Ingeniería y Ciencia, ISSN 1794-9165
Volumen 2, número 3, páginas 73-102, marzo de 2006

Caracterización deductiva de los árboles de forzamiento semántico

Manuel Sierra A.[1]

Recepción: 06 de febrero de 2006 — Aceptación: 17 de marzo de 2006
Se aceptan comentarios y/o discusiones al artículo

Resumen

El cálculo proposicional clásico está caracterizado por una herramienta de inferencia visual llamada árboles de forzamiento semántico. Con esta herramienta se marcan los nodos del árbol asociado a una fórmula dada, y con base en estas marcas se determina si la fórmula es válida o no. En caso de invalidez, la valuación que refuta la validez de la fórmula está determinada por las marcas de las hojas en su árbol de forzamiento. En caso de validez, se puede construir una deducción formal de la fórmula asociada a la raíz del árbol; esto se logra debido a que cada regla utilizada para marcar los nodos en el árbol está asociada a una regla de inferencia en el sistema deductivo.

Palabras claves: árbol de forzamiento, valuación, semántica, sistema deductivo.

Abstract

The classic propositional calculus is characterized by a tool of visual inference called trees of semantic forcing. With this tool the associated nodes of the formula are marked, and with base in these marks it determines if the formula is valid or no. In case of invalidity, the valuation that refutes the validity of the formula is determines by the marks of the leaves in its tree of forcing. In case of validity, a formal deduction of the associated formula to the root of the tree can be constructed, this is possible because each used rule to mark the nodes in the tree is associate to a rule of inference in the deductive system.

[1] Magister en Matemáticas, msierra@eafit.edu.co, profesor integrante del grupo en Lógica y Computación, Departamento de Ciencias Básicas, Universidad EAFIT.

Key words: tree of forcing, valuation, semantics, deductive system.

1 Introducción

El método de los *tableros semánticos*, presentado por E. Beth en [1] y popularizado como *árboles de opciones semánticas* por R. Smullyan en [2], consiste básicamente en examinar, de manera sistemática, todas las posibilidades que podrían hacer falsa una proposición dada y buscar si una de estas posibilidades es lógicamente viable, es decir, que no genera contradicciones; en éste caso se tiene un *contraejemplo* que refuta la validez de la proposición dada; si no es posible generar un contraejemplo, esto es, ninguna posibilidad resulta lógicamente viable, entonces la proposición analizada es válida. Este método ha encontrado gran aceptación y se ha extendido a muchos sistemas de lógicas no clásicas, además, es fácil de implementar con un programa de computador.

Los árboles de forzamiento semántico, a diferencia de los árboles de opciones semánticas, no exploran todas las opciones posibles cuando se busca el contraejemplo, se limitan a las opciones que son deductivamente forzadas por las reglas del sistema. Por esta razón, el análisis de validez con árboles de forzamiento es en principio más sencillo y natural que con los árboles de opciones.

En este trabajo se presentan los *árboles de forzamiento semántico* a nivel proposicional para la lógica clásica (CL). Se prueba detalladamente la equivalencia entre la presentación semántica con valuaciones y la presentación con árboles de forzamiento. Esta caracterización permite, por un lado, si una fórmula es inválida, lo cual se concluye si el árbol de la fórmula está bien marcado, entonces la lectura de las marcas de los nodos asociados a las fórmulas atómicas proporciona una valuación que refuta la validez de la fórmula, y, por otro lado, si una fórmula es válida, lo cual se concluye si el árbol está mal marcado o si la raíz forzosamente está marcada con 1, entonces es posible construir una deducción formal con la cual se prueba que la fórmula asociada a la raíz del árbol es un teorema; para lograr esto se cambia cada regla para el forzamiento de marcas por la regla deductiva a la que está asociada.

2 Lenguaje de CL

El lenguaje de la Lógica Clásica (CL) consta de los operadores binarios $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ y $\leftrightarrow$, y del operacor monádico $\sim$, además del paréntesis izquierdo y el paréntesis derecho. El conjunto de *fórmulas* de CL es generado por las siguientes reglas y sólo por ellas:

R1. Se tiene un conjunto enumerable de *fórmulas atómicas.*

R2. Si A es una fórmula entonces $\sim(A)$ es una fórmula.

R3. Si A y B son fórmulas entonces $(A) \wedge (B)$, $(A) \vee (B)$, $(A) \rightarrow (B)$ y $(A) \leftrightarrow (B)$ son fórmulas.

3 Árbol de una fórmula

El *árbol de la fórmula* α se representa por $Ar\,[\alpha]$ y se construye utilizando las siguientes reglas (A fórmula atómica, α y β fórmulas arbitrarias):

$$\boxed{Ar[A] = A} \qquad \boxed{Ar[\sim\alpha] = \begin{array}{c} \sim \\ | \\ Ar[\alpha] \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} Ar[\alpha k \beta] = \begin{array}{c} k \\ \diagup \quad \diagdown \\ Ar[\alpha] \quad Ar[\beta] \end{array} \\ \text{Donde } k \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\} \end{array}}$$

Se define el *árbol de un argumento* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta$ como $Ar[(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta]$ el árbol del *condicional asociado* al argumento. El nodo superior del árbol de la formula α es llamado la *raíz* del árbol; se denota $R\,[\alpha]$ y corresponde al conectivo principal de la fórmula α. Los nodos inferiores, aquellos de los cuales no salen ramas, son llamados *hojas* y corresponden a las fórmulas atómicas.

Por ejemplo, para el argumento $\sim A \vee \sim B, \sim\sim B \vdash \sim(A \leftrightarrow B)$, el condicional asociado es $[(\sim A \vee \sim B) \wedge \sim\sim B] \rightarrow \sim(A \leftrightarrow B)$. Su árbol se muestra en la figura (1).

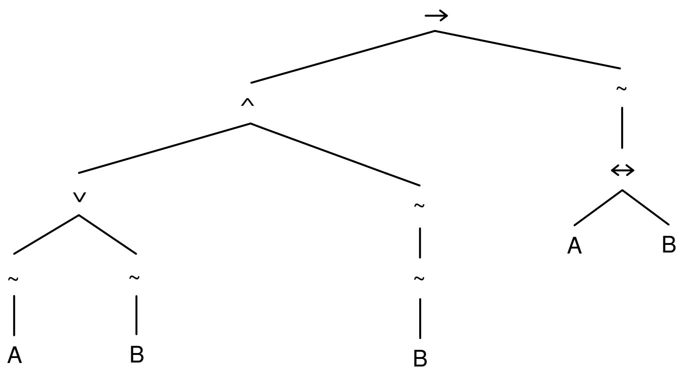


Figura 1: Árbol de $[(\sim A\vee \sim B)\wedge \sim\sim B] \rightarrow\sim(A \leftrightarrow B)$

4 Marcando los nodos de un árbol

Si un nodo C es el conectivo monádico $\sim$, entonces su único hijo se llama *alcance de la negación* y para hacer referencia a él se utiliza la notación $a\sim$.

Si un nodo K es uno de los conectivos binarios $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ ó $\leftrightarrow$, entonces para sus *hijos izquierdo* y *derecho* se utiliza la notación iK y dK respectivamente.

Para toda sub-fórmula β de α, el *nodo asociado* a β es la raíz de β, $R[\beta]$, la cual a su vez es el conectivo principal de β en el caso que β sea compuesta, o es la misma β en el caso que β sea atómica.

Para una fórmula α, $H(\alpha)$ es el conjunto de hojas $Ar[\alpha]$, y $N(\alpha)$ el conjunto de nodos de $Ar[\alpha]$.

Para cada fórmula α, una *función de marca de hojas* m (o simplemente función de marca), es una función de $H(\alpha)$ en $\{0, 1\}$.

Si $m(p) = 1$ entonces se dice que la hoja p está marcada con 1 ó que *es aceptada*. Si $m(p) = 0$ entonces se dice que la hoja p está marcada con 0 ó que *es rechazada*.

Cada función de marca de hojas m se extiende a una *función de marca de nodos* M, de $N(\alpha)$ en $\{0, 1\}$ según las siguientes reglas:

$M(p) = m(p)$ si p es una hoja.

$A\wedge$ *Aceptación de la conjunción:* si una conjunción es aceptada entonces tanto el hijo izquierdo como el derecho son aceptados

$$M(\wedge) = 1 \Rightarrow [M(i\wedge) = 1 \text{ y } M(d\wedge) = 1]\,.$$

$AiAd\wedge$ *Aceptación a la izquierda y Aceptación a la derecha en la conjunción:* si en una conjunción tanto el hijo izquierdo como el derecho son aceptados entonces la conjunción es aceptada

$$[M(i\wedge) = 1 \text{ y } M(d\wedge) = 1] \Rightarrow M(\wedge) = 1\,.$$

$R\vee$ *Rechazo de la disyunción:* si una disyunción es rechazada entonces tanto el hijo izquierdo como el derecho son rechazados

$$M(\vee) = 0 \Rightarrow [M(i\vee) = 0 \text{ y } M(d\vee) = 0]\,.$$

$RiRd\vee$ *Rechazo a la izquierda y Rechazo a la derecha en la disyunción:* si en una disyunción tanto el hijo izquierdo como el derecho son rechazados entonces la disyunción es rechazada

$$[M(i\vee) = 0 \text{ y } M(d\vee) = 0] \Rightarrow M(\vee) = 0\,.$$

$R \rightarrow$ *Rechazo del condicional:* si un condicional es rechazado entonces el hijo izquierdo es aceptado y el hijo derecho es rechazado

$$M(\rightarrow) = 0 \Rightarrow [M(i \rightarrow) = 1 \text{ y } M(d \rightarrow) = 0]\,.$$

$AiRd \rightarrow$ *Aceptación a la izquierda y Rechazo a la derecha en el condicional:* si en un condicional el hijo izquierdo es aceptado y el hijo derecho es rechazado entonces el condicional es rechazado

$$[M(i \rightarrow) = 1 \text{ y } M(d \rightarrow) = 0] \Rightarrow M(\rightarrow) = 0\,.$$

$A \leftrightarrow$ *Aceptación del bicondicional:* un bicondicional es aceptado si y solamente si ambos hijos tienen la misma marca; ambos son aceptados o ambos son rechazados

$$M(\leftrightarrow) = 1 \Leftrightarrow M(i \leftrightarrow) = M(d \leftrightarrow).$$

$A\!\sim$ *Aceptación de la negación:* si una negación es aceptada entonces su alcance es rechazado

$$M(\sim) = 1 \Rightarrow M(a\!\sim) = 0\,.$$

$Ra\!\sim$ *Rechazo del alcance de la negación:* si el alcance de una negación es rechazado entonces la negación es aceptada

$$M(a\!\sim) = 0 \Rightarrow M(\sim) = 1\,.$$

Las anteriores reglas son llamadas *reglas primitivas* para el forzamiento de marcas.

Se dice que una fórmula α es *A–válida* (válida desde el punto de vista de los árboles, $\vDash_A \alpha$) si y solamente si para toda función de marca m, se tiene que $M(R\,[\alpha]) = 1$. Se dice que una fórmula α es *A-inválida* si no es A–válida, es decir, si existe una función de marca m, tal que $M(R\,[\alpha]) = 0$. En este caso se dice que la función de marca refuta la fórmula α. También se dice que el árbol de α está *bien marcado* (ABM, todos sus nodos están marcados de acuerdo con las reglas).

5 Reglas derivadas para el forzamiento de marcas

Las reglas primitivas para el forzamiento de marcas son suficientes para estudiar las propiedades de las árboles de forzamiento, pero en la práctica, cuando se trata de marcar todos los nodos de un árbol, es importante tener reglas que cubran todas las posibilidades. A continuación se presenta un juego completo de *reglas derivadas*.

Proposición 5.1 (Reglas derivadas para el condicional)**.**

$AiA \rightarrow$ *Aceptación a la izquierda y Aceptación del condicional:* si son aceptados tanto el condicional como su hijo izquierdo entonces es aceptado el hijo derecho

$$[M(i \rightarrow) = 1 \text{ y } M(\rightarrow) = 1] \Rightarrow M(d \rightarrow) = 1\,.$$

$RdA \rightarrow$ *Rechazo a la derecha y Aceptación del condicional:* si un condicional es aceptado y su hijo derecho es rechazado entonces es rechazado el hijo izquierdo

$$[M(d \rightarrow) = 0 \text{ y } M(\rightarrow) = 1] \Rightarrow M(i \rightarrow) = 0\,.$$

$Ri \rightarrow$ *Rechazo a la izquierda en el condicional:* si en un condicional se rechaza el hijo izquierdo entonces se acepta el condicional

$$M(i \rightarrow) = 0 \Rightarrow M(\rightarrow) = 1\,.$$

$Ad \rightarrow$ *Aceptación a la derecha en el condicional:* si en un condicional se acepta el hijo derecho entonces se acepta el condicional

$$M(d \rightarrow) = 1 \Rightarrow M(\rightarrow) = 1\,.$$

Prueba 5.1.

$AiA \rightarrow$ Sean $M(i \rightarrow) = 1$ y $M(\rightarrow) = 1$. Suponga que $M(d \rightarrow) = 0$, entonces se tiene que $M(i \rightarrow) = 1$ y $M(d \rightarrow) = 0$, y por $AiRd \rightarrow$ se infiere $M(\rightarrow) = 0$, lo cual no es el caso. Por lo tanto, forzosamente $M(d \rightarrow) = 1$.

$RdA \rightarrow$ Sean $M(d \rightarrow) = 0$ y $M(\rightarrow) = 1$. Suponga que $M(i \rightarrow) = 1$, entonces se tiene que $M(i \rightarrow) = 1$ y $M(d \rightarrow) = 0$, y por $AiRd \rightarrow$ se infiere $M(\rightarrow) = 0$, lo cual no es el caso. Por lo tanto, forzosamente $M(i \rightarrow) = 0$.

$Ri \rightarrow$ Sea $M(i \rightarrow) = 0$. Suponga que $M(\rightarrow) = 0$, entonces por $R \rightarrow$ se infiere $M(i \rightarrow) = 1$, lo cual no es el caso. Por lo tanto, forzosamente $M(\rightarrow) = 1$.

$Ad \rightarrow$ Sea $M(d \rightarrow) = 1$. Suponga que $M(\rightarrow) = 0$, entonces por

$R\rightarrow$ se infiere $M(d\rightarrow)=0$, lo cual no es el caso. Por lo tanto, forzosamente $M(\rightarrow)=1$.

Proposición 5.2 (Reglas derivadas para la conjunción)**.**

AiR$\wedge$ *Afirmación a la izquierda y Rechazo de la conjunción:* si se rechaza una conjunción pero se acepta su hijo izquierdo entonces se rechaza su hijo derecho

$$[M(i\wedge)=1 \text{ y } M(\wedge)=0] \Rightarrow M(d\wedge)=0\,.$$

AdR$\wedge$ *Afirmación a la derecha y Rechazo de la conjunción:* si se rechaza una conjunción pero se acepta su hijo derecho entonces se rechaza su hijo izquierdo

$$[M(d\wedge)=1 \text{ y } M(\wedge)=0] \Rightarrow M(i\wedge)=0\,.$$

Ri$\wedge$ *Rechazo a la izquierda en la conjunción:* si se rechaza el hijo izquierdo de una conjunción entonces se rechaza la conjunción

$$M(i\wedge)=0 \Rightarrow M(\wedge)=0\,.$$

Rd$\wedge$ *Rechazo a la derecha en la conjunción:* si se rechaza el hijo derecho de una conjunción entonces se rechaza la conjunción

$$M(d\wedge)=0 \Rightarrow M(\wedge)=0\,.$$

Prueba 5.2.

AiR$\wedge$ Sean $M(i\wedge)=1$ y $M(\wedge)=0$. Suponga que $M(d\wedge)=1$, entonces se tiene que $M(i\wedge)=1$ y $M(d\wedge)=1$, y por *AiAd*$\wedge$ se infiere $M(\wedge)=1$, lo cual no es el caso. Por lo tanto, forzasamente $M(d\wedge)=0$.

AdR$\wedge$ Sean $M(d\wedge)=1$ y $M(\wedge)=0$. Suponga que $M(i\wedge)=1$, entonces se tiene que $M(i\wedge)=1$ y $M(d\wedge)=1$, y por *AiAd*$\wedge$

se infiere $M(\wedge) = 1$, lo cual no es el caso. Por lo tanto, forzasamente $M(i\wedge) = 0$.

Ri$\wedge$ Sea $M(i\wedge) = 0$. Suponga que $M(\wedge) = 1$, entonces por $A\wedge$ se infiere $M(i\wedge) = 1$, lo cual no es el caso. Por lo tanto, forzosamente $M(\wedge) = 0$.

Rd$\wedge$ Sea $M(d\wedge) = 0$. Suponga que $M(\wedge) = 1$, entonces por $A\wedge$ se infiere $M(d\wedge) = 1$, lo cual no es el caso. Por lo tanto, forzasamente $M(\wedge) = 0$.

Proposición 5.3 (Reglas derivadas para la disyunción)**.**

RiA$\vee$ *Rechazo a la izquierda y Aceptación de la disyunción:* si se acepta una disyunción pero se rechaza su hijo izquierdo entonces se acepta su hijo derecho

$$[M(i\vee) = 0 \text{ y } M(\vee) = 1] \Rightarrow M(d\vee) = 1\,.$$

RdA$\vee$ *Rechazo a la derecha y Aceptación de la disyunción:* si se acepta una disyunción pero se rechaza su hijo derecho entoces se acepta su hijo izquierdo

$$[M(d\vee) = 0 \text{ y } M(\vee) = 1] \Rightarrow M(i\vee) = 1\,.$$

Ai$\vee$ *Aceptación a la izquierda en la disyunción:* si se acepta el hijo izquierdo de una disyunción entonces se acepta la disyunción

$$M(i\vee) = 1 \Rightarrow M(\vee) = 1\,.$$

Ad$\vee$ *Aceptación a la derecha en la disyunción:* si se acepta el hijo derecho de una disyunción entonces se acepta la disyunción

$$M(d\vee) = 1 \Rightarrow M(\vee) = 1\,.$$

Prueba 5.3.

$RiA\vee$ Sean $M(i\vee) = 0$ y $M(\vee) = 1$. Suponga que $M(d\vee) = 0$, entonces se tiene que $M(i\vee) = 0$ y $M(d\vee) = 0$, y por $RiRd\vee$ se infiere $M(\vee) = 0$, lo cual no es el caso. Por lo tanto, forzosamente $M(d\vee) = 1$.

$RdA\vee$ Sean $M(d\vee) = 0$ y $M(\vee) = 1$. Suponga que $M(i\vee) = 0$, entonces se tiene que $M(i\vee) = 0$ y $M(d\vee) = 0$, y por $RiRd\vee$ se infiere $M(\vee) = 0$, lo cual no es el caso. Por lo tanto, forzosamente $M(i\vee) = 1$.

$Ai\vee$ Sea $M(i\vee) = 1$. Suponga que $M(\vee) = 0$, entonces por $R\vee$ se infiere $M(i\vee) = 0$, lo cual no es el caso. Por lo tanto, forzosamente $M(\vee) = 1$.

$Ad\vee$ Sea $M(d\vee) = 1$. Suponga que $M(\vee) = 0$, entonces por $R\vee$ se infiere $M(d\vee) = 0$, lo cual no es el caso. Por lo tanto, forzosamente $M(\vee) = 1$.

Proposición 5.4 (Reglas derivadas para el bicondicional)**.**

$AiAd\leftrightarrow$ *Aceptación a la izquierda y Aceptación a la derecha en el bicondicional:* si se aceptan ambos hijos de un bicondicional entonces se acepta el bicondicional

$$[M(i\leftrightarrow) = 1 \text{ y } M(d\leftrightarrow) = 1] \Rightarrow M(\leftrightarrow) = 1\,.$$

$RiRd\leftrightarrow$ *Rechazo a la izquierda y Rechazo a la derecha en el bicondicional:* si se rechazan ambos hijos de un bicondicional entonces se acepta el bicondicional

$$[M(i\leftrightarrow) = 0 \text{ y } M(d\leftrightarrow) = 0] \Rightarrow M(\leftrightarrow) = 1\,.$$

$AiRd\leftrightarrow$ *Aceptación a la izquierda y Rechazo a la derecha en el bicondicional:* si en un bicondicional se acepta el hijo izquierdo pero se rechaza el hijo derecho entonces se rechaza el bicondicional

$$[M(i \leftrightarrow) = 1 \text{ y } M(d \leftrightarrow) = 0] \Rightarrow M(\leftrightarrow) = 0\,.$$

$AiA \leftrightarrow$ *Aceptación a la izquierda y Aceptación del bicondicional:* si se aceptan tanto el bicondicional como su hijo izquierdo entonces se acepta el hijo derecho

$$[M(i \leftrightarrow) = 1 \text{ y } M(\leftrightarrow) = 1] \Rightarrow M(d \leftrightarrow) = 1\,.$$

$RdA \leftrightarrow$ *Rechazo a la derecha y Aceptación del bicondicional:* si se acepta un bicondiconal y se rechaza su hijo derecho entonces se rechaza el hijo izquierdo

$$[M(d \leftrightarrow) = 0 \text{ y } M(\leftrightarrow) = 1] \Rightarrow M(i \leftrightarrow) = 0\,.$$

$RiAd \leftrightarrow$ *Rechazo a la izquierda y Aceptación a la derecha en el bicondicional:* si en un bicondicional se rechaza su hijo izquierdo y se acepta su hijo derecho entonces se rechaza el bicondicional

$$[M(i \leftrightarrow) = 0 \text{ y } M(d \leftrightarrow) = 1] \Rightarrow M(\leftrightarrow) = 0\,.$$

$RiA \leftrightarrow$ *Rechazo a la izquierda y Aceptación del bicondicional:* si se acepta un bicondicional y se rechaza su hijo izquierdo entonces se rechaza el hijo derecho

$$[M(i \leftrightarrow) = 0 \text{ y } M(\leftrightarrow) = 1] \Rightarrow M(d \leftrightarrow) = 0\,.$$

$AdA \leftrightarrow$ *Aceptación a la derecha y Aceptación del bicondicional:* si se acepta un bicondicional y se acepta su hijo derecho entonces se acepta el hijo izquierdo

$$[M(d \leftrightarrow) = 1 \text{ y } M(\leftrightarrow) = 1] \Rightarrow M(i \leftrightarrow) = 1\,.$$

$RiR \leftrightarrow$ *Rechazo a la izquierda y Rechazo del bicondicional:* si se rechaza un bicondicional y se rechaza su hijo izquierdo entonces se acepta el hijo derecho

$$[M(i \leftrightarrow) = 0 \text{ y } M(\leftrightarrow) = 0] \Rightarrow M(d \leftrightarrow) = 1\,.$$

$AiR \leftrightarrow$ *Aceptación a la izquierda y Rechazo del bicondicional:* si se rechaza un bicondicional y se acepta su hijo izquierdo entonces se rechaza el hijo derecho

$$[M(i \leftrightarrow) = 1 \text{ y } M(\leftrightarrow) = 0] \Rightarrow M(d \leftrightarrow) = 0\,.$$

$RdR \leftrightarrow$ *Rechazo a la derecha y Rechazo del bicondicional:* si se rechaza un bicondicional y se rechaza su hijo derecho entonces se acepta el hijo izquierdo

$$[M(d \leftrightarrow) = 0 \text{ y } M(\leftrightarrow) = 0] \Rightarrow M(i \leftrightarrow) = 1\,.$$

$AdR \leftrightarrow$ *Aceptación a la derecha y Rechazo del bicondicional:* si se rechaza un bicondicional y se acepta su hijo derecho entonces se rechaza el hijo izquierdo

$$[M(d \leftrightarrow) = 1 \text{ y } M(\leftrightarrow) = 0] \Rightarrow M(i \leftrightarrow) = 0\,.$$

Prueba 5.4.

$AiAd \leftrightarrow$ Sean $M(i \leftrightarrow) = 1$ y $M(d \leftrightarrow) = 1$. Se tiene entonces que $M(i \leftrightarrow) = M(d \leftrightarrow)$, por $A \leftrightarrow$ se infiere que forzosamente $M(\leftrightarrow) = 1$.

$RiRd \leftrightarrow$ Sean $M(i \leftrightarrow) = 0$ y $M(d \leftrightarrow) = 0$. Se tiene entonces que $M(i \leftrightarrow) = M(d \leftrightarrow)$, por $A \leftrightarrow$ se infiere que forzosamente $M(\leftrightarrow) = 1$.

$AiRd \leftrightarrow$ Sean $M(i \leftrightarrow) = 1$ y $M(d \leftrightarrow) = 0$. Se tiene entonces que $M(i \leftrightarrow) \neq M(d \leftrightarrow)$, por $A \leftrightarrow$ se infiere que forzosamente $M(\leftrightarrow) = 0$.

$AiA \leftrightarrow$ Sean $M(i \leftrightarrow) = 1$ y $M(\leftrightarrow) = 1$. Al ser $M(\leftrightarrow) = 1$, se tiene por $A\leftrightarrow$ que $M(i\leftrightarrow) = M(d\leftrightarrow)$, y como $M(i\leftrightarrow) = 1$, se infiere que forzosamente $M(d\leftrightarrow) = 1$.

$RdA\leftrightarrow$ Sean $M(d\leftrightarrow) = 0$ y $M(\leftrightarrow) = 1$. Al ser $M(\leftrightarrow) = 1$, se tiene por $A\leftrightarrow$ que $M(i\leftrightarrow) = M(d\leftrightarrow)$, y como $M(d\leftrightarrow) = 0$, se infiere que forzosamente $M(i\leftrightarrow) = 0$.

$RiAd\leftrightarrow$ Sean $M(i\leftrightarrow) = 0$ y $M(d\leftrightarrow) = 1$. Se tiene entonces que $M(i\leftrightarrow) \neq M(d\leftrightarrow)$, por $A\leftrightarrow$ se infiere que forzosamente $M(\leftrightarrow) = 0$.

$RiA\leftrightarrow$ Sean $M(i\leftrightarrow) = 0$ y $M(\leftrightarrow) = 1$. Al ser $M(\leftrightarrow) = 1$, se tiene por $A\leftrightarrow$ que $M(i\leftrightarrow) = M(d\leftrightarrow)$, y como $M(i\leftrightarrow) = 0$, se infiere que forzosamente $M(d\leftrightarrow) = 0$.

$AdA\leftrightarrow$ Sean $M(d\leftrightarrow) = 1$ y $M(\leftrightarrow) = 1$. Al ser $M(\leftrightarrow) = 1$, se tiene por $A\leftrightarrow$ que $M(i\leftrightarrow) = M(d\leftrightarrow)$, y como $M(d\leftrightarrow) = 1$, se infiere que forzosamente $M(i\leftrightarrow) = 1$.

$RiR\leftrightarrow$ Sean $M(i\leftrightarrow) = 0$ y $M(\leftrightarrow) = 0$. Al ser $M(\leftrightarrow) = 0$, se tiene por $A\leftrightarrow$ que $M(i\leftrightarrow) \neq M(d\leftrightarrow)$, y como $M(i\leftrightarrow) = 0$, se infiere que forzosamente $M(d\leftrightarrow) = 1$.

$AiR\leftrightarrow$ Sean $M(i\leftrightarrow) = 1$ y $M(\leftrightarrow) = 0$. Al ser $M(\leftrightarrow) = 0$, se tiene por $A\leftrightarrow$ que $M(i\leftrightarrow) \neq M(d\leftrightarrow)$, y como $M(i\leftrightarrow) = 1$, se infiere que forzosamente $M(d\leftrightarrow) = 0$.

$RdR\leftrightarrow$ Sean $M(d\leftrightarrow) = 0$ y $M(\leftrightarrow) = 0$. Al ser $M(\leftrightarrow) = 0$, se tiene por $A\leftrightarrow$ que $M(i\leftrightarrow) \neq M(d\leftrightarrow)$, y como $M(d\leftrightarrow) = 0$, se infiere que forzosamente $M(i\leftrightarrow) = 1$.

$AdR\leftrightarrow$ Sean $M(d\leftrightarrow) = 1$ y $M(\leftrightarrow) = 0$. Al ser $M(\leftrightarrow) = 0$, se tiene por $A\leftrightarrow$ que $M(i\leftrightarrow) \neq M(d\leftrightarrow)$, y como $M(d\leftrightarrow) = 1$, se infiere que forzosamente $M(i\leftrightarrow) = 0$.

Proposición 5.5 (Reglas derivadas para la negación).

$Aa\sim$ *Aceptación del alcance de la negación:* si el alcance de una negación es aceptado entonces la negación es rechazada

$$M(a\sim) = 1 \Rightarrow M(\sim) = 0\,.$$

$R\sim$ *Rechazo de la negación:* si la negación es rechazada entonces se alcance es aceptado

$$M(\sim) = 0 \Rightarrow M(a\sim) = 1\,.$$

Prueba 5.5.

$Aa\sim$ Sea $M(a\sim) = 1$. Suponga que $M(\sim) = 1$, entonces por $A\sim$ se infiere $M(a\sim) = 0$, lo cual no es el caso. Por lo tanto, forzosamente $M(\sim) = 0$.

$R\sim$ Sea $M(\sim) = 0$. Suponga que $M(a\sim) = 0$, entonces por $Ra\sim$ se infiere $M(\sim) = 1$, lo cual no es el caso. Por lo tanto, forzosamente $M(a\sim) = 1$.

Proposición 5.6 (Reglas de iteración).

IA *Iteración de la Aceptación:* sean n y k dos nodos asociados a una misma fórmula, si el nodo n es aceptado entonces el nodo k también es aceptado
$[n$ asociado a β, k asociado a β, $n \neq k$ y $M(n) = 1] \Rightarrow M(k) = 1\,.$

IR *Iteración del Rechazo:* sean n y k dos nodos asociados a una misma fórmula, si el nodo n es rechazado entonces el nodo k también es rechazado
$[n$ asociado a β, k asociado a β, $n \neq k$ y $M(n) = 0] \Rightarrow M(k) = 0\,.$

Prueba 5.6. Si n y k son nodos asociados a una misma fórmula β entonces n y k son ambas raíces de $Ar\,[\beta]$, como m es una función entonces las marcas de n y k no pueden ser diferentes, es decir, $M(n) = 1$ si y sólo si $M(k) = 1$.

Proposición 5.7 (Reglas para la doble marca)**.**

$OA-DM$ *Opción de Aceptación que genera Doble Marca:* si al suponer que un nodo N está marcado con 1 y al aplicar las reglas para marcar nodos, se tiene como consecuencia marcas diferentes en algún par de nodos asociados a una misma fórmula, entonces el nodo N realmente esta marcado con 0.
Para cada nodo n, $[M(n) = 1 \Rightarrow$ para algún nodo k, $M(k) = 1$ y $M(k) = 0] \Rightarrow M(n) = 0$.

$OR-DM$ *Opción de Rechazo que genera Doble Marca:* si al suponer que un nodo N está marcado con 0 y al aplicar las reglas para marcar nodos, se tiene como consecuencia marcas diferentes en algún par de nodos asociados a una misma fórmula, entonces el nodo N realmente está marcado con 1.
Para cada nodo n, $[M(n) = 0 \Rightarrow$ para algún nodo k, $M(k) = 1$ y $M(k) = 0] \Rightarrow M(n) = 1$.

$RR-DM$ *Rechazo de la Raíz que genera Doble Marca:* si en el árbol de la fórmula α se supone que la raíz está marcada con 0 y al aplicar las reglas para marcar nodos, se tiene como consecuencia marcas diferentes en algún par de nodos asociados a una misma fórmula, entonces la fórmula α es A–válida. En este caso se dice que el árbol es un *árbol mal marcado.*
Para m una función de marca, $[M(R\,[\alpha]) = 0 \Rightarrow$ para algún nodo k, $M(k) = 1$ y $M(k) = 0] \Rightarrow \alpha$ es A–válida.

Prueba 5.7.

$OA-DM$ Se tiene que $M(n) = 1 \Rightarrow$ para algún nodo k, $M(k) = 1$ y $M(k) = 0$. Suponga que $M(n) = 1$, se infiere entonces que para algún nodo k, $M(k) = 1$ y $M(k) = 0$, pero esto es imposible ya que M es una función. Por lo tanto, forzosamente $M(n) = 0$.

$OR - DM$ Se tiene que $M(n) = 0 \Rightarrow$ para algún nodo k, $M(k) = 1$ y $M(k) = 0$. Suponga que $M(n) = 0$, se infiere entonces que para algún nodo k, $M(k) = 1$ y $M(k) = 0$, pero esto es imposible ya que M es una función. Por lo tanto, forzosamente $M(n) = 1$.

$RR - DM$ Se tiene que $M(R\,[\alpha]) = 0 \Rightarrow$ para algún nodo k, $M(k) = 1$ y $M(k) = 0$, donde m es una función de marca. Suponga que α no es A–válido, es decir, existe una función de marca m, tal que $M(R\,[\alpha]) = 0$, se infiere entonces que para algún nodo k, $M(k) = 1$ y $M(k) = 0$, lo cual es imposible. Por lo tanto, forzosamente α es A–válido.

Proposición 5.8 (Reglas de opciones para el condicional)**.**

$OAi - Ad \rightarrow$ *Opción de Aceptación a la izquierda que genera Aceptación a la derecha en un condicional:* si se supone que el hijo izquierdo de un condicional está marcado con 1 y al aplicar las reglas para marcar nodos, se tiene como consecuencia que el hijo derecho esté marcado con 1, entonces el condicional realmente esta marcado con 1

$$[M(i \rightarrow) = 1 \Rightarrow M(d \rightarrow) = 1] \Rightarrow M(\rightarrow) = 1\,.$$

$ORd - Ri \rightarrow$ *Opción de Rechazo a la derecha que genera Rechazo a la izquierda en un condicional:* si se supone que el hijo derecho de un condicional está marcado con 0 y al aplicar las reglas para marcar nodos, se tiene como consecuencia que el hijo izquierdo esté marcado con 0, entonces el condicional realmente está marcado con 1

$$[M(d \rightarrow) = 0 \Rightarrow M(i \rightarrow) = 0] \Rightarrow M(\rightarrow) = 1\,.$$

Prueba 5.8.

$OAi - Ad\rightarrow$ Se tiene que $M(i\rightarrow) = 1 \Rightarrow M(d\rightarrow) = 1$. Suponga que $M(\rightarrow) = 0$, entonces por $R\rightarrow$ resulta que $M(i\rightarrow) = 1$ y $M(d\rightarrow) = 0$, pero al tener $M(i\rightarrow) = 1$ se infiere que $M(d\rightarrow) = 1$, pero esto es imposible, ya que se tiene que $M(d\rightarrow) = 0$. Por lo tanto, forzosamente $M(\rightarrow) = 1$.

$ORd - Ri\rightarrow$ Se tiene que $M(d\rightarrow) = 0 \Rightarrow M(i\rightarrow) = 0$. Suponga que $M(\rightarrow) = 0$, entonces por $R\rightarrow$ resulta que $M(i\rightarrow) = 1$ y $M(d\rightarrow) = 0$, pero al tener $M(d\rightarrow) = 0$ se infiere que $M(i\rightarrow) = 0$, pero esto es imposible, ya que se tiene que $M(i\rightarrow) = 1$. Por lo tanto, forzosamente $M(\rightarrow) = 1$.

Proposición 5.9 (Reglas de opciones para la disyunción)**.**

$ORi - Ad\vee$ *Opción de Rechazo a la izquierda que genera Aceptación a la derecha en una disyunción:* si se supone que el hijo izquierdo de una disyunción está marcado con 0 y al aplicar las reglas para marcar nodos, se tiene como consecuencia que el hijo derecho este marcado con 1, entonces la disyunción realmente esta marcada con 1

$$[M(i\vee) = 0 \Rightarrow M(d\vee) = 1] \Rightarrow M(\vee) = 1\,.$$

$ORd - Ai\vee$ *Opción de Rechazo a la derecha que genera Aceptación a la izquierda en una disyunción:* si se supone que el hijo derecho de una disyunción está marcado con 0 y al aplicar las reglas para marcar nodos, se tiene como consecuencia que el hijo izquierdo este marcado con 1, entonces la disyunción realmente esta marcada con 1

$$[M(d\vee) = 0 \Rightarrow M(i\vee) = 1] \Rightarrow M(\vee) = 1\,.$$

Prueba 5.9.

$ORi - Ad\vee$ Se tiene que $M(i\vee) = 0 \Rightarrow M(d\vee) = 1$. Suponga que $M(\vee) = 0$ entonces por $R\vee$ resulta que $M(i\vee) = 0$ y $M(d\vee) = 0$, pero al tener $M(i\vee) = 0$ se infiere que $M(d\vee) = 1$, pero esto es imposible ya que se tiene que $M(d\vee) = 0$. Por lo tanto, forzosamente $M(\vee) = 1$.

$ORd - Ai\vee$ Se tiene que $M(d\vee) = 0 \Rightarrow M(i\vee) = 1$. Suponga que $M(\vee) = 0$ entonces por $R\vee$ resulta que $M(i\vee) = 0$ y $M(d\vee) = 0$, pero al tener $M(d\vee) = 0$ se infiere que $M(i\vee) = 1$, pero esto es imposible ya que se tiene que $M(i\vee) = 0$. Por lo tanto, forzosamente $M(\vee) = 1$.

6 Sistema deductivo para CL

El *sistema deductivo* para CL consta de los siguientes axiomas:

Ax 0.1 $A \to (B \to A)$
Ax 0.2 $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
Ax 0.3 $A \to (A \vee B)$
Ax 0.4 $B \to (A \vee B)$
Ax 0.5 $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$
Ax 0.6 $(A \wedge B) \to A$
Ax 0.7 $(A \wedge B) \to B$
Ax 0.8 $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \wedge C)))$
Ax 0.9 $\sim A \to (A \to B)$
Ax 0.10 $A \vee \sim A$
Ax 0.11 $(A \leftrightarrow B) \to (A \to B)$
Ax 0.12 $(A \leftrightarrow B) \to (B \to A)$
Ax 0.13 $(A \to B) \to [(B \to A) \to (A \leftrightarrow B)]$.

Como única *regla de inferencia* se tiene el *Modus Ponens* MP: de A y $A \to B$ se infiere B, denotado $A,\ A \to B \vdash B$.

Se dice que una fórmula A es un *teorema de CL*, denotado $\vdash A$, si y solamente si A es la última fórmula de una sucesión finita de fórmulas, tales que cada una de ellas es un axioma o se infiere de dos fórmulas anteriores utilizando la regla de inferencia MP.

Una *valuación* v es una función que interpreta las fórmulas atómicas de CL como elementos del conjunto $\{0,1\}$. La valuación v se extiende a una función V que interpreta las fórmulas de CL en el conjunto $\{0,1\}$ de la siguiente manera:

Si p es atómica entonces $V(p) = v(p)$

$V\sim$ $\quad V(\sim A) = 1 \Leftrightarrow V(A) = 0$

$V\wedge$ $\quad V(A \wedge B) = 1 \Leftrightarrow V(A) = 1$ y $V(B) = 1$

$V\vee$ $\quad V(A \vee B) = 0 \Leftrightarrow V(A) = 0$ y $V(B) = 0$

$V \rightarrow$ $\quad V(A \rightarrow B) = 0 \Leftrightarrow V(A) = 1$ y $V(B) = 0$

$V \leftrightarrow$ $\quad V(A \leftrightarrow B) = 1 \Leftrightarrow V(A) = V(B)$.

Se dice que una fórmula α es *válida*, denotado $\vDash \alpha$, si y solamente si para toda valuación v, $V(\alpha) = 1$.

Proposición 6.1 (Caracterización semántica de CL)**.** Sea α una fórmula de CL, α es válida si y sólo si α es teorema.

Prueba 6.1. La prueba se encuentra en [6].

7 Equivalencia de las presentaciones de CL

Se define la *Complejidad C* como una función, la cual asigna a cada fórmula de CL un entero no negativo, de la siguiente forma:

$C(p) = 0$, donde p es una fórmula atómica.

$C(\alpha k \beta) = 1 +$ máximo de $\{C(\alpha), C(\beta)\}$, donde $k \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

$C(\sim \alpha) = 1 + C(\alpha)$.

Se define la *Profundidad P*, como una función que asigna a cada árbol un entero no negativo, de la siguiente forma:

$P(p) = 0$, donde p es una hoja.

$P(Ar[\alpha k \beta]) = 1 +$ máximo de $\{P(Ar[\alpha]), P(Ar[\beta])\}$, donde $k \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

$P(Ar[\sim \alpha]) = 1 + P(Ar[\alpha])$.

Proposición 7.1 (Valuación asociada a una función de marca)**.** Para cada fórmula α de CL y para cada función de marca m, existe una valuación v_m, tal que $M(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V_m(\alpha) = 1$.

Prueba 7.1. Sea α una fórmula de CL, y sea m una función de marca para α. Se define la función v_m del conjunto de fórmulas atómicas en el conjunto $\{0, 1\}$, de la siguiente forma:

Si p es una hoja del árbol de α entonces $v_m(p) = m(p)$.
Si p no es una hoja del árbol de α entonces $v_m(p) = 1$[2].

La función v_m se extiende a una función V_m del conjunto de fórmulas de CL en el conjunto $\{0, 1\}$, de la siguiente forma:

Si p es atómica entonces $V_m(p) = v_m(p)$

$V_m \sim$ $\quad V_m(\sim A) = 1 \Leftrightarrow V_m(A) = 0$

$V_m\wedge$ $\quad V_m(A \wedge B) = 1 \Leftrightarrow V_m(A) = 1$ y $V_m(B) = 1$

$V_m\vee$ $\quad V_m(A \vee B) = 0 \Leftrightarrow V_m(A) = 0$ y $V_m(B) = 0$

$V_m \rightarrow$ $\quad V_m(A \rightarrow B) = 0 \Leftrightarrow V_m(A) = 1$ y $V_m(B) = 0$

$V_m \leftrightarrow$ $\quad V_m(A \leftrightarrow B) = 1 \Leftrightarrow V_m(A) = V_m(B)$.

Se tiene entonces que V_m es una valuación de CL.

Para probar que $M(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V_m(\alpha) = 1$, se procede por inducción sobre la complejidad de la fórmula α.

Paso base: suponga que la $C(\alpha) = 0$, esto significa que α es un enunciado atómico y, por lo tanto, se tienen $R[\alpha] = \alpha$, $M(\alpha) = m(\alpha)$, $v_m(\alpha) = m(\alpha)$ y $V_m(\alpha) = v_m(\alpha)$. Se concluye entonces que $M(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V_m(\alpha) = 1$.

Paso de inducción: suponga que $C(\alpha) = k \geq 1$. Al ser $C(\alpha) \geq 1$, α debe ser una fórmula compuesta, es decir, α tiene una de las siguientes formas: $\beta \wedge \gamma$, $\beta \vee \gamma$, $\beta \rightarrow \gamma$, $\beta \leftrightarrow \gamma$ ó $\sim\beta$. En cada uno de estos casos $C(\beta) < k$ y $C(\gamma) < k$, y por lo tanto aplica la hipótesis inductiva en los siguientes términos: $M(R[\beta]) = 1 \Leftrightarrow V_m(\beta) = 1$, y $M(R[\gamma]) = 1 \Leftrightarrow V_m(\gamma) = 1$. Se analiza cada caso por separado.

Caso 1: sea α de la forma $\beta \wedge \gamma$. Se tiene que $R[\alpha] = \wedge$, por lo que $M(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow M(\wedge) = 1$, pero por $A\wedge$ se tiene $M(\wedge) = 1 \Leftrightarrow [M(i\wedge) = 1$ y $M(d\wedge) = 1]$, y como además $i\wedge = R[\beta]$ y $d\wedge = R[\gamma]$, resulta que $M(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow [M(R[\beta]) = 1$ y $M(R[\gamma]) = 1]$. Utilizando la hipótesis in-

[2]Podría ser $v_m(p) = 0$, es irrelevante.

ductiva, se tiene que $M(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow [V_m(\beta) = 1 \text{ y } V_m(\gamma) = 1]$. Por la definición de $V_m\wedge$, se concluye que $M(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V_m(\beta \wedge \gamma) = 1$, es decir, $M(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V_m(\alpha) = 1$.

Caso 2: sea α de la forma $\beta \vee \gamma$. Se tiene que $R[\alpha] = \vee$, por lo que $M(R[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow M(\vee) = 0$, pero por $R\vee$ se tiene $M(\vee) = 0 \Leftrightarrow [M(i\vee) = 0 \text{ y } M(d\vee) = 0]$, y como además $i\vee = R[\beta]$ y $d\vee = R[\gamma]$, resulta que $M(R[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow [M(R[\beta]) = 0 \text{ y } M(R[\gamma]) = 0]$. Utilizando la hipótesis inductiva, se tiene que $M(R[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow [V_m(\beta) = 0 \text{ y } V_m(\gamma) = 0]$. Por la definición de $V_m\vee$ se concluye que $M(R[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow V_m(\beta \vee \gamma) = 0$, es decir, $M(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V_m(\alpha) = 1$.

Caso 3: sea α de la forma $\beta \to \gamma$. Se tiene que $R[\alpha] =\to$, por lo que $M(R[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow M(\to) = 0$, pero por $R \to$ se tiene $M(\to) = 0 \Leftrightarrow [M(i \to) = 1 \text{ y } M(d \to) = 0]$, y como además $i \to= R[\beta]$ y $d \to= R[\gamma]$, resulta que $M(R[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow [M(R[\beta]) = 1 \text{ y } M(R[\gamma]) = 0]$. Utilizando la hipótesis inductiva se tiene, que $M(R[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow [V_m(\beta) = 1 \text{ y } V_m(\gamma) = 0]$. Por la definición de $V_m \to$ se concluye que $M(R[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow V_m(\beta \to \gamma) = 0$, es decir, $M(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V_m(\alpha) = 1$.

Caso 4: sea α de la forma $\beta \leftrightarrow \gamma$. Se tiene que $R[\alpha] =\leftrightarrow$, por lo que $M(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow M(\leftrightarrow) = 1$, pero por $A \leftrightarrow$ se tiene $M(\leftrightarrow) = 1 \Leftrightarrow [M(i \leftrightarrow) = M(d \leftrightarrow)]$, y como además $i \leftrightarrow= R[\beta]$ y $d \leftrightarrow= R[\gamma]$, resulta que $M(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow [M(R[\beta]) = M(R[\gamma])]$. Utilizando la hipótesis inductiva, se tiene que $M(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow [V_m(\beta) = V_m(\gamma)]$. Por la definición de $V_m \leftrightarrow$ se concluye que $M(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V_m(\beta \leftrightarrow \gamma) = 1$, es decir, $M(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V_m(\alpha) = 1$.

Caso 5: sea α de la forma $\sim \beta$. Se tiene que $R[\alpha] =\sim$, por lo que $M(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow M(\sim) = 1$, pero por $A\sim$ se tiene $M(\sim) = 1 \Leftrightarrow M(a\sim) = 0$, y como además $a\sim= R[\beta]$, resulta que $M(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow [M(R[\beta]) = 0]$. Utilizando la hipótesis inductiva, se tiene que $M(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V_m(\beta) = 0$. Por la definición de $V_m \sim$, se concluye que $M(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V_m(\sim \beta) = 1$, es decir, $M(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V_m(\alpha) = 1$.

Se tiene entonces que para todos los casos, $M(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V_m(\alpha) = 1$, quedando así probado el paso de inducción.

Por el principio de inducción, se concluye que $M(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V_m(\alpha) = 1$.

Se ha probado entonces que para cada fórmula α de CL y para cada función de marca m, existe una valuacion v_m, tal que $M(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V_m(\alpha) = 1$.

Proposición 7.2 (Función de marca asociada a una valuación)**.** Para cada fórmula α de CL y para cada valuación v, existe una función de marca m_v, tal que $M_v(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V(\alpha) = 1$.

Prueba 7.2. Sea α una fórmula de CL y sea v una valuación. Se define la función de marca m_v del conjunto de hojas del árbol de α en el conjunto $\{0, 1\}$, de la siguiente forma

$$\text{Si } p \text{ es atómica entonces } m_v(p) = v(p)\,.$$

La función m_v se extiende a una función M_v del conjunto de nodos del árbol de α en el conjunto $\{0, 1\}$, de la siguiente forma:

Si p es una hoja entonces $M_v(p) = m_v(p)$
$M_v\wedge$ $\quad M_v(\wedge) = 1 \Leftrightarrow [M_v(i\wedge) = 1 \text{ y } M_v(d\wedge) = 1]$
$M_v\vee$ $\quad M_v(\vee) = 0 \Leftrightarrow [M_v(i\vee) = 0 \text{ y } M_v(d\vee) = 0]$
$M_v \rightarrow$ $\quad M_v(\rightarrow) = 0 \Leftrightarrow [M_v(i \rightarrow) = 1 \text{ y } M_v(d \rightarrow) = 0]$
$M_v \leftrightarrow$ $\quad M_v(\leftrightarrow) = 1 \Leftrightarrow M_v(i \leftrightarrow) = M_v(d \leftrightarrow)$
$M_v \sim$ $\quad M_v(\sim) = 1 \Leftrightarrow M_v(a\sim) = 0\,.$

Se tiene entonces que M_v es una función de marca de nodos.

Para probar que $M_v(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V(\alpha) = 1$, se procede por inducción sobre la profundidad de $Ar[\alpha]$.

Paso base: suponga que $P(Ar[\alpha]) = 0$, esto significa que α es una hoja, por lo tanto se tienen $R[\alpha] = \alpha$, $M_v(\alpha) = m_v(\alpha)$, $m_v(\alpha) = v(\alpha)$ y $v(\alpha) = V(\alpha)$. Se concluye entonces que $M_v(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V(\alpha) = 1$.

Paso de inducción: suponga que $P(Ar[\alpha]) = k \geq 1$. Al ser $P(Ar[\alpha]) \geq 1$, α debe ser una fórmula compuesta, es decir, α tiene una de las siguientes formas: $\beta \wedge \gamma$, $\beta \vee \gamma$, $\beta \rightarrow \gamma$, $\beta \leftrightarrow \gamma$ ó $\sim \beta$. En cada uno de estos casos, $P(Ar[\beta]) < k$ y $P(Ar[\gamma]) < k$, por lo tanto aplica la hipótesis inductiva en los siguientes términos: $M_v(R[\beta]) = 1 \Leftrightarrow V(\beta) = 1$, y $M_v(R[\gamma]) = 1 \Leftrightarrow V(\gamma) = 1$. Se analiza cada caso por separado.

Caso 1: sea α de la forma $\beta \wedge \gamma$. Se tiene que $R[\alpha] = \wedge$, por lo que $M_v(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow M_v(\wedge) = 1$, pero por $M_v\wedge$ se tiene $M_v(\wedge) = 1 \Leftrightarrow [M_v(i\wedge) = 1 \text{ y } M_v(d\wedge) = 1]$, y como además $i\wedge = R[\beta]$ y $d\wedge = R[\gamma]$, resulta que $M_v(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow [M_v(R[\beta]) = 1 \text{ y } M_v(R[\gamma]) = 1]$. Utilizando la hipótesis inductiva, se tiene que $M_v(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow [V(\beta) = 1 \text{ y } V(\gamma) = 1]$. Por la definición de $V\wedge$ se concluye que $M_v(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V(\beta \wedge \gamma) = 1$, es decir, $M_v(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V(\alpha) = 1$.

Caso 2: sea α de la forma $\beta \vee \gamma$. Se tiene que $R[\alpha] = \vee$, por lo que $M_v(R[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow M_v(\vee) = 0$, pero por $M_v\vee$ se tiene $M_v(\vee) = 0 \Leftrightarrow [M_v(i\vee) = 0$ y $M_v(d\vee) = 0]$, y como además $i\vee = R[\beta]$ y $d\vee = R[\gamma]$, resulta que $M_v(R[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow [M_v(R[\beta]) = 0$ y $M_v(R[\gamma]) = 0]$. Utilizando la hipótesis inductiva, se tiene que $M_v(R[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow [V(\beta) = 0$ y $V(\gamma) = 0]$. Por la definición de $V\vee$ se concluye que $M_v(R[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow V(\beta \vee \gamma) = 0$, es decir, $M_v(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V(\alpha) = 1$.

Caso 3: sea α de la forma $\beta \rightarrow \gamma$. Se tiene que $R[\alpha] =\rightarrow$, por lo que $M_v(R[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow M_v(\rightarrow) = 0$, pero por $M_v \rightarrow$ se tiene $M_v(\rightarrow) = 0 \Leftrightarrow [M_v(i \rightarrow) = 1$ y $M_v(d \rightarrow) = 0]$, y como además $i \rightarrow= R[\beta]$ y $d \rightarrow= R[\gamma]$, resulta que $M_v(R[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow [M_v(R[\beta]) = 1$ y $M_v(R[\gamma]) = 0]$. Utilizando la hipótesis inductiva, se tiene que $M_v(R[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow [V(\beta) = 1$ y $V(\gamma) = 0]$. Por la definición de $V \rightarrow$ se concluye que $M_v(R[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow V(\beta \rightarrow \gamma) = 0$, es decir, $M_v(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V(\alpha) = 1$.

Caso 4: sea α de la forma $\beta \leftrightarrow \gamma$. Se tiene que $R[\alpha] =\leftrightarrow$, por lo que $M_v(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow M_v(\leftrightarrow) = 1$, pero por $M_v \leftrightarrow$ se tiene $M_v(\leftrightarrow) = 1 \Leftrightarrow [M_v(i \leftrightarrow) = M_v(d \leftrightarrow)]$, y como además $i \leftrightarrow= R[\beta]$ y $d \leftrightarrow= R[\gamma]$, resulta que $M_v(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow [M_v(R[\beta]) = M_v(R[\gamma])]$. Utilizando la hipótesis inductiva, se tiene que $M_v(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow [V(\beta) = V(\gamma)]$. Por la definición de $V \leftrightarrow$ se concluye que $M_v(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V(\beta \leftrightarrow \gamma) = 1$, es decir, $M_v(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V(\alpha) = 1$.

Caso 5: sea α de la forma $\sim \beta$. Se tiene que $R[\alpha] =\sim$, por lo que $M_v(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow M_v(\sim) = 1$, pero por $M_v\sim$ se tiene $M_v(\sim) = 1 \Leftrightarrow M_v(a\sim) = 0$, y como además $a\sim= R[\beta]$, resulta que $M_v(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow M_v(R[\beta]) = 0$. Utilizando la hipótesis inductiva, se tiene que $M_v(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V(\beta) = 0$. Por la definición de $V\sim$ se concluye que $M_v(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V(\sim\beta) = 1$, es decir, $M_v(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V(\alpha) = 1$.

Se tiene entonces que para todos los casos $M_v(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V(\alpha) = 1$, quedando así probado el paso de inducción.

Por el principio de inducción, se concluye que $M_v(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V(\alpha) = 1$.

Se ha probado entonces que para cada fórmula α de CL y para cada valuación v, existe una función de marca m_v, tal que $M_v(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V(\alpha) = 1$.

Proposición 7.3 (Caracterización semántica y deductiva de los árboles de forzamiento)**.** Para cada fórmula α de CL, se tienen:

- α es válida desde el punto de vista de los árboles si y solamente si α es válida desde el punto de vista de las valuaciones

$$\models \alpha \Leftrightarrow \models_A \alpha\,.$$

- α es válida desde el punto de vista de los árboles si y solamente si α es un teorema del sistema deductivo

$$\vdash \alpha \Leftrightarrow \models_A \alpha\,.$$

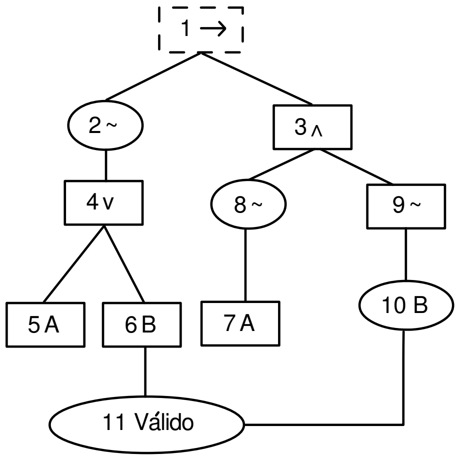
Prueba 7.3. Suponga que α no es válida desde el punto de vista de los árboles, entonces existe una función de marca m, tal que $M(R[\alpha]) = 0$. Se tiene entonces, por la proposición 7.1, que existe una valuación v_m, tal que $V_m(\alpha) = 0$, por lo tanto α no puede ser válida desde el punto de vista de las valuaciones.

Suponga ahora que α no es válida desde el punto de vista de las valuaciones, entonces existe una valuación v, tal que $V(\alpha) = 0$. Se tiene entonces, por la proposición 7.2, que existe una función de marca m_v, tal que $M_v(R[\alpha]) = 0$, por lo tanto α no puede ser válida desde el punto de vista de los árboles.

Se concluye así que α es válida desde el punto de vista de los árboles si y solamente si α es válida desde el punto de vista de las valuaciones. Como, por la proposición 6.1, las valuaciones caracterizan el sistema deductivo para CL, entonces se tiene también que α es válida desde el punto de vista de los árboles si y solamente si α es un teorema del sistema deductivo para CL.

8 Ilustraciones

En la figura (2) se muestra un árbol de forzamiento mal marcado para la fórmula A–válida $\sim(A \vee B) \rightarrow (\sim A \wedge \sim B)$. Un *nodo en un círculo* indica que el nodo está marcado con 1, un *nodo en un cuadro* indica que el nodo está marcado con 0 (de esta forma es presentado en [5]). En el paso 1 el cuadro punteado indica que la marca no se infiere, es una opción, en este caso *opción de rechazo*.



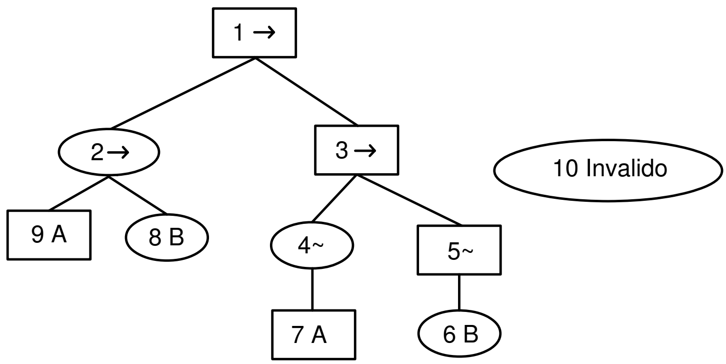
1. OR	2,3. $R\rightarrow$ en 1	4. $A\sim$ en 2
5,6. $R\vee$ en 4	7. IR en 5	8. $Ra\sim$ en 7
9. $AIR\wedge$ en 8 y 3	10. $R\sim$ en 9	11. RR–DM en 6 y 10

Figura 2: Árbol de $\sim(A \vee B) \rightarrow (\sim A \wedge \sim B)$

El método que se ilustra, iniciando con la opción de rechazo de la raíz del árbol, es muy útil. Por esta razón, y gracias a la regla RR-DM, se suele introducir la regla RR, *rechazo de la raíz*, como primitiva y se dice que *una fórmula es A–válida si y sólo si se genera doble marca* (un par de nodos asociados a un mismo enunciado, los cuales tienen marcas diferentes).

En la figura (3) se muestra un árbol de forzamiento bien marcado para la fórmula A–inválida $(A \rightarrow B) \rightarrow (\sim A \rightarrow \sim B)$.

Obsérvese que las *marcas de los nodos asociados a las fórmulas atómicas*, determinan una valuación que refuta la fórmula analizada $v(A) = 0$ y $v(B) = 1$.



1. RR	2,3 $R\rightarrow$ en 1	4,5. $R\rightarrow$ en 3
6. $R\sim$ en 5	7. $A\sim$ en 4	8. IA en 6
9. IR en 7.	10. ABM	

Figura 3: Árbol de $(A \rightarrow B) \rightarrow (\sim A \rightarrow \sim B)$

9 De los árboles a las deducciones

También es importante notar que cuando una fórmula es válida, lo cual se concluye si el árbol está mal marcado o si la raíz forzosamente está marcada con 1, entonces es posible construir una deducción formal, con la cual se prueba que la fórmula asociada a la raíz del árbol es un teorema del sistema deductivo; para lograr esto basta tener en cuenta que cada regla para el forzamiento de marcas está asociada a una *inferencia deductiva* (para las pruebas, ver [3] y [4]) como se indica en las siguientes tablas (en la columna de la izquierda se coloca la regla de forzamiento de marcas y en la derecha la inferencia deductiva asociada):

$A\wedge$	$A \wedge B \vdash A$ y $A \wedge B \vdash B$	Eliminación de la conjunción
$AiAd\wedge$	$A, B \vdash A \wedge B$	Introducción de la conjunción
$AiR\wedge$	$A, \sim(A \wedge B) \vdash \sim B$	Negación de la conjunción
$AdR\wedge$	$B, \sim(A \wedge B) \vdash \sim A$	Negación de la conjunción
$Ri\wedge$	$\sim A \vdash \sim(A \wedge B)$	Negación de la conjunción
$Rd\wedge$	$\sim B \vdash \sim(A \wedge B)$	Negación de la conjunción

$R\vee$	$\sim(A \vee B) \vdash \sim A \wedge \sim B$	Negación de la disyunción
$RiRd\vee$	$\sim A \wedge \sim B \vdash \sim(A \vee B)$	Negación de la disyunción
$RiA\vee$	$\sim A, A \vee B \vdash B$	Silogismo disyuntivo
$RdA\vee$	$\sim B, A \vee B \vdash A$	Silogismo disyuntivo
$Ai\vee$	$A \vdash A \vee B$	Introducción de la disyunción
$Ad\vee$	$B \vdash A \vee B$	Introducción de la disyunción

$R \rightarrow$	$\sim(A \rightarrow B) \vdash A \wedge \sim B$	Negación del condicional
$AiRd \rightarrow$	$A \wedge \sim B \vdash \sim(A \rightarrow B)$	Negación del condicional
$AiA \rightarrow$	$A, A \rightarrow B \vdash B$	Modus Ponens
$RdA \rightarrow$	$\sim B, A \rightarrow B \vdash \sim A$	Modus Tollens
$Ri \rightarrow$	$\sim A \vdash A \rightarrow B$	Negación del antecedente
$Ad \rightarrow$	$B \vdash A \rightarrow B$	Afirmación del consecuente

$AiAd \leftrightarrow$	$A, B \vdash A \leftrightarrow B$	Introducción de la equivalencia
$RiRd \leftrightarrow$	$\sim A, \sim B \vdash A \leftrightarrow B$	Introducción de la equivalencia
$AiRd \leftrightarrow$	$A, \sim B \vdash \sim(A \leftrightarrow B)$	Negación de la equivalencia
$AiA \leftrightarrow$	$A, A \leftrightarrow B \vdash B$	Modus Ponens para la equivalencia
$RdA \leftrightarrow$	$\sim B, A \leftrightarrow B \vdash \sim A$	Modus Tollens para la equivalencia
$RiAd \leftrightarrow$	$\sim A, B \vdash \sim(A \leftrightarrow B)$	Negación de la equivalencia
$RiA \leftrightarrow$	$\sim A, A \leftrightarrow B \vdash \sim B$	Modus Tollens para la equivalencia
$AdA \leftrightarrow$	$B, A \leftrightarrow B \vdash A$	Modus Ponens para la equivalencia
$RiR \leftrightarrow$	$\sim A, \sim(A \leftrightarrow B) \vdash B$	Negación de la equivalencia
$AiR \leftrightarrow$	$A, \sim(A \leftrightarrow B) \vdash \sim B$	Negación de la equivalencia
$RdR \leftrightarrow$	$\sim B, \sim(A \leftrightarrow B) \vdash A$	Negación de la equivalencia
$AdR \leftrightarrow$	$B, \sim(A \leftrightarrow B) \vdash \sim A$	Negación de la equivalencia

IA	$A \vdash A$	Principio de identidad
IR	$\sim A \vdash \sim A$	Principio de identidad

$A\sim$	$\sim A \vdash \sim A$[3]	Principio de identidad
$Ra\sim$	$\sim A \vdash \sim A$	Principio de identidad
$Aa\sim$	$A \vdash \sim\sim A$	Introducción de la doble negación
$R\sim$	$\sim\sim A \vdash A$	Eliminación de la doble negación

OA-DM	$\Gamma, A \vdash B\wedge \sim B \Rightarrow \Gamma \vdash \sim A$	MDI
OR-DM	$\Gamma, \sim A \vdash B\wedge \sim B \Rightarrow \Gamma \vdash A$	MDI
RR-DM	$\sim A \vdash B\wedge \sim B \Rightarrow \vdash A$[4]	MDI

$OAi - Ad \rightarrow$	$\Gamma, A \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash A \rightarrow B$[5]	MDC
$ORd - Ri \rightarrow$	$\Gamma, \sim B \vdash \sim A \Rightarrow \Gamma \vdash A \rightarrow B$	MDC + Transposición
$ORi - Ad\vee$	$\Gamma, \sim A \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash A \vee B$	Introducción de la disyunción
$ORd - Ai\vee$	$\Gamma, \sim B \vdash A \Rightarrow \Gamma \vdash A \vee B$	Introducción de la disyunción

El procedimiento general para convertir una prueba de la A–validez de una fórmula en una deducción formal, consiste en realizar en cada paso de la prueba de A–validez los siguientes cambios:

1. Si la marca generada es 1 entonces introducir la fórmula asociada al nodo.

2. Si la marca generada es 0 entonces introducir la negación de la fórmula asociada al nodo.

3. Cambiar el nombre de la regla para marcar nodos por la regla de inferencia asociada.

[3]Deductivamente estas reglas son *redundantes*, no tiene ningún efecto sobre la deducción.
[4]En el *Método de Demostración Indirecta MDI*, el supuesto inicial es llamado *Premisa Indirecta PI*.
[5]En el *Método de Demostración Condicional MDC*, el supuesto inicial es llamado *Premisa Condicional PC*.

El procedimiento se ilustra construyendo una deducción de la fórmula $\sim(A \vee B) \rightarrow (\sim A \wedge \sim B)$, y utilizando el árbol de forzamiento de la figura (2)

1.	$\sim [\sim(A \vee B) \rightarrow (\sim A \wedge \sim B)]$		PI
	2.	$\sim(A \vee B)$	Negación del condicional en 1
	3.	$\sim(\sim A \wedge \sim B)$	Negación del condicional en 1
	4.	$\sim(A \vee B)$	Identidad en 2 (redundante)
	5.	$\sim A$	Negación de la disyunción en 4
	6.	$\sim B$	Negación de la disyunción en 4
	7.	$\sim A$	Identidad en 5 (redundante)
	8.	$\sim A$	Identidad en 7 (redundante)
	9.	$\sim\sim B$	Negación de la conjunción en 8 y 3
	10.	B	Eliminación de la doble negación en 9
11.	$\sim(A \vee B) \rightarrow (\sim A \wedge \sim B)$		MDI en 1, 6 y 10

10 Conclusiones

Los árboles de forzamiento semántico presentados son una herramienta de inferencia visual, la cual permite determinar la validez de una fórmula de manera completamente mecánica, por ejemplo, recorriendo el árbol de la fórmula de cierta manera, y en cada nodo buscando la aplicación de una regla para marcar nodos. Cuando una fórmula es inválida, lo cual se concluye si el árbol de la fórmula está bien marcado, entonces la lectura de las marcas de los nodos asociados a las fórmulas atómicas proporciona una valuación que refuta la validez de la fórmula. Cuando una fórmula es válida, lo cual se concluye si el árbol está mal marcado o si la raíz forzosamente está marcada con 1, entonces es posible construir una deducción formal, con la cual se prueba que la fórmula asociada a la raíz del árbol es un teorema; para lograr esto se cambia cada regla para el forzamiento de marcas por la regla deductiva a la que está asociada.

Los comentarios anteriores, sumados a la naturalidad de las reglas para el forzamiento de marcas, hacen de los árboles de forzamiento, en el sentido formal y pedagógico, una herramienta de trabajo bien interesante.

Referencias

[1] E. Beth. *Formal methods, an introduction to symbolic logic and to the study of effective operations in arithmetic and logic*. Reidel: Dordrecht, 1962.

[2] R. Smullyan. *First order logic*. New York: Dover ed., 1994.

[3] X. Caicedo. *Elementos de lógica y calculabilidad*. Bogotá: Universidad de los Andes, 1990.

[4] A. Hamilton. *Lógica para matemáticos*. Madrid: Paraninfo, 1981.

[5] M. Sierra. *Árboles de forzamiento semántico*. Revista Universidad EAFIT, 123, 2001.

[6] M. Sierra. *Lógica básica con afirmación alterna*. Ingeniería y Ciencia, **1**(1), 115-129 (2005).