
Argumentos que Contienen Enunciados Compuestos

2.1. Enunciados Simples y Compuestos

Todos los enunciados pueden dividirse en dos clases: simples y compuestos. Un enunciado *simple* es uno que no contiene otro enunciado como parte componente, mientras que todo enunciado *compuesto* contiene otro enunciado como componente. Por ejemplo, “Las pruebas de armas nucleares en la atmósfera serán interrumpidas o este planeta se hará inhabitable” es un enunciado compuesto cuyos componentes son los dos enunciados simples “Las pruebas de armas nucleares en la atmósfera serán interrumpidas” y “este planeta se hará inhabitable”. Las partes componentes de un enunciado compuesto pueden a su vez ser enunciados compuestos, desde luego. Ahora veremos algunas de las maneras diferentes de combinar los enunciados en enunciados compuestos.

El enunciado “Las rosas son rojas y las violetas son azules” es una *conjunción*, un enunciado compuesto que se forma insertando la palabra “y” entre los dos enunciados. Dos enunciados así combinados se llaman enunciados *conjuntos*. Sin embargo, la palabra “y” tiene otros usos, como en el enunciado “Cástor y Pólux eran gemelos” que no es compuesto, sino un enunciado simple que afirma cierta relación. Introducimos el punto “.” como un símbolo especial para combinar enunciados conjuntivamente. Usándolo, la conjunción precedente se escribe “Las rosas son rojas. las violetas son azules”. Si p y q son dos enunciados cualesquiera su conjunción se escribe $p \cdot q$.

Cada enunciado es o verdadero o falso, de modo que se puede hablar del *valor de verdad* de un enunciado, siendo el valor de verdad de un enunciado verdadero, *verdadero* y el valor de verdad de

un enunciado falso, *falso*. Hay dos amplias categorías en las que pueden dividirse los enunciados compuestos de acuerdo con que exista o no una conexión necesaria entre el valor de verdad del enunciado compuesto y los valores de verdad de sus enunciados componentes. El valor de verdad del enunciado compuesto "Smith cree que el plomo es más pesado que el zinc" es completamente independiente del valor de verdad de su enunciado componente simple "el plomo es más pesado que el zinc", pues las personas tienen creencias correctas tanto como creencias equivocadas. Por otro lado, hay una conexión necesaria entre el valor de verdad de una conjunción y los valores de verdad de sus enunciados conyuntos. Una conjunción es verdadera si sus conyuntos son ambos verdaderos, pero es falsa en cualquier otra circunstancia. Cualquier enunciado compuesto cuyo valor de verdad está determinado completamente por los valores de verdad de sus enunciados componentes es un enunciado compuesto *función de verdad*.* Los únicos enunciados compuestos que aquí consideraremos serán enunciados compuestos función de verdad. Por lo tanto, en el resto de este libro usaremos el término "enunciado simple" para referirnos a cualquier enunciado que no sea compuesto función de verdad.

Como las conjunciones son enunciados compuestos función de verdad, nuestro símbolo es un conector de función de verdad (o veritativo funcional, como también se dice). Dados dos enunciados p y q hay solamente cuatro conjuntos de valores de verdad para ellos, y en cada caso el valor de verdad de su conjunción $p \cdot q$ está determinado de manera única. Los cuatro casos posibles pueden exhibirse como a continuación:

- en el caso p es verdadero y q es verdadero, $p \cdot q$ es verdadero;
- en el caso p es verdadero y q es falso, $p \cdot q$ es falso;
- en el caso p es falso y q es verdadero, $p \cdot q$ es falso;
- en el caso p es falso y q es falso, $p \cdot q$ es falso.

Al representar los valores de verdad verdadero y falso con las letras "T" y "F", respectivamente, la manera en que el valor de verdad de una conjunción queda determinado por los valores de verdad de sus conyuntos se muestra de manera más concisa por medio de una *tabla de verdad*, como sigue:

p	q	$p \cdot q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

* También se dice que esa composición es veritativo-funcional. (N. del T.)

Ya que especifica el valor de verdad de $p \cdot q$ en cada caso posible, esta tabla de verdad se puede tomar como *definición* del símbolo *punto*. Otras palabras tales como “además”, “también”, “pero”, “aún”, “aunque”, “sin embargo”, etc., y hasta la coma y el punto y coma, se utilizan también para conjuntar dos enunciados en un compuesto y todos ellos pueden traducirse indiferentemente como el símbolo punto en lo que respecta a los valores de verdad.

El enunciado “No es el caso que el plomo sea más pesado que el oro” también es compuesto siendo la *negación* (o el *contradictorio*) de su enunciado compuesto único “el plomo es más pesado que el oro”. Introducimos el símbolo “ \sim ”, llamado una *tilde*, para simbolizar la negación. Hay frecuentemente otras formulaciones en lenguaje ordinario, de una negación. Así, si L simboliza el enunciado “el plomo es más pesado que el oro”, los enunciados diferentes “no es el caso que el plomo sea más pesado que el oro”, “es falso que el plomo sea más pesado que el oro”, “no es verdad que el plomo sea más pesado que el oro”, “el plomo no es más pesado que el oro”, se simbolizan todos indiferentemente como $\sim L$. Más generalmente, si p es cualquier enunciado su negación se escribe $\sim p$. Como la negación de un enunciado verdadero es un enunciado falso y la negación de un enunciado falso es uno verdadero, podemos tomar la siguiente tabla de verdad como definición del símbolo tilde:

p	$\sim p$
T	F
F	T

Cuando dos enunciados se combinan disyuntivamente insertando la palabra “o” entre ellos, el enunciado compuesto que resulta es una *disyunción* (o *alternación*) y los dos enunciados así combinados se llaman *disyuntos* (o *alternativos*). La palabra “o” tiene dos sentidos diferentes, uno de los cuales es la clara intención en el enunciado “Se perderá derecho a recompensas en caso de enfermedad o desempleo”. Aquí la intención es obviamente cancelar el derecho a premios no sólo para las personas enfermas y las personas desempleadas sino también para las personas que están enfermas y desempleadas. Este sentido de la palabra “o” se denomina *débil* o *inclusivo*. En donde la precisión sea esencial, como en los contratos y otros documentos legales, este sentido se hace explícito usando la frase “y/o”.

Es otro el sentido de “o” que se intenta dar en el menú de un restaurante escribiendo “té o café”, queriendo decir que por el precio estipulado el cliente puede tomar café o té pero *no ambos*. Este segundo sentido de “o” es llamado *fuerte* o *exclusivo*. En donde la

precisión es esencial y se quiere dar el sentido exclusivo a la palabra "o" suele agregarse la frase "pero no ambos".

Una disyunción que usa el "o" inclusivo afirma que *por lo menos uno de los enunciados disyuntos es verdadero*, mientras que una disyunción que use el "o" exclusivo afirma que *por lo menos uno de los disyuntos es verdadero, pero no ambos son verdaderos*. El significado común parcial, que al menos un disyunto es verdadero, es el significado todo de una disyunción inclusiva y parte del significado de una disyunción exclusiva.

En latín la palabra "vel" expresa el sentido inclusivo de la palabra "o" y la palabra "aut" expresa el sentido exclusivo. Es costumbre usar la primera letra de "vel" para simbolizar "o" en su sentido inclusivo. Si p y q son dos enunciados cualesquiera, su disyunción débil o inclusiva se escribe $p \vee q$. El símbolo " \vee ", denominado una *cuña* (o una *ve*), es un conectivo de función de verdad y se define por la tabla de verdad siguiente:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Un argumento que obviamente es válido y contiene una disyunción es el siguiente Silogismo Disyuntivo:

Las Naciones Unidas serán reforzadas o habrá una tercera guerra mundial.
 Las Naciones Unidas no serán reforzadas.
 Luego habrá una tercera guerra mundial.

Es evidente que un Silogismo Disyuntivo es válido en *cualquiera* de las interpretaciones de la palabra "o", esto es, sin atención a que su primera premisa afirme una disyunción inclusiva o exclusiva. Es usualmente difícil, y a veces imposible, descubrir cuál es el sentido de la palabra "o" que se intenta dar en una disyunción. Pero el argumento válido típico que tiene una disyunción como premisa es, como el Silogismo Disyuntivo, válido en cualquier interpretación de la palabra "o". Por lo tanto, efectuamos una simplificación al traducir cualquier ocurrencia de la palabra "o" en el símbolo lógico " \vee " —sin atención al sentido que se quiera dar a "o"—. Desde luego, en donde se establezca explícitamente que la disyunción es exclusiva, usando la frase adicional "pero no ambos", por ejemplo, tenemos el aparato simbólico para simbolizar este sentido, como se explicará más adelante.

El uso de los paréntesis, corchetes y llaves para la puntuación de las expresiones matemáticas es familiar. La expresión " $6 + 9 \div 3$ ",

no determina un número único, aunque si la puntuación aclara cómo agrupar los números que la constituyen, denota 5 o 9. La puntuación es necesaria también para resolver la ambigüedad en el lenguaje de la lógica simbólica, porque los enunciados compuestos son susceptibles de combinaciones para formar enunciados más complicados. Hay ambigüedad en $p \cdot q \vee r$, que podría ser o la conjunción de p con $q \vee r$, o por otro lado, la disyunción de $p \cdot q$ con r . Estos dos sentidos diferentes los dan sin ambigüedad las puntuaciones diferentes: $p \cdot (q \vee r)$ y $(p \cdot q) \vee r$. En el caso en que p y q sean falsos ambos y r verdadero, la primera expresión puntuada es falsa (pues su primer enunciado conjunto es falso), pero la segunda expresión puntuada es verdadera (pues su segundo enunciado disyunto es verdadero). Aquí, la diferencia de puntuación hace toda la diferencia entre verdad y falsedad. En la lógica simbólica, como en las matemáticas, usamos paréntesis, corchetes y llaves para la puntuación. Sin embargo, para reducir el número de signos de puntuación requeridos estableceremos el convenio simbólico de que en cualquier expresión la tilde se aplicará a la componente más pequeña permitida por la puntuación. De este modo, la ambigüedad de $\sim p \vee q$, que podría significar o $(\sim p) \vee q$ o $\sim(p \vee q)$, queda resuelta por nuestro convenio para significar la primera de éstas, pues la tilde puede (y en consecuencia por nuestro convenio *lo hace*) aplicarse a la primera componente p y no a la expresión más larga $p \vee q$.

La palabra "either" tiene varios usos en inglés.* Tiene fuerza conjuntiva en "The Disjunctive Syllogism is valid on either interpretation of the word 'or'". Con frecuencia sólo sirve para introducir el primer enunciado disyunto de una disyunción, como en "Either the United Nations will be strengthened or there will be a third world war". Tal vez la función más útil de la palabra "either" sea la de puntuar algunos enunciados compuestos. Así, en la oración

More stringent anti-pollution measures will be enacted and the laws will be strictly enforced or the quality of life will be degraded still further.

puede levantarse la ambigüedad en una dirección colocando la palabra "either" en su comienzo, y en la otra dirección insertando la

* Y, además, no tiene equivalente en español. La primera oración se traduce "el Silogismo Disyuntivo es válido en la una y en la otra de las interpretaciones de la letra 'o'". La segunda oración entre comillas, "o Se refuerzan las N.U. o habrá una tercera guerra mundial", y la tercera oración se traduce "se decretarán medidas más severas contra la contaminación y las leyes serán ejecutadas estrictamente o la calidad de la vida será aún más rebajada". En español, eliminaríamos también la ambigüedad poniendo la letra "o" al comienzo de la oración o después de la letra "y": "o se decretan medidas más severas contra la contaminación y se ejecutan las leyes estrictamente, o la calidad ..." es un sentido, y el otro sentido lo da "se decretan medidas más severas contra la contaminación y/o se ejecutan las leyes estrictamente, o la calidad ..." (N. del T.)

palabra "either" inmediatamente después de "and". En nuestro lenguaje simbólico esta puntuación se efectúa por medio de paréntesis. La fórmula ambigua $p \cdot q \vee r$ discutida en el párrafo precedente corresponde a la oración ambigua que consideramos en éste. Las dos puntuaciones diferentes de la fórmula corresponden a las dos puntuaciones diferentes de la oración, efectuadas con las dos diferentes inserciones de la palabra "either".

No todas las conjunciones se formulan explícitamente colocando la palabra "y" entre oraciones completas, como en "Carlitos es limpio y Carlitos es encantador". De hecho, ésta se expresaría más naturalmente como "Carlitos es limpio y encantador", y "Juan y Carolina subieron a la colina" es la manera más natural de expresar la conjunción "Juan subió a la colina y Carolina subió a la colina". Lo mismo con las disyunciones: "o Alicia o Beatriz serán elegidas" expresa más brevemente la proposición que alternativamente se formula como "Alicia será elegida o Beatriz será elegida"; y "Carlota será secretaria o tesorera" expresa de manera un tanto más breve la misma proposición que "o Carlota será secretaria o Carlota será tesorera".

La negación de una disyunción se expresa a menudo usando la frase "ni-ni". Así, la disyunción "Alicia o Beatriz serán elegidas" queda negada por el enunciado "ni Alicia ni Beatriz serán elegidas". La disyunción se simbolizaría como $A \vee B$, y su negación como $\sim(A \vee B)$ o como $(\sim A) \cdot (\sim B)$. (La equivalencia lógica de estas dos fórmulas se discutirá en la Sec. 2.4.) Negar que al menos uno de los enunciados es verdadero es asegurar que ambos enunciados son falsos.

La palabra "ambos" tiene varias funciones. Una de ellas es sólo cuestión de énfasis. Decir "Ambos Juan y Carolina subieron a la colina" es sólo para recalcar que los dos hicieron lo que se dice que hicieron al decir "Juan y Carolina subieron a la colina". Una función más útil de la palabra "ambos" es de puntuación, como la de la palabra inglesa "either", recién explicada. "Ambos ... y --- no son ---" se usa para expresar lo mismo que "Ni ... ni --- es ---". En oraciones tales el *orden* que guardan las palabras "ambos" y "no" es de mucha significación. Hay una gran diferencia entre

Alicia y Beatriz no serán ambas elegidas.

y

Alicia y Beatriz ambas no serán elegidas.

La primera se simboliza como $\sim(A \cdot B)$, la última como $(\sim A) \cdot (\sim B)$.

Finalmente, hay que observar que la frase "a menos que" puede también usarse en la expresión de la disyunción de dos enunciados.

Así, "Nuestros recursos pronto se agotarán, a menos que se procesen más materiales de desecho" puede expresarse también como "O se procesan más materiales de desecho o se agotarán pronto nuestros recursos" y se simboliza como $M \vee E$.

Como una disyunción exclusiva asegura que al menos uno de los disyuntos es verdadero pero no ambos, podemos simbolizar la disyunción exclusiva de dos enunciados p y q cualesquiera simplemente como $(p \vee q) \cdot \sim(p \cdot q)$. Así, podemos simbolizar las conjunciones, las negaciones y las disyunciones inclusivas y exclusivas. Todo enunciado compuesto construido a partir de enunciados simples por aplicación repetida de conectivos de función de verdad, tendrá valores de verdad completamente determinados por los valores de verdad de esos enunciados simples. Por ejemplo, si A y B son enunciados verdaderos y X y Y son falsos, el valor de verdad del enunciado compuesto $\sim[(\sim A \vee X) \vee \sim(B \cdot Y)]$ puede encontrarse de la manera siguiente. Como A es verdadero, $\sim A$ es falso, y como X es falso, también la disyunción $(\sim A \vee X)$ es falsa. Dado que Y es falso, la conjunción $(B \cdot Y)$ es falsa y su negación $\sim(B \cdot Y)$ es verdadera. De este modo, la disyunción $(\sim A \vee X) \vee \sim(B \cdot Y)$ es verdadera, y su negación, que es el enunciado original, es falsa. Este procedimiento paso a paso, iniciado en las componentes (más) internas nos permite, siempre, determinar el valor de verdad de un enunciado compuesto función de verdad partiendo de los valores de verdad de sus enunciados simples componentes.

EJERCICIOS 1

I. Si A y B son enunciados verdaderos y X y Y son falsos, ¿cuáles de los siguientes enunciados compuestos son verdaderos?

- | | |
|-------------------------------------|--|
| *1. $\sim(A \vee X)$ | 11. $A \vee [X \cdot (B \vee Y)]$ |
| 2. $\sim A \vee \sim X$ | 12. $X \vee [A \cdot (Y \vee B)]$ |
| 3. $\sim B \cdot \sim Y$ | 13. $\sim\{\sim[\sim(A \cdot \sim X) \cdot \sim A] \cdot \sim X\}$ |
| 4. $\sim(B \cdot Y)$ | 14. $\sim\{\sim[\sim(A \cdot \sim B) \cdot \sim A] \cdot \sim A\}$ |
| *5. $A \vee (X \cdot Y)$ | *15. $[(A \cdot X) \vee \sim B] \cdot \sim[(A \cdot X) \vee \sim B]$ |
| 6. $(A \vee X) \cdot Y$ | 16. $[(X \cdot A) \vee \sim Y] \vee \sim[(X \cdot A) \vee \sim Y]$ |
| 7. $(A \vee B) \cdot (X \vee Y)$ | 17. $[A \cdot (X \vee Y)] \vee \sim[(A \cdot X) \vee (A \cdot Y)]$ |
| 8. $(A \cdot B) \vee (X \cdot Y)$ | 18. $[X \vee (\sim A \cdot Y)] \vee \sim[(X \vee A) \cdot (X \vee Y)]$ |
| 9. $(A \cdot X) \vee (B \cdot Y)$ | 19. $[X \cdot (A \vee B)] \vee \sim[(X \vee A) \cdot (X \vee B)]$ |
| *10. $A \cdot [X \vee (B \cdot Y)]$ | 20. $[X \vee (A \cdot Y)] \vee \sim[(X \vee A) \vee (X \vee Y)]$ |

* Las soluciones de ejercicios marcados se encuentran al final del libro.

II. Usando las letras A, B, C y D para abreviar los enunciados simples: "Atlanta gana el campeonato de su división", "Baltimore gana el campeonato de su división", "Chicago gana el Supertazón" y "Dallas gana el Supertazón", simbolizar los siguientes:

- *1. O Atlanta gana el campeonato de su división y Baltimore gana el campeonato de su división o Chicago gana el Supertazón.
2. Atlanta gana el campeonato de su división y o Baltimore gana el campeonato de su división o Dallas no gana el Supertazón.
3. Atlanta y Baltimore no ganarán ambos los campeonatos de su división, pero Chicago y Dallas ambos no ganarán el Supertazón.
4. O Atlanta o Baltimore ganará el campeonato de su división, pero ni Chicago ni Dallas ganarán el Supertazón.
- *5. O Chicago o Dallas ganará el Supertazón, pero no ganarán ambos el Supertazón.
6. Chicago ganará el Supertazón, a menos que Atlanta gane el campeonato de su división.
7. No es el caso que ni Atlanta ni Baltimore ganen el campeonato de su división.
8. O Chicago o Dallas ganará el Supertazón, a menos que ambos Atlanta y Baltimore ganen los campeonatos de su división.
9. O Chicago o Dallas ganará el Supertazón, a menos que ambos Atlanta y Baltimore ganen los campeonatos de su división.
10. O Chicago gana el Supertazón y Dallas no gana el Supertazón o ambos Atlanta y Baltimore ganan los campeonatos de su división.

III. Usando mayúsculas para abreviar los enunciados simples, simbolizar los siguientes enunciados:

- *1. Es blanda su boca más que la manteca, pero lleva la guerra en su corazón. (Salmo 55:21)
2. Ni de oriente ni de occidente ni del desierto vendrá la salvación. (Salmo 75:6)
3. Los días del hombre son como la hierba; como flor del campo, así florece. (Salmo 103:15)
4. El vino es petulante y los licores, alborotadores. (Proverbios 20:1)
- *5. Dios hizo recto al hombre, mas ellos se buscaron muchas maquinaciones. (Eclesiastés 7:29)
6. No es de los ágiles el correr ni de los valientes el combate... (Eclesiastés 9:11)
7. Que es fuerte el amor como la muerte y son como la tumba duros los celos. (Cantares de Salomón 8:6)
8. No romperá la caña cascada, ni apagará la mecha que se extingue. (Isaías 42:3)
9. Saúl y Jonatán amados y queridos en vida... (2 Samuel 1:23)
10. Ni se habían debilitado sus ojos, ni se había mustiado su vigor. (Deuteronomio 34:7)
11. La voz es la de Jacob, pero las manos son las de Esaú. (Génesis 27:22)
12. No vuelve más a su casa y no lo reconoce ya su lugar. (Job 7:10)

2.2. Enunciados Condicionales

El enunciado compuesto "Si el tren se retrasa entonces perdemos nuestro transbordo" es un *condicional* (o un *hipotético*, una *implicación* o un *enunciado implicativo*). El enunciado componente situado entre el "si" y el "entonces" es llamado el *antecedente* (o el *implicante* o *prótasis*), y el componente que sigue al "entonces" es el *consecuente* (o el *implicado* o *apódosis*). Un condicional no afirma que su antecedente sea verdadero o que su consecuente lo sea; sólo afirman que *si* su antecedente es verdadero, entonces su consecuente es también verdadero, o sea, que su antecedente *implica* su consecuente. La clave del significado de un condicional es la relación de *implicación* que se asegura que existe entre su antecedente y su consecuente, en ese orden.

Si examinamos un cierto número de condicionales diferentes veremos que pueden afirmar diferentes implicaciones. En el condicional "Si a todos los gatos les gusta el hígado y Dina es un gato, entonces a Dina le gusta el hígado", el consecuente se sigue *lógicamente* del antecedente. Por otro lado, en el condicional "Si la figura es un triángulo, entonces tiene tres lados", el consecuente se sigue del antecedente por la *definición* misma de "triángulo". Pero la verdad del condicional "Si el oro se sumerge en agua regia, entonces el oro se disuelve" no es cuestión de lógica ni de definición. Aquí la conexión afirmada es *causal* y debe descubrirse empíricamente. Este ejemplo muestra que hay diferentes clases de implicaciones que constituyen diferentes tipos de sentidos de la frase "si-entonces". Observadas estas diferencias, ahora buscamos un significado común identificable, algún significado parcial común a éstos que, como hemos aceptado, son diferentes tipos de condicionales.

Nuestra discusión de "si-entonces" correrá paralela a nuestra previa discusión de la palabra "o". Primero, señalamos dos sentidos diferentes de esa palabra. Segundo, notamos que había un significado parcial común: el hecho de que *al menos un disyunto sea verdadero*, se vio que estaba involucrado tanto en el "o" inclusivo como en el exclusivo. Tercero, introdujimos el símbolo especial "v" para representar este sentido parcial común (que era todo el significado de "o" en su sentido inclusivo). Cuarto, observamos que, dado que argumentos como el Silogismo Disyuntivo son válidos en cualquier interpretación de la palabra "o", simbolizar cualquier ocurrencia de la palabra "o" por el símbolo cuña preserva la validez de tales argumentos. Y como nos interesan los argumentos desde el punto de vista de la determinación de su validez, esta traducción de la palabra "o" en "v" que puede abstraer o ignorar parte de su signi-

ficado en algunos casos, es enteramente adecuada para nuestros propósitos actuales.

Un significado parcial común de estas diferentes clases de enunciados condicionales surge cuando preguntamos cuáles serían circunstancias suficientes para establecer la falsedad de un condicional. ¿En qué circunstancias acordaríamos que el condicional "Si el oro se sumerge en agua regia entonces el oro se disuelve" es falso? Claramente, el enunciado es falso en el caso de que se sumerja el oro en esta solución y no se disuelva. Cualquier condicional de antecedente verdadero y consecuente falso debe ser falso. Luego, cualquier condicional *si p entonces q* se sabe que es falso en el caso de que la conjunción $p \cdot \sim q$ sea conocida verdadera, esto es, en caso de que el antecedente sea verdadero y su consecuente falso. Para que el condicional sea verdadero la condición indicada deberá ser falsa. En otras palabras, para que cualquier condicional *si p entonces q* sea verdadero, $\sim(p \cdot \sim q)$, la negación de la conjunción de su antecedente con la negación de su consecuente, también debe ser verdadera. Luego, podemos considerar esta última como *parte* del significado del condicional.

Introducimos un nuevo símbolo " \supset ", llamado *herradura*, para representar el significado parcial común en todos los enunciados condicionales, definiendo " $p \supset q$ " como una abreviación de " $\sim(p \cdot \sim q)$ ". La herradura es un conectivo de función de verdad, cuya significación exacta queda indicada por la tabla de verdad siguiente:

p	q	$\sim q$	$p \cdot \sim q$	$\sim(p \cdot \sim q)$	$p \supset q$
T	T	F	F	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T

En ésta, la primera y segunda columnas representan todos los valores de verdad posibles para los enunciados componentes p y q , y las columnas tercera, cuarta y quinta representan etapas sucesivas al determinar el valor de verdad del enunciado compuesto $\sim(p \cdot \sim q)$ en cada caso. La sexta columna es idénticamente la misma que la quinta, puesto que las fórmulas que las encabezan por definición expresan la misma proposición. El símbolo de herradura no debe pensarse que representa *el* significado del "si-entonces", o *la* relación de implicación, sino más bien un factor parcial común de las diferentes clases de implicaciones significadas por la frase "si-entonces".

Podemos considerar esta herradura como símbolo de una clase especial, extremadamente débil, de implicación, y nos resulta con-

veniente hacerlo así, pues algunas maneras de leer " $p \supset q$ " son "si p entonces q ", " p implica q " o " p sólo si q ". La implicación débil simbolizada " \supset " se llama *implicación material*, y su nombre especial indica que es una noción especial, que no debe confundirse con las otras clases de implicación más usuales. Algunos enunciados condicionales en el lenguaje ordinario afirman meramente implicaciones materiales como, por ejemplo, "Si Rusia es una democracia entonces yo soy Napoleón". Es claro que la implicación afirmada aquí no es lógica, ni definitoria, ni causal. No se pretende ninguna "conexión real" entre lo que afirma el antecedente y lo que se afirma en el consecuente. Esta clase de condicional se usa ordinariamente como un método enfático o humorístico de negar la verdad de su antecedente, pues típicamente contiene un enunciado notoria o ridículamente falso como consecuente. Cualquier afirmación tal respecto a los valores de verdad se simboliza adecuadamente usando el conectivo de función de verdad " \supset ".

Aunque la mayor parte de los enunciados condicionales afirman más que una implicación meramente material entre el antecedente y el consecuente, ahora proponemos simbolizar cualquier ocurrencia de "si-entonces" mediante el conectivo de función de verdad " \supset ". Debe admitirse que esta simbolización abstrae o ignora parte del significado de casi todos los enunciados condicionales. Pero la proposición puede justificarse sobre la base de que la validez de los argumentos válidos que involucran condicionales se preserva cuando los condicionales se consideran como implicaciones materiales solamente, como se establecerá en las siguientes secciones.

Los enunciados condicionales pueden expresarse en toda una variedad de formas. Un enunciado de la forma "si p entonces q " podría igualmente bien expresarse como " p , q ", " q si p ", "que p implica que q ", "que p trae consigo que q ", " p sólo si q ", "que p es una condición suficiente que q ", o, como "que q es una condición necesaria que p ", y cualquiera de estas formulaciones se simbolizará mediante $p \supset q$.

EJERCICIOS

I. Si A y B son enunciados verdaderos y X y Y son enunciados falsos, ¿cuáles de los siguientes enunciados compuestos son verdaderos?

*1. $X \supset (X \supset Y)$

2. $(X \supset X) \supset Y$

3. $(A \supset X) \supset Y$

4. $(X \supset A) \supset Y$

*5. $A \supset (B \supset Y)$

6. $A \supset (X \supset B)$

7. $(X \supset A) \supset (B \supset Y)$

8. $(A \supset X) \supset (Y \supset B)$

- | | |
|---|---|
| 9. $(A \supset B) \supset (\sim A \supset \sim B)$ | *15. $[(X \cdot Y) \supset A] \supset [X \supset (Y \supset A)]$ |
| *10. $(X \supset Y) \supset (\sim X \supset \sim Y)$ | 16. $[(A \cdot X) \supset B] \supset [A \supset (B \supset X)]$ |
| 11. $(X \supset A) \supset (\sim X \supset \sim A)$ | 17. $[X \supset (A \supset Y)] \supset [(X \supset A) \supset Y]$ |
| 12. $(X \supset \sim Y) \supset (\sim X \supset Y)$ | 18. $[X \supset (X \supset Y)] \supset [(X \supset X) \supset X]$ |
| 13. $[(A \cdot X) \supset Y] \supset (A \supset Y)$ | 19. $[(A \supset B) \supset A] \supset A$ |
| 14. $[(A \cdot B) \supset X] \supset [A \supset (B \supset X)]$ | 20. $[(X \supset Y) \supset X] \supset X$ |

II. Representando con el símbolo A el enunciado "Amherst gana su primer juego", con C el enunciado "Colgate gana su primer juego" y con D, "Dartmouth gana su primer juego", simbolizar los siguientes enunciados compuestos:

- *1. Ambos Amherst y Colgate ganan su primer juego sólo si Dartmouth no gana su primer juego.
2. Amherst gana su primer juego si o Colgate gana su primer juego o Dartmouth gana su primer juego.
3. Si Amherst gana su primer juego, entonces ambos Colgate y Dartmouth ganan su primer juego.
4. Si Amherst gana su primer juego, entonces o Colgate o Dartmouth gana su primer juego.
- *5. Si Amherst no gana su primer juego, entonces no es el caso que o Colgate o Dartmouth gana su primer juego.
6. Si no es el caso que ambos Amherst y Colgate ganan su primer juego entonces ambos Colgate y Dartmouth ganan su primer juego.
7. Si Amherst gana su primer juego, entonces no es verdad que ambos Colgate y Dartmouth ganan su primer juego.
8. Si Amherst no gana su primer juego entonces ambos Colgate y Dartmouth no ganan su primer juego.
9. O Amherst gana su primer juego y Colgate no gana su primer juego o si Colgate gana su primer juego, entonces Dartmouth no gana su primer juego.
- *10. Si Amherst gana su primer juego, entonces Colgate no gana su primer juego, pero si Colgate no gana su primer juego, entonces Dartmouth gana su primer juego.
11. Si Amherst gana su primer juego, entonces si Colgate no gana su primer juego, entonces Dartmouth gana su primer juego.
12. O Amherst y Colgate ganan su primer juego o no es el caso que si Colgate gana su primer juego, entonces Dartmouth gana su primer juego.
13. Amherst gana su primer juego sólo si o Colgate o Dartmouth gana su primer juego.
14. Si Amherst gana su primer juego sólo si Colgate gana su primer juego, entonces Dartmouth no gana su primer juego.
15. Si Amherst y Colgate ambos no ganan su primer juego, entonces Amherst y Colgate no ganan ambos su primer juego.

2.3. Formas de Argumentos y Tablas de Verdad

En esta sección desarrollamos un método puramente mecánico para probar la validez de argumentos que contienen enunciados com-

puestos de función de verdad. Ese método está íntimamente relacionado con la técnica familiar de *refutación por analogía lógica* que se usó en el primer capítulo para demostrar la invalidez del argumento

Si yo soy presidente entonces soy famoso.
Yo no soy presidente.
Luego yo no soy famoso.

Este argumento se mostró que era inválido construyendo otro argumento de la misma forma:

Si Rockefeller es presidente entonces él es famoso.
Rockefeller no es presidente.
Luego Rockefeller no es famoso.

que obviamente es inválido, pues sus premisas son verdaderas, pero su conclusión falsa. Cualquier argumento se prueba que es inválido si es posible construir otro argumento de *exactamente la misma forma* con premisas verdaderas y una conclusión falsa. Esto refleja el hecho de que la validez y la invalidez son características puramente *formales* de los argumentos: dos argumentos cualesquiera que tienen la misma forma o son válidos ambos o ambos son inválidos, independientemente de las diferencias de su contenido.² La noción de dos argumentos que tienen *exactamente la misma forma* es una noción que merece mayor examen.

Es conveniente, al discutir las formas de los argumentos, usar letras minúsculas de la parte media del alfabeto, "*p*", "*q*", "*r*", "*s*", ... como *variables sentenciales*, que se definen simplemente como letras por las cuales, o en lugar de las cuales, se pueden sustituir enunciados. Ahora definimos una *forma argumental* como cualquier arreglo de símbolos que contiene variables sentenciales, de modo que al sustituir enunciados por las variables sentenciales —siendo siempre el mismo enunciado el que reemplaza a la misma variable— el resultado es un argumento. Por precisión, establecemos el convenio de que en cualquier forma argumental, "*p*" será la primera variable sentencial que ocurre en el mismo, "*q*" será la segunda, "*r*" la tercera y así sucesivamente.

² Aquí suponemos que los enunciados simples involucrados no son ni lógicamente verdaderos (como "todos los triángulos equiláteros son triángulos"), ni lógicamente falsos (como "algunos triángulos son no triangulares"). Suponemos también que las únicas relaciones lógicas entre los enunciados simples involucrados son los que afirman o son consecuencia de las premisas. La finalidad de estas restricciones es limitar nuestras consideraciones en los Caps. 2 y 3 a argumentos de función de verdad solamente, y excluir otra clase de argumentos cuya validez tiene que ver con consideraciones lógicas más complejas que se introducirán en los Caps. 4 y 5.

Cualquier argumento que sea resultado de la sustitución de enunciados en lugar de variables sentenciales de una forma argumental, se dice que *tiene* esa forma o que es una *instancia de sustitución* de esa forma argumental. Si simbolizamos el enunciado simple "Las Naciones Unidas serán reforzadas" con U , y el enunciado simple "Habrá una tercera guerra mundial" con W , entonces el Silogismo Disyuntivo antes presentado puede simbolizarse como

$$\begin{array}{ll} (1) & U \vee W \\ & \sim U \\ \text{Tiene la forma} & \therefore W \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (2) & p \vee q \\ & \sim p \\ & \therefore q \end{array}$$

de la cual resulta reemplazando las variables sentenciales p y q por los enunciados U y W , respectivamente. Pero esa no es la única forma de la cual es una instancia de sustitución. El mismo argumento se obtiene reemplazando las variables sentenciales p y q y r en la forma argumental

$$\begin{array}{ll} (3) & p \\ & q \\ & \therefore r \end{array}$$

por los enunciados $U \vee W$, $\sim U$ y W , respectivamente. Definimos la *forma específica* de un argumento dado, como aquella forma argumental de la cual resulta el argumento reemplazando cada variable sentencial por un enunciado simple diferente. Así, la forma específica del argumento (1) es la forma argumental (2). Aunque la forma argumental (3) es una forma del argumento (1), no es la *forma específica* del mismo. La técnica de refutación por analogía lógica puede ahora describirse más precisamente. Si la forma específica de un argumento dado puede mostrarse que tiene una instancia de sustitución con premisas verdaderas y conclusión falsa, entonces el argumento dado es inválido.

Los términos "válido" e "inválido" pueden extenderse para aplicarse a formas argumentales tanto como a argumentos. Una forma argumental *inválida* es una que tiene cuando menos una instancia de sustitución con premisas verdaderas y una conclusión falsa. La técnica de refutación por analogía lógica presupone que todo argumento del cual la forma específica es una forma argumental inválida es un argumento inválido. Toda forma argumental que no sea inválida es *válida*; una forma argumental *válida* es una que

no tiene instancia de sustitución con premisas verdaderas y conclusión falsa. Cualquier argumento dado puede probarse que es válido si se puede mostrar que la forma específica del argumento dado es una forma argumental válida.

Para determinar la validez o invalidez de una forma argumental debemos examinar todas las instancias de sustitución posibles de ella para ver si algunas tienen premisas verdaderas y conclusiones falsas. Los argumentos de los que aquí nos ocupamos solamente contienen enunciados simples y enunciados función de verdad compuestos con aquéllos, y sólo nos interesan los valores de verdad, de sus premisas y conclusiones. Podemos obtener todas las instancias de sustitución posibles cuyas premisas y conclusiones tienen diferentes valores de verdad, considerando todos los posibles arreglos de valores de verdad para los enunciados sustituyendo las diferentes variables sentenciales en la forma argumental que se prueba. Estas pueden disponerse de la manera más conveniente en una tabla de verdad, con una columna inicial o guía para cada variable sentencial que aparece en la forma argumental. Así, para probar la validez de la forma del Silogismo Disyuntivo

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim p \\ \therefore q \end{array}$$

construimos la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \vee q$	$\sim p$
T	T	T	F
T	F	T	F
F	T	T	T
F	F	F	T

Cada renglón de esta tabla representa una clase completa de instancias de sustitución. Las **T** y las **F** en las dos columnas iniciales representan los valores de verdad de enunciados que pueden sustituirse por las variables p y q en la forma argumental. Estos valores determinan los valores de verdad en las otras columnas, la tercera de las cuales está encabezada por la primera "premisa" de la forma argumental y la cuarta por la segunda "premisa". El encabezado de la segunda columna es la conclusión de la forma argumental. Un examen de esta tabla de verdad revela que cualesquiera que sean los enunciados sustituidos por las variables p y q , el argumento resultante no puede tener premisas verdaderas y una conclusión falsa, pues el tercer renglón representa el único caso posible en que ambas premisas son verdaderas y ahí la conclusión también es verdadera.

Como las tablas de verdad proporcionan un método puramente mecánico o *efectivo* de decisión de la validez o invalidez de cualquier argumento del tipo general aquí considerado, ahora podemos justificar nuestra propuesta de simbolizar todos los enunciados condicionales por medio del conectivo de función de verdad " \supset ". La justificación para tratar todas las implicaciones como si fueran meramente implicaciones materiales es que los argumentos válidos que contienen enunciados condicionales siguen siendo válidos cuando estos condicionales se interpretan como afirmando implicaciones materiales solamente. Las tres más simples y más intuitivamente válidas formas de argumento que involucran enunciados condicionales son

Modus Ponens Si p entonces q

p
 $\therefore q$

Modus Tollens Si p entonces q

$\sim q$
 $\therefore \sim p$

y el Silogismo Hipotético Si p entonces q
Si q entonces r
 \therefore Si p entonces r .

El que sigan siendo válidos cuando sus condicionales se interpretan como aseveraciones de implicaciones materiales, es un hecho que fácilmente se establece por tablas de verdad. La validez de *Modus Ponens* se muestra con la misma tabla de verdad que define el símbolo herradura:

p	q	$p \supset q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Aquí las dos premisas se representan por las columnas tercera y primera y la conclusión por la segunda. Sólo el primer renglón representa instancias de sustitución en las que ambas premisas son verdaderas, y en ese renglón la conclusión también es verdadera. La validez de *Modus Tollens* se muestra por medio de la siguiente tabla:

p	q	$p \supset q$	$\sim q$	$\sim p$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

Aquí solamente el cuarto renglón representa instancias de sustitución en las que ambas premisas (las columnas tercera y cuarta) son verdaderas, y ahí la conclusión (quinta columna) también es verdadera. Como el Silogismo Hipotético contiene tres enunciados distintos para variables sentenciales distintas, su tabla de verdad debe tener tres columnas iniciales y requerirá ocho renglones para alistar todas las posibles instancias de sustitución:

p	q	r	$p \supset q$	$q \supset r$	$p \supset r$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

Al construirla, las tres columnas iniciales representan todos los arreglos posibles de valores de verdad para los enunciados sustituidos en lugar de las variables sentenciales p , q y r , la cuarta columna se llena con referencia a la primera y la segunda, la quinta con referencia a la segunda y la tercera, y la sexta con referencia a la primera y la tercera. Las premisas son ambas verdaderas sólo en los renglones primero, quinto, séptimo y octavo, y en estos renglones la conclusión también es verdadera. Esto basta para mostrar que el Silogismo Hipotético es válido cuando sus condicionales se simbolizan mediante el símbolo herradura. Todas las dudas que queden respecto a la afirmación de que los argumentos válidos que contienen condicionales siguen siendo válidos cuando sus condicionales se interpretan como afirmando meramente implicaciones materiales puede aclararlas el lector al construir, simbolizar y probar sus propios ejemplos mediante tablas de verdad.

Para probar la validez de una forma argumental mediante una tabla de verdad, es necesaria una tabla con una columna inicial o guía separada para cada variable sentencial diferente y un renglón separado para cada posible asignación de valores de verdad a las variables sentenciales involucradas. Así pues, probar una forma argumental que contiene n variables sentenciales distintas requiere una tabla de verdad con 2^n renglones. Al construir tablas de verdad es conveniente fijar un patrón uniforme de inscripción de las **T** y las **F** en sus columnas iniciales o guía. En este libro nos apegaremos a la práctica de ir simplemente alternando las **T** y las **F** hacia abajo en la columna inicial extrema derecha, alternando

pares de **T** con pares de **F** hacia abajo en la columna directamente a su izquierda, después alternando grupos de cuatro **T** con grupos de cuatro **F**, ..., y al llegar a la columna extrema izquierda ponemos **T** en toda su mitad superior y **F** en toda su mitad inferior.

Hay dos formas de argumento inválidas que tienen un parecido superficial con las formas válidas *Modus Ponens* y *Modus Tollens*. Estas son:

$$\begin{array}{ccc} p \supset q & & p \supset q \\ q & \text{y} & \sim p \\ \therefore p & & \therefore \sim q \end{array}$$

y se conocen con el nombre de las Falacias de Afirmación del Consecuente y Negación del Antecedente, respectivamente. La invalidez de ambas puede mostrarse en una misma tabla de verdad:

p	q	$p \supset q$	$\sim p$	$\sim q$
T	T	T	F	F
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	T	T

Las dos premisas en la Falacia de Afirmación del Consecuente encabezan las columnas segunda y tercera, y son verdaderas en el primer y en el tercer renglón. Pero la conclusión, que encabeza la primera columna, es falsa en el tercer renglón, lo que muestra que la forma de argumentar tiene una instancia de sustitución con premisas verdaderas y conclusión falsa y, por lo tanto, es inválida. Las columnas tres y cuatro son las encabezadas por las premisas en la Falacia de Negación del Antecedente, que son verdaderas en los renglones tercero y cuarto. Su conclusión encabeza la columna cinco y es falsa en el tercer renglón, lo que muestra que la segunda forma argumental también es inválida.

Hay que recalcar que aunque una forma de argumento inválida tiene sólo argumentos válidos como instancias de sustitución, una forma de argumento inválida puede tener instancias de sustitución válidas tanto como inválidas. Así que para demostrar que un argumento dado es inválido hay que demostrar que *la forma específica* de ese argumento es inválida.

EJERCICIOS

- I. Para cada uno de los argumentos siguientes indique cuál de las formas de argumento del Ejercicio II a continuación tiene a este argumento como instancia de sustitución, y también indique cuál es su forma específica, si alguna lo es:

- | | | |
|---|---|---|
| *a. A
$\therefore A \vee B$ | f. $M \supset (N \supset O)$
$O \supset \sim M$
$\therefore O \supset \sim N$ | k. $(A \supset B) \cdot (C \supset D)$
$A \vee C$
$\therefore B \vee D$ |
| b. $C \cdot D$
$\therefore C$ | g. $(P \supset Q) \cdot (R \supset S)$
$\therefore P \supset Q$ | l. $(E \supset F) \cdot (G \supset H)$
$\sim F \vee \sim G$
$\therefore \sim E \vee \sim H$ |
| c. $E \supset (F \cdot G)$
$\therefore \sim (F \cdot G) \supset \sim E$ | h. $T \supset U$
$\therefore (T \supset U) \vee (V \cdot T)$ | m. $I \supset J$
$\therefore (I \supset J) \supset (I \supset J)$ |
| d. H
I
$\therefore H \cdot I$ | i. $W \supset X$
$\therefore X \supset (W \supset X)$ | n. $K \supset (L \supset M)$
$K \supset L$
$\therefore K \supset M$ |
| *e. $J \supset (K \cdot L)$
$J \vee (K \cdot L)$
$\therefore K \cdot L$ | *j. $Y \vee (Z \cdot \sim Y)$
Y
$\therefore \sim (Z \cdot \sim Y)$ | o. $N \supset (N \supset O)$
$N \supset N$
$\therefore N \supset O$ |

II. Utilice tablas de verdad para determinar la validez o la invalidez de cada una de las formas de argumento siguiente:

- | | | |
|--|--|--|
| *1. $p \cdot q$
$\therefore p$ | 8. $p \supset q$
$\therefore \sim p \supset \sim q$ | *15. $(p \supset q) \cdot (p \supset r)$
p
$\therefore q \vee r$ |
| 2. p
$\therefore p \cdot q$ | 9. $p \supset (q \cdot r)$
$\therefore \sim (q \cdot r) \supset \sim p$ | 16. $p \supset (q \vee r)$
$p \supset \sim q$
$\therefore p \vee r$ |
| 3. $p \vee q$
$\therefore p$ | *10. $p \vee q$
p
$\therefore \sim q$ | 17. $(p \supset q) \cdot (r \supset s)$
$p \vee r$
$\therefore q \vee s$ |
| 4. p
$\therefore p \vee q$ | 11. p
q
$\therefore p \cdot q$ | 18. $(p \supset q) \cdot (r \supset s)$
$\sim q \vee \sim s$
$\therefore \sim p \vee \sim r$ |
| *5. p
$\therefore p \supset q$ | 12. $p \supset q$
$q \supset p$
$\therefore p \vee q$ | 19. $(p \vee q) \supset (p \cdot q)$
$p \cdot q$
$\therefore p \vee q$ |
| 6. p
$\therefore q \supset p$ | 13. $p \supset q$
$p \vee q$
$\therefore q$ | 20. $p \vee (q \cdot \sim p)$
p
$\therefore \sim (q \cdot \sim p)$ |
| 7. $p \supset q$
$\therefore \sim q \supset \sim p$ | 14. $p \supset (q \supset r)$
$p \supset q$
$\therefore p \supset r$ | 21. $(p \vee q) \supset (p \cdot q)$
$\sim (p \vee q)$
$\therefore \sim (p \cdot q)$ |

III. Use tablas de verdad para determinar la validez o invalidez de cada uno de los siguientes argumentos:

- *1. Si Alicia es elegida presidenta de grupo, entonces o Bety es elegida vicepresidenta o Carolina es elegida tesorera. Bety es elegida vicepresidenta. Por lo tanto, si Alicia es elegida presidenta del grupo, entonces Carolina no es elegida tesorera.
2. Si Alicia es elegida presidenta del grupo, entonces o Bety no es elegida vicepresidenta o Carolina es elegida tesorera. Carolina no es

- elegida tesorera. Por lo tanto, si Bety no es elegida vicepresidenta, entonces Alicia no es elegida presidenta del grupo.
3. Si Alicia es elegida presidenta del grupo, entonces Bety es elegida vicepresidenta y Carolina es elegida tesorera. Bety no es elegida vicepresidenta. Por lo tanto, Alicia no es elegida presidenta del grupo.
 4. Si Alicia es elegida presidenta del grupo, entonces si Bety es elegida vicepresidenta, entonces Carolina es elegida tesorera. Bety no es elegida vicepresidenta. Por lo tanto, o Alicia es elegida presidenta del grupo o Carolina es elegida tesorera.
 - *5. Si el catálogo de semillas es correcto, entonces si las semillas se siembran en abril, entonces las flores se abren en julio. Las flores no se abren en julio. Por lo tanto, si las semillas se siembran en abril, entonces el catálogo de semillas no es correcto.
 6. Si el catálogo de semillas es correcto, entonces si las semillas se siembran en abril, entonces las flores se abren en julio. Las flores se abren en julio. Por lo tanto, si el catálogo de semillas es correcto, entonces las semillas se siembran en abril.
 7. Si el catálogo de semillas es correcto, entonces si las semillas se siembran en abril, entonces las flores abren en julio. Las semillas se siembran en abril. Luego, si las flores no se abren en julio, entonces el catálogo de semillas no es correcto.
 8. Si el catálogo de semillas es correcto, entonces si las semillas se siembran en abril, entonces las plantas florecen en julio. Las plantas no florecen en julio. Luego, si las semillas no se siembran en abril, entonces el catálogo de semillas no es correcto.
 9. Si Eduardo gana el primer premio, entonces o Federico gana el segundo o Jorge queda decepcionado. O Eduardo gana el primer premio o Jorge queda decepcionado. Luego, Federico no gana el segundo premio.
 - *10. Si Eduardo gana el primer premio, entonces o Federico gana el segundo premio o Jorge queda decepcionado. Federico no gana el segundo premio. Por tanto, si Jorge queda decepcionado, entonces Federico no gana el primer premio.
 11. Si Eduardo gana el primer premio, entonces Federico gana el segundo premio, y si Federico gana el segundo premio, entonces Jorge queda decepcionado. O Federico no gana el primer premio o Jorge queda decepcionado. Por tanto, Eduardo no gana el primer premio.
 12. Si Eduardo gana el primer premio, entonces Federico gana el segundo premio, y si Federico gana el segundo premio, entonces Jorge queda decepcionado. O Eduardo gana el primer premio o Federico no gana el segundo premio. Por lo tanto, o Federico no gana el segundo premio o Jorge no queda decepcionado.
 13. Si el tiempo está agradable y el cielo claro, entonces vamos a nadar y a pasear en bote. No es el caso que si el cielo está despejado entonces vamos a nadar. Por tanto, el tiempo no está agradable.
 14. Si hace una temperatura agradable, y el cielo está despejado, entonces o vamos a nadar o a pasear en bote. No es verdad que si el cielo está despejado, entonces vamos a nadar. Por lo tanto, si no vamos a pasear en bote, entonces no hace una temperatura agradable.

- *15. Si el tiempo está agradable y el cielo despejado, entonces o vamos a nadar o vamos a dar un paseo en bote. No es el caso que si no vamos a nadar entonces el cielo no está despejado. Por lo tanto, o el tiempo está agradable o vamos a pasear en bote.

2.4. Formas Sentenciales *

La introducción de variables sentenciales en la sección precedente nos permitió definir las formas argumentales en general y la forma específica de un argumento dado. Ahora definimos una *forma sentencial* como cualquier sucesión de símbolos conteniendo variables sentenciales, de modo que al sustituir enunciados por las variables sentenciales —reemplazando la misma variable sentencial por el mismo enunciado en toda la secuencia— el resultado es un enunciado. Otra vez, para precisar, convendremos en que en cualquier forma sentencial “ p ” será la primera variable sentencial que aparece, “ q ” será la segunda en ocurrir, “ r ” la tercera y así sucesivamente. Todo enunciado que resulta de la sustitución de las variables sentenciales por enunciados en una forma sentencial, se dirá que *tiene* esa forma o que es una *instancia de sustitución* de ella. Así como distinguimos la forma específica de un argumento dado, así también distinguiremos la *forma específica* de un enunciado dado como la forma sentencial de la que resulta el enunciado poniendo en el lugar de cada variable sentencial un enunciado simple diferente. Así, por ejemplo, si A , B y C son enunciados simples diferentes, el enunciado compuesto $A \supset (B \vee C)$ es una instancia de sustitución de la forma sentencial $p \supset q$ y también de la forma sentencial $p \supset (q \vee r)$, pero sólo esta última es la forma específica del enunciado dado.

Aunque los enunciados “Balboa descubrió el Océano Pacífico” (B) y “Balboa descubrió el Océano Pacífico o no lo descubrió” ($B \vee \sim B$) ambos son verdaderos, descubrimos su verdad de maneras enteramente diferentes. La verdad de B es cuestión histórica y se aprende por medio de la investigación empírica. Aún más, podrían haber ocurrido cosas que hicieran a B falso; nada *necesario* hay respecto a la verdad de B . Pero la verdad del enunciado $B \vee \sim B$ *puede* saberse independientemente de toda investigación empírica y ningún suceso puede hacerlo falso porque es una verdad necesaria. El enunciado $B \vee \sim B$ es una verdad formal, una instancia de sustitución de una forma sentencial cuyas instancias de sustitución *todas* son verdaderas. Una forma sentencial que sólo tiene instancias de sustitución verdaderas se dice *tautológica*, o que es una *tautología*.

* O formas de enunciados. N. del T.

La forma específica de $B \vee \sim B$ es $p \vee \sim p$ y se prueba que es tautológica mediante la siguiente tabla de verdad:

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
T	F	T
F	T	T

En la columna que encabeza la forma sentencial de que se trata sólo hay valores T, luego todas sus instancias de sustitución son verdaderas. Cualquier enunciado que es una instancia de sustitución de una forma sentencial tautológica es formalmente verdadero, y también se le llama tautológico, o una tautología.

Similarmente, aunque los enunciados "Cortés descubrió el Pacífico" (C) y "Cortés descubrió el Pacífico y Cortés no descubrió el Pacífico" ($C \cdot \sim C$) ambos son falsos, descubrimos su falsedad de dos maneras enteramente diferentes. El primero simplemente *ocurre* que es falso y eso se descubre empíricamente; mientras que el segundo es necesariamente falso y eso puede saberse independientemente de toda investigación empírica. El enunciado $C \cdot \sim C$ es formalmente falso, es una instancia de sustitución de una forma sentencial cuyas instancias de sustitución todas son falsas. Un enunciado se dice que contradice, o que es una contradicción de otro enunciado, cuando es lógicamente imposible que ambos sean verdaderos. En este sentido la *contradicción* es una relación entre enunciados. Pero hay otro sentido, relacionado del mismo término. Cuando es lógicamente imposible que un enunciado particular sea verdadero, ese enunciado mismo es llamado autocontradictorio o una autocontradicción. Más simplemente, se dice que tales enunciados son contradictorios o contradicciones, y ésta es la terminología que aquí usaremos. Una forma sentencial que sólo tiene instancias de sustitución falsas se dice que es una *contradicción* o que es *contradictoria*, y los mismos términos se aplican a sus instancias de sustitución. La forma sentencial $p \cdot \sim p$ se prueba que es una contradicción por el hecho de que en su tabla de verdad sólo hay valores F en la columna que encabeza.

Enunciados y formas sentenciales que no son ni tautológicas ni contradictorias se dice que son *contingentes* o que son *contingencias*. Por ejemplo, p , $\sim p$, $p \vee q$, $p \cdot q$ y $p \supset q$ son formas sentenciales contingentes; y B , C , $\sim B$, $\sim C$, $B \cdot C$, $B \vee C$, son enunciados contingentes. El término es apropiado, pues sus valores de verdad no están formalmente determinados, sino que son dependientes o contingentes de la situación.

Fácilmente se demuestra que $p \supset (q \supset p)$ y $\sim p \supset (p \supset q)$ son tautologías. Al expresarlas en lenguaje ordinario como "Un enun-

ciado verdadero es implicado por cualquier enunciado" y como "Un enunciado falso implica cualquier enunciado" parecen bastante extrañas. Algunos escritores las han llamado *las paradojas de la implicación material*. Pero si se tiene presente que el símbolo herradura es un conectivo de función de verdad que representa la *implicación material* y no la "implicación en general" o clases más usuales como son la implicación lógica o la implicación causal, entonces dichas formas sentenciales tautológicas no son sorprendentes en lo absoluto. Y al corregir esas engañosas formulaciones del castellano insertando la palabra "materialmente" antes de "implicado" e "implica", entonces desaparece el aire paradójico. La implicación material es una noción técnica y la motivación del lógico al introducirla y usarla es la enorme simplificación que resulta en su tarea de discriminar entre los argumentos válidos y los inválidos.

Dos enunciados se dicen *materialmente equivalentes* cuando tienen el mismo valor de verdad, y simbolizamos el enunciado de que son materialmente equivalentes insertando el símbolo " \equiv " entre ellos. Tratándose de un conectivo de función de verdad, el símbolo tres barras se define con la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \equiv q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Decir que dos enunciados son materialmente equivalentes es decir que materialmente el uno implica el otro, como es fácil de verificar con una tabla de verdad. Así, el símbolo de las tres barras puede leerse "es materialmente equivalente con" o "si y sólo si". Un enunciado de la forma $p \equiv q$ se llama *bicondicional*. Dos enunciados se dicen *lógicamente equivalentes* cuando el bicondicional que expresa su equivalencia material es una tautología. El "principio de la Doble Negación", expresado como $p \equiv \sim \sim p$, con una tabla de verdad se demuestra que es tautológico.

Hay dos equivalencias lógicas que expresan importantes interrelaciones de las conjunciones, disyunciones y negaciones. Como una conjunción afirma que sus dos conjuntos son verdaderos, su negación sólo necesita afirmar que uno de los conjuntos es falso. Luego, negar la conjunción $p \cdot q$ equivale a afirmar la disyunción de las negaciones de p y q . Este enunciado de equivalencia se simboliza como $\sim(p \cdot q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$ y se demuestra que es una tautología mediante la tabla de verdad:

p	q	$p \cdot q$	$\sim(p \cdot q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim(p \cdot q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$
T	T	T	F	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

De manera semejante, como una disyunción meramente afirma que al menos un disyunto es verdadero, negarla es afirmar que ambos son falsos. Negar la disyunción $p \vee q$ equivale a afirmar la conjunción de las negaciones de p y q . Se simboliza como $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \cdot \sim q)$, y con una tabla de verdad fácilmente se prueba que es una tautología. Estas dos equivalencias se conocen como Teoremas de De Morgan, por el lógico matemático inglés Augustus De Morgan (1806-1871), y en lenguaje ordinario pueden enunciarse de manera compendiada como: La negación de la $\left\{ \begin{array}{l} \text{conjunción} \\ \text{disyunción} \end{array} \right\}$ de dos enunciados es lógicamente equivalente a la $\left\{ \begin{array}{l} \text{disyunción} \\ \text{conjunción} \end{array} \right\}$ de sus negaciones.

Dos formas sentenciales se dicen lógicamente equivalentes si, no importando qué enunciados se sustituyan por sus variables sentenciales —poniendo el mismo enunciado en lugar de la misma variable sentencial en ambas formas sentenciales—, los pares resultantes de enunciados son equivalentes. Así, el Teorema de De Morgan afirma que $\sim(p \vee q)$ y $\sim p \cdot \sim q$ son formas sentenciales lógicamente equivalentes. Por el Teorema de De Morgan y el principio de la Doble Negación $\sim(p \cdot \sim q)$ y $\sim p \vee q$ son lógicamente equivalentes, luego cualquiera puede tomarse como definición de $p \supset q$; la segunda es la elección más usual.

A todo argumento corresponde un enunciado condicional cuyo antecedente es la conjunción de las premisas del argumento y cuyo consecuente es la conclusión del argumento. Ese condicional correspondiente es una tautología si y sólo si el argumento es válido. Así, a la forma argumental válida

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \therefore q \end{array}$$

corresponde la forma sentencial tautológica $[(p \vee q) \cdot \sim p] \supset q$; y a la forma argumental inválida

$$\begin{array}{l} p \supset q \\ q \\ \therefore p \end{array}$$

corresponde la forma sentencial no tautológica $[(p \supset q) \cdot q] \supset p$. Una forma argumental es válida si y sólo si su tabla de verdad tiene el valor **T** bajo su conclusión en cada renglón en que haya el valor **T** bajo todas las premisas. Como puede aparecer una **F** en la columna encabezada por el condicional correspondiente sólo donde haya **T** bajo todas las premisas y **F** bajo la conclusión, es claro que sólo puede haber el valor **T** bajo un condicional que corresponde a una forma argumental válida. Si un argumento es válido, el enunciado de que la conjunción de sus premisas implica su conclusión es una tautología.

Una versión alternativa de la prueba de la tabla de verdad de una forma argumental sentencial es la siguiente, que corresponde a la tabla de verdad precedente:

\sim	$(p$	$q)$	\equiv	$(\sim$	p	\vee	\sim	$q)$
F	T	T	T	F	T	F	F	T
T	T	F	T	F	T	T	T	F
T	F	F	T	T	F	T	F	T
T	F	F	T	T	F	T	T	F
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(10)

Aquí las columnas (2), (4), (7), (10) son las columnas iniciales o guía. La columna (3) se llena con referencia a las columnas (2) y (4), y la columna (1) con referencia a la columna (3). La columna (6) se llena con referencia a la columna (7), la columna (9) se llena con referencia a la columna (10) y entonces la columna (8) con referencia a las columnas (6) y (9). Finalmente, la columna (5) se llena con referencia a las columnas (1) y (8). El hecho de que su conectivo principal tenga sólo valores **T** en su columna de la tabla de verdad, establece que la forma sentencial probada es una tautología.

EJERCICIOS

I. Use tablas de verdad para caracterizar las siguientes formas sentenciales como tautológicas, contradictorias o contingentes:

- *1. $p \supset \sim p$
2. $(p \supset \sim p) \cdot (\sim p \supset p)$
3. $p \supset (p \supset p)$
4. $(p \supset p) \supset p$
- *5. $p \supset (p \cdot p)$
6. $(p \cdot q) \supset p$
7. $(p \supset q) \supset [\sim(q \cdot r) \supset \sim(r \cdot p)]$
8. $(\sim p \cdot q) \cdot (q \supset p)$
9. $[(p \supset q) \supset q] \supset q$
10. $[(p \supset q) \supset p] \supset p$

48 *Argumentos que Contienen Enunciados Compuestos*

II. Use tablas de verdad para decidir cuáles de las siguientes son equivalencias lógicas:

*1. $(p \supset q) \equiv (\sim p \supset \sim q)$

2. $(p \supset q) \equiv (\sim q \supset \sim p)$

3. $[(p \cdot q) \supset r] \equiv [p \supset (q \supset r)]$

4. $[p \supset (q \supset r)] \equiv [(p \supset q) \supset r]$

*5. $[p \cdot (q \vee r)] \equiv [(p \cdot q) \vee (p \cdot r)]$

6. $[p \vee (q \cdot r)] \equiv [(p \vee q) \cdot r]$

7. $[p \vee (q \cdot r)] \equiv [(p \vee q) \cdot (p \vee r)]$

8. $(p \equiv q) \equiv [(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)]$

9. $p \equiv [p \cdot (p \supset q)]$

10. $p \equiv [p \cdot (q \supset p)]$