Équipe 2

Travail fait par

Matis Brassard-Verrier (111 182 740)
Alyson Marquis (111 183 605)
Alexis Picard (111 182 200)
Samuel Provencher (111 181 794)

Apprentissage statistique en actuariat

ACT-3114

Rapport 2

Présenté à

Marie-Pier Côté

École d'actuariat
Université Laval
22 avril 2020

Table des matières

Introduction

Dans le cadre du travail, nous allons tenter de modéliser le prix de vente des maisons dans la région de Seattle (King County, USA) en utilisant de nombreuses caractéristiques ayant une incidence sur la valeur d'une maison. La variable réponse à prédire, soit le prix de vente d'une maison, est une valeur positive évaluée en dollars américains. La modélisation de cette variable pourrait être utile pour différentes raisons dans un contexte actuariel. Comme la somme assurée d'une maison a un lien très fortement proportionnel à son prix de vente, une compagnie d'assurance pourrait être intéressée de modéliser le prix de vente de maisons dans des nouveaux développements immobiliers afin de tenter de prédire les futures soumissions d'assurance habitation et d'offrir des offres personnalisées aux acheteurs de ces nouvelles maisons. Dans un autre contexte, au niveau de la gestion des risques, certains assureurs ont un portefeuille de prêts hypothécaires ou utilisent des produits dérivés sur prêts hypothécaires pour se couvrir du risque (*hedging*). Ainsi, il pourrait être intéressant d'avoir une estimation des montants de prêts hypothécaires dans une région donnée en se basant sur le prix de vente des maisons afin de mieux gérer le risque de la compagnie. La pertinence de trouver cette variable qu'est le prix de vente des maisons devient alors fort intéressante.

Le jeu de données utilisé sera le suivant : kc_house_sales (House sales in King County, USA). Dans les prochaines sections, sept modèles seront étudiés, dont deux qui le seront plus en profondeur. Pour ce faire, 80 % des données seront utilisées pour effectuer l'entraînement des modèles et 20 % seront réservées pour tester ainsi que comparer les modèles entre eux.

Modèle de base

Un bon modèle de base a été choisi en utilisant une technique étudiée dans le cours ACT-2003 Modèles linéaires en actuariat, soit la régression linéaire multiple. Ce type de modèle a été choisi en raison de sa simplicité et parce qu'il s'adapte bien au jeu de données. En effet, la variable réponse *price* est monétaire et possède une distribution asymétrique. Il a été vu, qu'en présence de ce type de variable réponse, une régression linéaire multiple en appliquant une transformation logarithmique sur la variable réponse était appropriée. Tel que mentionné dans la première partie de ce travail, la transformation logarithmique permet de s'approcher de la distribution d'une loi normale, ce qui rend la variable réponse plus facile à modéliser. Pour construire le modèle, seulement l'échantillon d'entrainement a été utilisé. De plus, le modèle utilise toutes les 17 variables explicatives. Cependant, aucune interaction entre les variables explicatives n'a été considérée afin de garder le modèle simple et facilement intrprétable. Certaines variables catégorielles à plusieurs niveaux, dont l'importance des interactions étaient négligeables augmentaient le temps de calculs et rendaient le modèle plus difficilement interprétable. Ainsi, dans l'idée d'avoir un modèle de base simple, il a été décidé de ne pas considérer les interactions dans ce modèle. En outre, une sélection de variable formelle n'a pas été effectuée contrairement à ce qui est habituellement fait lorsqu'on veut raffiner un modèle linéaire multiple.

Ajustement des modèles

Modèle linéaire généralisé avec une régularisation Lasso

Dans le cadre du travail, il a été choisi d'effectuer un modèle linéaire généralisé avec une régularisation de type Lasso. Notre choix s'est arrêté sur ce type de régularisation, puisque la régularisation Lasso permet d'effectuer la sélection de variables. Pour se faire, il suffit de minimiser l'équation de score suivante :

$$S^{Lasso} = \sum_{i=1}^{p}(Y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ij})^2 + \lambda \sum_{j=1}^{p}|\beta_j|,$$

où p est le nombre de paramètres du modèle et λ est le paramètre de régularisation. La minimisation de cette équation mènera à des coefficients β exactement égal à zéro, sélectionnant ainsi les variables du modèle. Nous avons utilisé la méthode implantée dans le paquetage **glmnet** pour choisir le paramètre λ ainsi que pour bâtir le modèle.

Afin de modéliser le prix de vente des maisons à King County, le modèle linéaire généralisé avec une régularisation Lasso a été construit à l'aide de l'échantillon d'entraînement. Le paramètre de régularisation a été choisi à l'aide d'une validation croisée à six plis. Cette validation croisée est intégrée dans la fonction `cv.glmnet`. Ainsi, la valeur optimale de ce paramètre est de $\lambda = 0.0000791264$. Le modèle retenu est composé de sept variables explicatives. Le modèle est aussi constitué de 22 termes d'interaction.

Modèle des *k* plus proches voisins

Un modèle qui a été testé est celui des k plus proches voisins. Étant donné que nous avons un problème de régression, la fonction `knn.reg` du paquetage **FNN** a été utilisée pour construire ce modèle.

Le modèle des k plus proches voisins est simpliste. Afin de prédire une observation dont les valeurs des variables explicatives sont comprises dans le vecteur $\mathbf{x}_0$, il faut regarder l'ensemble des k plus proche voisins de $\mathbf{x}_0$, c'est-à-dire les observations qui minimisent la distance Euclidienne. Puis, la prévision du point $\mathbf{x}_0$ est la moyenne des variables réponses des observations comprises dans l'ensemble des k plus proches voisins.

Il faut d'abord déterminer la valeur optimale de k, soit le nombre de voisins à considérer. Pour se faire, une validation croisée à 10 plis a été utlisée. La fonction `train` du paquetage **caret** a été utilisée pour faire cette validation croisée. Étant donnée que le modèle des k plus proches voisins est fondé sur la distance Euclidienne, les données ont été standardisées avant de procéder à la validation croisée. La métrique choisie pour sélectionner la valeur de k est l'erreur quadratique moyenne (`metric="RMSE"`). Ainsi, la valeur de k qui minisait l'erreur quadratique moyenne est $k = 9$.

Arbre de décision

Un modèle qui a été décidé de tester est un arbre de décision, mais plus précisement dans le cas présent, des arbres de régression. Pour ce faire, l'algorithme *classification and regression tree* (CART) implanté dans le paquetage **rpart** a été utilisé.

Il a tout d'abord été décidé d'optimiser l'hyperparamètre `minbucket`, soit le nombre minimal d'observations dans une feuille de l'arbre. Une méthode manuelle a du être utilisée parce qu'on ne peut pas optimiser cet hyperparamètre à l'aide des méthodes habituelles. Plusieurs valeurs ont été testées entre `minbucket` $= 1$ et `minbucket` $= 200$ afin de se donner une idée. Par la suite, la recherche a été raffinée et la valeur qui a ainsi été trouvée est de `minbucket` $= 9$.

Avec cet hyperparamètre défini, un arbre de régression a été construit en utilisant toutes les variables explicatives ainsi qu'un paramètre de complexité nul ($cp = 0$). L'abre de régression est obtenu en spécifiant `method="anova"` et permet de trouver l'arbre minimisant l'erreur quadratique moyenne. Seulement l'échantillon d'entrainement a été utilisé pour entrainer ce modèle, l'échantillon test étant réservé pour analyser les performances prédictives du modèle. Afin d'optimiser le paramètre de complexité, une validation croisée en 10 plis a été effectuée. Cette validation croisée est implantée de base dans la fonction `rpart`, donc

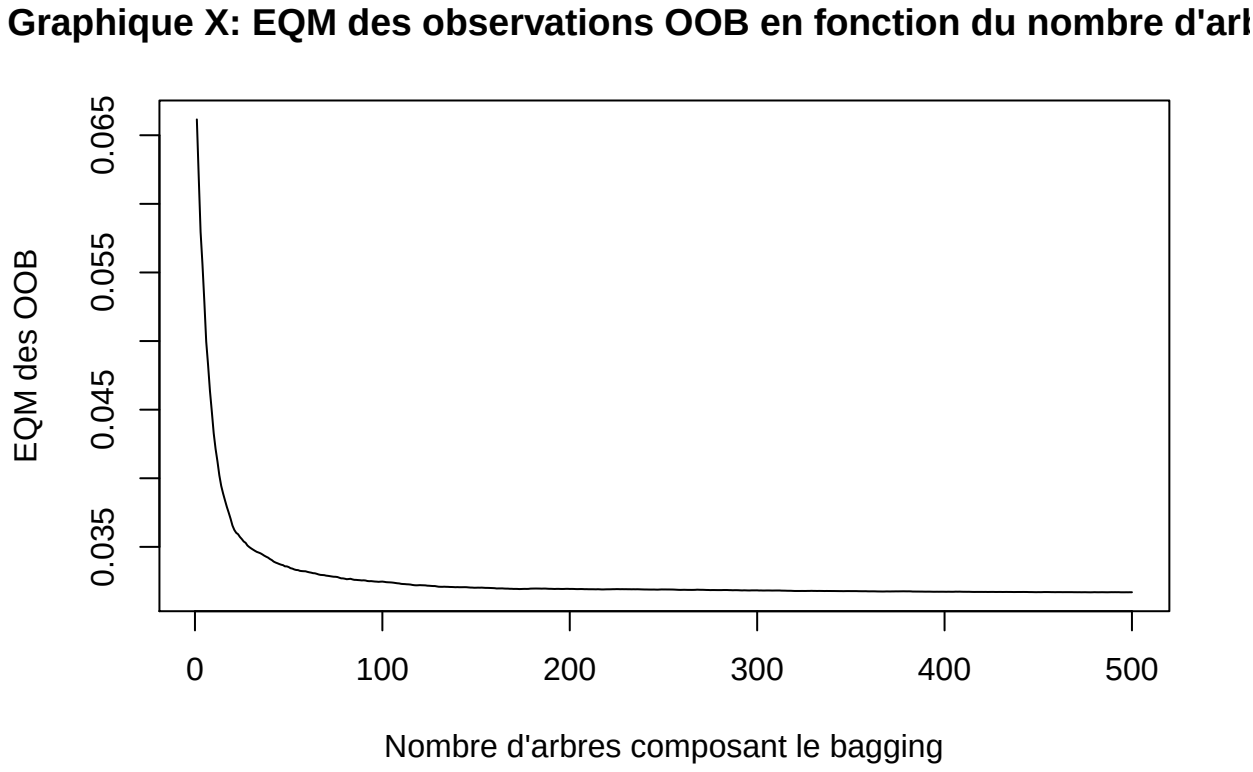
aucune programmation supplémentaire n'a été nécéssaire. Ainsi, le paramètre de complexité optimal est de 0.0000353939. Ce choix optimal a été utilisé pour élaguer l'arbre de régression et ainsi réduire la variance de la prédiction. L'élaguage représente un bon compromis entre le biais et la variance de la prédiction.

Il aurait été intéressant de représenter graphiquement ce modèle puisqu'il s'agit d'une façon de bien comprendre ce type de modèle. Cependant, il n'a pas été possible de présenter ce modèle sous forme de graphique. En effet, malgré le fait que l'arbre a été élagué, il était trop complexe pour être agréable à regarder pour l'oeil. Ceci est du au fait que le modèle a été entrainé avec 17276 observations, ce qui est un nombre assez important.

Ensemble d'arbres de décisions aggrégées par *bagging*

Un autre modèle qui a été testé est celui du bagging avec des arbres de régression. Étant donné le type de la variable réponse recherchée, soit le prix d'une maison, cette valeur est numérique continue et donc les arbres de régression sont ceux compatibles pour prédir cette dite valeur. Pour ce faire, l'algorithme *classification and regression with Random Forest* (randomForest) implanté dans le paquetage **randomForest** a été utilisé.

Un échantillon bootstrap avec remise de la même taille que l'échantillon d'entrainement a été sélectionné par l'algorithme `randomForest` (`sampsize= nrow(donnees.train)`). Le nombre de variables échantillonnées aléatoirement a donc été déterminé à 17 (`mtry=17`) étant donné que notre base de données d'entrainement comportait 18 variables avec la variable réponse incluse. Le seul paramètre qui était à déterminer était celui du nombre d'arbres de régression créés avec le bagging. Pour ce faire, un graphique de l'erreur quadratique moyenne (EQM) des observations OOB en fonction du nombre d'arbres composant le bagging a été tracé afin de déterminer quand l'EQM des OOB se stabilisait. Sur le graphique suivant, on voit d'ailleurs que 150 arbres étaient suffisants et c'est donc le nombre qui a été retenu (`ntree=150`).



À noter qu'aucun élagage n'a été fait sur les arbres de régression créé par le bagging et donc ceux-ci avaient un paramètre de complexité `cp=0`.

Forêt aléatoire

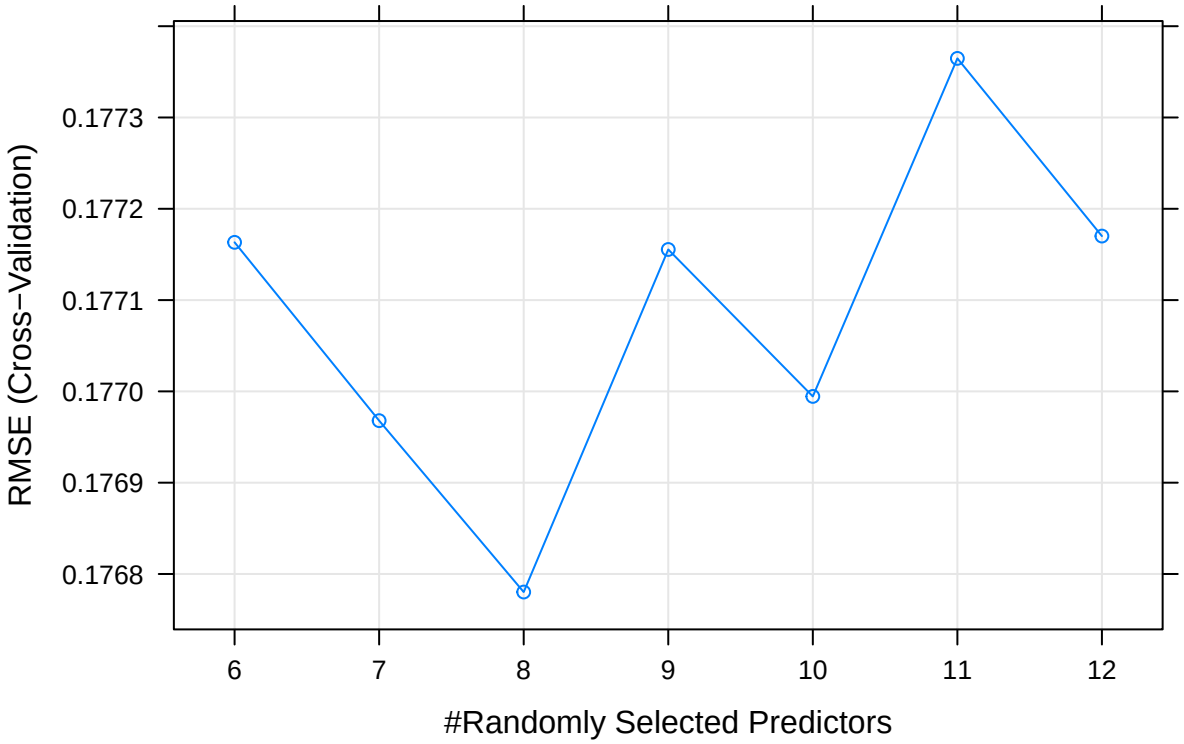
Un autre modèle qui a été testé est celui de la forêt aléatoire. Pour ce faire, l'algorithme *classification and regression with Random Forest* (randomForest) implanté dans le paquetage **randomForest** a été utilisé.

Le bagging et la forêt aléatoire sont très similaires à la différence que la forêt aléatoire permet de décorreler les arbres à l'aide de deux manières.

Tout d'abord, on choisit un échantillon bootstrap plus petit que le bagging, c'est pourquoi dans notre cas un `sampsize= 0.75*nrow(donnees.train)` a été choisi, ce qui équivaut à utiliser 75% des données de l'échantillon d'entrainement.

Puis, à chaque itération dans la construction de l'arbre, on choisit aléatoirement m prédicteurs qui seront les candidats pour la séparation (`mtry`). Ce choix de m optimal a été fait à l'aide d'une validation croisée à 5 plis. La fonction `train` du paquetage **caret** a été utilisée pour faire cette validation croisée. La métrique choisie pour sélectionner la valeur de m est l'erreur quadratique moyenne (`metric="RMSE"`). Ainsi, la valeur de m qui minimisait l'erreur quadratique moyenne est $m = 8$, comme le montre le graphique suivant :

Graphique X: EQM des observations OOB en fonction du mtry



Pour ce qui est des autres paramètres, les mêmes valeurs ont été gardées pour le bagging et la forêt aléatoire.

Modèle de boosting de gradient stochastique

Enfin, le dernier modèle ajusté aux données en est un de boosting de gradient stochastique. Nous allons encore une fois supposer que la variable réponse suit une distribution gaussienne, ce qui nous permet d'utiliser l'erreur quadratique moyenne (EQM) comme fonction de perte pour construire le modèle.

En quelques mots, le modèle de boosting de gradient stochastique est une procédure itérative : à chaque itération, un arbre de régression est ajusté aux gradients négatifs de la fonction de perte de l'itération précédente. La prévision de chaque itération est prise en compte dans le modèle proportionnellement à

un paramètre λ appelé paramètre de régularisation. Plus ce λ est petit, plus le modèle apprend petit à petit en n'accordant pas trop d'importance à chaque prévision et plus la performance finale du modèle sera bonne, mais il faudra cependant plus d'itérations pour obtenir un modèle final optimal. Il faut également faire attention de ne pas construire un modèle avec trop d'arbres, car les modèles de boosting de gradient stochastique ont un risque de surajustement.

Nous avons choisi un taux d'apprentissage λ de 1%. Ce taux nous a permis d'obtenir un compromis efficace entre temps de calcul et précision du modèle.

Nous avons utilisé les fonctions intégrées au paquetage **gbm** pour procéder à l'optimisation et à la construction du modèle. En utilisant une validation croisée à cinq ensembles, nous avons optimisé les paramètres d (la profondeur maximale de l'arbre ajusté à chaque itération) et T (le nombre d'itérations du modèle). Des valeurs de trois, cinq et sept ont été testées pour la profondeur des arbres d.

Pour ce qui est des autres hyperparamètres, soit le pourcentage de sous-échantillonnage δ et le nombre minimal d'observations dans chaque noeud pour les arbres, nous avons gardé leurs valeurs par défaut, soit respectivement 50% de sous-échantillonnage et dix observations. En effet, nous avons déterminé qu'optimiser ces hyperparamètres nécessiterait un temps de calcul excessif pour les avantages qu'il serait possible d'en retirer.

Les résultats sont les suivants :

— Graphiques d=3,5,7

Nous obtenons que le nombre d'itérations optimal pour les modèles avec des arbres de profondeur trois, cinq et sept est respectivement de xx, xx et xx itérations. Pour déterminer lequel de ces modèles est le meilleur, nous allons les comparer selon le critère de l'erreur quadratique minimale de validation croisée à cinq ensembles.

— Tableau d=3,5,7

Selon ce critère, le meilleur modèle est donc celui obtenu avec $d = X$ et XXX itérations. C'est avec ce modèle que nous procéderons pour effectuer les prédictions sur l'échantillon de test.

Comparaison des modèles

La métrique utilisée pour comparer la puissance prédictive des différents modèles est l'erreur quadratique moyenne (EQM). Cette métrique a été choisie puisque le type de modélisation est la régression. Les autres métriques vues dans le cadre du cours ACT-3114 Apprentissage statistique en actuariat sont utilisées pour les problèmes de classification ou lorsque la distribution de la variable réponse est poisson. Ainsi, l'EQM est la métrique la plus appropriée pour ce problème. Pour chacun des modèles, l'EQM a été calculée avec les données de test afin d'éviter d'utiliser les mêmes données qui ont été utilisées pour entrainer les modèles.

Table 1: L'EQM des sept modèles testés

Modèles	EQM
Modèle de base	0.05300
Modèle Lasso	0.05245
K plus proches voisins	0.04570
Arbre de décision	0.04777
Bagging	0.03350
Forêt aléatoire	0.03253
Gradient boosting (GBM)	3.00000

Table 2: L'EQM des sept modèles testés

Modèles	EQM
Base	0.053000401

Les valeurs de l'EQM pour les sept modèles testés sont présentées dans le Tableau 1. Les deux meilleurs modèles selon cette métrique sont le modèle A et le modèle B. En effet, leur EQM est de x et y respectivement.

Faudrait essayer de remplacer Table par Tableau dans les titres (pour francais). Table 2, c'est juste une autre façon de faire un tableau

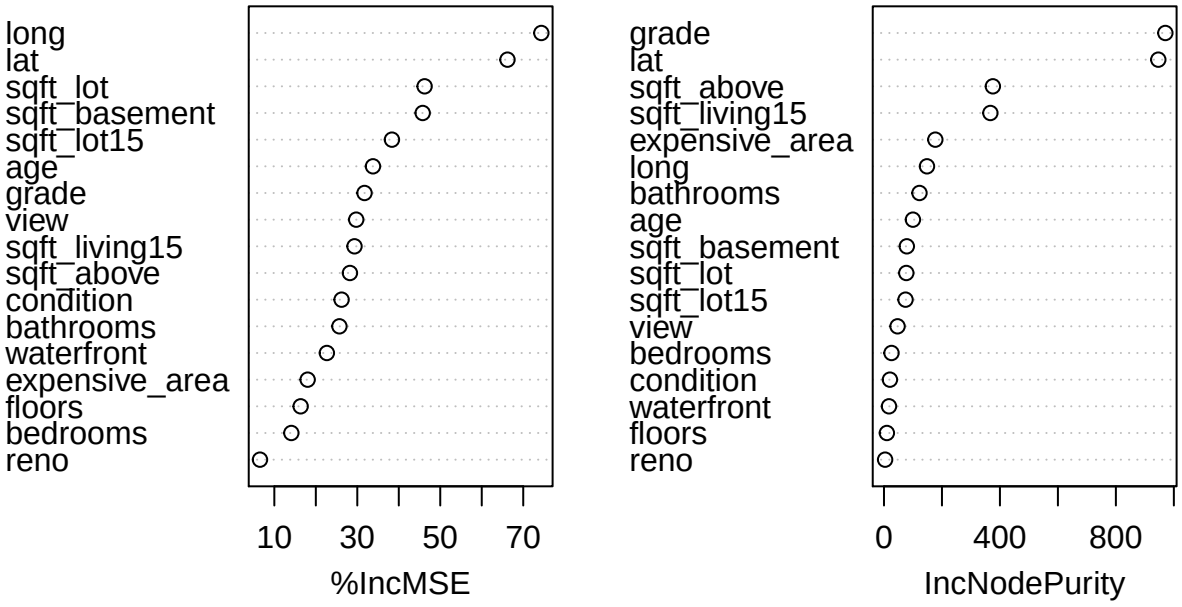
Interprétation des meilleurs modèles

Forêt aléatoire

Notre deuxième meilleur modèle obtenu en termes de prévision est celui de la forêt aléatoire. Bien que ce modèle est difficilement interprétable étant donné le mélange de plusieurs arbres de régression différents afin de déterminer la variable réponse finale, voici ce que le modèle peut nous dire en effectuant une analyse approfondie.

Si l'on affiche l'importance des variables faisant partie de notre jeu de données en fonction de deux mesures différentes, soit la *mean decrease in accuracy* et la *mean decrease in node impurity*, on obtient le graphique ci-dessous :

Graphique X: Importance des variables composant la forêt aléatoire



Si on permute de façon aléatoire les valeurs de la variable à analyser voulue, on calcule de nouvelles prévisions sur nos données et ensuite on compare la nouvelle erreur quadratique moyenne avec celle du jeu de données initial, on obtient la *mean decrease in accuracy*. Pour notre jeu de données, on voit donc que les variables de la *latitude*(lat) et la *longitude*(long) sont celles qui ont le plus d'impact sur nos prévisions du logarithme de prix d'achat de la maison si on applique cette permutation.

Si on calcule la diminution totale dans l'erreur quadratique moyenne due à une séparation sur la variable à analyser voulue, on obtient la *mean decrease in node impurity*. Avec cette mesure, ce n'est pas les mêmes 2 variables qui sont dites importantes pour notre modèle. Non, en fait, la latitude qui figure toujours dans le top 2 des variables les plus importantes, mais la qualité de la construction et de la conception (grade) apparait comme étant celle qui se démarque aussi.

Pour mieux comprendre l'effet marginal de ces trois variables explicatives sur la prévision, on peut regarder leurs graphiques de dépendance partielle :

L'avantage de la forêt aléatoire est que vu l'utilisation d'un nombre élevé d'arbres, en allant chercher les

points points positifs de chaque prévision parmi ceux-ci, la forêt arrive à prédire une bonne prévision pour notre variable réponse. Cependant, d'un point de vue technique, ces arbres sont lourds et sont nombreux dans la méthode. Le calcul de la forêt aléatoire malgré le fait qu'il nécessite peu de réglages en comparaison aux autres modèles, est très long à calculer. Surtout lorsque la base de données d'entrainement est composée de 17276 observations de 18 variables, variable réponse incluse.

Boosting de gradient stochastique

Enchaînons avec l'interprétation du modèle de boosting de gradient stochastique. Ce type de modèle est reconnu comme étant difficilement interprétable intuitivement, mais divers outils permettent d'ouvrir la boîte noire du modèle et d'y voir plus clair. Nous utiliserons les fonctions intégrées au paquetage **iml** pour interpréter le modèle.

Tout d'abord, nous pouvons déterminer l'importance des différentes variables dans le modèle selon le critère de diminution moyenne de l'EQM causée par chaque variable dans les arbres.

— Graphique importance des variables

Nous observons que les valeurs les plus utiles dans le modèle de boosting sont XX, XX, et XX...

Une bonne manière d'examiner l'impact de chaque variable dans le modèle plus en détail est d'utiliser des graphiques de dépendance partielle (PDP). Voilà les PDP des variables les plus importantes du modèle.

— PDP

Nous observons que...

Cependant, les PDP ne permettent pas de visualiser les éventuelles interactions entre les variables. Une manière de quantifier ces interactions est de déterminer les statistiques H de Friedman : plus cette dernière est grande, plus l'interaction est forte. Nous pouvons examiner les statistiques H entre la variable XX et toutes les autres variables :

— Statistique H

Nous voyons une forte interaction entre la variable XX et les variables XXX, XXX... Nous pouvons donc examiner les PDP bivariés de ces variables afin d'examiner plus en détail ces interactions :

— PDP bivariés

Nous observons que...

Conclusion

Bibliographie

1. Kaggle, harlfoxen (2017). House sales in King County, USA. Récupéré le 27 février 2020 de https://www.kaggle.com/harlfoxem/housesalesprediction.

2. Max Kuhn (2020). caret : Classification and Regression Training. R package version 6.0-85. https://CRAN.R-project.org/package=caret

3. Terry Therneau and Beth Atkinson (2019). rpart : Recursive Partitioning and Regression Trees. R package version 4.1-15. https://CRAN.R-project.org/package=rpart

4. Stephen Milborrow (2019). rpart.plot : Plot 'rpart' Models : An Enhanced Version of 'plot.rpart'. R package version 3.0.8. https://CRAN.R-project.org/package=rpart.plot

5. A. Liaw and M. Wiener (2002). Classification and Regression by randomForest. R News 2(3), 18–22.

6. Brandon Greenwell, Bradley Boehmke, Jay Cunningham and GBM Developers (2019). gbm : Generalized Boosted Regression Models. R package version 2.1.5. https://CRAN.R-project.org/package=gbm

7. Jerome Friedman, Trevor Hastie, Robert Tibshirani (2010). Regularization Paths for Generalized Linear Models via Coordinate Descent. Journal of Statistical Software, 33(1), 1-22. URL http://www.jstatsoft.org/v33/i01/.

8. Alina Beygelzimer, Sham Kakadet, John Langford, Sunil Arya, David Mount and Shengqiao Li (2019). FNN : Fast Nearest Neighbor Search Algorithms and Applications. R package version 1.1.3. https://CRAN.R-project.org/package=FNN

9. Molnar C, Bischl B, Casalicchio G (2018). iml : An R package for Interpretable Machine Learning. R package version 0.10.0. https://CRAN.R-project.org/package=iml