangre será derramada. (Génesis 9:6)
2. Su mano será contra todos y la mano de todos contra él. (Génesis 16:12)
3. El Sol no te fatigará de día ni la Luna de noche. (Salmo 121:6)
4. El hijo sabio alegra al padre. (Proverbios 10:1)
*5. El que detiene el castigo a su hijo, lo aborrece. (Proverbios 13:24)
6. El que toma prestado es siervo del que presta (Proverbios 22:7)
7. El que cava foso caerá en él, y al que revuelve la piedra, sobre él le volverá. (Proverbios 26:27)

8. Los padres comieron las uvas agrias y los dientes de los hijos tienen la dentera. (Ezequiel 18:2)
9. Los zorros tienen guaridas y las aves del cielo nidos; mas el Hijo del Hombre no tuvo donde recostar su cabeza. (Mateo 8:20)
10. ...no hago el bien que quiero, sino el mal que no quiero, eso hago. (Romanos 7:19)

5.2. Argumentos que Involucran Relaciones

No hay necesidad de introducir nuevos principios para tratar los argumentos relacionales. La lista original de diecinueve Reglas de Inferencia junto con el método reforzado de Demostración Condicional y nuestras reglas de cuantificación, además de la Negación de Cuantificador nos permiten (teniendo el ingenio suficiente) construir una demostración formal de validez para cada argumento válido en el que solamente variables individuales son cuantificadas y sólo se presentan conectivos de función de verdad.

Sin embargo, es aconsejable hacer un cierto cambio en la técnica al trabajar con argumentos que involucran relaciones. En la mayor parte de nuestras demostraciones ilustrativas anteriores se usaban **UI** y **EI** para instanciar con respecto a una variable diferente de cualquiera de las cuantificadas en la premisa, y **UG** y **EG** se usaban para cuantificar con respecto a una variable diferente de las que ocurriesen libremente en la premisa. Nuestras inferencias eran en su mayor parte de las formas:

$$\frac{(x)Fx}{\therefore Fy}, \quad \begin{array}{l} (\exists x)Fx \\ \left[\begin{array}{l} \rightarrow Fy \\ \quad\vdots \\ \quad p \end{array}\right. \\ \therefore p \end{array}, \quad \frac{Fx}{\therefore (y)Fy}, \quad \frac{Fy}{\therefore (\exists w)Fw}$$

Pero nuestra enunciación de las reglas de cuantificación no requiere que μ y ν sean variables diferentes; bien pueden ser la misma. Y globalmente es más simple (siempre que sea legítimo) instanciar con respecto a la misma variable que ha sido cuantificada y cuantificar con respecto a la misma variable que ocurriese libre en la premisa. Así, las inferencias anteriores pueden también tomar alguna de las formas siguientes:

$$\frac{(x)Fx}{\therefore Fx}, \quad \begin{array}{l} (\exists x)Fx \\ \left[\begin{array}{l} \rightarrow Fx \\ \quad\vdots \\ \quad p \end{array}\right. \\ \therefore p \end{array}, \quad \frac{Fx}{\therefore (x)Fx}, \quad \frac{Fy}{\therefore (\exists y)Fy}$$

En esta forma se lleva a cabo la instanciación por simple retiro de un cuantificador y la generalización se lleva a cabo simplemente agregando un cuantificador. Desde luego que nuestras restricciones sobre las reglas de cuantificación deberán seguir vigentes y observadas. Por ejemplo, en donde se tengan dos premisas "$(\exists x)Fx$" y "$(\exists x) \sim Fx$", podemos instanciar con respecto a una simplemente quitando el cuantificador, pero cuando se haya hecho eso, si **EI** se usa más adelante en el otro, se debe utilizar una nueva variable en lugar de "x", pues esta última habrá tenido ya una ocurrencia libre en la demostración que se construye. Desde luego, estamos en perfecta libertad de usar **UI** para instanciar con respecto a cualquier variable o constante que elijamos. Las observaciones precedentes se pueden ilustrar construyendo una demostración de validez para el argumento.

Existe un hombre que todos desprecian.

Por lo tanto, existe al menos un hombre que se desprecia a sí mismo.

Su traducción simbólica y demostración usando "Mx" y "Dxy" para abreviar "x es un hombre" y "x desprecia a y" se puede escribir como sigue:

1.	$(\exists x)[Mx \cdot (y)(My \supset Dyx)]$	$/ \therefore (\exists x)(Mx \cdot Dxx)$
→ 2.	$Mx \cdot (y)(My \supset Dyx)$	
3.	$(y)(My \supset Dyx)$	2, Simp.
4.	$Mx \supset Dxx$	3, **UI**
5.	Mx	2, Simp.
6.	Dxx	4, 5, M.P.
7.	$Mx \cdot Dxx$	5, 6, Conj.
8.	$(\exists x)(Mx \cdot Dxx)$	7, **EG**
9.	$(\exists x)(Mx \cdot Dxx)$	1, 2–8, **EI**

En la demostración precedente la única utilización de una regla de cuantificación acompañada por un cambio de variable fue la de **UI** al pasar del renglón 3 al renglón 4 que se efectúa porque necesitábamos la expresión "Dxx" así obtenida.

Otra demostración formal sirve para establecer la validez del tercer modelo de argumento enunciado al principio de este capítulo. Su premisa "todos los caballos son animales" se simbolizará "$(x)(Ex \supset Ax)$" donde "Ex" y "Ax" abrevian "x es un caballo" y "x es un animal", respectivamente. En su conclusión

La cabeza de un caballo es la cabeza de un animal.

la palabra "la" tiene el mismo sentido que tiene en la proposición "La ballena es un mamífero" o "El niño quemado teme al fuego". Podemos parafrasearla como

Todas las cabezas de caballos son cabezas de animales.

y después como

$(x)[(x$ es una cabeza de un caballo$)$
$\supset (x$ es una cabeza de un animal$)]$

y finalmente escribiendo "Hxy" en lugar de "x es una cabeza de y" podemos expresar la conclusión mediante la fórmula

$$(x)[(\exists y)(Ey \cdot Hxy) \supset (\exists y)(Ay \cdot Hxy)]$$

Una vez simbolizada, el argumento fácilmente se demuestra válido por las técnicas de que ya disponemos:

1.	$(x)(Ex \supset Ax)$ $\quad / \therefore (x)[(\exists y)(Ey \cdot Hxy) \supset (\exists y)(Ay \cdot Hxy)]$	
→ 2.	$(\exists y)(Ey \cdot Hxy)$	
→ 3.	$Ey \cdot Hxy$	
4.	Ey	3, Simp.
5.	$Ey \supset Ay$	1, **UI**
6.	Ay	5, 4, M.P.
7.	Hxy	3, Simp.
8.	$Ay \cdot Hxy$	6, 7, Conj.
9.	$(\exists y)(Ay \cdot Hxy)$	8, **EG**
10.	$(\exists y)(Ay \cdot Hxy)$	2, 3–9, **EI**
11.	$(\exists y)(Ey \cdot Hxy) \supset (\exists y)(Ay \cdot Hxy)$	2–10, C.P.
12.	$(x)[(\exists y)(Ey \cdot Hxy) \supset (\exists y)(Ay \cdot Hxy)]$	11, **UG**

El primer modelo de argumentos en este capítulo que trataba con la relación *de ser mayor de edad que* plantea un nuevo problema que se discutirá en la sección siguiente.

EJERCICIOS

I. Construir una demostración formal de validez para cada uno de los argumentos siguientes:

*1. $(\exists x)(y)[(\exists z)Ayz \supset Ayx]$
$(y)(\exists z)Ayz$
$\therefore (\exists x)(y)Ayx$

2. $(x)[(\exists y)Byx \supset (z)Bxz]$
$\therefore (y)(z)(Byz \supset Bzy)$

3. $(x)(Cax \supset Dxb)$
   $(\exists x)Dxb \supset (\exists y)Dby$
   $\therefore (\exists x)Cax \supset (\exists y)Dby$
4. $(x)[Ex \supset (y)(Fy \supset Gxy)]$
   $(\exists x)[Ex \cdot (\exists y) \sim Gxy]$
   $\therefore (\exists x) \sim Fx$

*5. $(\exists x)[Hx \cdot (y)(Iy \supset Jxy)]$
   $\therefore (x)(Hx \supset Ix) \supset (\exists y)(Iy \cdot Jyy)$

6. $(x)\{Kx \supset [(\exists y)Lxy \supset (\exists z)Lzx]\}$
   $(x)[(\exists z)Lzx \supset Lxx]$
   $\sim(\exists x)Lxx$
   $\therefore (x)(Kx \supset (y) \sim Lxy)$
7. $(x)[Mx \supset (y)(Ny \supset Oxy)]$
   $(x)[Px \supset (y)(Oxy \supset Qy)]$
   $\therefore (\exists x)(Mx \cdot Px) \supset (y)(Ny \supset Qy)$
8. $(x)[(Rx \cdot \sim Sx) \supset (\exists y)(Txy \cdot Uy)]$
   $(\exists x)[Vx \cdot Rx \cdot (y)(Txy \supset Vy)]$
   $(x)(Vx \supset \sim Sx)$
   $\therefore (\exists x)(Vx \cdot Ux)$
9. $(x)(Wx \supset Xx)$
   $(x)[(Yx \cdot Xx) \supset Zx]$
   $(x)(\exists y)(Yy \cdot Ayx)$
   $(x)(y)[(Ayx \cdot Zy) \supset Zx]$
   $\therefore (x)[(y)(Ayx \supset Wy) \supset Zx]$
10. $(x)\{[Bx \cdot (\exists y)[Cy \cdot Dyx \cdot (\exists z)(Ez \cdot Fxz)]] \supset (\exists w)Gxwx\}$
   $(x)(y)(Hxy \supset Dyx)$
   $(x)(y)(Fxy \supset Fyx)$
   $(x)(Ix \supset Ex)$
   $\therefore (x)\{Bx \supset [[(\exists y)(Cy \cdot Hxy) \cdot (\exists z)(Iz \cdot Fxz)] \supset (\exists u)(\exists w)\, Gxwu]\}$

II. Construir una demostración formal de validez para cada uno de los siguientes argumentos:

1. Quienquiera que apoye a Smith votará por Jones. Anderson no votará por nadie que no sea un amigo de Harris. Ningún amigo de Kelly tiene como amigo a Jones. Por lo tanto, si Harris es un amigo de Kelly, Anderson no apoyará a Smith. (Axy: x apoya a y. Vxy: x vota por y. Fxy: x es amigo de y. a: Anderson. s: Smith. j: Jones. h: Harris. k: Kelly.)
2. Todos los círculos son figuras. Por lo tanto, todos los que trazan círculos trazan figuras. (Cx: x es un círculo. Fx: x es una figura. Txy: x traza y.)
3. Cualquier amigo de Juan es un amigo de Pedro. Por lo tanto, cualquiera que conozca a un amigo de Juan conoce a un amigo de Pedro. (Px: x es una persona. Axy: x es un amigo de y. Cxy: x conoce a y. j: Juan. p: *Pedro.*)

*4. Solamente un tonto mentiría respecto a uno de los miembros de la fraternidad de Bill, a Bill. Un compañero de clase de Bill le mintió respecto a Alberto. Por lo tanto, si ninguno de los compañeros de clase de Bill es un tonto, entonces Alberto no es un miembro de la fraternidad de Bill. (*Fx*: *x* es un tonto. *Lxyz*: *x* miente a z respecto a *y*. *Cxy*: *x* es compañero de clase de *y*. *Bxy*: *x* es miembro de la fraternidad de *y*. *a*: Alberto. *b*: *Bill.*)

5. Quienquiera que pertenezca al Country Club tiene más dinero que cualquier miembro del Club de la Taberna. No cualquiera que pertenezca al Country Club tiene más dinero que cualquiera que no pertenezca al mismo. Por lo tanto, no cualquiera pertenece al Country Club o al Club de la Taberna. *Cx*: *x* pertenece al Country Club. *Tx*: *x* pertenece al Club de la Taberna. *Px*: *x* es una persona. *Dxy*: *x* tiene más dinero que *y*.)

*6. Vender una arma no registrada es un crimen. Todas las armas que Rojo posee se las compró o al Zurdo o al Tuerto. De modo que si una de las armas de Rojo es una pistola no registrada, y si Rojo nunca le compró nada al Tuerto, el Zurdo es un criminal. (*Rx*: *x* está registrada. *Gx*: *x* es una pistola. *Cx*: *x* es un criminal. *Wx*: *x* es una arma. *Oxy*: *x* posee *y*. *Sxyz*: *x* vendió *y* a *z*. *r*: Rojo. *l*: el Zurdo. *m*: el Tuerto.)

7. Todo lo que hay en mi escritorio es una obra maestra. Quienquiera que escriba una obra maestra es un genio. Alguna persona desconocida escribió algunas de las novelas que hay en mi escritorio. Por lo tanto, alguna persona desconocida es un genio. (*Ex*: *x* está en mi escritorio. *Mx*: *x* es una obra maestra. *Px*: *x* es una persona. *Gx*: *x* es un genio. *Dx*: *x* es desconocido. *Nx*: *x* es una novela. *Exy*: *x* escribió *y*.)
Exy

8. Hay un profesor que agrada a todos los estudiantes a quienes agrada cuando menos un profesor. A todo estudiante le agrada uno u otro profesor. Por lo tanto, hay un profesor que agrada a todos los estudiantes. (*Px*: *x* es un profesor. *Ex*: *x* es un estudiante. *Axy*: a *x* le agrada *y*.)

9. Nadie respeta a una persona que no se respeta a sí misma. Nadie contratará a una persona que no se respeta. Por lo tanto, una persona que no respeta a nadie nunca será contratada por nadie. (*Px*: *x* es una persona. *Rxy*: *x* respeta a *y*. *Cxy*: *x* contrata a *y*.)

10. Quienquiera que haga una donación al United Fund hace todas sus donaciones al United Fund. Por tanto, si Jones es una persona que no hace todas sus donaciones al United Fund, entonces no hace donación alguna al United Fund. (*Px*: *x* es una persona. *Dxyz*: *x* hace donación de *y* a *z*. *f*: El United Fund. *j*: *Jones*.)

11. Todo libro que sea aprobado por todos los críticos será leído por cualquier persona literata. Cualquiera que lea cualquier cosa hablará de ella. Un crítico aprobará cualquier libro escrito por cualquier persona que le adule. Así pues, si alguien adula a todos los críticos, entonces cualquier libro que escriba será comentado por todas las personas literatas. (*Lx*: *x* es un libro. *Cx*: *x* es un crítico. *Tx*: *x* es un literato. *Px*: *x* es una persona. *Axy*: *x* aprueba *y*. *Lxy*: *x* lee *y*. *Cxy*: *x* comenta *y*. *Fxy*: *x* adula a *y*. *Exy*: *x* escribe *y*.)

12. Una obra de arte que relata algo puede ser comprendida por todos. Algunas obras de arte religioso han sido creadas por grandes artistas. Cualquier obra de arte religioso relata una historia que inspira. Por

lo tanto, si algunas personas sólo admiran lo que no pueden entender, entonces algunas creaciones de grandes artistas no serán admiradas por todos. (Ax: x es un gran artista. Px: x es una persona. Hx: x es una historia. Ix: x inspira. Rx: x es religioso. Ox: x es una obra de arte. Cxy: x crea y. Axy: x admira a y. Rxy: x relata y. Exy: x puede entender y.)

5.3. Algunos Atributos de las Relaciones

Hay muchos atributos interesantes que las relaciones mismas pueden tener. Vamos a considerar tan sólo algunos de los más familiares y nuestra discusión quedará limitada a los atributos de las relaciones *diádicas*.

Las relaciones diádicas se pueden caracterizar como *simétricas*, *asimétricas*, o *no simétricas*. Varias relaciones simétricas están designadas por las frases: "es vecino de", "está casado con" y "tiene el mismo peso que". Una relación *simétrica* es una relación tal que, si una cosa está en esa relación con una segunda, entonces la segunda *debe* estar en esa relación con la primera. Una función proposicional "Rxy" designa una relación simétrica si y sólo si

$$(x)(y)(Rxy \supset Ryx)$$

Por el otro lado, una relación *asimétrica* es una relación tal que, si una cosa está en esa relación con una segunda cosa, entonces la segunda *no puede* estar en esa relación con la primera. Las siguientes frases designan varias relaciones asimétricas: "está al norte de", "es mayor que" y "pesa más que". Una función proposicional "Rxy" designa una relación asimétrica si y sólo si

$$(x)(y)(Rxy \supset \sim Ryx)$$

Sin embargo, no todas las relaciones son simétricas o asimétricas. Si *una persona* ama a otra o es hermano de otra o pesa no más que otra, no se infiere que la segunda ame a la primera o sea su hermano (podría ser su hermana) o que pesa no más que la primera. Ni tampoco se sigue que la segunda *no* ama a la primera o que *no* es su hermano, o que *no* pesa más que la primera. Relaciones como éstas son *no simétricas* y se les define como las que no son ni simétricas ni asimétricas.

Las relaciones diádicas también se pueden caracterizar como *transitivas*, *intransitivas* o *no transitivas*. Las siguientes frases designan relaciones transitivas: "está al norte de", "es un antepasado de" y "pesa lo mismo que". Una relación *transitiva* es una relación tal que, si una cosa está en esa relación con una segunda y la segunda con una tercera, entonces la primera debe estar en esa relación con la tercera. Una función proposicional "Rxy" designa una relación transitiva si y sólo si

$$(x)(y)(z)[(Rxy \cdot Ryz) \supset Rxz]$$

Una relación *intransitiva* por el otro lado, es una relación tal que si una cosa está en esa relación con una segunda, y la segunda con una tercera, entonces la primera *no puede* estarlo con la tercera; las frases siguientes corresponden a relaciones intransitivas: "es madre de", "es padre de" y "pesa exactamente el doble que". Una función proporcional "Rxy" designa una relación intransitiva si y sólo si

$$(x)(y)(z)[(Rxy \cdot Ryz) \supset \sim Rxz]$$

No todas las relaciones son transitivas o intransitivas. Definimos una relación *no transitiva* como aquella que no es transitiva ni intransitiva; las siguientes frases designan relaciones no transitivas: "ama a", "se puede diferenciar de" y "tiene un peso diferente del de".

Finalmente, las relaciones pueden ser *reflexivas, irreflexivas* o *no reflexivas*. Varios autores han propuesto varias definiciones de estas propiedades y parece no haber una terminología estándar bien establecida. Es conveniente distinguir entre la reflexividad y la reflexividad total. Una relación es *totalmente reflexiva* si cada cosa está en esa relación consigo misma. Por ejemplo, la frase "es idéntico a" designa la relación totalmente reflexiva de identidad. Una función proposicional "Rxy" designa una relación totalmente reflexiva si y sólo si

$$(x)Rxx$$

Por otro lado, una relación se dice *reflexiva* si cualquier cosa a está en esa relación consigo misma si existe una cosa b tal que Rab o Rba. Ejemplos obvios de relaciones reflexivas los designan las frases: "tiene el mismo color de cabello que", "tiene la misma edad que" y "es un contemporáneo de". Una función proposicional "Rxy" designa una relación reflexiva si y sólo si

$$(x)[(\exists y)(Rxy \vee Ryx) \supset Rxx]$$

Es obvio que todas las relaciones totalmente reflexivas son reflexivas.

Una relación *irreflexiva* es tal que nada está en esa relación consigo mismo. Una función proposicional "Rxy" designa una relación irreflexiva si y sólo si

$$(x)\sim Rxx$$

Los ejemplos de relaciones irreflexivas son comunes; las frases "está al norte de", "está casado con" y "es padre de", designan todas relaciones irreflexivas. Las relaciones que no son ni reflexivas ni irreflexivas se dice que son *no reflexivas*. Las frases "ama a", "odia a" e "y critica a" designan relaciones no reflexivas.

Las relaciones pueden tener varias combinaciones de estos atributos. La relación de *pesar más que* es asimétrica, transitiva e irreflexiva, mientras que la relación de *tener el mismo peso que* es simétrica, transitiva y reflexiva. Sin embargo, algunos atributos implican la presencia de otros. Por ejemplo, todas las relaciones asimétricas deben ser irreflexivas como es fácil de mostrar. Sea "Rxy" la designación de alguna relación asimétrica; entonces, por definición

1. $(x)(y)(Rxy \supset \sim Ryx)$

De esta premisa es posible deducir que R es irreflexiva, es decir, que $(x) \sim Rxx$:

2.	$(y)(Rxy \supset \sim Ryx)$	1, UI
3.	$Rxx \supset \sim Rxx$	2, UI
4.	$\sim Rxx \vee \sim Rxx$	3, Impl.
5.	$\sim Rxx$	4, Taut.
6.	$(x) \sim Rxx$	5, UG

Otras conexiones lógicas entre estos atributos de relaciones fácilmente se enuncian y demuestran, pero nuestro interés tiene otra dirección.

La importancia o pertinencia de estos atributos con respecto a los argumentos relacionales es fácil de ver. Un argumento con respecto al cual uno es pertinente podría enunciarse como:

> Tomás pesa lo mismo que Ricardo.
> Ricardo pesa lo mismo que Enrique.
> La relación de *pesar lo mismo que* es transitiva.
> ______________________________
> Por lo tanto, Tomás pesa lo mismo que Enrique.

Cuando se le traduce a nuestro simbolismo como

$$\begin{array}{l} Wtd \\ Wdh \\ \underline{(x)(y)(z)[(Wxy \cdot Wyz) \supset Wxz]} \\ \therefore Wth \end{array}$$

el método de demostración de su validez es obvio, de inmediato. Hemos dicho que el argumento "podría" enunciarse de la manera indicada. Pero esta manera de enunciar el argumento sería más la excepción que la regla. La manera ordinaria de proponer un argumento tal sería enunciar las dos primeras premisas y la conclusión solamente fundándose en que *cualquiera sabe* que *pesar lo mismo que* es una relación transitiva. Los argumentos relacionales a menudo se usan y muchos de ellos dependen esencialmente de la transitividad o la simetría o alguno de los otros atributos de las relaciones que se involucran. Pero *que* la relación en cuestión *tenga* el atributo pertinente rara vez, si acaso alguna vez, se enuncia explícitamente como una premisa. La razón es clara. En casi todas las discusiones se puede presuponer un gran número de proposiciones que se suponen del conocimiento general. La mayoría de los oradores y escritores se evitan molestias no repitiendo proposiciones bien conocidas y a veces tan triviales como verdaderas que de sus oyentes o lectores puede perfectamente bien esperarse que las proveerán por sí mismos. Un argumento que está expresado de manera incompleta, siendo "sobreentendida" una parte del mismo, es un *entimema*.

Al ser incompleto, es necesario tener en cuenta las premisas suprimidas de un entimema cuando surge la cuestión de su validez. En donde falte una premisa necesaria la inferencia es técnicamente inválida. Pero si la premisa no expresada es fácil de proveer y obviamente verdadera con toda justicia debiera incluírsele como parte del argumento al tratarse su apreciación. En tal caso se supone que el que hace el argumento tenía más "en mente" de lo explícitamente enunciado. En la mayoría de los casos no hay dificultad en proveer la premisa tácita que el orador tenía en mente, pero no expresó. Así, el primer modelo de argumento enunciado al principio de este capítulo:

Alberto es mayor que Guillermo.
Guillermo es mayor que Carlos.

Por lo tanto, Alberto es mayor que Carlos.

debiera contarse como válido, pues se convierte en válido cuando la proposición trivialmente verdadera, *ser mayor que*, relación transitiva se agrega como una premisa auxiliar. Cuando la premisa faltante indicada es provista, es muy fácil escribir una demostración de validez del argumento.

Desde luego, es frecuente dejar inexpresadas premisas que no sean relacionales. Por ejemplo, en el argumento

Cualquier caballo es más veloz que cualquier perro. Algunos galgos son más veloces que cualquier liebre. Por lo tanto, cualquier caballo es más veloz que cualquier liebre.

no sólo falta expresar la premisa requerida respecto a la transitividad de *ser más veloz que* sino que también la premisa no relacional que todos los galgos son perros. Cuando se agregan éstas, que ciertamente no son cuestiones debatibles, la validez del argumento se puede demostrar como sigue:

1.	$(x)[Hx \supset (y)(Dy \supset Oxy)]$	premisas
2.	$(\exists y)[Gy \cdot (z)(Rz \supset Oyz)]$	$/ \therefore (x)[Hx \supset (z)(Rz \supset Oxz)]$
3.	$(x)(y)(z)[(Oxy \cdot Oyz) \supset Oxz]$	premisas adicionales
4.	$(y)(Gy \supset Dy)$	
5.	Hx	
6.	Rz	
7.	$Gy \cdot (z)(Rz \supset Oyz)$	
8.	Gy	7, Simp.
9.	$Gy \supset Dy$	4, UI
10.	Dy	9, 8, M.P.
11.	$Hx \supset (y)(Dy \supset Oxy)$	1, UI
12.	$(y)(Dy \supset Oxy)$	11, 5, M.P.
13.	$Dy \supset Oxy$	12, UI
14.	Oxy	13, 10, M.P.
15.	$(z)(Rz \supset Oyz)$	7, Simp.
16.	$Rz \supset Oyz$	15, UI
17.	Oyz	16, 6, M.P.
18.	$Oxy \cdot Oyz$	14, 17, Conj.
19.	$(y)(z)[(Oxy \cdot Oyz) \supset Oxz]$	3, UI
20.	$(z)[(Oxy \cdot Oyz) \supset Oxz]$	19, UI
21.	$(Oxy \cdot Oyz) \supset Oxz$	20, UI
22.	Oxz	21, 18, M.P.
23.	Oxz	2, 7–22, EI
24.	$Rz \supset Oxz$	6–23, C.P.
25.	$(z)(Rz \supset Oxz)$	24, UG
26.	$Hx \supset (z)(Rz \supset Oxz)$	5–25, C.P.
27.	$(x)[Hx \supset (z)(Rz \supset Oxz)]$	26, UG

No siempre es tan fácil como en este ejemplo encontrar las premisas faltantes y suplirlas. Cuando no sea obvio cuáles son las premisas requeridas faltantes en un argumento entimemáticamente expresado, entonces, al comenzar una demostración de su validez es sana política el dejar algún espacio por debajo de las premisas dadas en donde puedan escribirse las premisas adicionales cuando surja la necesidad de ellas. El único punto que hay que recalcar es que ningún enunciado que sea tan dudoso o debatible como la conclusión misma del argumento debiera admitirse como premisa suplementaria, pues en un argumento válido enunciado entimemáticamente, sólo las simplezas más absolutas debieran quedar inexpresadas, para que el lector o el oyente las supliese por sí mismo.

EJERCICIOS

Demostrar la validez de los siguientes entimemas agregando las premisas obviamente verdaderas en donde sea necesario:

1. Un Cadillac es más caro que un automóvil barato. Por lo tanto, ningún Cadillac es un automóvil barato. (Cx: x es un Cadillac. Bx: x es un automóvil barato. Mxy: x es más caro que y.)
2. Alicia es la madre de Beatriz. Beatriz es madre de Carlota. Por lo tanto, si Carlota sólo ama a su madre entonces no ama a Alicia. (a: Alicia. b: Beatriz. c: Carlota. Mxy: x es madre de y. Axy: x ama a y.)

*3. Todo hombre del primer equipo es más rápido que cualquiera del segundo equipo. Por lo tanto, ningún hombre del segundo equipo es más rápido que alguno del primer equipo. (Fx: x está en el primer equipo. Sx: x es un hombre que está en el segundo equipo. Oxy: x es más rápido que y.)

4. Todos los muchachos que asistieron a la fiesta bailaron con todas las chicas presentes. Por lo tanto, cada chica que asistió a la fiesta bailó con todos los muchachos que ahí estaban. (Mx: x es un muchacho. Cx: x es una chica. Fx: x estaba en la fiesta. Bxy: x bailó con y.)

*5. Cualquier persona que lleve el mismo apellido de alguien que comete un crimen es desafortunada. Por lo tanto, cualquiera que comete un robo es desafortunado. (Px: x es una persona. Ux: x es desafortunado. Cx: x es un crimen. Bx: x es un robo. Cxy: x comete y. Nxy: x tiene el mismo nombre de y.)

6. Todos los relojes que vende Kubitz son hechos en Suiza. Todo lo que se ha hecho en un país extranjero paga impuesto. Cualquier cosa por la que se paga un impuesto le cuesta al comprador una cantidad extra. Por lo tanto, los relojes que se le compran a Kubitz tienen un costo extra. (Rx: x es un reloj. Ix: x se paga un impuesto por x. Ex: x es un país extranjero. Cxy: x le cuesta a y una cantidad extra. Hxy: x es hecho en y. $Bxyx$: x compra y a z. s: Suiza. k: *Kubitz*.)
7. Los lotes baldíos no producen ingresos a sus propietarios. Cualquier propietario de bienes raíces debe pagar impuesto sobre los mismos. Por lo tanto, cualquier propietario de un lote baldío debe pagar impuesto por algo que no le produce ingresos. (Vx: x es un lote baldío. Rx: x son bienes raíces. Ixy: x produce ingresos a y. Txy: x paga impuesto por y. Oxy: x tiene la propiedad y.)
8. Todos los almirantes llevan uniforme con botones dorados. Por tanto, algunos oficiales navales llevan uniformes con botones dorados. (Ax: x es un almirante. Ux: x es un uniforme. Dx: x es dorado. Bx: x es un botón. Nx: x es un oficial naval. Rx: x es ropa. Mx: x es metal. Wxy: x lleva la ropa y. Txy: x tiene y.)
9. Si alguna vez Carlos se mudó a Boston, eso ocurrió después de conocer a Alberto. Si alguna vez Carlos se casó eso fue antes de haber visto a David. Por lo tanto, si Carlos se mudó a Boston y después se casó, entonces conoció a Alberto antes de haber visto a David. (Tx: x es un tiempo. Ax: x Carlos conoció a Alberto en el tiempo x. Bx: x Carlos se mudó a Boston en el tiempo x. Cx: x Carlos se casó en el tiempo x. Dx: x Carlos vio a David en el tiempo x. Pxy: x precede a y.)
10. Un pez que persigue a todas las carpas plateadas será atrapado por un pescador que utiliza carpas plateadas como carnada. Un pez voraz perse-

guirá cualquier carpa plateada. De modo que si todos los pescadores son deportistas, entonces ningún lucio que no es atrapado por un deportista que utiliza carpas plateadas como carnada es voraz. (*Px*: *x* es un pez. *Cx*: *x* es una carpa plateada. *Pxy*: *x* persigue a *y*. *Cxy*: *x* captura a *y*. *Ax*: *x* es un pescador. *Uxy*: *x* utiliza *y* como carnada. *Vx*: *x* es voraz. *Dx*: *x* es una carpa plateada diminuta. *Sx*: *x* es un deportista. *Lx*: *x* es un lucio.)

5.4. Identidad y la Descripción Definida

La noción de *identidad* es una noción familiar. La ocasión más natural de su uso es tal vez en el proceso de *identificación* como cuando un testigo en la delegación de policía identifica un sospechoso de la fila, afirmando que

El hombre de la derecha *es* el hombre que me robó el bolso.

Otras identificaciones son también comunes como cuando en la clase de geografía se afirma que

El Monte Everest *es* la montaña más alta del mundo,

o cuando en la clase de literatura se afirma que

Lope de Vega *es* el autor de *Fuente Ovejuna*.

Cada una de estas proposiciones afirma que se da una relación entre las cosas a las que se refieren sus dos términos. La relación afirmada es la de *identidad*. En cada una de las proposiciones precedentes cuando menos un término era una *descripción definida*, que es una frase de la forma "el tal y cual". En las identificaciones, sin embargo, los dos términos pueden ser nombres propios. Así como en las dos proposiciones

Bruto mató a César.

y

Booth mató a Lincoln.

se afirma que la relación de *matar* existe entre los individuos a los que se refiere por los nombres propios que en ellas aparecen, así también en las proposiciones

Lewis Carroll era Charles Lutwidge Dodgson.

y

Mark Twain era Samuel Clemens.

se afirma la relación de *identidad* entre los individuos a los que se refiere con los nombres propios que en ellas aparecen.

La notación usual para la relación de identidad es el signo ordinario de igual "=". Es obvio que la relación de identidad es transitiva, simétrica y totalmente reflexiva. En nuestra notación simbólica escribimos

$$(x)(y)(z)\{[(x = y)\cdot(y = z)] \supset (x = z)\}$$
$$(x)(y)[(x = y) \supset (y = x)]$$
$$(x)(x = x)$$

Todas estas son consecuencias inmediatas de la definición de identidad contenida en el principio de la Identidad de los Indiscernibles, de Leibnitz:

$x = y$ si y sólo si cada atributo de x es un atributo de y y recíprocamente.

Este principio nos permite inferir de las premisas $\nu = \mu$ y cualquier proposición que contenga una ocurrencia del símbolo ν, como conclusión cualquier proposición que resulte de reemplazar cualesquier ocurrencias de ν en la segunda premisa por el símbolo μ.[1] Toda inferencia que se apega a este modelo es válida y en una demostración debiera escribirse a un lado de ella "Id". Una o dos deducciones de muestra aclararán este punto. El argumento

O. Henry era William Sidney Porter.
O. Henry era un escritor.

Por lo tanto, William Sidney Porter era un escritor.

se puede simbolizar y demostrar su validez mediante el siguiente argumento en el que se usan las letras "h" y "p" para abreviar los nombres propios "O. Henry" y "William Sidney Porter" y el símbolo "Wx" para "x era un escritor":

1. $h = p$
2. Wh $\quad /\therefore Wp$
3. Wp $\quad$ 1, 2, Id.

Otra ilustración la tenemos en el argumento:

George Eliot escribió *The Mill on the Floss* (El Molino del Floss).
George Eliot es Mary Ann Evans.
Mary Ann Evans es una mujer.

Por lo tanto, una mujer escribió *The Mill on the Floss.*

Usando los símbolos "g", "f", "Mx", "Wxy", "Wx" para abreviar "George Eliot", "*The Mill on the Floss*", "Mary Ann Evans", "x escribió y" y "x es una mujer", podemos formular y demostrar la validez del argumento dado como sigue:

---

[1] Aquí estamos usando las letras *mu* y *nu* para representar cualesquier símbolos individuales constantes o variables.

1. Wgf
2. $g = m$
3. Wm $\quad /\therefore (\exists x)(Wx \cdot Wxf)$
4. Wg $\quad$ 2, 3, Id.
5. $Wg \cdot Wgf$ $\quad$ 4, 1, Conj.
6. $(\exists x)(Wx \cdot Wxf)$ $\quad$ 5, **EG**

Una demostración alternativa para el segundo argumento sería la siguiente:

4. Wmf $\quad$ 1, 2, Id.
5. $Wm \cdot Wmf$ $\quad$ 3, 4, Conj.
6. $(\exists x)(Wx \cdot Wxf)$ $\quad$ 5, **EG**

Una tercera ilustración es la que provee el argumento:

> Sólo un hombre calvo porta una peluca. Kaplan es un hombre que porta una peluca. Este hombre no es calvo. Por lo tanto, este hombre no es Kaplan.

Usando los símbolos "t", "k", "Mx", "Bx", "Wx", para abreviar "este hombre", "Kaplan", "x es un hombre", "x es calvo" y "x porta una peluca", podemos simbolizar este argumento y demostrar su validez como sigue:

1. $(x)[(Mx \cdot Wx) \supset Bx]$
2. $Mk \cdot Wk$
3. $\sim Bt$ $\quad /\therefore \sim(t = k)$
4. $(Mk \cdot Wk) \supset Bk$ $\quad$ 1, **UI**
5. Bk $\quad$ 4, 2, M.P.
6. $\sim(t = k)$ $\quad$ 3, 5, Id.

Esta última demostración sirve para mostrar que usamos el principio de Identidad no sólo para inferir $\Phi\nu$ de $\Phi\mu$ y $\nu = \mu$ sino también para inferir $\sim(\nu = \mu)$ a partir de $\Phi\nu$ y $\sim\Phi\mu$. Para ser completos, y por conveniencia incluimos en nuestro enunciado del principio de Identidad su simetría y su reflexividad total, aunque su simetría rápidamente se deduce de las otras propiedades. Nuestra formulación es

Id. $\dfrac{\Phi\mu \quad \nu = \mu}{\therefore \Phi\nu}$, $\quad \dfrac{\Phi\mu \quad \sim\Phi\nu}{\therefore \sim(\nu = \mu)}$, $\quad \dfrac{\nu = \mu}{\therefore \mu = \nu}$, $\quad$ y $\quad \dfrac{p}{\therefore \mu = \mu}$

Un uso importante paralelismo de identidad lo tenemos en la formulación de ciertos tipos comunes de enunciados exceptivos. Si deseamos simbolizar la proposición

> Alberto está en el equipo y es más rápido que cualquier otro miembro del equipo.

usando "*a*" por "Alberto", "*Tx*" por "*x* está en el equipo" y "*Oxy*" por "*x* es más rápido que *y*", no podemos simplemente escribir

$$Ta \cdot (x)(Tx \supset Oax)$$

pues esto acarrearía

$$Oaa$$

que es falso porque *ser más rápido que* es una relación irreflexiva. La fórmula precedente no traduce la proposición dada, sino más bien la proposición necesariamente falsa:

Alberto está en el equipo y es más rápido que cualquiera de sus miembros.

En esta segunda proposición falta la importante palabra "otro". La primera proposición no afirma que Alberto sea más rápido que *cualquier* miembro del equipo sino que cualquier *otro* "esto es", cualquiera que esté en el equipo y que sea otro que, o no idéntico a, Alberto. La traducción apropiada de la primera proposición es

$$Ta \cdot (x)\{[Tx \cdot \sim(x = a)] \supset Oax\}$$

Si adoptamos la convención de abreviar $\sim(\nu = \mu)$ como $\nu \neq \mu$, la fórmula precedente puede escribirse

$$Ta \cdot (x)[(Tx \cdot x \neq a) \supset Oax]$$

Haciendo un uso semejante del signo de Identidad, podemos simbolizar las proposiciones

Sólo Juan ama a María.

y

María puede tolerar a cualquiera menos a Juan.

como

$$Ljm \cdot (x)(x \neq j \supset \sim Lxm)$$

y

$$\sim Tmj \cdot (x)[(Px \cdot x \neq j) \supset Tmx]$$

Una técnica similar puede usarse al simbolizar la noción expresada por las frases "a lo más" y "no más que". Así, el enunciado,

Hay cuando más una inauguración.

interpretada no como afirmando que hay una inauguración sino que *no hay* más de una, se puede simbolizar como

$$(x)(y)[(Ox \cdot Oy) \supset x = y]$$

De manera semejante, el enunciado

No se permiten más de dos visitantes.

interpretado como dejando abierta la cuestión de si hay visitantes en absoluto se puede simbolizar

$$(x)(y)(z)[(Vx \cdot Vy \cdot Vz) \supset (x = z \vee y = z \vee x = y)]$$

El signo de identidad es también útil al simbolizar la noción de *a lo menos*. No se necesita para "a lo menos uno", pues el cuantificador existencial es suficiente para esto en sí mismo; así, el enunciado

Hay a lo menos un solicitante.

se simboliza

$$(\exists x)Ax$$

Pero para simbolizar

Hay cuando menos dos solicitantes.

necesitamos el signo de identidad al escribir

$$(\exists x)(\exists y)[Ax \cdot Ay \cdot x \neq y]$$

Poniendo juntas las notaciones para "al menos uno" y "a lo más uno" tenemos un método para simbolizar las proposiciones numéricas definidas. Así, el enunciado

Hay un libro sobre mi escritorio.

que significa *exactamente* uno, se simboliza, usando "Bx" por "x es un libro" y "Dx" por "x está sobre mi escritorio", como

$$(\exists x)\{Bx \cdot Dx \cdot (y)[(By \cdot Dy) \supset y = x]\}$$

Y el enunciado

Cada estado elige dos senadores.

significando *exactamente* dos, se simboliza usando "Sx" por "x es un estado", "Nx" por "x es un senador" y "Exy" por "x elige y", como

$$(x)\{Sx \supset (\exists y)(\exists z)[Ny \cdot Nz \cdot Exy \cdot Exz \cdot y \neq z \cdot (w)[(Nw \cdot Exw) \supset (w = y \vee w = z)]]\}$$

Finalmente, el enunciado (presumiblemente falso)

Cerbero tiene tres cabezas.

se simboliza usando "Hx" por "x es una cabeza de Cerbero", como

$$(\exists x)(\exists y)(\exists z)\{Hx \cdot Hy \cdot Hz \cdot x \neq y \cdot y \neq z \cdot x \neq z \cdot (w)[Hw \supset (w = x \vee w = y \vee w = z)]\}$$

La notación presente es adecuada para simbolizar enunciados aritméticos respecto a los individuos, pero simbolizar proposiciones de aritmética pura requiere una herramienta lógica más poderosa como la que se sugiere en la sección siguiente.

Es muy raro que un individuo tenga dos nombres propios diferentes ν y μ, de modo que $\mu = \nu$ sea un enunciado significativo e informativo. Sin embargo, a menudo se refiere a los individuos por medio de frases descriptivas y no por medio de sus nombres propios. Así, cuando se ha cometido un crimen y la policía no ha encontrado todavía al que lo cometió los periódicos no por eso quedan en silencio sino que se refieren al individuo en cuestión como "el secuestrador del hijo de Lindbergh" o "el conductor del automóvil desaparecido".

La palabra "el" (la, lo, etc.) tiene varios usos. En un sentido tiene la fuerza de "todos" o "cualquiera", como en "La ballena es un mamífero". Pero en otro sentido sirve para indicar *existencia* y *unicidad*, como en las frases

El autor de *Fuenteovejuna*.
El hombre que mató a Lincoln.
La ciudad más grande de Yucatán.

que se refieren a Lope de Vega, Booth y Mérida, respectivamente. Una notación bastante estandarizada para *este* sentido de la palabra "el" involucra una iota invertida. Las tres frases de antes se simbolizan (parcialmente) como

$(\iota x)(x$ escribió *Fuenteovejuna*$)$.
$(\iota x)(x$ es un hombre $\cdot\, x$ mató a Lincoln$)$.
$(\iota x)(x$ es una ciudad de Yucatán $\cdot\, x$ es mayor que cualquier otra ciudad de Yucatán$)$.

En general, una fórmula tal como "(ιx) $(x$ escribió *Fuenteovejuna*$)$" se lee como "el x que escribió Fuenteovejuna" y se trata como un nombre propio. Siendo esto así podemos reemplazar la variable individual μ en la función proposicional $\Psi\mu$ por $(\iota\nu)(\Phi\nu)$ para obtener $\Psi(\iota\nu)(\Phi\nu)$ como una instancia de sustitución.

Normalmente, una descripción definida en un argumento funciona como lo hace un nombre propio. El principio de Identidad nos permite inferir la conclusión "Scott escribió *Marmion*" a partir de las premisas "Scott es el autor de *Waverley*" y "el autor de *Waverley* escribió *Marmion*". La proposición "algo es más grande que Detroit" válidamente se infiere por **EG** de la premisa "la ciudad más grande de Illinois es mayor que Detroit". Desde luego, **EI** instancia solamente con una variable y UG generaliza solamente de una variable, de modo que no hay diferencia con respecto a estos dos principios entre un nombre propio y una descripción definida. Pero con respecto al principio de Instanciación Universal surgen ciertas diferencias y dificultades.

Cuando la letra "*F*" designe un atributo, el símbolo complejo "$(\imath x)(Fx)$" se refiere a un individuo que tiene el atributo *F si* hay un tal individuo y solamente uno. Pero, ¿qué pasa si no hay individuo tal o hay más de un individuo con este atributo? En tal caso, como no hay un individuo único al cual referirse por medio de la expresión "$(\imath x)(Fx)$", esa expresión no tiene referencia. El problema de interpretar frases que aparentan referirse, pero que no lo hacen en realidad, se pueden manejar de la siguiente forma debida a Russell.[2] Una definición explícita de un símbolo se da presentando otro símbolo que le es equivalente en significado. Así, el símbolo "soltero" se define explícitamente igualándolo a la frase "hombre no casado". Un método alternativo de explicar el significado de un símbolo es dar una definición contextual y no explícita del mismo. Una definición contextual de un símbolo no explica el significado del símbolo aislado sino más bien explica el significado de cualquier enunciado o contexto en el que ocurre ese símbolo. No damos una explicación de la palabra "el" (o sea el símbolo iota) aislada sino que la presentamos en un método para interpretar toda oración o fórmula en el que aparezca. Una definición contextual se llama también una "definición en uso". El análisis de Russell de la descripción definida consiste en una definición contextual o definición en uso de la palabra "el" en el sentido en que significa existencia y unicidad. Consideremos la proposición

El autor de *Waverley* fue un genio.

Parece afirmar 3 cosas: primeramente que

Hay un individuo que escribió *Waverley.*

en segundo lugar que

A lo más, un individuo escribió *Waverley.*

y finalmente que

Tal individuo fue un genio.

---

[2] Véase "On Denoting", *Mind,* n.s. Vol. 14 (1905). El artículo de Russell junto con los tratamientos alternativos debidos a G. Frege y P. F. Strawson está reimpreso en la Parte III de *Contemporary Readings in Logical Theory,* editado por I. M. Copi y J. A. Gould, New York y London, The Macmillan Company, 1967.

Las tres partes de su significado se pueden simbolizar —sin el uso de la iota— como sigue:

$$(\exists x)(x \text{ escribió } Waverley)$$

$$(y)(y \text{ escribió } Waverley \supset y = x)$$

y

$$x \text{ fue un genio.}$$

Juntando estas 3 frases, se obtiene

$$(\exists x)\{(x \text{ escribió } Waverley) \cdot (y)(y \text{ escribió } Waverley \supset y = x) \cdot (x \text{ fue un genio})\}$$

Tenemos aquí una traducción simbólica del enunciado dado que no contiene la palabra un tanto problemática "el" ni sinónimo alguno de la misma. En general, cualquier enunciado de la forma

El tal y tal es cual y cual.

o cualquier fórmula tal como

$$\Psi(\imath x)(\Phi x)$$

se ve como lógicamente equivalente a

$$(\exists x)\{(x \text{ es tal y tal}) \cdot (y)(y \text{ es tal y tal} \supset y = x) \cdot (x \text{ es cual y cual})\}$$

o como

$$(\exists x)\{\Phi x \cdot (y)(\Phi y \supset y = x) \cdot \Psi x\}$$

Incidentalmente, cuando una propiedad está expresada en la forma superlativa de "el mejor", "el más rápido", "el más pesado" y cosas semejantes, cualquier proposición que la contenga se podrá expresar usando solamente las formas comparativas "mejor", "más rápido", "más pesado" o semejantes. Así, el enunciado

El océano más grande se encuentra al occidente de América.

se puede simbolizar, usando "Ox" por "x es un océano", "Wx" por "x está al oeste de América" y "Lxy" por "x es mayor que y", mediante

$$(\exists x)\{Ox \cdot (y)[(Oy \cdot y \neq x) \supset Lxy] \cdot Wx\}$$

Una descripción definida sólo se usa, de ordinario, cuando se cree que tiene referencia. Uno normalmente usa las palabras "el tal y tal", sólo cuando cree que hay uno y solamente un tal y tal. Pero las creencias suelen estar equivocadas y a veces usa uno una frase semejante, aunque carezca de referencia. Cuando no la tiene, toda oración que afirme que el *tal y tal* tiene cual y cual atributo o está en ésta o aquella relación, es falsa. Así, aunque pudiera ser verdadero que cada cosa tiene una masa, es *falso* que

El hombre inmortal tiene masa.

pues esta oración afirma la existencia de exactamente un hombre inmortal siendo que no lo hay Y a menos que ocurra en algún contexto que aclare que a una montaña en particular es a la que se refiere o que las *montañas en general* son las discutidas, el enunciado

La montaña tiene masa.

es falsa, pues afirma que sólo hay una montaña, siendo que hay muchas. Estas observaciones debieran servir para aclarar que una frase de la forma "el tal y tal", o un símbolo del tipo "$(\imath x)(Fx)$" no puede ser instanciado sólo por el principio de Instanciación Universal. Para deducir la conclusión "$G(\imath x)(Fx)$" de "$(x)Gx$" necesitamos la premisa adicional de que hay exactamente una cosa que es un F. Si falta esa premisa la inferencia es inválida. Pero si está la premisa presente, el argumento fácilmente se demuestra válido como sigue:

1.	$(x)Gx$	
2.	$(\exists x)[Fx\cdot(y)(Fy \supset y = x)]$	$/\therefore\ G(\imath x)(Fx)$
→ 3.	$Fx\cdot(y)(Fy \supset y = x)$	
4.	Gx	1, **UI**
5.	$Fx\cdot(y)(Fy \supset y = x)\cdot Gx$	3, 4, Conj.
6.	$(\exists x)\{Fx\cdot(y)(Fy \supset y = x)\cdot Gx\}$	5, **EG**
7.	$(\exists x)\{Fx\cdot(y)(Fy \supset y = x)\cdot Gx\}$	2, 3-6, **EI**
8.	$G(\imath x)(Fx)$	7—definición

Cualquier proposición de la forma $\Psi(\imath x)(\Phi x)$ es falsa si no hay x que sea Φ o si hay más de uno de ellos. En una proposición semejante la frase descriptiva $(\imath x)(\Phi x)$ se dice que tiene una ocurrencia *primaria*. Pero una proposición que contiene una frase descriptiva puede ser parte de un contexto (veritativo funcional) más grande, en donde la frase descriptiva se dirá que tiene una ocurrencia *secundaria*. Una proposición en la que $(\imath x)(\Phi x)$ tiene una ocurrencia secundaria, puede ser verdadera aunque no haya x que sea Φ o haya más de uno de ellos. Uno de los ejemplos más simples, $\sim\Psi(\imath x)(\Phi x)$ podría significar que

(1) $$(\exists x)\{\Phi x\cdot(y)(\Phi y \supset y = x)\cdot\sim\Psi x\}$$

o que

(2) $$\sim(\exists x)\{\Phi x\cdot(y)(\Phi y \supset y = x)\cdot\Psi x\}$$

Si no hay x que sea Φ o hay más de uno, (1) es falsa y (2) es verdadera. Para hacer definidas y no ambiguas, proposiciones que de otra manera serían ambiguas, Russell propuso usar fórmulas de la forma $(\iota x)(\Phi x)$ como una especie de "indicador de alcance". Pero las reglas que gobiernan éstas son muy complicadas, y para ellas no tendremos utilización aquí. De hecho, no usaremos las fórmulas de la forma $(\iota x)(\Phi x)$, sino usaremos en su lugar la traducción simbólica explícita que involucra cuantificadores y el símbolo de identidad.

EJERCICIOS

Demostrar la validez de los siguientes argumentos usando solamente el símbolo de identidad, además de las abreviaciones indicadas:

1. El arquitecto que diseñó el Tappan Hall solamente diseña edificios de oficinas. Por lo tanto, el Tappan Hall es un edificio de oficinas. (Ax: x es un arquitecto. t: Tappan Hall. Dxy: x diseñó y. Ox: x es un edificio de oficinas.)
*2. El profesor de griego de la Escuela Preparatoria es muy instruido. Por lo tanto, todos los profesores de griego de la Escuela Preparatoria son muy instruidos. (Px: x es un profesor de griego. Sx: x está en la Escuela Preparatoria. Lx: x es muy instruido.)
3. El estado más pequeño está en Nueva Inglaterra. Todos los estados de Nueva Inglaterra son primordialmente industriales. Por lo tanto, el estado más pequeño es primordialmente industrial. (Ex: x es un estado. Nx: x está en Nueva Inglaterra. Ix: x es primordialmente industrial. Mxy: x es menor que y.)
*4. El corredor más rápido es un escandinavo. Por lo tanto, cualquiera que no sea escandinavo puede ser vencido en una carrera por alguna persona (o alguna otra). (Sx: x es un escandinavo. Px: x es una persona. Fxy: x corre más rápidamente que y.)
5. Todos los participantes serán vencedores. Habrá cuando más un vencedor. Hay cuando más un participante. Por lo tanto, hay exactamente un participante. (Px: x es un participante. Vx: x será vencedor.)
*6. Cualquier pez puede nadar más rápidamente que uno más pequeño. Por lo tanto, si hay un pez más grande, entonces habrá un pez más rápido. (Fx: x es un pez. Lxy: x es mayor que y. Sxy: x puede nadar más rápidamente que y.)
7. Adams y Brown fueron los únicos invitados al banquete, que bebieron. Todos los invitados al banquete que llevaron licor bebieron. Adams no llevó licor. Si algún invitado al banquete bebió entonces algún invitado al banquete que bebió debió llevar licor. Todos los que bebieron se embriagaron. Por lo tanto, el invitado al banquete que llevó licor se embriagó. (a: Adams. b: Brown. Ix: x fue un invitado al banquete. Bx: x bebió. Lx: x llevó licor. Ex: x se embriagó.)
8. Cualquiera que haya escalado el Monte Blanco es más valeroso que cualquiera que no lo haya hecho. Sólo el miembro más joven de nuestro equipo ha escalado el Monte Blanco. Todos los miembros de nuestro equipo son veteranos. Por lo tanto, el miembro más valeroso de nuestro equipo es un veterano. (Ex: x ha escalado el Monte Blanco. Nx: x está en nuestro

equipo. Ix: x es un veterano. Vxy: x es más valeroso que y. Mxy: x es mayor que y.)

9. Hay exactamente un centavo en mi mano derecha. Hay exactamente un centavo en mi mano izquierda. No hay nada en mis dos manos a la vez. Por lo tanto, hay exactamente dos centavos en mis manos. (Cx: x es un centavo. Dx: x está en mi mano derecha. Ix: x está en mi mano izquierda.)
10. Todos los acompañadores eran gaiteros. Todos los gaiteros estaban en la barraca. Cuando más, dos individuos estaban en la barraca. Había por lo menos dos acompañadores. Por lo tanto, había exactamente dos gaiteros. (Ax: x era un acompañador. Gx: x era un gaitero. Bx: x estaba en la barraca.)

5.5. Variables Predicadas y Atributos de Atributos

En toda la discusión que precede, se ha confinado la cuantificación a las variables individuales. Con la excepción de las letras griegas *fi* y *psi*, todos los símbolos de atributos y los símbolos de relaciones que se han introducido han sido *constantes*. Las letras "W", "S" y "B" en nuestro uso de "Wx", "Sxy" y "$Bxyz$" como abreviaciones de "x es sabio", "x es un hijo de y" y "x está entre y y z", han designado atributos definidos de, o relaciones entre, individuos. Sin embargo, las variables de atributos y las variables de relaciones se pueden introducir también y cuantificarse.

Poniendo a un lado las letras mayúsculas "F", "G", "H", como variables de atributos o relaciones y refiriéndose a ellas indiferentemente como "variables predicadas", entonces las mismas técnicas de cuantificación que ya nos son familiares permitirán simbolizar una gran variedad de enunciados. Estaremos en posibilidad de simbolizar enunciados respecto a todos o algunos de los atributos o relaciones que las cosas puedan tener o en las cuales las cosas puedan estar. La expresión

$$Fx$$

que consiste en una variable predicada y una variable individual yuxtapuesta, en ese orden, se puede considerar como una función proposicional de dos variables. Por instanciación con respecto a las dos variables obtenemos proposiciones singulares como "Sócrates es mortal" y "Platón es sabio" que se expresan simbólicamente como "Ms" y "Wp". Por instanciación respecto a la variable predicada y generalización respecto a la variable individual obtenemos proposiciones simplemente generales ya familiares tales como

$(x)Mx$ (todo es mortal)

$(\exists x)Wx$ (algo es sabio)

Todas éstas las hemos visto antes. Un nuevo tipo de proposición, sin embargo, aunque todavía simplemente general, se obtiene por instanciación con respecto a la variable individual y generalización con respecto a la variable predicada. Aquí tenemos

$(F)Fs$ (Sócrates tiene todos los atributos)

$(\exists F)Fp$ (Platón tiene algún atributo)

Finalmente, generalizando con respecto a ambas variables se obtienen las siguientes proposiciones doblemente generales:

(1) $(x)(F)Fx$	(5) $(F)(x)Fx$
(2) $(x)(\exists F)Fx$	(6) $(F)(\exists x)Fx$
(3) $(\exists x)(F)Fx$	(7) $(\exists F)(x)Fx$
(4) $(\exists x)(\exists F)Fx$	(8) $(\exists F)(\exists x)Fx$

De éstas, (1) y (5) son claramente equivalentes, pues (1) afirma que

Toda cosa tiene todo atributo.

y (5) afirma que

Todo atributo pertenece a toda cosa.

Las proposiciones (4) y (8) también son equivalentes entre sí, pues (4) afirma que

Alguna cosa tiene algún atributo.

y (8) afirma que

Algún atributo pertenece a alguna cosa.

Las proposiciones restantes, sin embargo, son todas distintas. Se les puede expresar en castellano como

(2) Toda cosa tiene algún atributo (o algún otro).
(3) Hay una cosa que tiene todo atributo.
(6) Todo atributo pertenece a alguna cosa (o alguna otra).
(7) Hay un atributo que pertenece a todas las cosas.

No hay equivalencias aquí, pero la proposición (3) lógicamente acarrea la proposición (6) y la proposición (7) lógicamente trae consigo la proposición (2). Estas implicaciones formalmente pueden establecerse por medio de nuestras reglas familiares de cuantificación, permitiendo los símbolos "μ" y "ν" de las reglas para denotar las variables predicadas así como las variables individuales con las mismas restricciones sobre su aplicación, claro está.

Cuando las variables predicadas se introducen y se permite su cuantificación se puede dar una definición completamente simbólica, esto es, formal, para el símbolo de identidad. La definición es

$$(x = y) = df\,(F)(Fx \equiv Fy)$$

De esta definición tenemos

$$(x)(y)[(x = y) \equiv (F)(Fx \equiv Fy)]$$

como consecuencia lógica. Y de la última se pueden deducir todos los atributos de la relación de identidad.

En su mayor parte, nuestra discusión precedente ha concernido solamente a los atributos de las cosas. Pero las cosas no son las únicas entidades que tienen atributos. En la Sec. 5.3 discutimos varios atributos que se pueden atribuir a, o predicar de, las *relaciones*. Y los atributos mismos pueden tener atributos: así el atributo de ser *honesto* tiene el atributo de ser *deseable*; una *virtud* (que es un atributo) puede a su vez tener el atributo de ser *rara*; y el atributo de ser *desconsiderado* tiene el atributo de ser *común*.

Una vez que se ha notado que algunos atributos pueden predicarse de otros atributos llega la tentación de predicar ciertos atributos de sí mismos. Por ejemplo, el atributo de ser abstracto parece él mismo ser abstracto, mientras que el atributo de ser concreto no parece en sí, ser concreto. Cualquier atributo que se puede con verdad predicar de sí mismo se dirá que es un atributo *predicable*. Así, ser predicable es un atributo que pertenece a todos aquellos y solamente aquellos atributos que pueden ser predicados verdaderamente de sí mismos. Por el otro lado, todo atributo que no puede ser verdadero predicado de sí mismo se dirá que es un atributo *impredicable*. Así, ser impredicable es un atributo que pertenece a todos aquellos y solamente aquellos atributos que no pueden ser verdaderos predicados de sí mismos.

Si ahora nos preguntamos si el atributo de ser impredicable puede ser predicado verdaderamente de sí mismo o no puede serlo, llegamos a la siguiente conclusión triste. Si el atributo de ser impredicable *puede* ser predicado con verdad de sí mismo, entonces *tiene* el atributo de ser impredicable, de donde se sigue por definición que *no puede* ser verdaderamente predicado de sí mismo. Por el otro lado, si el atributo de ser impredicable *no puede* ser verdadero predicado de sí mismo, entonces como todos los otros atributos que no pueden ser verdaderos predicados de sí mismos, *tiene* el atributo de ser impredicable, lo cual quiere decir que *puede* ser verdadero predicado de sí mismo. Hemos así llegado a una contradicción.

La contradicción se puede derivar más claramente simbolizando el atributo de scr impredicable con "*I*" definiéndolo formalmente como

$$IF = df \sim FF$$

cuya definición tiene la siguiente proposición general como una consecuencia lógica inmediata:

$$(F)(IF \equiv \sim FF)$$

De la última, por el principio de Instanciación Universal, podemos instanciar con respecto a "*I*" mismo para obtener

$$II \equiv \sim II$$

que es una contradicción explícita.[3]

Se han propuesto muchos métodos para evitar estas contradicciones. Uno de los mejor conocidos es la Teoría (simple) de los Tipos Lógicos[4] de Russell de la que podemos dar la siguiente formulación general. De acuerdo con Russell las entidades se dividen en una jerarquía de tipos lógicos diferentes, el más bajo de los cuales consiste en todos los individuos, el siguiente en todos los atributos de individuos, el siguiente en todos los atributos de atributos de individuos, el siguiente en todos los atributos de atributos de atributos de individuos, y así sucesivamente. Las relaciones y sus atributos nos dan otras jerarquías que ignoraremos en esta discusión. El punto esencial en la teoría de los tipos no es meramente la división de todas las entidades en tipos lógicos diferentes sino la restricción de que cualquier atributo que pueda significativamente predicarse de una entidad de un tipo lógico no puede significativamente predicarse de cualquier entidad de cualquier otro tipo lógico. Para algunos atributos la teoría de los tipos parece perfectamente

---

[3] Ver *Principles of Mathematics*, de Russell, Cambridge, Inglaterra, 1903, Págs. 79-80, 97-98 y 102. Ver también *Logical Syntax of Language*, de Carnap, New York, 1937, Pág. 211.

[4] Russell formuló inicialmente su teoría de los tipos lógicos en el apéndice B de su *Principles of Mathematics*. Una versión más complicada de la teoría, escrita para atacar ciertos problemas de otra índole también, se presentará en el Apéndice C de este volumen. Véase también "Mathematical Logic as Based on the Theory of Types" de Russell, *American Journal of Mathematics*, Vol. 30 (1908), Págs. 222-262, reimpreso en *Bertrand Russell: Logic and Knowledge. Essays 1901–1950*, editado por Robert Charles Marsh, Londres, 1956 y el Cap. 2 de la Introducción a la primera edición de *Principia Mathematica* por Whitehead y Russell, Cambridge, Inglaterra, 1910-1913. El lector interesado debiera consultar también *The Theory of Logical Types* por Irving M. Copi, Londres, 1971, Routledge and Kegan Paul. La solución alternativa mejor conocida de la contradicción es la clase de teoría de conjuntos axiomática publicada primeramente por E. Zermelo en "Untersuchugen über die Grundlagen der Mengenlehre I' *Mathematische Annalen*, Vol. 65 (1908), Págs. 261-281. El artículo de Zermelo fue traducido por S. Bauer-Mengelberg como "Investigations in the Foundations of Set Theory I" en *De Frege a Gödel* por Jean van Heijenoort, Cambridge, Mass., 1967. Una discusión brillante de estas alternativas puede encontrarse en Willard van Orman Quine, *Set Theory and Its Logic*, Cambridge, Mass., 1963.

obvia. Así, una cosa individual puede ser de color naranja, pero claramente no tiene sentido decir de algún atributo que es de color naranja. Y un atributo puede tener muchas instancias, pero no tiene sentido ni afirmar ni negar que una cosa individual tenga muchas instancias.

La motivación primordial para aceptar la teoría de los tipos lógicos, sin embargo, no es ni su naturalidad ni su obviedad, sino el hecho que permite evitar contradicciones como la del pretendido atributo "impredicable". De acuerdo con esta teoría el tipo de un atributo debe ser más alto que el tipo de cualquier entidad de la cual se pueda significativamente predicar. Consecuentemente, no tiene sentido ni afirmar ni negar de ningún atributo que pertenezca a sí mismo; expresiones como "FF" y "$\sim FF$" deben rechazarse por carentes de significado. En consecuencia, no es posible definir el atributo "impredicable" y la contradicción desaparece. La versión de la teoría de los tipos que acabamos de bosquejar recibe a veces el nombre de "Teoría Simple de los Tipos" y es suficiente para descartar todas las contradicciones de esta índole. Tiene también cierta consonancia con el sentido común. No obstante, existen soluciones alternativas o maneras de evitar las contradicciones de modo que la teoría de los tipos lógicos no puede ser vista como *la* solución. Ha sido ampliamente aceptada, sin embargo, y aquí la seguiremos al introducir un nuevo tipo de símbolo para representar atributos de atributos de individuos.

Algunas palabras tienen más de un solo significado, desde luego, y en cierto sentido designan un atributo de individuos y en otro sentido designan un atributo de atributos de individuos. Así, la palabra "raro" en un sentido designa un atributo de atributos de individuos: un atributo de individuos es raro si está ejemplificado por solamente unos cuantos individuos y en este sentido no se le puede afirmar o negar significativamente de los individuos mismos. Pero por otro lado, hay un sentido *diferente* de la palabra "raro" en el que designa un atributo de una masa individual de gas, y en este sentido no se le puede afirmar o negar significativamente de un atributo. Para evitar la ambigüedad simbolizamos los atributos de atributos de individuos con letras mayúsculas negras cursivas "***A***", "***B***", "***C***", . . ., para evitar que se les confunda con atributos de individuos. Contando con esta nueva herramienta simbólica podemos traducir a nuestra notación proposiciones tales como "la impuntualidad es una falta" y "ser veraz es una buena cualidad". Aquí usamos "Ux", "Tx", "$\boldsymbol{F}F$", "$\boldsymbol{G}F$" para abreviar "x es impuntual", "x es veraz", "F es una falta" y "F es buena" y simbolizamos las dos proposiciones enunciadas como "FU" y "GT". También pueden simbolizarse proposiciones más complejas. Las proposiciones

Todos los atributos útiles son deseables.

y

Algunos atributos deseables no son útiles.

se pueden simbolizar usando los símbolos "UF" por "F es útil" y "DF" por "F es deseable", como

$$(F)(UF \supset DF)$$

y

$$(\exists F)(DF \cdot \sim UF)$$

Finalmente, la proposición

Tomás tiene todas las buenas cualidades de su madre.

se puede simbolizar usando los símbolos adicionales "t" por "Tomás" y "Mxy" por "x es madre de y", como

$$(F)\{(\exists x)[Mxt \cdot (y)(Myt \supset y = x) \cdot Fx \cdot GF] \supset Ft\}$$

o como

$$(\exists x)\{Mxt \cdot (y)(Myt \supset y = x) \cdot (F)[(Fx \cdot GF) \supset Ft]\}$$

EJERCICIOS

I. Simbolizar las siguientes proposiciones:

1. Nada tiene todos los atributos.
2. Algunos atributos no pertenecen a nada.
*3. No hay dos cosas que tengan todos sus atributos en común.
4. Cualesquier dos cosas tienen algún atributo común.
5. Napoleón tenía todos los atributos de un gran general. (n: Napoleón. Gx: x es un gran general.)
*6. David tiene todos los defectos de su padre y ninguna de sus virtudes. (d: David. Fxy: x es padre de y. FF: F es un defecto. VF: F es una virtud.)
7. Jones y Smith comparten todas sus buenas cualidades, pero no tienen malas cualidades en común. (j: Jones. s: Smith. BF: F es una buena cualidad. MF: F es una mala cualidad.)
8. Nada que posea todos los atributos raros tiene un atributo ordinario. (RF: F es raro. OF: F es ordinario.)
*9. Una persona que posea todas las virtudes es una persona virtuosa, pero hay personas virtuosas que no poseen todas las virtudes. (Mx: x es una persona. Vx: x es un individuo virtuoso. VF: F es una virtud.)

10. Cada cual tiene algún atributo no usual (o algún otro atributo no usual); sería no usual la persona que careciese de atributos no usuales. (PX: x es una persona. Ux: x es un individuo no usual UF: F es un atributo no usual.)

II. Demostrar las siguientes:

1. $[(x)(F)Fx] \equiv [(F)(x)Fx]$
*2. $[(\exists x)(\exists F)Fx] \equiv [(\exists F)(\exists x)Fx]$
3. $[(\exists x)(F)Fx] \supset [(F)(\exists x)Fx]$
4. $[(\exists F)(x)Fx] \supset [(x)(\exists F)Fx]$
5. $[(\exists R)(x)(\exists y)Rxy] \supset [(x)(\exists y)(\exists R)Rxy]$

*6. Toda relación (diádica) que sea transitiva e irreflexiva es asimétrica.
7. Todas las relaciones diádicas intransitivas son irreflexivas.
8. Cualquier relación diádica que tenga todo individuo con algún individuo (o algún otro) es totalmente reflexiva si es tanto simétrica como transitiva.
9. De la premisa "$(x)(y)[(x = y) \equiv (F)(Fx \equiv Fy)]$" (que es verdadera por definición), deducir que la relación de identidad es simétrica no usando el principio Id.
*10. A partir de la misma premisa de 9 y bajo la misma restricción deducir que la relación de identidad es totalmente reflexiva.
11. De la misma premisa que el ejercicio 9 y con la misma restricción deducir que la relación de identidad es transitiva.
12. Si los círculos son elipses, entonces los círculos tienen todas las propiedades de las elipses.
13. Todas las relaciones (diádicas) que son tanto simétricas como transitivas son reflexivas.