

Travail fait par

Matis Brassard-Verrier (111 182 740)

Alyson Marquis (111 183 605)

Alexis Picard (111 182 200)

Samuel Provencher (111 181 794)

Apprentissage statistique en actuariat

ACT-3114

Rapport 2

Présenté à

Marie-Pier Côté

École d'actuariat

Université Laval

22 avril 2020

Table des matières

Introduction	1
Modèle de base	1
Ajustement des modèles	2
Modèle linéaire généralisé avec une régularisation Lasso	2
Modèle des k plus proches voisins	2
Arbre de décision	3
Ensemble d'arbres de décisions agrégés par <i>bagging</i>	4
Forêt aléatoire	4
Modèle de boosting de gradient stochastique	5
Comparaison des modèles	8
Interprétation des meilleurs modèles	9
Forêt aléatoire	9
Boosting de gradient stochastique	13
Conclusion	21
Bibliographie	22

Introduction

Dans le cadre du travail, nous allons tenter de modéliser le prix de vente des maisons dans la région de Seattle (King County, USA) en utilisant de nombreuses caractéristiques ayant une incidence sur la valeur d'une maison. La variable réponse à prédire, soit le prix de vente d'une maison, est une valeur positive évaluée en dollars américains. La modélisation de cette variable pourrait être utile pour différentes raisons dans un contexte actuariel. Comme la somme assurée d'une maison a un lien très fortement proportionnel à son prix de vente, une compagnie d'assurance pourrait être intéressée de modéliser le prix de vente de maisons dans des nouveaux développements immobiliers afin de tenter de prédire les futures soumissions d'assurance habitation et d'offrir des offres personnalisées aux acheteurs de ces nouvelles maisons. Dans le contexte de la gestion des risques, certains assureurs ont un portefeuille de prêts hypothécaires ou utilisent des produits dérivés sur prêts hypothécaires pour se couvrir du risque (*hedging*). Ainsi, il pourrait être intéressant d'avoir une estimation des montants de prêts hypothécaires dans une région donnée en se basant sur le prix de vente des maisons afin de mieux gérer le risque de la compagnie. La pertinence de trouver cette variable qu'est le prix de vente des maisons devient alors fort intéressante.

Le jeu de données utilisé sera le suivant : `kc_house_sales` (House sales in King County, USA). Dans les prochaines sections, sept modèles seront étudiés et comparés. Les deux modèles les plus performants seront également interprétés plus en profondeur. Pour construire nos modèles, nous utiliserons les données modifiées selon la méthodologie décrite dans la première partie du travail. 80 % des données seront utilisées pour effectuer l'entraînement des modèles et 20 % seront réservées pour tester ainsi que comparer les modèles entre eux.

Modèle de base

Un bon modèle de base a été choisi en utilisant une technique étudiée dans le cours ACT-2003 Modèles linéaires en actuariat, soit la régression linéaire multiple. Ce type de modèle a été choisi en raison de sa simplicité et parce qu'il s'adapte bien au jeu de données. En effet, la variable réponse *price* est monétaire et possède une distribution asymétrique. Il a été vu, qu'en présence de ce type de variable réponse, une régression linéaire multiple en appliquant une transformation logarithmique sur la variable réponse était appropriée. Tel que mentionné dans la première partie de ce travail, la transformation logarithmique permet de s'approcher de la distribution d'une loi normale, ce qui rend la variable réponse plus facile à modéliser. Pour construire le modèle, seulement l'échantillon d'entraînement a été utilisé. De plus, le modèle utilise toutes les 17 variables explicatives. L'équation du modèle est la suivante :

$$\log(\hat{Y}_i) = \hat{\beta}_0 + \sum_{k=1}^{17} \hat{\beta}_k x_{i,k}$$

Ainsi, aucune interaction entre les variables explicatives n'a été considérée afin de garder le modèle simple et facilement interprétable. Certaines variables catégorielles à plusieurs niveaux, dont l'importance des interactions étaient négligeables augmentaient le temps de calcul et rendaient le modèle plus difficilement interprétable. Ainsi, dans l'idée d'avoir un modèle de base simple, il a été décidé de ne pas considérer les interactions dans ce modèle. En outre, une sélection de variable formelle n'a pas été effectuée contrairement à ce qui est habituellement fait lorsqu'on veut raffiner un modèle linéaire multiple.

Ajustement des modèles

La présente section présentera les six modèles testés. Il est à noter que, pour tous ces modèles, une transformation logarithmique a été effectuée sur la variable réponse *price*, tel qu'expliqué dans la section **Modèle de base**.

Modèle linéaire généralisé avec une régularisation Lasso

Dans le cadre du travail, il a été choisi d'effectuer un modèle linéaire généralisé avec une régularisation de type Lasso. Notre choix s'est arrêté sur ce type de régularisation, puisque la régularisation Lasso permet d'effectuer la sélection de variables. Pour ce faire, il suffit de minimiser l'équation de score suivante :

$$S^{Lasso} = \sum_{i=1}^p (Y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij})^2 + \lambda \sum_{j=1}^p |\beta_j|,$$

où p est le nombre de paramètres du modèle et λ est le paramètre de régularisation. La minimisation de cette équation mènera à des coefficients β exactement égal à zéro, sélectionnant ainsi les variables du modèle. Nous avons utilisé la méthode implantée dans le paquetage **glmnet** pour choisir le paramètre λ ainsi que pour bâtir le modèle.

Afin de modéliser le prix de vente des maisons à King County, le modèle linéaire généralisé avec une régularisation Lasso a été construit à l'aide de l'échantillon d'entraînement. Le paramètre de régularisation a été choisi à l'aide d'une validation croisée à six plis. Cette validation croisée est intégrée dans la fonction **cv.glmnet**. Ainsi, la valeur optimale de ce paramètre est de $\lambda = 0.0000791264$. Le modèle retenu est composé de sept variables explicatives, soient *sqft_lot*, *waterfront*, *view*, *sqft_above*, *sqft_basement*, *lat* et *reno*. Le modèle est aussi constitué de 22 termes d'interaction. L'équation du modèle est la suivante :

$$\log(\hat{Y}_i) = \hat{\beta}_0 + \sum_{k=1}^7 \hat{\beta}_k x_{i,k} + \sum_{j=1}^{22} \hat{\alpha}_j z_{i,j} \quad ,$$

où $z_{i,j}$ est le $j^{ième}$ terme d'interaction.

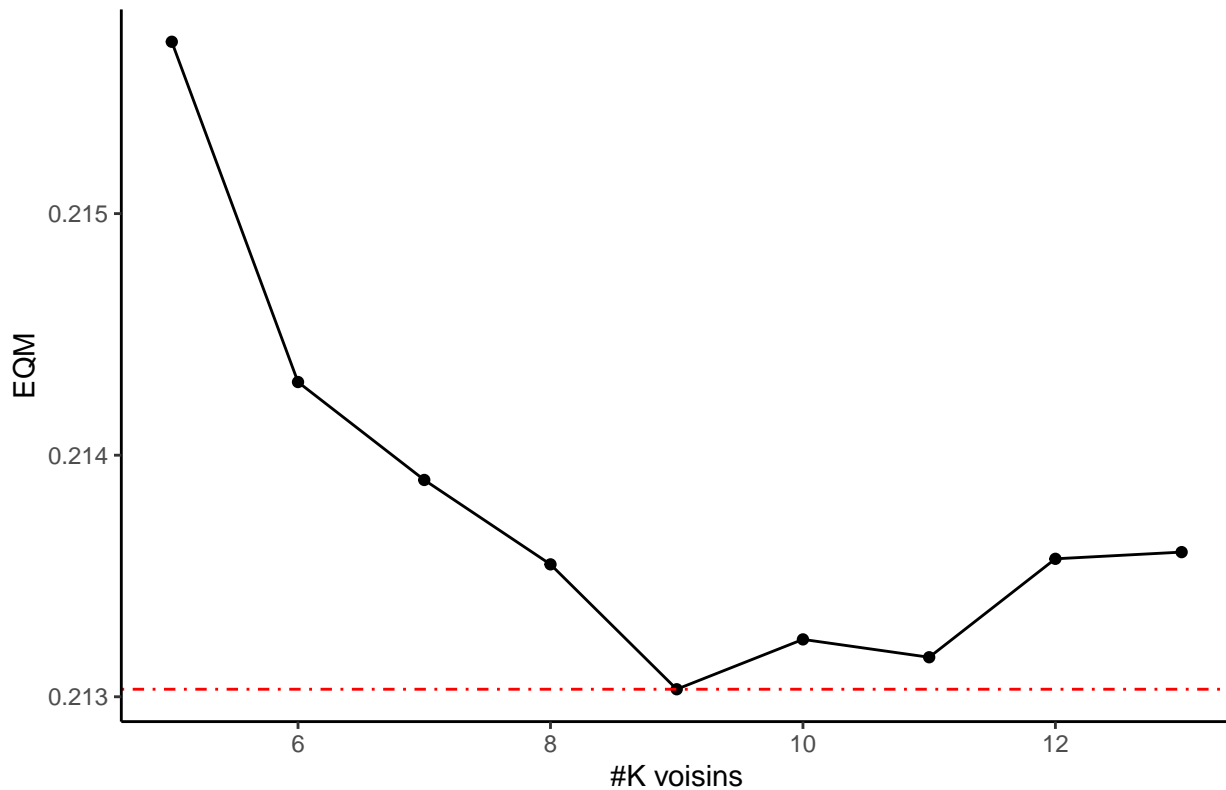
Modèle des k plus proches voisins

Un modèle qui a été testé est celui des k plus proches voisins. Étant donné que nous avons un problème de régression, la fonction **knn.reg** du paquetage **FNN** a été utilisée pour construire ce modèle.

Le modèle des k plus proches voisins est simpliste. Afin de prédire une observation dont les valeurs des variables explicatives sont comprises dans le vecteur \mathbf{x}_0 , il faut regarder l'ensemble des k plus proche voisins de \mathbf{x}_0 , c'est-à-dire les observations qui minimisent la distance Euclidienne. Puis, la prévision du point \mathbf{x}_0 est la moyenne des variables réponses des observations comprises dans l'ensemble des k plus proches voisins.

Il faut d'abord déterminer la valeur optimale de k , soit le nombre de voisins à considérer. Pour ce faire, une validation croisée à 10 plis a été utilisée. La fonction **train** du paquetage **caret** a été utilisée pour faire cette validation croisée. Étant donné que le modèle des k plus proches voisins est fondé sur la distance Euclidienne, les données ont été standardisées avant de procéder à la validation croisée. La métrique choisie pour sélectionner la valeur de k est l'erreur quadratique moyenne (**metric="RMSE"**). Ainsi, la valeur de k qui minimisait l'erreur quadratique moyenne est $k = 9$, tel qu'illustré sur le graphique 1.

Graphique 1 : EQM en fonction du nombre de voisins



Arbre de décision

Un modèle qui a été décidé de tester est un arbre de décision, mais plus précisément dans le cas présent, un arbre de régression. Pour ce faire, l'algorithme *classification and regression tree* (CART) implanté dans le paquetage **rpart** a été utilisé.

Il a tout d'abord été décidé d'optimiser l'hyperparamètre **minbucket**, soit le nombre minimal d'observations dans une feuille de l'arbre. Une méthode manuelle a dû être utilisée parce qu'on ne peut pas optimiser cet hyperparamètre à l'aide des méthodes habituelles. En premier lieu, l'échantillon d'entraînement a été séparé en échantillon de validation (20 %) et en un nouvel échantillon d'entraînement (80 %). L'échantillon de validation va être utile pour faire le choix optimal de l'hyperparamètre **minbucket**. En second lieu, plusieurs valeurs ont été testées entre **minbucket** = 1 et **minbucket** = 200 sur des arbres élagués afin de se donner une idée. Par la suite, la recherche a été raffinée et la valeur qui a ainsi été trouvée est de **minbucket** = 7. Cette valeur est celle qui minimise l'erreur quadratique moyenne des arbres élagués sur l'échantillon de validation.

Avec cet hyperparamètre défini, un arbre de régression a été construit en utilisant toutes les variables explicatives ainsi qu'un paramètre de complexité nul ($cp = 0$). L'arbre de régression est obtenu en spécifiant **method="anova"** et permet de trouver l'arbre minimisant l'erreur quadratique moyenne. Seulement le nouvel échantillon d'entraînement créé pour optimiser **minbucket** a été utilisé pour entraîner ce modèle, l'échantillon test étant réservé pour analyser les performances prédictives du modèle. Afin d'optimiser le paramètre de complexité, une validation croisée en 10 plis a été effectuée. Cette validation croisée est implantée de base dans la fonction **rpart**, donc aucune programmation supplémentaire n'a été nécessaire. Ainsi, le paramètre de complexité optimal est de 0.0000734972. Ce choix optimal a été utilisé pour élaguer l'arbre de régression et ainsi réduire la variance de la prédiction. L'élaguage représente un bon compromis entre le biais et la variance de la prédiction.

Il aurait été intéressant de représenter graphiquement ce modèle puisqu'il s'agit d'une façon de bien com-

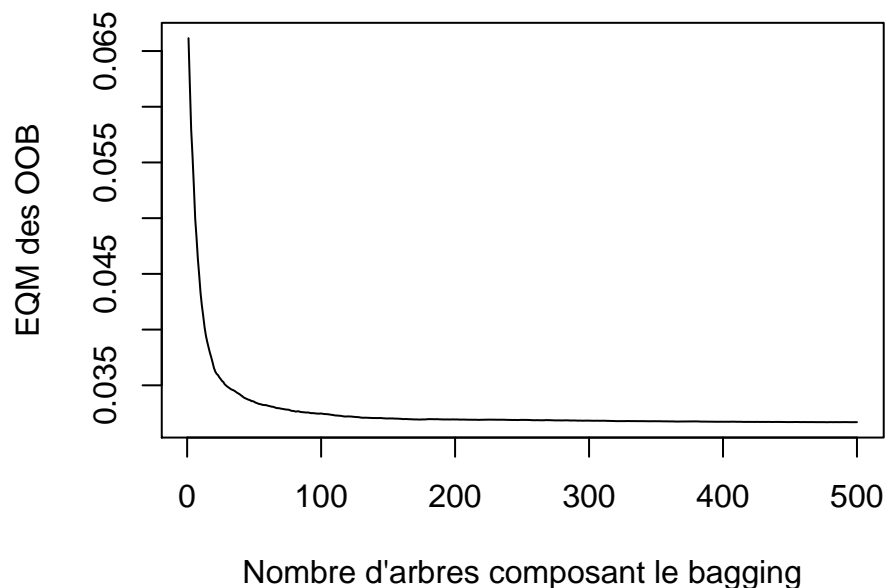
prendre ce type de modèle. Cependant, il n'a pas été possible de présenter ce modèle sous forme de graphique. En effet, malgré le fait que l'arbre a été élagué, il était trop complexe pour être agréable à regarder pour l'oeil. Ceci est dû au fait que le modèle a été entraîné avec 13821 observations, ce qui est un nombre assez important.

Ensemble d'arbres de décisions agrégés par *bagging*

Un autre modèle qui a été testé est celui du *bagging* avec des arbres de régression. Étant donné le type de la variable réponse recherchée, soit le prix d'une maison, les arbres de régression ont été choisis pour effectuer le *bagging*. Pour ce faire, l'algorithme *classification and regression with Random Forest* (`randomForest`) implanté dans le paquetage `randomForest` a été utilisé.

Un échantillon *bootstrap* avec remise de la même taille que l'échantillon d'entraînement a été sélectionné par l'algorithme `randomForest (sampsize= nrow(donnees.train))`. Le nombre de variables échantillonnées aléatoirement a donc été déterminé à 17 (`mtry=17`) étant donné que la base de données d'entraînement comportait 18 variables, dont la variable réponse. Le seul hyperparamètre qui était à déterminer était celui du nombre d'arbres de régression créés avec le *bagging*. Pour ce faire, un graphique de l'erreur quadratique moyenne (EQM) des observations *out-of-bag* (OOB) en fonction du nombre d'arbres composant le *bagging* a été tracé afin de déterminer quand l'EQM des OOB se stabilisait. Sur le graphique suivant, on voit d'ailleurs que 500 arbres étaient suffisants et c'est donc le nombre qui a été retenu (`ntree=500`).

**Graphique X: EQM des observations OOB
en fonction du nombre d'arbres**



À noter qu'aucun élagage n'a été fait sur les arbres de régression créés par le *bagging*, donc ceux-ci avaient un paramètre de complexité `cp=0`.

Forêt aléatoire

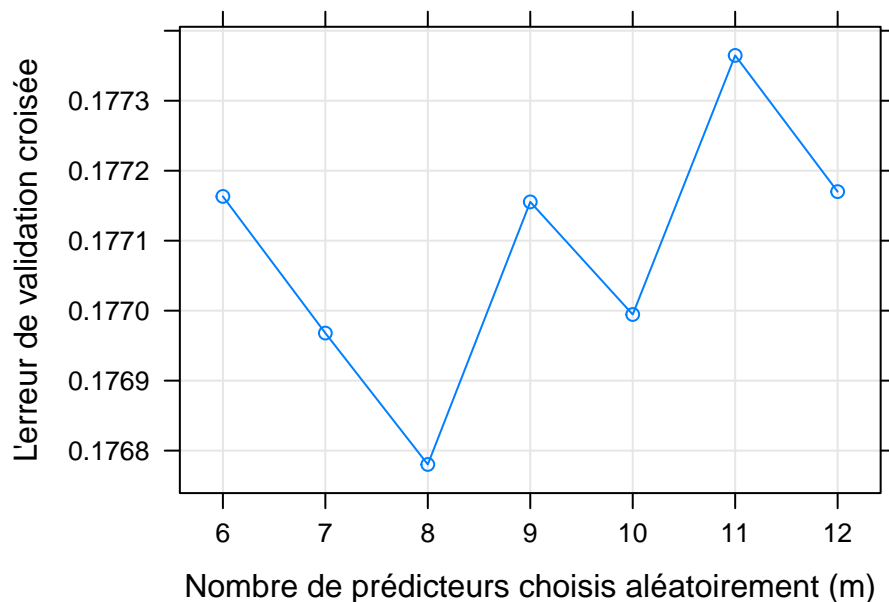
Un autre modèle qui a été testé est celui de la forêt aléatoire. Pour ce faire, l'algorithme *classification and regression with Random Forest* (`randomForest`) implanté dans le paquetage `randomForest` a été utilisé.

Le *bagging* et la forêt aléatoire sont très similaires à la différence que la forêt aléatoire permet de décorréler les arbres à l'aide de deux méthodes.

Tout d'abord, on choisit un échantillon *bootstrap* plus petit que le *bagging*, c'est pourquoi dans notre cas un `sampsize= 0.75*nrow(donnees.train)` a été choisi, ce qui équivaut à utiliser 75% des données de l'échantillon d'entraînement.

Puis, à chaque itération dans la construction de l'arbre, on choisit aléatoirement m prédicteurs qui seront les candidats pour la séparation (`mtry`). Ce choix de m optimal a été fait à l'aide d'une validation croisée à 5 plis. La fonction `train` du paquetage `caret` a été utilisée pour faire cette validation croisée. La métrique choisie pour sélectionner la valeur de m est l'erreur quadratique moyenne (`metric="RMSE"`). Ainsi, la valeur de m qui minimisait l'erreur quadratique moyenne de validation croisée est $m = 8$, comme le montre le graphique suivant :

Graphique X: EQM des observations OOB en fonction du mtry



Pour ce qui est des autres hyperparamètres, hormis le nombre d'arbres (`ntree`) qui a été abaissé à 150 pour des fins d'optimisation et de vitesse de calcul, les mêmes valeurs ont été gardées pour le *bagging* et la forêt aléatoire.

Modèle de boosting de gradient stochastique

Enfin, le dernier modèle ajusté aux données en est un de boosting de gradient stochastique. Nous allons encore une fois supposer que la variable réponse suit une distribution gaussienne, ce qui nous permet d'utiliser l'erreur quadratique moyenne (EQM) comme fonction de perte pour construire le modèle.

En quelques mots, le modèle de boosting de gradient stochastique est une procédure itérative : à chaque itération, un arbre de régression est ajusté aux gradients négatifs de la fonction de perte de l'itération précédente. La prévision de chaque itération est prise en compte dans le modèle proportionnellement à un paramètre λ appelé paramètre de régularisation. Plus ce λ est petit, plus le modèle apprend petit à petit en n'accordant pas trop d'importance à chaque prévision et plus la performance finale du modèle sera bonne, mais il faudra cependant plus d'itérations pour obtenir un modèle final optimal. Il faut également faire attention de ne pas construire un modèle avec trop d'arbres, car les modèles de boosting de gradient stochastique ont un risque de surajustement.

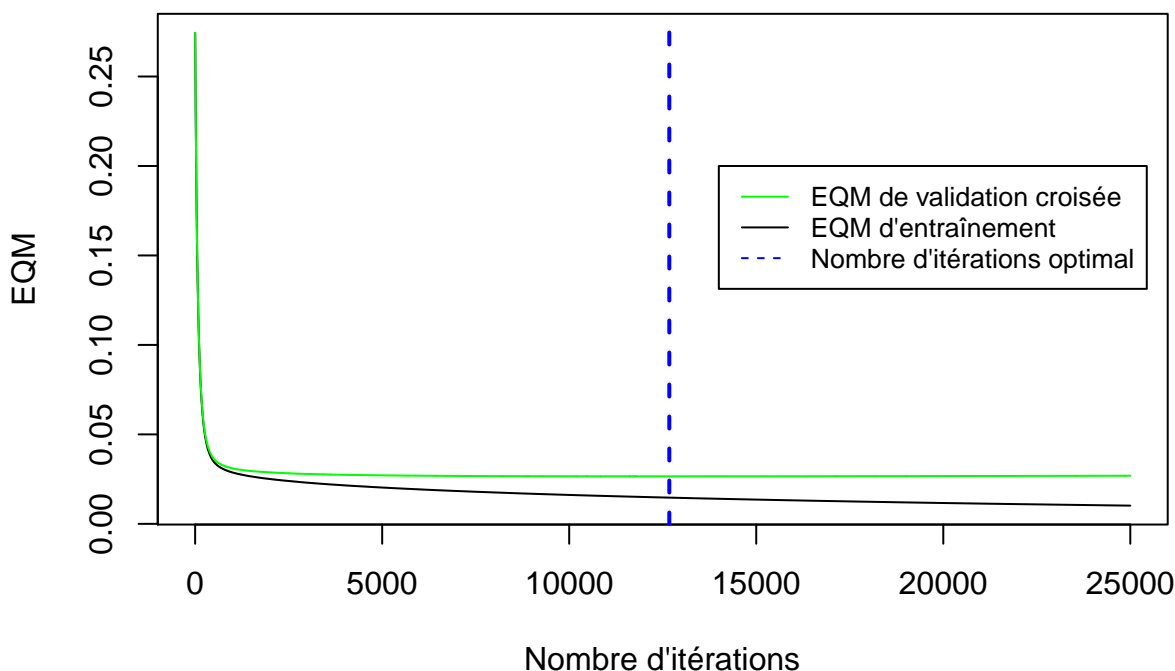
Nous avons choisi un paramètre de régularisation λ de 1 %. Ce paramètre nous a permis d'obtenir un compromis efficace entre temps de calcul et précision du modèle.

Nous avons utilisé les fonctions intégrées au paquetage **gbm** pour procéder à l'optimisation et à la construction du modèle. En utilisant une validation croisée à cinq ensembles, nous avons optimisé les paramètres d (la profondeur maximale de l'arbre ajusté à chaque itération) et T (le nombre d'itérations du modèle). Des valeurs de trois, cinq, sept et neuf ont été testées pour la profondeur des arbres d .

Pour ce qui est des autres hyperparamètres, soit le pourcentage de sous-échantillonnage δ et le nombre minimal d'observations dans chaque noeud pour les arbres, nous avons gardé leurs valeurs par défaut, soit respectivement 50 % de sous-échantillonnage et dix observations. En effet, étant donné le λ choisi et la taille de notre jeu de données, nous avons déterminé qu'optimiser ces hyperparamètres nécessiterait un temps de calcul excessif pour les avantages qu'il serait possible d'en retirer.

À titre d'exemple, voici le graphique d'optimisation permettant de déterminer le nombre d'itérations optimal pour le modèle utilisant des arbres de profondeur sept :

Graphique X: EQM selon le nombre d'itérations (d=7)



La même méthode a été utilisée pour déterminer le nombre d'itérations optimal pour chaque paramètre d testé.

Pour déterminer lequel de ces modèles est le meilleur, nous allons les comparer selon le critère de l'erreur quadratique moyenne minimale de validation croisée à cinq ensembles.

TABLE 1: L'EQM des modèles testés

Profondeur d	Nombre d'itérations optimal	EQM de validation croisée
3	29884	0.027029
5	18905	0.026559
7	12676	0.026556
9	10515	0.026378

Selon ce critère, le meilleur modèle est celui obtenu avec $d = 9$ et 10515 itérations. C'est donc avec ce modèle que nous procéderons pour effectuer les prédictions sur l'échantillon de test.

Comparaison des modèles

La métrique utilisée pour comparer la puissance prédictive des différents modèles est l'erreur quadratique moyenne (EQM). Cette métrique a été choisie puisque le type de modélisation est la régression. Les autres métriques vues dans le cadre du cours ACT-3114 Apprentissage statistique en actuariat sont utilisées pour les problèmes de classification ou lorsque la distribution de la variable réponse est poisson. Ainsi, l'EQM est la métrique la plus appropriée pour ce problème. Pour chacun des modèles, l'EQM a été calculée avec les données de test afin d'éviter d'utiliser les mêmes données qui ont été utilisées pour entraîner les modèles.

TABLE 2: L'EQM des sept modèles testés

Modèle	EQM
Modèle de base	0.05300
Modèle Lasso	0.05245
Modèle des k plus proches voisins	0.04570
Arbre de décision	0.04962
Bagging	0.03350
Forêt aléatoire	0.03253
Boosting de gradient stochastique	0.02717

Les valeurs de l'EQM pour les sept modèles testés sont présentées dans le Tableau 1. Les deux meilleurs modèles selon cette métrique sont le modèle de forêt aléatoire et le modèle de boosting de gradient stochastique. En effet, leur EQM est respectivement de 0.03253 et de 0.02717.

Faudrait essayer de remplacer Table par Tableau dans les titres (pour français). Table 2, c'est juste une autre façon de faire un tableau

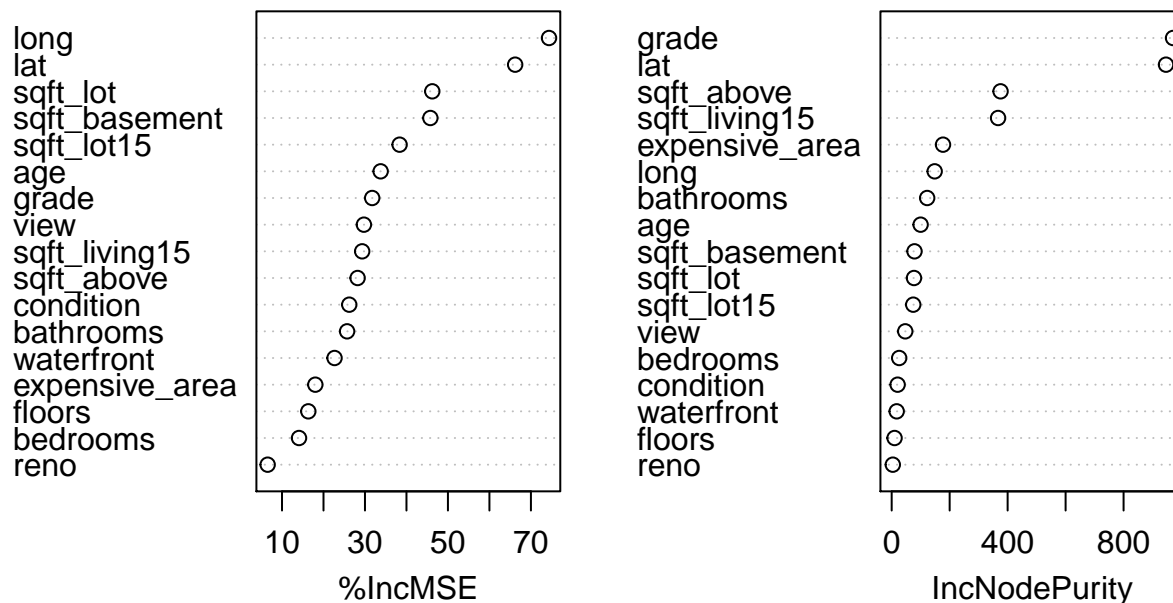
Interprétation des meilleurs modèles

Forêt aléatoire

Notre deuxième meilleur modèle obtenu en termes de prévision est celui de la forêt aléatoire. Ce modèle est difficilement interprétable étant donné le mélange de plusieurs arbres de régression différents. Voici ce que le modèle peut nous dire en effectuant une analyse approfondie.

Si l'on affiche l'importance des variables faisant partie de notre jeu de données en fonction de deux mesures différentes, soit la *mean decrease in accuracy* et la *mean decrease in node impurity*, on obtient le graphique ci-dessous :

Graphique X: Importance des variables composant la forêt aléatoire

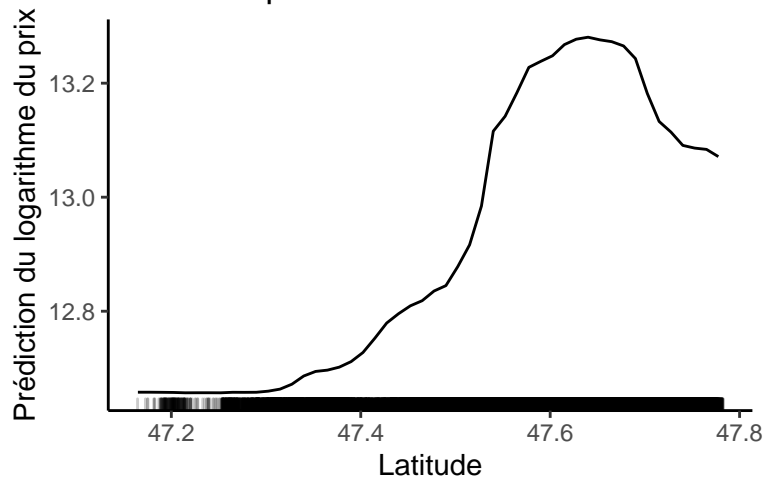


Si on permute de façon aléatoire les valeurs de la variable à analyser voulue, on calcule de nouvelles prévisions sur nos données et ensuite on compare la nouvelle erreur quadratique moyenne avec celle du jeu de données initial, on obtient la *mean decrease in accuracy*. Pour notre jeu de données, on voit donc que les variables de la latitude (*lat*) et la longitude (*long*) sont celles qui ont le plus d'impact sur nos prévisions du logarithme de prix d'achat de la maison si on applique cette permutation.

Si on calcule la diminution totale dans l'erreur quadratique moyenne due à une séparation sur la variable à analyser voulue, on obtient la *mean decrease in node impurity*. Avec cette mesure, ce n'est pas les deux mêmes variables qui sont dites importantes pour notre modèle. En fait, la latitude (*lat*) est toujours d'une grande importance, mais la qualité de la construction et de la conception (*grade*) apparaît comme étant celle qui se démarque aussi.

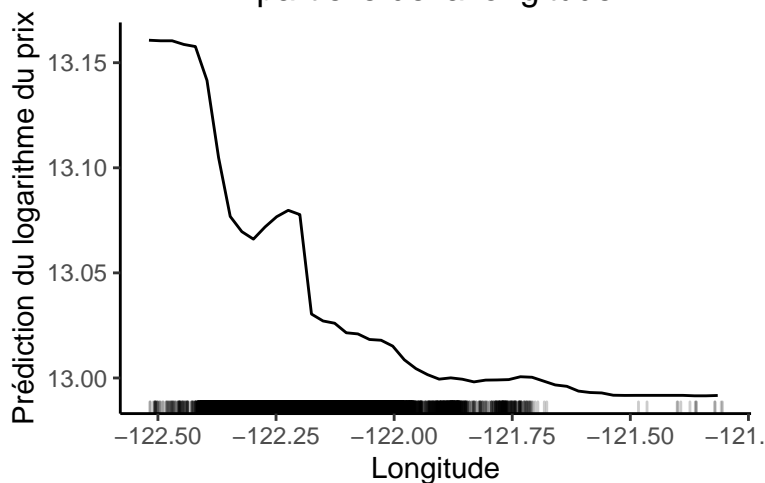
Pour mieux comprendre l'effet marginal de ces trois variables explicatives sur la prévision, on peut regarder leurs graphiques de dépendance partielle :

Graphique X : Graphique de dépendance partielle de la latitude



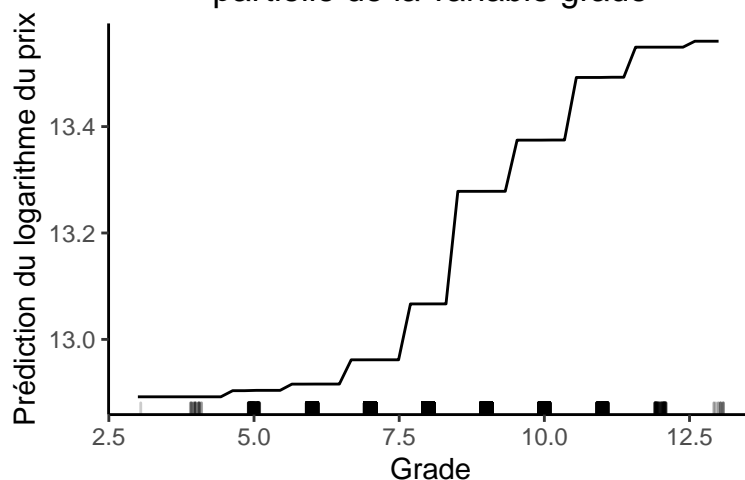
Sur le graphique suivant, on voit clairement que lorsque la latitude augmente, le logarithme du prix de la maison augmente aussi. Cette tendance est véridique jusqu'à une latitude d'environ 47,7. Le sommet de la courbe est atteint entre les latitudes de 47,6 et de 47,7, ce qui est attendu puisqu'il s'agit de l'endroit approximatif du centre-ville. En fait, puisque la latitude exprime la position d'une maison à la verticale, on peut déduire qu'une maison située plus au nord de la région est plus dispendieuse qu'une maison située au Sud. Le graphique de la latitude concorde d'ailleurs avec la carte thermique de toutes les maisons vendues à King County où l'on voit que Seattle, la capitale, est située environ entre les parrallèles 47,6 et 47,7.

Graphique X : Graphique de dépendance partielle de la longitude



Sur le graphique suivant, on voit clairement que lorsque la longitude augmente, le logarithme du prix de la maison diminue. En fait, puisque que la longitude exprime la position d'une maison à l'horizontal, on peut déduire qu'une maison située à l'ouest de la région évaluée est plus dispendieuse qu'une maison située à l'Est. Le graphique de la longitude concorde d'ailleurs avec la carte thermique de toutes les maisons vendues à King County où l'on voit que les maisons dispendieuses, dont ceux près du centre-ville, sont situées à l'ouest.

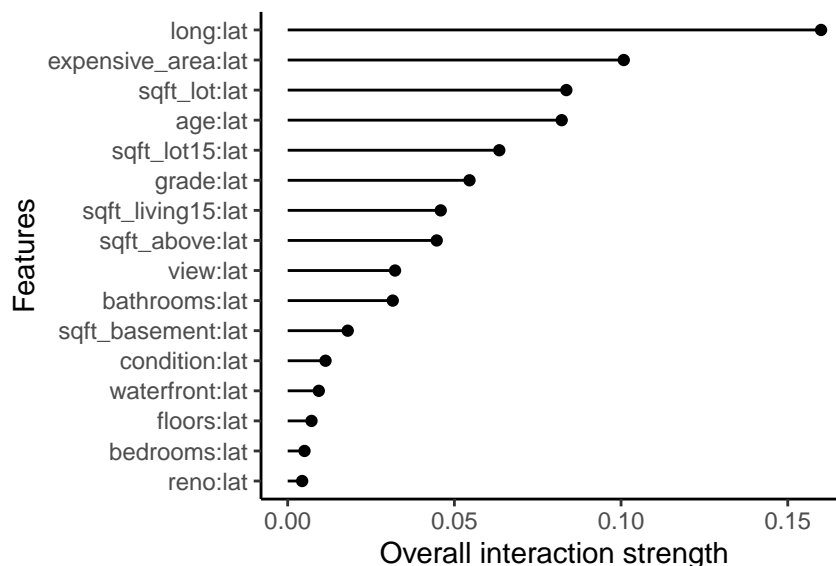
Graphique X : Graphique de dépendance partielle de la variable grade



Sur le graphique suivant, on voit clairement que lorsque la qualité de la construction et de la conception (*grade*) augmente, le logarithme du prix de la maison augmente aussi. En fait, de manière logique, si une maison à une meilleure qualité de construction et de conception, elle aura tendance à valoir plus chère. On peut déduire qu'une maison avec un *grade* élevé est plus dispendieuse qu'une maison avec un *grade* faible. À noter que l'augmentation dans le logarithme du prix de la maison apparaît uniquement à partir d'un *grade* de 5 ou supérieur.

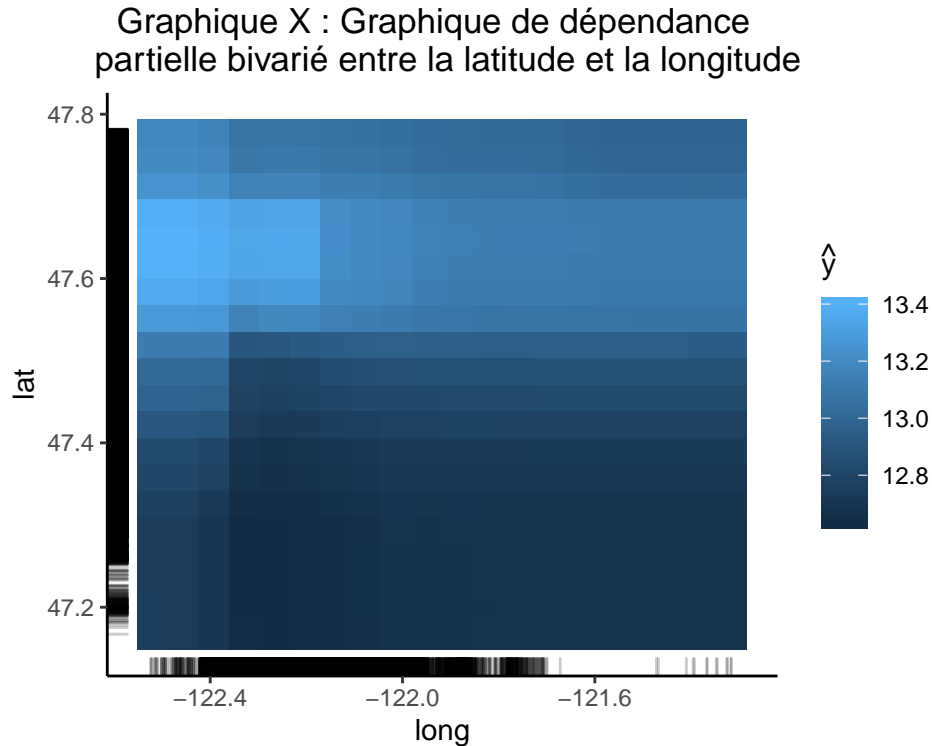
La variable *lat* étant importante selon les deux méthodes de mesure d'importance, il est donc intéressant d'aller voir si elle interagit avec d'autres variables. Une manière de quantifier ces interactions est de déterminer les statistiques *H* de Friedman : plus ces dernières sont grandes, plus l'interaction est forte. Ces statistiques *H* ont été déterminées à l'aide du paquetage [iml](#). Le graphique des statistiques *H* de Friedman est présenté ci-dessous :

Graphique X : Graphique des statistiques *H* avec la latitude



Il est intéressant de noter l'interaction entre la latitude et la variable *expensive_area*. En effet, la variable *expensive_area* a été créée dans la première partie du présent travail. Cela prouve la pertinence d'avoir

crée cette variable. De plus, l'interaction est logique, car la variable *expensive_area* dépend de la latitude. Toutefois, les variables de la latitude et de la longitude sont celles qui interagissent le plus ensemble en comparaison aux autres interactions possibles. C'est d'ailleurs les deux variables les plus importantes selon la méthode *mean decrease in accuracy*. Le graphique de dépendance partielle bivarié entre ces deux variables serait donc fort intéressant. Il est présenté ci-dessous :



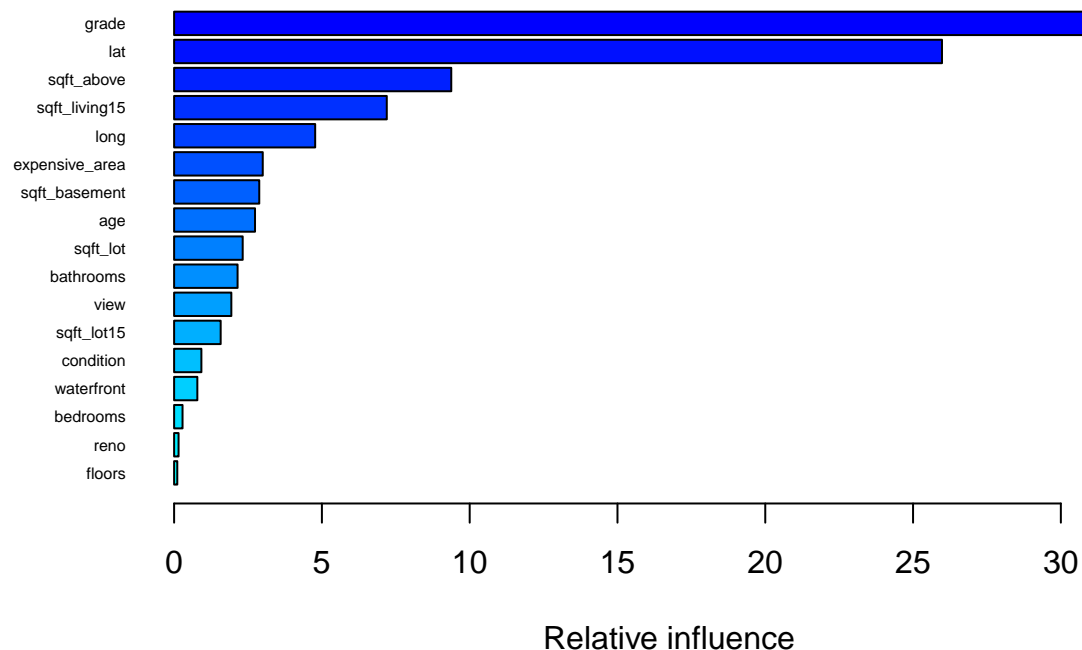
Ce graphique est très intéressant puisqu'il ressemble fortement à la carte thermique de tous les prix des maisons dans la région de King County présentée dans la première partie du travail. En effet, la majorité des maisons plus dispendieuses se situent au Nord-Ouest de la région et c'est d'ailleurs pour des valeurs petites de la longitude et grandes de la latitude que ces variables interagissent ensemble comme le montre le coin bleu pâle sur le graphique ci-dessus.

L'avantage de la forêt aléatoire est que l'utilisation d'un nombre élevé d'arbres permet de réduire la variance des prévisions tout en gardant un biais faible. De plus, elle permet de décorréler les arbres, ce qui constitue une amélioration par rapport au *bagging*. Ainsi, la forêt aléatoire arrive à prédire une excellente prévision pour la variable réponse. Cependant, d'un point de vue technique, ces arbres sont lourds et sont nombreux dans la méthode. Le calcul de la forêt aléatoire, malgré le fait qu'il nécessite peu de réglages en comparaison aux autres modèles, est très long. Ce problème de calcul est amplifié lorsque la base de données d'entraînement est grande comme c'est le cas pour ce problème.

Boosting de gradient stochastique

Enchaînons avec l'interprétation du modèle de boosting de gradient stochastique. Ce type de modèle est reconnu comme étant difficilement interprétable intuitivement, mais divers outils permettent d'ouvrir la boîte noire du modèle et d'y voir plus clair. Nous utiliserons les fonctions intégrées au paquetage **gbm** pour interpréter le modèle.

Tout d'abord, nous pouvons déterminer l'importance des différentes variables dans le modèle selon le critère de diminution moyenne de l'EQM causée par chaque variable dans les arbres.

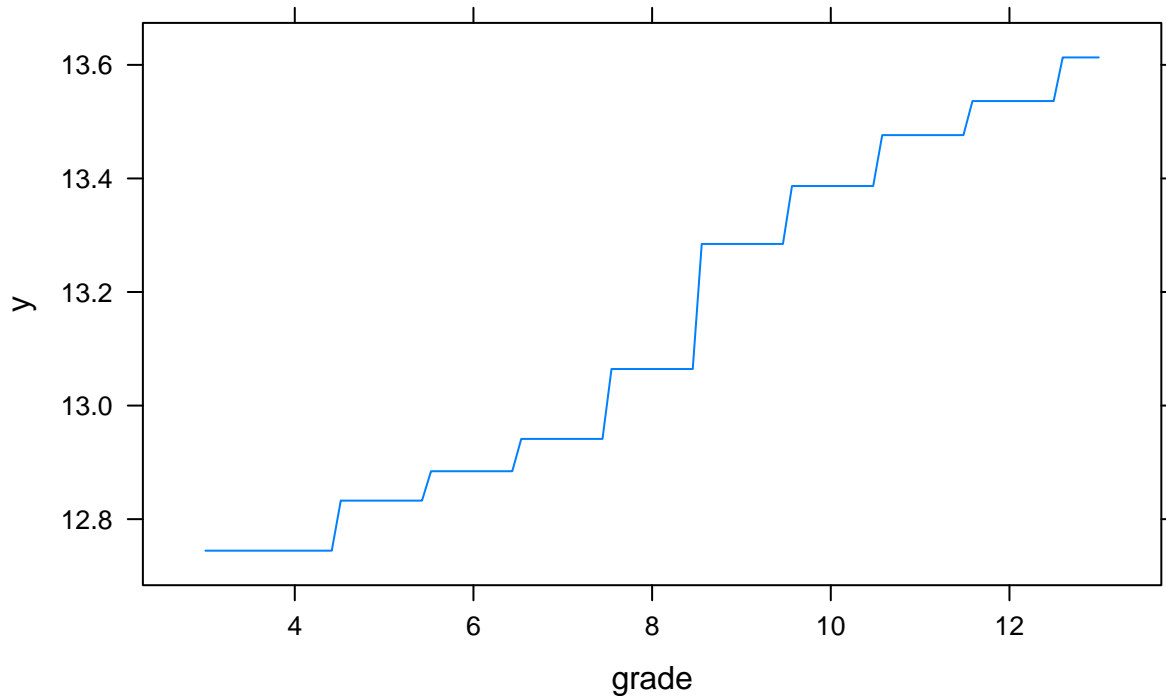


Nous observons que les variables les plus utiles dans le modèle de boosting sont *grade*, *lat*, *sqft_above*, *sqft_living15* et *long*. De plus, ces cinq variables les plus importantes sont les mêmes que celles du modèle de forêt aléatoire selon le même critère.

Une bonne manière d'examiner plus en détail l'impact de chaque variable dans le modèle est de tracer des graphiques de dépendance partielle (PDP). Nous allons présenter les PDP des trois variables les plus importantes du modèle.

Commençons avec le PDP de la variable *grade*, soit l'indice de qualité de la construction et de la conception des maisons.

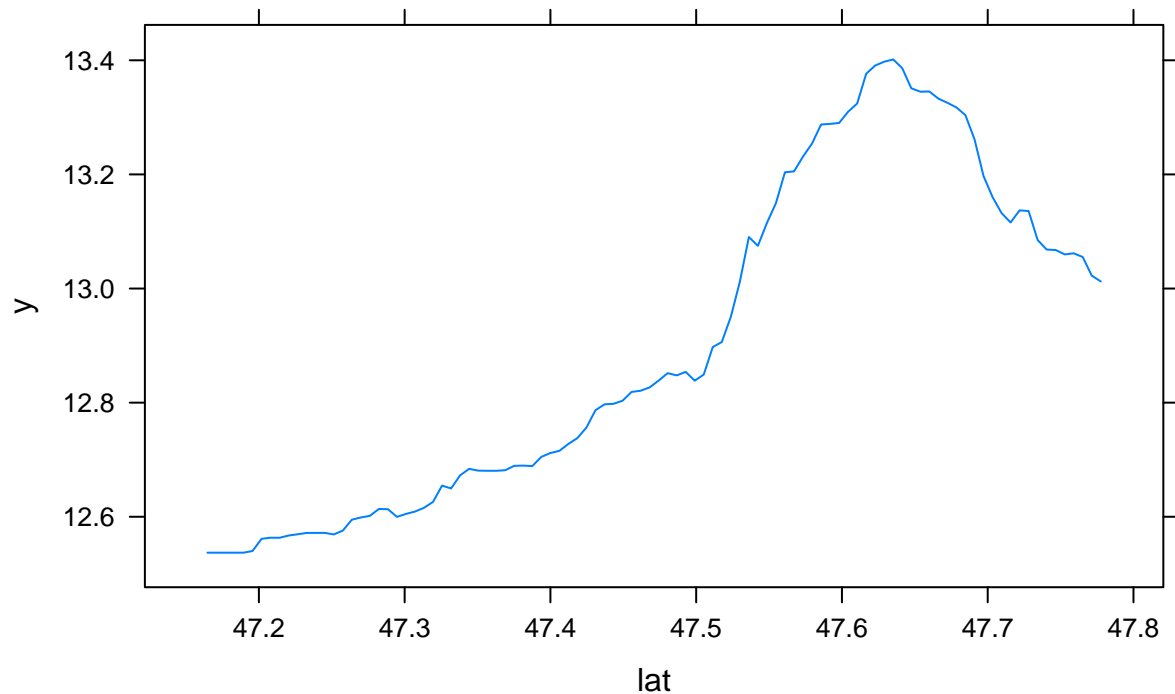
Graphique X : graphique de dépendance partielle de la variable grade



L'effet marginal de la variable *grade* est très semblable à celui observé plus tôt avec le modèle de forêt aléatoire : le logarithme du prix des maisons prédit est une fonction monotone croissante en fonction de la qualité de construction des maisons. Encore une fois, il est logique qu'une maison bien construite et conçue vaille plus cher qu'une autre maison moins bien construite, *ceteris paribus*. La différence entre les logarithmes des prix moyens des maisons les mieux construites et les moins bien construites est d'environ 0,7. Si on quitte l'échelle logarithmique, cela correspond à une augmentation d'environ 101,38 % du prix moyen entre les maisons les moins bien construites et les mieux construites. Autrement dit, on peut s'attendre en moyenne à ce que le prix d'une maison extrêmement bien construite soit environ le double de celui d'une maison extrêmement mal construite. On voit donc que la variable *grade* a un caractère très important sur le prix des maisons, en plus de suivre une relation proportionnelle bien définie avec le prix, ce qui explique la grande force de prédiction de cette variable.

Enchaînons avec le PDP de la variable *lat*, soit la latitude des maisons.

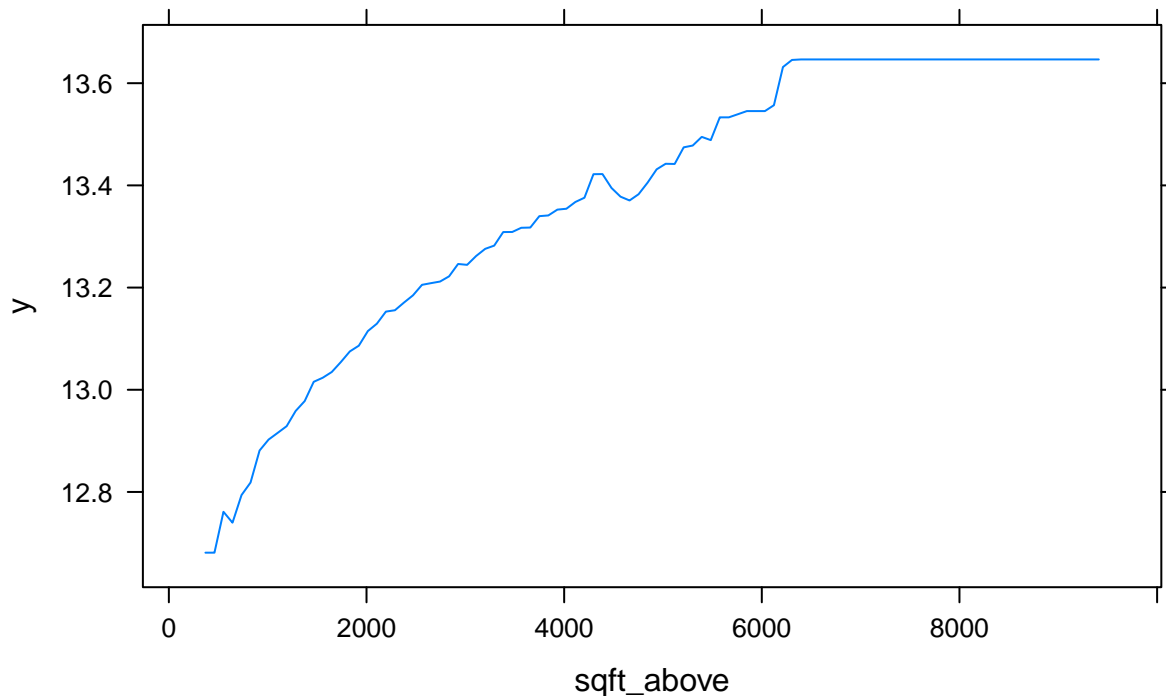
Graphique X : graphique de dépendance partielle de la variable lat



Encore une fois, le PDP est très similaire à celui obtenu en utilisant le modèle de forêt aléatoire. Le PDP obtenu avec le modèle de boosting de gradient stochastique semble cependant osciller plus, donc il a plus de variance et est plus ajusté aux données utilisées. Comme précédemment, on voit que le logarithme moyen du prix prédit est plus faible dans les zones de latitude faible (zone rurale au sud du comté), puis monte beaucoup à l'approche de la zone urbaine de Seattle pour enfin redescendre lorsqu'on atteint une nouvelle zone moins urbaine au nord du comté.

Terminons avec le PDP de la variable *sqft_above*, soit la superficie habitable au-dessus du niveau du sol des maisons.

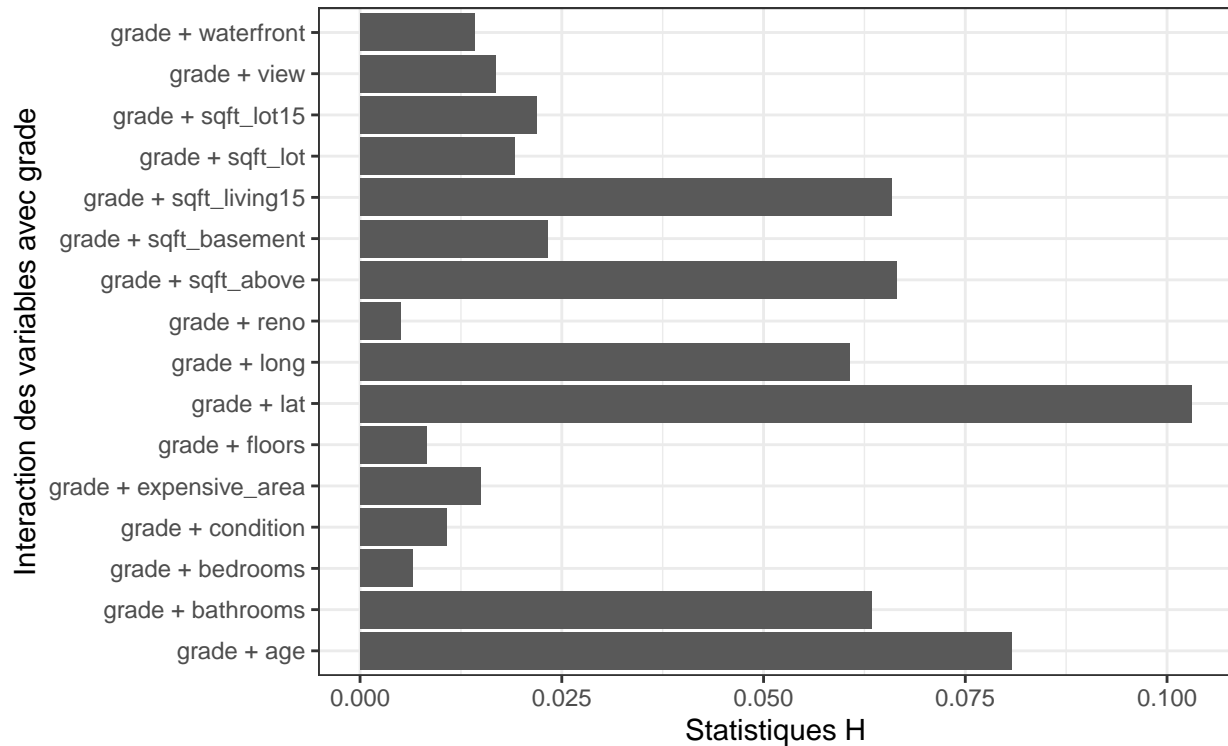
Graphique X : graphique de dépendance partielle de la variable `sqft_above`



Cette variable n'avait pas été examinée en détail lors de l'interprétation du modèle de forêt aléatoire. On observe que le logarithme moyen du prix prédit est proportionnel à `sqft_above` : plus la superficie habitable de la maison augmente, plus son prix prédit augmentera, toutes choses étant égales par ailleurs. Cette relation est logique, puisque les maisons de grande superficie sont intuitivement plus dispendieuses que les petites maisons. On voit cependant une baisse marquée du logarithme du prix de la maison autour de 5000 pieds carrés de superficie qui semble contredire la tendance observée : cette baisse est probablement causée par un surajustement du modèle aux données d'entraînement. Nous croyons que si plus de données étaient disponibles et/ou que le problème de surajustement était réglé, la relation observée serait monotone.

Cependant, les PDP ne permettent pas de visualiser les éventuelles interactions entre les variables. Une manière de quantifier ces interactions est de déterminer les statistiques H de Friedman : plus ces dernières sont grandes, plus l'interaction est forte. Nous allons examiner les statistiques H entre la variable `grade`, soit la variable la plus importante du modèle, et toutes les autres variables :

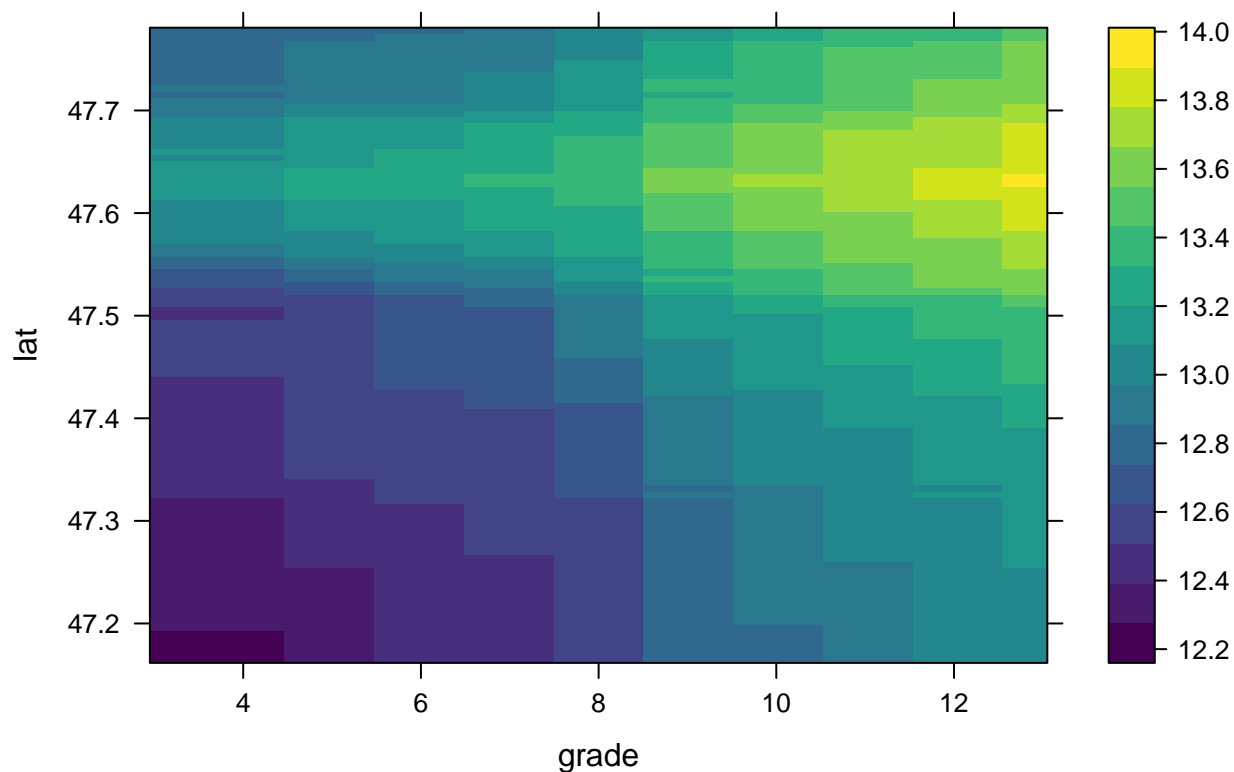
Graphique X : graphique des statistiques H selon la variable *grade*



Nous remarquons qu'une seule interaction semble très forte (statistique H plus élevée que 0,1). Il y a également quelques interactions moyennes (statistique H entre 0,05 et 0,1), et nous allons considérer les autres interactions comme assez faibles.

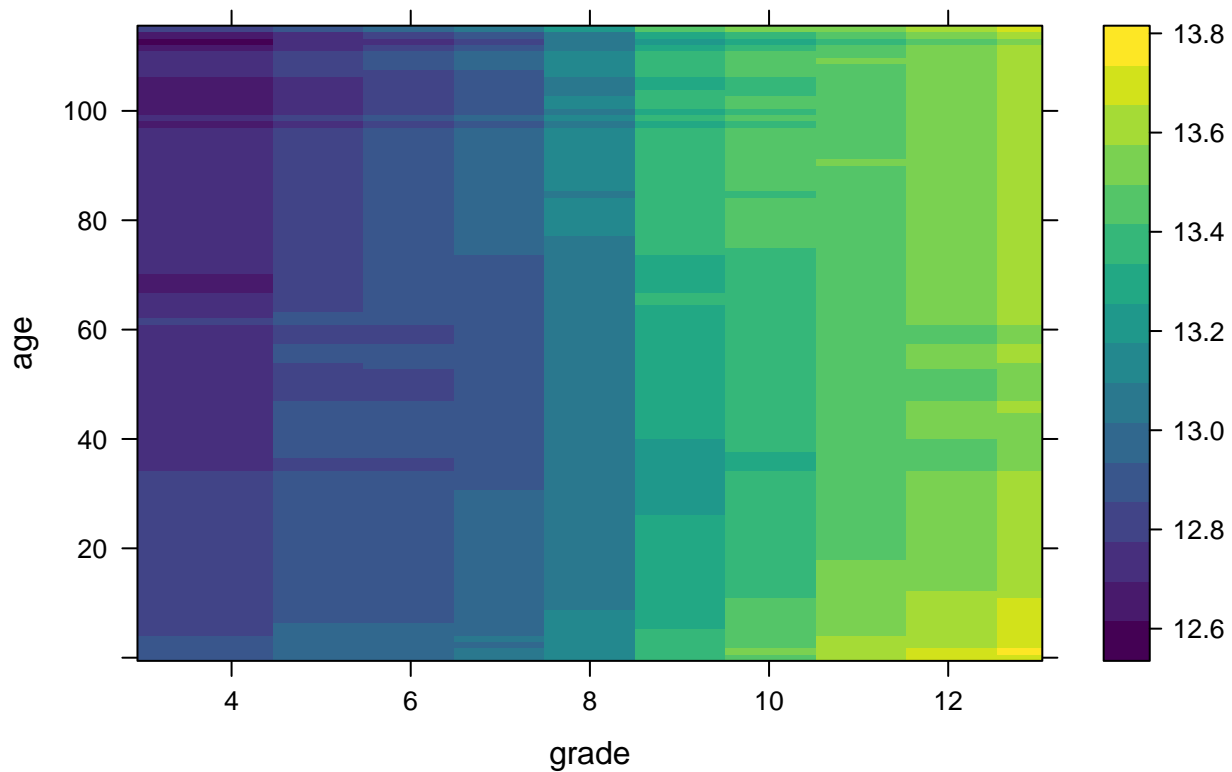
Les deux plus fortes interactions observées sont celles entre la variable *grade* et les variables *lat* et *age*. Nous pouvons donc tracer les PDP bivariés de ces combinaisons de variables afin d'examiner plus en détail ces interactions.

Commençons par le PDP bivarié des variables *grade* et *lat*.



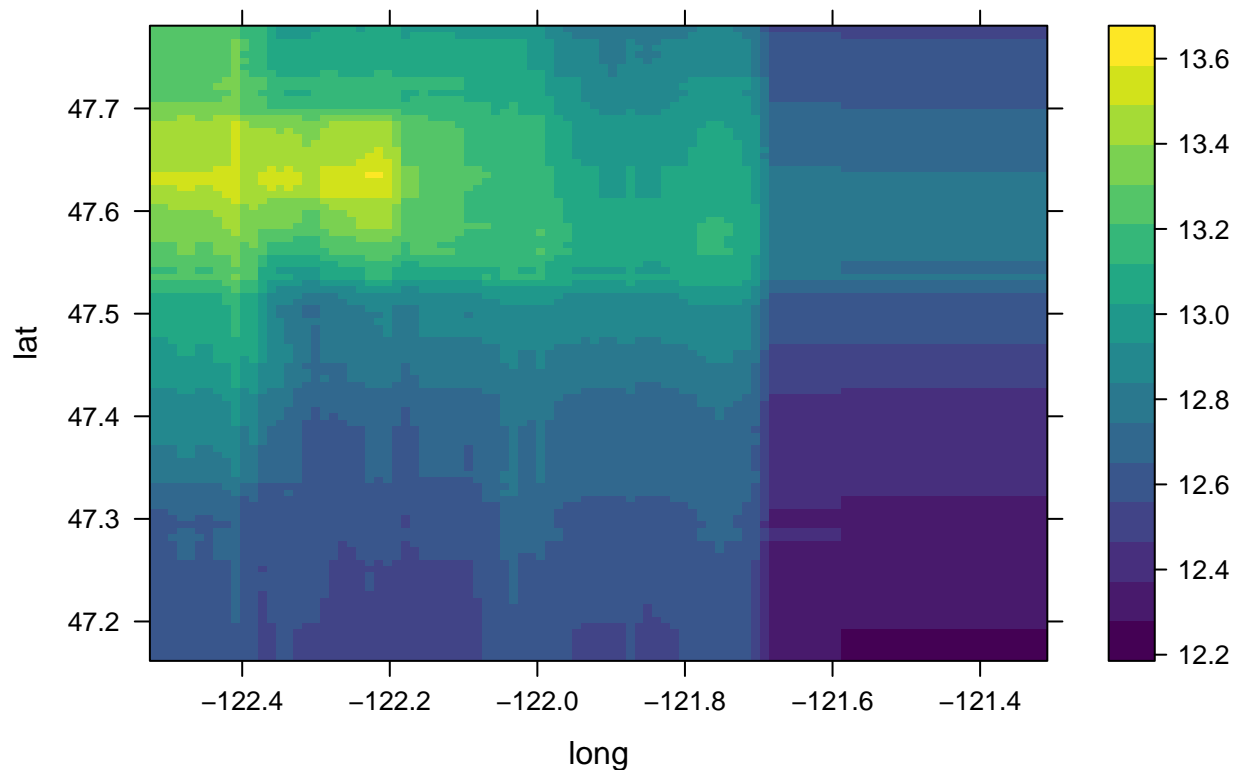
Il semble en effet y avoir une certaine interaction entre ces variables : la variation du logarithme du prix prédit avec la latitude semble plus prononcée pour les mauvaises qualités de construction que pour les bonnes. Cet effet semble logique, puisque qu'une maison très mal construite pourrait être extrêmement plus chère si elle est située en plein centre-ville que si elle est au milieu de la campagne, en raison de sa position prisée et de la valeur de son terrain. Des gens fortunés seraient prêts à payer très cher pour acquérir cette maison de mauvaise qualité et en construire une nouvelle sur le même terrain. En comparaison, une maison extrêmement bien construite vaudra aussi beaucoup plus cher si elle est bien située, mais intuitivement, cet écart serait moindre que pour une maison de basse qualité. On constate également avec le PDP bivarié que les maisons aux prix prédits les plus élevés sont celles de bonne qualité de construction et situées à la latitude du centre-ville de Seattle. En effet, ces maisons peuvent atteindre un prix prédit de pas moins de 1,2 M \$, ce qui est logique.

Enchaînons avec le PDP bivarié des variables *grade* et *age*.



L'interaction entre ces deux variables n'est pas extrêmement prononcée. Nous pouvons cependant constater que pour une qualité de construction donnée, la variation du logarithme du prix prédit avec l'âge de la maison ne suit pas exactement la même tendance que pour une autre qualité de construction. En particulier, le prix prédit des maisons de qualité de construction moyenne semble varier moins intensément avec l'âge que pour les maisons de qualité mauvaise ou bonne. On constate également avec le PDP bivarié que les maisons aux prix prédits les plus élevés sont celles de bonne qualité de construction et peu âgées, ce qui semble logique.

Enfin, par curiosité, examinons le PDP bivarié des variables *lat* et *long*. Nous savons que les données spatiales ont eu un fort impact prédictif dans notre modèle. De plus, nous avons déjà concentré une partie de notre travail à examiner cet effet prédictif (création d'une *heatmap* dans l'analyse exploratoire et dans l'interprétation du modèle de forêt aléatoire), mais nous ne l'avons pas encore fait pour notre modèle le plus puissant, le *GBM*. Pour ces deux raisons, nous croyons donc qu'il est intéressant de jeter un oeil à ce PDP bivarié pour examiner plus en détail l'effet des données spatiales dans notre *GBM*.



Nous observons de nouveau une *heatmap* du logarithme des prix des maisons, mais elle est mieux définie que celle obtenue avec le modèle de forêt aléatoire. En effet, les variations de prix prédit sont très graduelles et lisses par rapport à cette dernière. Nous pouvons voir très facilement la zone urbaine de Seattle et ses prix plus élevés en haut à gauche du PDP. Nous pouvons également constater une forte interaction entre les variables *lat* et *long* : pour les latitudes faibles, le logarithme du prix prédit ne varie pas beaucoup avec la longitude, alors qu'il varie beaucoup avec la longitude pour les latitudes élevées. La statistique H entre ces variables *lat* et *long* est en effet de 0,234, ce qui dénote une forte interaction entre les deux variables et confirme ce constat.

Au final, nous avons vu que le modèle de boosting de gradient stochastique est, de loin, le meilleur modèle prédictif dans notre cas. Son EQM sur les données de test est largement inférieure que pour les autres modèles, ce qui témoigne de son efficacité. Le modèle possède donc l'avantage d'être celui qui possède le plus grand pouvoir prédictif pour notre problème.

Ce modèle n'est pourtant pas sans désavantages :

- Son temps de calcul est très long : l'optimisation du modèle a été difficile en raison des ressources de calcul disponibles limitées. De plus, seuls les deux hyperparamètres du modèle jugés les plus importants ont été optimisés, et ce pour la même raison.
- Il est difficile d'interprétation : il est difficile d'utiliser des procédés statistiques classiques pour interpréter le modèle, et des méthodes de calcul intensif doivent être utilisées.
- Nous n'avons pas obtenu d'intervalles de confiance pour les prédictions avec le présent modèle, ce qui est un fort désavantage dans une situation de gestion des risques.

Conclusion

Pour conclure, le meilleur modèle pour résoudre le problème est **le modèle de boosting de gradient stochastique**. En effet, il s'agit du modèle possédant la meilleure puissance prédictive parmi les sept modèles testés. Des améliorations à ce modèle sont cependant toujours possibles : si de plus grandes ressources de calcul étaient disponibles, un plus petit paramètre de régularisation λ pourrait être choisi, ce qui permettrait d'obtenir un modèle encore plus performant. Il serait également possible d'optimiser tous les hyperparamètres du modèle, ce qui résulterait sans doute en un meilleur modèle final.

Nous sommes cependant d'avis qu'avec les sept modèles étudiés, il a été possible de résoudre la problématique actuarielle, c'est-à-dire de développer un modèle performant pouvant prédire la valeur des maisons dans la région de Seattle. Ainsi, ce modèle pourra aider les assureurs de la région à avoir un meilleur portrait de la situation afin de mieux gérer leurs risques. Cependant, une des limitations du modèle est qu'il prédit le prix des maisons sur l'échelle logarithmique. Ce choix d'échelle avait pour but de faciliter la modélisation, mais cause problème lors de l'interprétation. Une piste d'amélioration serait donc de trouver une façon de ramener les prédictions à l'échelle monétaire. Pour ce faire, il faudrait estimer un paramètre de volatilité. Cette estimation, pour le modèle de boosting de gradient stochastique, dépasse les cadres du cours et n'a ainsi pas été tentée. Une seconde limitation est que notre modèle prédit la valeur des maisons sans tenir compte de facteurs importants pouvant affectés le prix des maisons dans le temps, dont l'inflation. Il serait donc intéressant de pouvoir tenir compte de l'inflation dans notre modèle afin de pouvoir l'utiliser sur des données datant de quelques années.

En somme, cette modélisation a permis de dresser un très bon portrait du marché immobilier de King County et l'effet des différentes caractéristiques d'une maison sur son prix de vente. Elle a, entre autres, permis, à l'aide d'une carte, de bien cibler les endroits plus dispendieux. Il serait intéressant d'utiliser notre modèle sur une autre région du monde, par exemple le Québec, afin de voir si le modèle s'adapte bien aux caractéristiques d'autres régions.

Bibliographie

1. Kaggle, harlfoxen (2017). House sales in King County, USA. Récupéré le 27 février 2020 de <https://www.kaggle.com/harlfoxem/housesalesprediction>.
2. Max Kuhn (2020). caret : Classification and Regression Training. R package version 6.0-85. <https://CRAN.R-project.org/package=caret>
3. Terry Therneau and Beth Atkinson (2019). rpart : Recursive Partitioning and Regression Trees. R package version 4.1-15. <https://CRAN.R-project.org/package=rpart>
4. Stephen Milborrow (2019). rpart.plot : Plot ‘rpart’ Models : An Enhanced Version of ‘plot.rpart’. R package version 3.0.8. <https://CRAN.R-project.org/package=rpart.plot>
5. A. Liaw and M. Wiener (2002). Classification and Regression by randomForest. R News 2(3), 18–22.
6. Brandon Greenwell, Bradley Boehmke, Jay Cunningham and GBM Developers (2019). gbm : Generalized Boosted Regression Models. R package version 2.1.5. <https://CRAN.R-project.org/package=gbm>
7. Jerome Friedman, Trevor Hastie, Robert Tibshirani (2010). Regularization Paths for Generalized Linear Models via Coordinate Descent. Journal of Statistical Software, 33(1), 1-22. URL <http://www.jstatsoft.org/v33/i01/>.
8. Alina Beygelzimer, Sham Kakadet, John Langford, Sunil Arya, David Mount and Shengqiao Li (2019). FNN : Fast Nearest Neighbor Search Algorithms and Applications. R package version 1.1.3. <https://CRAN.R-project.org/package=FNN>
9. Molnar C, Bischl B, Casalicchio G (2018). iml : An R package for Interpretable Machine Learning. R package version 0.10.0. <https://CRAN.R-project.org/package=iml>