Practica Runge Kutta

Samuel Ramírez Gómez
Universidad de los Andes
s.ramirezg23@uniandes.edu.co
Dept. Ingeniería Eléctrica
y Electrónica

***Resumen*—Este documento contiene informe a la práctica número 10 del curso de comutación cientifica, la cual tuvo como propósito el desarrollo del algoritmo generalizado de Runge Kutta, junto con su uso para resolver diferentes sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden. Para esto y con el propósito de aterrizar el algoritmo aplicaciones de la ingenieria electrónica. Se escogieron varios circuitos para modelar y utilizar para el algoritmo Runge Kutta.**

***Palabras clave*—Ecuación, Sistema, ODE, Runge, Kutta, Matriz, Iteración, Paso, Estimador**

I. INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales son un aspecto muy importante en la física para describir comportamientos entre variables que comparten una dependencia diferencial. Estas ecuaciones suelen estar presentes en los sistemas electrónicos de manera repetida. Por ejemplo, en los sistemas de control. El sistema representado en variables de estado o variables de fase, es un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Otro claro ejemplo de estos sistemas de ecuaciones diferenciales son los circuitos que tengan algún componente reactivo o capacitivo. Ya que en estos la relación que tienen la corriente y el voltaje es de un operador diferencial. Por lo que al plantear las ecuaciones que resuelven el circuito en el dominio del tiempo, estas resultan ser ecuaciones diferenciales.

Existen diferentes maneras de resolver estos circuitos. La primera y más comunmente utilizada por los ingenieros electrónicos es transformar y llevar los circuitos y ecuaciones al dominio de la frecuencia. Con el uso de fasores las ecuaciones diferenciales se convierten en simple algebra lineal con números complejos. La segunda resulta en resolver las ecuaciones diferenciales en el dominio del tiempo. Y la tercera (en la cual se desarrolla la práctica) Es usar metodos númericos para aproximar las soluciones al sistema y/o ecuación diferencial. Para este caso en especifico se utilizará el metodo de Runge Kutta. El cual solo necesita de la ecuación diferencial y las condiciones inicales de cada una de las variables a encontrar.

II. MARCO TEÓRICO

II-A. *Ecuaciones Diferenciales*

Las ecuaciones diferenciales son aquellas que describen la dinámica de un sistema en terminos de los ordenes de sus derivadas. Existen diferentes tipos de ecuaciones diferenciales. Estas se categorizan por el orden de las derivadas presentes en la ecuación. Si una ecuacion diferencial es de segundo orden quiere decir que pose derivadas dobles. Para efectos del laboratorio se van a tratar ecuaciones diferenciales de primer orden. Las cuales están compuestas de la siguiente manera.

$$\frac{dx}{dt} = x^3 + 1$$

Este es un ejemplo de una ecuación diferencial de primer orden. Se observa como solo hay una derivada de primer grado en la ecuación. Por ende es de primer orden. Ahora multiples ecuaciones de primer orden conforman lo que se denomina como sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden un ejemplo de este sistema se observa a continuación

$$\frac{dx}{dt} = x + y$$

$$\frac{dy}{dt} = y^3 + x^2$$

En donde la solución de este sistema de ecuaciones lineales arroja como resultado una trayectoria en el plano x, y. Para poder solucionar este sistema se necesitan las condiciones iniciales. Estas son los puntos de partida para ambas variables x,y. Y se denotan como $x(0) = a$ $y(0) = b$. Esto se puede solucionar por medio de metodos que arrojan trayectorias exactas. O como se va a desarrollar en el laboratorio por medio del método de Runge Kutta.

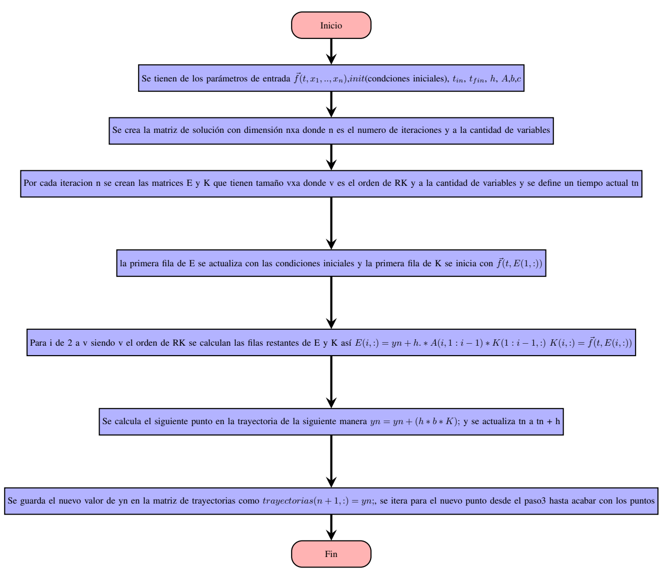
II-B. Metodo de Runge Kutta

El método de Runge Kutta es un método numérico para resolver trayectorias tanto de ecuaciones lineales como de sistemas de ecuaciones lineales de manera aproximada. Este método tiene diversos parámetros importantes como lo son: las condiciones iniciales. Las matrices: A,b,c. El tamaño del paso. El tiempo inicial y el tiempo final. Estos últimos se usan para calcular el número de puntos a calcular numéricamente.

Algo importante de saber son las dimensiones de las matrices: A,b,c. Que significan estas matrices y que significa el tamaño de estas. La matriz A tiene dimensión nxn, la matriz b tiene dimensiones 1xn y la matriz c tiene dimensiones nx1. Aqui n representa el orden del método Runge Kutta. Entre mayor sea el orden del método Runge Kutta, más calculos serán realizados para encontrar el valor aproximado de la solución. Por ende la aproximación tendrá menos errores. El funcionamiento y macro algoritmo de Runge Kutta se presenta a continuación.

III. Primera actividad - Algoritmo de Runge Kutta

Se presenta el algoritmo con un diagrama de flujo



IV. Segunda actividad - Resultados

Se muestran los resultados por cada circuito, cada circuito tuvo un total de 7 ejecuciones o soluciones. Las cuales corresponden a un metodo diferente de Runge Kutta

IV-A. Primer Circuito

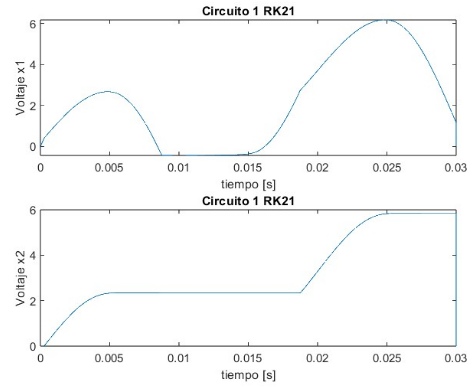


Figura 1. RK 21

IV-A1. RK 21:

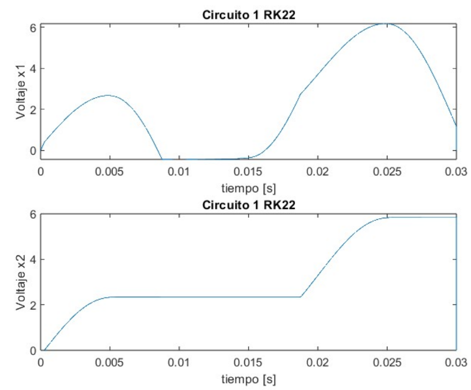


Figura 2. RK 22

IV-A2. RK 22:

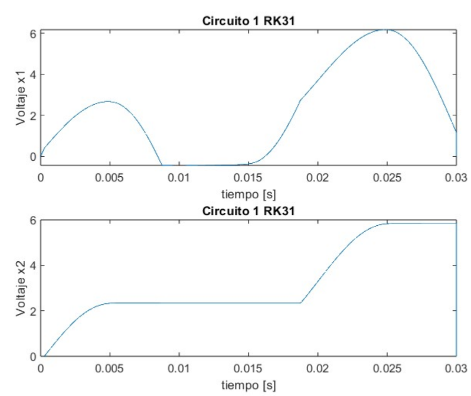


Figura 3. RK 31

IV-A3. RK 31:

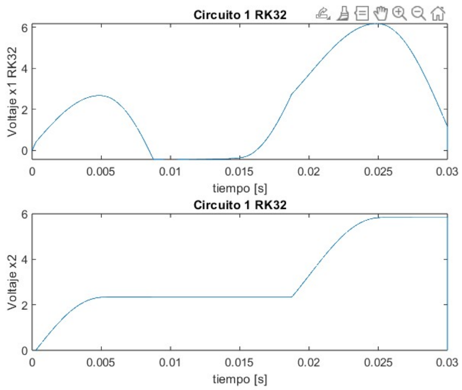


Figura 4. RK 32

IV-A4. RK 32:

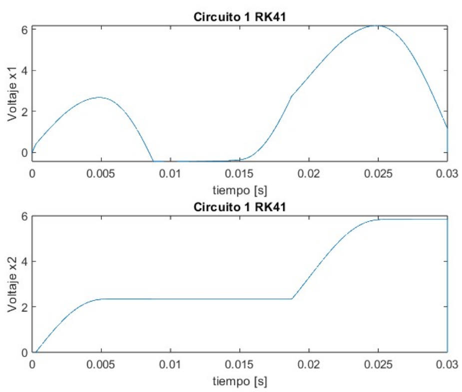


Figura 5. RK 41

IV-A5. RK 41:

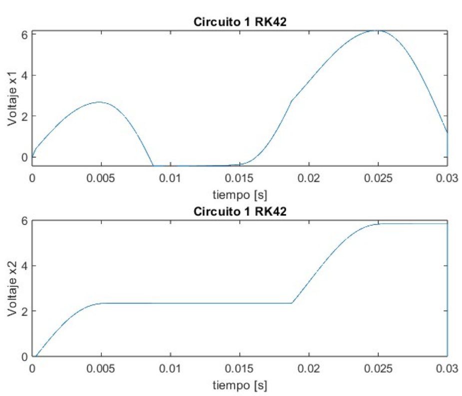


Figura 6. RK 42

IV-A6. RK 42:

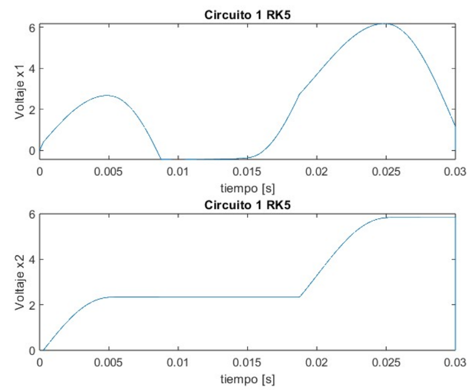


Figura 7. RK 5

IV-A7. RK 5:

IV-B. Segundo circuito

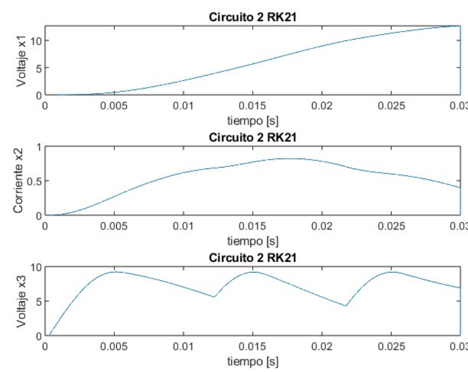


Figura 8. RK 21

IV-B1. RK 21:

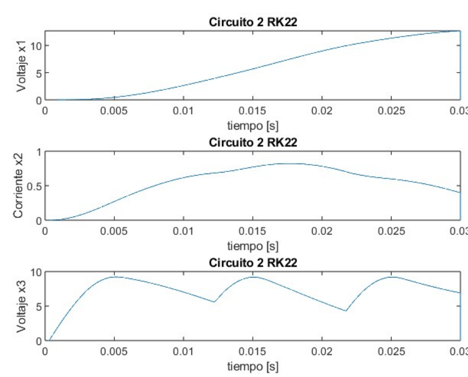


Figura 9. RK 22

IV-B2. RK 22:

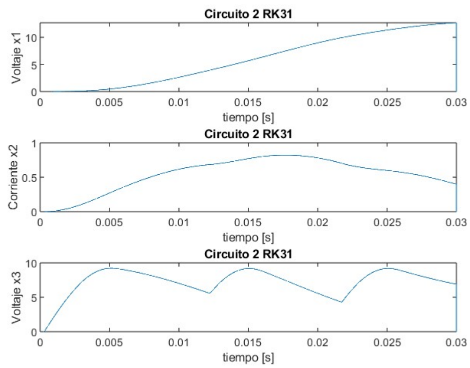


Figura 10. RK 31

IV-B3. RK 31:

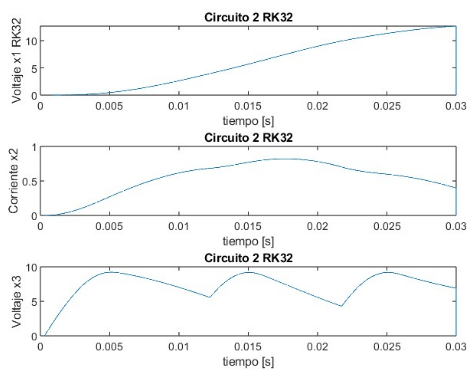


Figura 11. RK 32

IV-B4. RK 32:

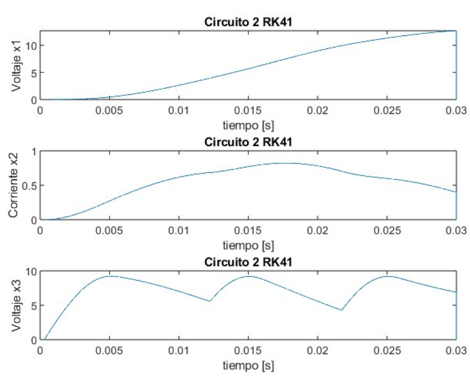


Figura 12. RK 41

IV-B5. RK 41:

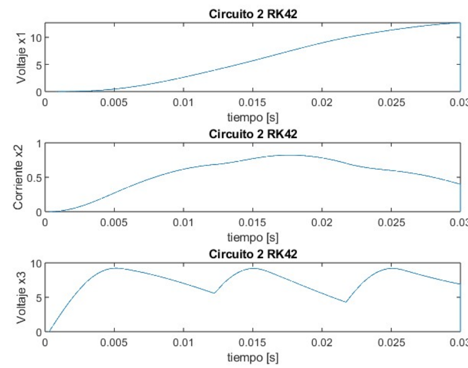


Figura 13. RK 42

IV-B6. RK 42:

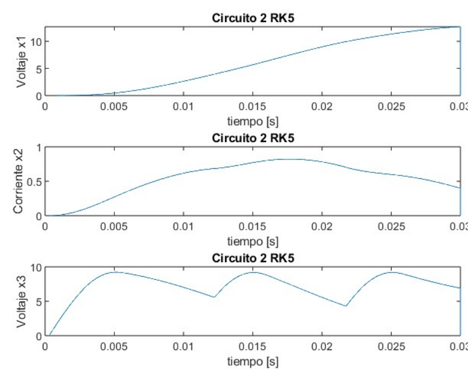


Figura 14. RK 5

IV-B7. RK 5:

IV-C. Tercer Circuito

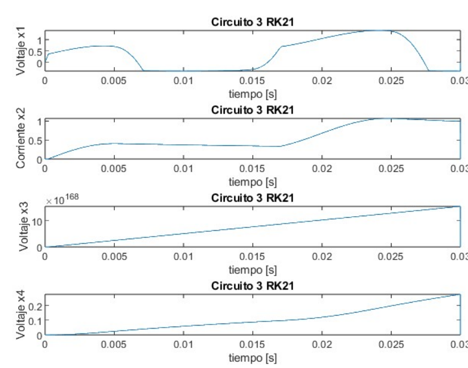


Figura 15. RK 21

IV-C1. RK 21:

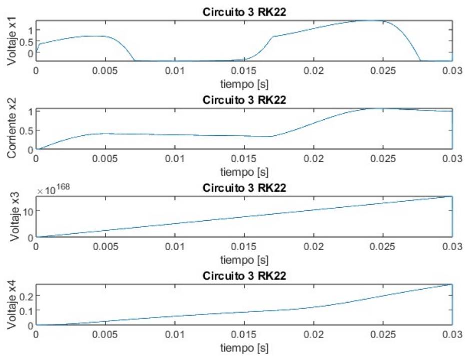


Figura 16. RK 22

IV-C2. *RK 22:*

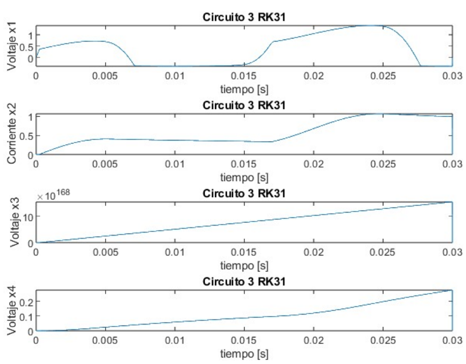


Figura 17. RK 31

IV-C3. *RK 31:*

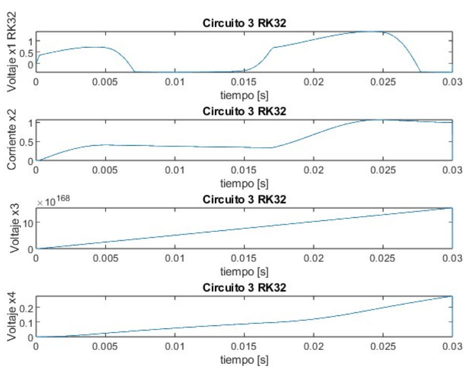


Figura 18. RK 32

IV-C4. *RK 32:*

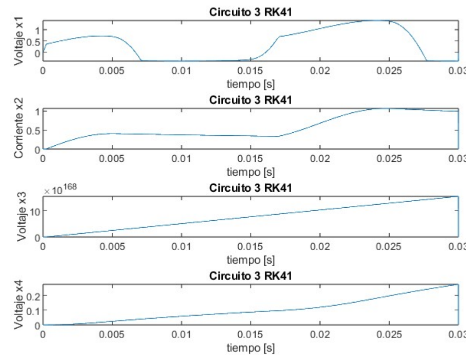


Figura 19. RK 41

IV-C5. *RK 41:*

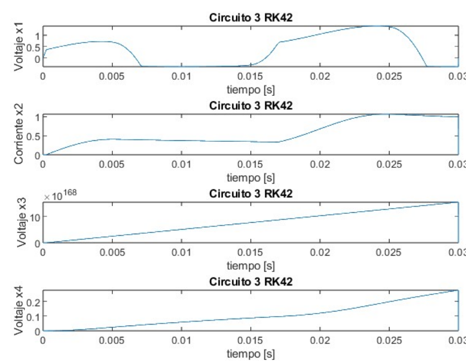


Figura 20. RK 42

IV-C6. *RK 42:*

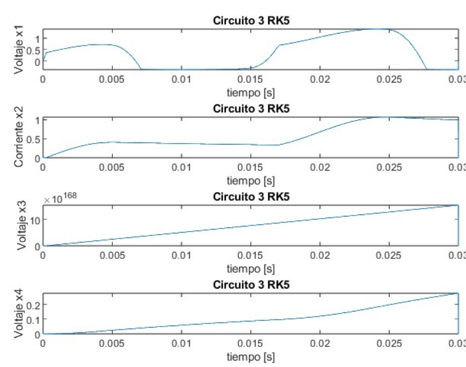


Figura 21. RK 5

IV-C7. *RK 5:*

IV-D. *Análisis*

Con las 21 gráficas generadas para todos los circuitos resolviendo con todos los métodos de RK solicitados se puede analizar que no se evidencian cambios significativos entre métodos de RK. Puede que en pequeños decimales observando soluciones una por una se pueda apreciar algún tipo de cambio entre métodos. Pero se puede observar que el resultado es el mismo. Es por esto que se puede decir que cualquier método de RK es aplicable para solucionar ecuaciones diferenciales de primer orden. Y que por motivos computacionales la prioridad o prelación para elegir un método va a ser del método que menos operaciones deba hacer. Es decir cualquiera de los RK de segundo orden.

Sobre la sensibilidad de los circuitos se observa que no se tuvo ningún problema con los dos primeros circuitos. Pero con el circuito 3 en la variable x3 si hubo problemas. Ya que se ve una pendiente que llega a un valor exagerado. Esto afecta el comportamiento de todos los calculos para los valores de las trayectorias de las demás variables. En el tercer circuito, acorde con la literatura de la cual son tomadas los sistemas de ecuaciones diferenciales (que es el libro que propone la guia). La única varaible que se resolvió de una manera parcialmente correcta fue la variable x2. Esta sensibilidad se da por que las ecuaciones diferenciales contienen funciones exponenciales. Que son bastante sensibles a los pequeños cambios en sus valores. Esto se evidencia en variable x3. Porque se observa que el valor final tiene un orden de 10^{168}.

Si bien todos los circuitos son altamente sensibles por la presencia de funciones exponenciales en sus sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden solo el circuito 3 .explota"Los otros dos circuitos si obtienen soluciones como las reportadas en la literatura.

V. Conclusiones

Respecto a los dos objetivo planteados al inicio de la práctica. Podemos concluir que los tres se cumplieron a su totalidad. A continuación detallaremos como cada uno de los objetivos fue cumplido a lo largo de toda la práctica.

- Como objetivo de implementar el metodo de Runge Kutta de manera generalizada este se cumplió en su totalidad, Ya que haciendo el llamado de dos funciones se lograron resolver multiples circuitos con diferente cantidad de variables y ecuaciones con distintos metodos RK.

- Como objetivo de analizar las ventajas y desventajas que cada metodo de RK tiene, se puede concluir que se logró con exito. Ya que se evidencio que al menos para estos circuitos el resultado final no cambia de manera significativa.
- Finalmente se cumplió el objetivo de resolver sistemas de ecuaciones lineales de primer orden por medio del uso del método RK generalizado utilizando diferentes ordenes de RK.

Referencias

[1] J. Román, Ïntegración Numérica: Método de Simpson"*Geogebra* [Online]. Available: https://www.geogebra.org/m/tWqP2wQsf. [Accessed: 5-May-2025].

Apéndice

A. Anexo 1

Se envia por aparte el código utilizado en matlab para el desarrollo de la práctica.