Application du compressed sensing au cas de l'imagerie satellite

Kolia Iakovlev - Samuel Ritchie

Ensae ParisTech

25/03/2018

Plan de la présentation

Pourquoi le compressed sensing?

- Traitement de signal audio ou d'imagerie
- Technique habituelle (fréquence de Nyquist-Shanon) trop coûteuse si l'image est trop lourde (cas particulier des images satellites)
- L'acquisition et la compression en une seule étape = Technique du **compressed sensing**
- Gain en coût de stockage

Principe et notations

1. Supposons qu'un signal $x_0 \in \mathbb{R}^N$ soit trop 'grand' pour être stocké
2. On préfère alors récupérer un vecteur de mesures $y \in \mathbb{R}^M$, transformation linéaire de x_0 par une matrice $\Phi \in M_{M,N}(\mathbb{R})$, tel que $M << N$
3. **Objectif**: pouvoir reconstruire x_0 à partir de y, Φ

Hypothèses fondamentales pour pouvoir reconstruire exactement x_0

x_0 est s-sparse (i.e, possède au plus s coordonnées non nulles) avec $s << N$, $M \sim slog(N/s)$, Φ vérifie RIP(s)

Problème à résoudre

- La condition RIP(s) est la suivante:
  $\forall x \in \mathbb{R}^N tq \, \|x\|_0 = s, \quad \frac{1}{2}\|x\|_2 \leq \frac{\|\Phi x\|_2}{\sqrt{M}} \leq \frac{3}{2}\|x\|_2$
- Minimisation l_0 pas faisable en pratique

Minimisation l_1

$$\text{Trouver } \tilde{x} = \underset{x \in \mathbf{R}^N}{argmin} \|\Psi x\|_1$$
$$\text{s.c. } y = \Phi x$$

Images satellites: des données bruitées

- Phénomènes naturels de bruits physiques des instruments de mesure
- Ajout d'un bruit gaussien dans la modélisation

Minimisation l_1 d'un signal bruité $z \sim N(0, \sigma_z^2)$

$$\text{Trouver } \tilde{x} = \underset{x \in \mathbf{R}^N}{argmin} \|\Psi x\|_1$$
$$\text{s.c. } \|y - \Phi\Psi x\|_2^2 \leq M\sigma_z^2$$

- Des phénomènes de brouillage et des bruits de quantification pourraient également être pris en compte

Acquisition d'un signal en dimension 2

```
Data : Image X, Nombre de mesures M
for i = 1 to N_row do
    Simuler Φ_i telle que : ∀k, j ∈ [1, M] × [1, N_col], Φ^i_{j,k} ~ N(0, 1/M);
    Y_i = Φ^i X_i;
end
return Y
```

Algorithm 1: Acquisition du signal

1. La matrice de mesures Φ:
   On génère une matrice $\Phi_i \in \mathcal{M}_{M,N_{col}}(\mathbb{R})$ telle que $\forall k, j \in [1, M] \times [1, N_{col}], \Phi_{k,j} \sim N(0, 1/M)$
2. On construit chaque mesure Y_i par la transformation linéaire $\Phi_i x_0^i$

Algorithme de reconstruction d'un signal 2D

Data : $Y, [\Phi^i], \mathcal{F}, P$
$n \leftarrow 0$
$X^{(n)} \leftarrow \mathcal{F}(Y, \Phi)$
repeat
  $n \leftarrow n + 1$
  for $i = 1$ *to* N_{row} **do**
    if $i = 1$ **or** $i = N_{row}$ **then**
      $x_P \leftarrow (X^{(n-1)})_i^T$
    else
      $x_P \leftarrow P\left((X^{(n-1)})_{i-1}, (X^{(n-1)})_{i+1}\right)$
    end if
    $y_P \leftarrow \Phi^i x_P$
    $e_Y \leftarrow Y_i^T - y_P$
    $e_\theta \leftarrow \underset{e}{\text{argmin}} \|e\|_{l_1} \quad \text{s.c.} \quad \Phi^i \Psi e = e_Y$
    $e_X = \Psi e_\theta$
    $(X^{(n)})_i^T \leftarrow (x_P + e_X)^T$
end
until Convergence
return $X^{(n)}$

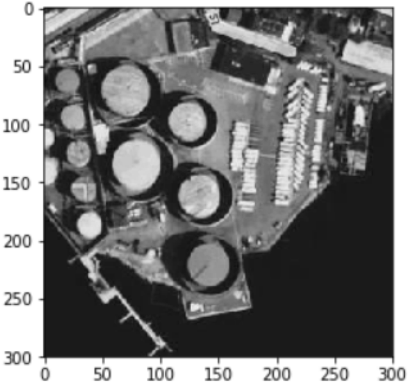
Algorithm 2: Reconstruction du signal (dimension 2)

Principe de l'algorithme de reconstruction 2D

1. **Initialisation**: Les auteurs proposent d'initialiser de manière triviale en appliquant l'algorithme l_1 sur chaque ligne de l'image indépendamment des autres
2. **Fonction de prédiction** P: plusieurs fonctions possibles (voir dans la partie computationnelle) basées sur une potentielle dépendance entre les lignes
3. **Procédure** l_1 sur les erreurs après application du filtre
4. Extension possible aux signaux 3D en adaptant l'algorithme, les étapes sont transposées à des matrices et non plus des vecteurs colonnes

Quels paramètres et fonctions de prédiction?

Figure: Image satellite 300*300 pixels



Quels paramètres et fonctions de prédiction?

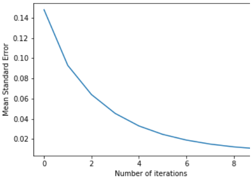
3 fonctions de prédictions (ou filtre) P:

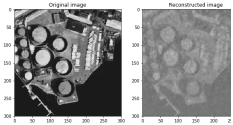
1. $x_P = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_{i+1})$
2. $$x_{Pj} = \frac{1}{6}(x_{i-1,j-1} + x_{i-1,j} + x_{i-1,j+1} + x_{i+1,j-1} + x_{i+1,j} + x_{i+1,j+1})$$
3. $x_{Pj} =$ $ax_{i-1,j-1} + bx_{i-1,j} + ax_{i-1,j+1} + ax_{i+1,j-1} + bx_{i+1,j} + ax_{i+1,j+1}$ avec $a = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ et $b = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$

On fait varier **M** le nombre de mesures entre 50 et 300 (pas de 50)

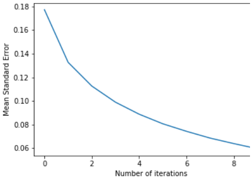
Résultats obtenus: cas M=50

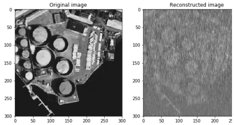
Filtre 2



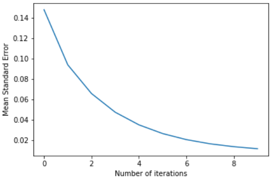


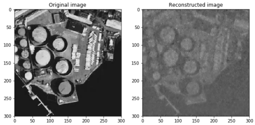
Filtre 1





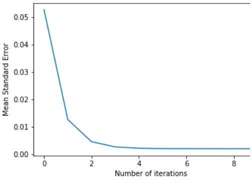
Filtre 3

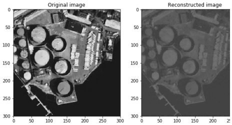




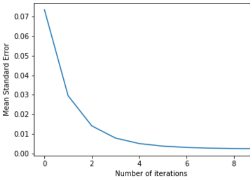
Résultats obtenus: cas M=150

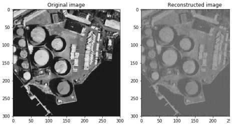
Filtre 2



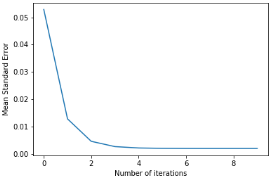


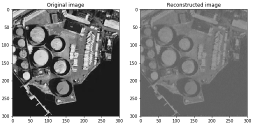
Filtre 1





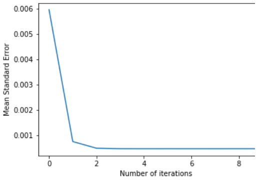
Filtre 3

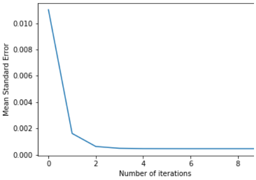


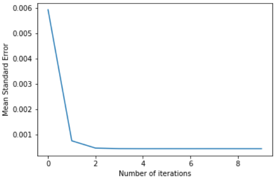


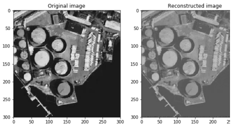
Résultats obtenus: cas M=250

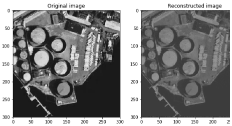
Filtre 2	Filtre 1	Filtre 3

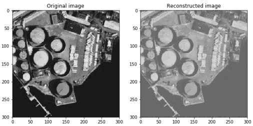






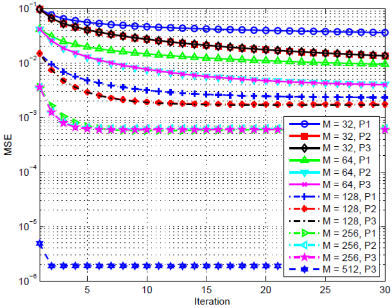






Conclusions et comparaisons avec les résultats des auteurs

- Une baisse exponentielle de la MSE et une convergence très rapide
- Meilleurs résultats avec le filtre 2 et 3 et M plus élevé
- Résultats en adéquation avec ceux des auteurs



Bibliographie

- M. Carlavan, L. Blanc-Féraud, M. Antonini, C. Thiebaut & C. Latry, *A satellite imaging chain based on the Compressed Sensing technique*
- G. Coluccia, S.K. Kuiteing,A. Abrardo, M. Barni & E. Magli, *Progressive compressed sensing and reconstruction of multidimensional signals using hybrid transform/prediction sparsity model*