

COMPRESSED SENSING

Applications du Compressed Sensing au cas de l'imagerie satellite

Kolia IAKOVLEV, Samuel RITCHIE



25 mars 2018

Enseignant : **Guillaume Lécué**

Table des matières

1	Introduction	3
2	Compressed sensing : cadre théorique et cas de signaux bruités	4
2.1	Définitions et notations	4
2.2	Procédure d'optimisation et conditions d'existence de solution	5
2.3	Extension du problème aux images satellites : cas des signaux bruités	5
3	Reconstruction de signaux satellites multidimensionnels par compressed sensing progressif	6
3.1	Cadre théorique	6
3.2	Procédure d'acquisition du signal	7
3.3	Algorithmes de reconstruction du signal	7
3.4	Initialisation et choix du filtre de prédiction	8
4	Cas des images hyperspectrales	8
5	Résultats	9

1 Introduction

Le Compressed Sensing (que l'on pourrait traduire en Français par Acquisition Comprimée) est une technique mathématique dont l'utilisation a connu une popularité grandissante à partir des années 1990, permettant de trouver la solution la plus *sparse* ("parcimonieuse") de systèmes linéaires sous-déterminés. Ces dernières années, le Compressed Sensing (CS) est apparu comme étant une méthode particulièrement efficace dans le cadre du traitement du signal, qu'il s'agisse d'audio ou d'imagerie. En effet, sous certaines hypothèses de sparsité du signal, la théorie du CS assure qu'il est possible de le reconstruire parfaitement à l'aide d'un faible nombre de mesures de ce dernier, représentant ainsi un gain en complexité significatif par rapport au théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon utilisé jusqu'alors.

L'un des domaines d'application les plus vastes du Compressed Sensing est indubitablement celui de l'imagerie. Outre l'imagerie médicale (où le CS est utilisé sur des images IRM), cette méthode est aussi d'un intérêt particulier en imagerie satellite et radar. A ce titre, les articles *A satellite imaging chain based on the Compressed Sensing technique* (M. Carlván, L. Blanc-Féraud, M. Antonini, C. Thiebaud, C. Lamy, et al.) et *Progressive compressed sensing and reconstruction of multidimensional signals using hybrid transform/prediction sparsity model* (G. Coluccia, S.K. Kuiteing, A. Abrardo, M. Barni & E. Magli) se concentrent sur les spécificités du cas des images satellites et sur les modifications apportées à la technique de CS de base afin d'acquérir et de reconstituer ces signaux. Les images satellites comportent deux caractéristiques majeures qu'il convient de prendre en compte lors des étapes d'acquisition-compression. D'une part, ces derniers sont fortement bruités pour diverses raisons que nous détaillerons dans ce qui suit, impliquant une modification de l'algorithme de CS. D'autre part, la taille considérable des images acquises par satellite (jusqu'à 30.000 x 30.000 pixels) ainsi que la forte corrélation suivant les différentes dimensions de l'objet considéré a amené les auteurs de [2] à développer un nouvel algorithme où l'acquisition se fait de manière progressive et indépendante suivant l'une des dimensions afin de palier au problème de dimensionnalité, et où la reconstruction utilise des filtres linéaires permettant de tenir compte de la corrélation suivant les différentes dimensions.

Dans un premier temps, nous rappellerons le cadre théorique général du Compressed Sensing avant d'introduire la notion de bruitage du signal et ses implications sur la procédure d'optimisation. Dans une seconde partie, nous détaillerons les procédures mises en place par Coluccia et al. pour acquérir le signal de manière progressive tout en le reconstituant en tenant compte des corrélations suivant les différentes dimensions. Enfin, après avoir détaillé succinctement le cas des images hyperspectrales, nous présenterons dans une dernière partie les résultats obtenus par notre propre implémentation de la procédure de Coluccia et al.

2 Compressed sensing : cadre théorique et cas de signaux bruités

Comme évoqué en introduction, l'objectif principal du Compressed Sensing est d'acquérir de façon comprimée un signal, le tout en une seule et même étape. En effet, les méthodes classiques distinguent habituellement ces deux étapes, en récupérant dans un premier temps le signal avant de le compresser pour une éventuelle visualisation. Cependant, lorsque le signal est de très grande taille (une image d'une grande surface en très haute définition par exemple), l'acquisition de cette image demande un coût trop élevé au niveau de la mémoire. La théorie du *compressed sensing* fournit dès lors une solution à ce problème en évitant le stockage du signal trop volumineux. Ainsi, l'acquisition et la compression s'effectuent à la même étape. Le but est de récupérer des "mesures" du signal en nombre bien moins élevé que la taille du signal. Dans ce qui suit, nous allons ainsi introduire certaines notations formalisant cette théorie.

2.1 Définitions et notations

Signal comprimé

Supposons que l'on dispose d'un signal $x_0 \in \mathbb{R}^N$ sous forme d'un vecteur colonne de taille N (ce vecteur peut correspondre soit à une ligne de la matrice de pixels d'une image, soit à toutes les lignes "empilées" les unes au dessus des autres comme nous le verrons plus tard). Si l'on souhaitait stocker ce signal, il faudrait alors stocker N coefficients, mais lorsque N est très grand, le coût de stockage devient systématiquement trop élevé. L'idée est dès lors d'obtenir à la place de x_0 un autre vecteur colonne y de taille $M \ll N$.

Pour ce faire, nous allons calculer linéairement des "mesures" de x_0 par une transformation linéaire assimilée à une matrice de mesures $\Phi \in \mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{R})$. Notons dès lors $y = \Phi x_0$.

Il est important de noter que connaître y sans pouvoir retrouver x_0 ne présente pas voire aucun d'intérêt. En outre, sachant $M \ll N$, il n'est pas garanti de pouvoir reconstruire x_0 avec y un vecteur de mesures incohérentes. En effet, il pourrait exister plusieurs vecteurs $x_{0,1}, \dots, x_{0,p}$ vérifiant $y = \Phi x_{0,i}$. Ainsi, il est nécessaire d'avoir certaines conditions sur x_0 mais aussi sur Φ pour garantir la reconstruction parfaite du signal.

Notion de sparsité

Une notion essentielle de la théorie du *compressed sensing* est la notion de sparsité. On dit qu'un vecteur $x \in \mathbb{R}^N$ est *s-sparse* si au plus s coefficients de x sont non nuls. Comme on peut le comprendre intuitivement, cette propriété de sparsity réduit le nombre de solution $x_{0,1}, \dots, x_{0,p}$ et sous certaines conditions sur Φ et s nous verrons que cet ensemble de solutions se réduit à au plus un élément.

Un objet essentiel du *compressed sensing* est la norme l_0 , défini de la manière suivante :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_N)^T \in \mathbb{R}^N, \|x\|_0 = \text{Card}(\{x_i \neq 0, i \in [1, N]\})$$

La norme l_0 définie ci-dessus donne alors s tel que x est qualifié de *s-sparse*. A partir d'un vecteur y de taille M et de la matrice de mesures Φ , l'objectif est d'obtenir le x correspondant le plus sparse possible, i.e. :

$$\text{Trouver } \tilde{x} = \underset{x \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \|x\|_0 \quad \text{s.c. } y = \Phi x$$

En réalité, le signal ou vecteur x peut être *s-sparse* dans une certaine base B et non dans la base canonique (dans une base d'ondelettes par exemple). Si on note alors Ψ la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^N dans la base B , le problème devient alors :

$$\text{Trouver } \tilde{x} = \underset{x \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \|\Psi x\|_0 \quad \text{s.c. } y = \Phi x$$

Il peut être démontré que cette procédure permet de résoudre le problème de *compressed sensing* pour un nombre minimal de mesures $M \geq s + 1$ et avec une hypothèse supplémentaire sur $\text{Ker}(A)$. Cependant, elle n'est pas utilisable en pratique car il s'agit d'une procédure NP-hard, i.e. au moins difficile qu'un problème dont il existe une procédure pouvant le résoudre en un temps polynomial.

2.2 Procédure d'optimisation et conditions d'existence de solution

Procédure de minimisation l_1

Afin de palier à l'aspect NP-hard de la procédure de minimisation l_0 , il est nécessaire d'utiliser une autre procédure implémentable en pratique. Intuitivement, une telle procédure nécessitera automatiquement plus de contraintes sur la sparsité de x_0 et/ou sur les propriétés de la matrice de mesures Φ .

Pour ce faire, on procède à ce que l'on appelle la relaxation convexe du problème, en minimisant non pas selon la norme l_0 mais selon la norme convexe la plus "proche" (enveloppe convexe) de l_0 qui n'est autre que la norme l_1 , définie de la manière suivante :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N, \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{k=N} |x_k|$$

Par ailleurs, le nombre de mesures nécessaires à la reconstruction exacte du vecteur x_0 s-sparse (c'est-à-dire la reconstruction de tout vecteur s-sparse à partir du vecteur y correspondant) augmente avec la dimension du signal, et doit être de l'ordre de $K \log(\frac{N}{K})$. Pour assurer une reconstruction exacte la matrice de mesures Φ doit enfin également vérifier une propriété supplémentaire appelée la *Restricted Isometry Property* (RIP), précisée ci dessous.

Restricted Isometry Property

La propriété RIP(s) permet d'assurer la reconstruction exacte de tout vecteur s-sparse. Elle impose une propriété à la matrice Φ proche de celle propre aux isométries vectorielles.

On dit alors que Φ vérifie la propriété RIP(s) si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \|x\|_0 = s, \quad \frac{1}{2} \|x\|_2 \leq \frac{\|\Phi x\|_2}{\sqrt{M}} \leq \frac{3}{2} \|x\|_2 \quad \text{où } \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{k=N} x_k^2}$$

Comme nous le verrons dans la partie suivante, un exemple "classique" de matrices vérifiant cette propriété est l'ensemble des matrices gaussiennes. Sous ces conditions, la procédure permettant de reconstruire le vecteur x_0 s-sparse dans la base d'intérêt B est alors la suivante :

$$\text{Trouver } \tilde{x} = \underset{x \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \|\Psi x\|_1 \quad \text{s.c. } y = \Phi x$$

2.3 Extension du problème aux images satellites : cas des signaux bruités

Pour diverses raisons que nous allons détailler ci-après, l'acquisition d'images satellites se fait au détriment d'une série de bruits ayant des origines différentes. Le fait que le signal soit bruité nécessite d'effectuer quelques ajustements par rapport à la procédure explicitée ci-dessus.

Bruit et Brouillage

Dans les systèmes d'image classiques, l'acquisition des images est souvent dégradée par un brouillage. Ce dernier est principalement causé par l'environnement naturel ainsi que par l'imperfection des composants d'acquisition. On modélise ce brouillage par une transformation linéaire de l'image x_0 qui arrive dans le système : au lieu de recevoir le signal x_0 , on reçoit une transformation linéaire H de ce dernier :

$$y = \Phi H x_0, \quad H \in \mathcal{M}_{N,N}(\mathbb{R})$$

Consécutivement au brouillage, une seconde perturbation, dite "bruit instrumental" et notée z , vient s'ajouter lors de l'étape d'acquisition. Ce dernier est lié à des phénomènes naturels de bruits physiques des instruments de mesure (qu'il s'agisse de la partie photovoltaïque ou électronique) et s'applique à l'ensemble du signal.

En pratique, on considérera un bruit $z \sim N(0, \sigma_z^2)$. On peut alors démontrer que pour un bruit gaussien l'algorithme de minimisation l_1 permet de reconstruire x_0 avec précision avec une forte probabilité. L'ajout de ce bruit oblige à modifier légèrement la procédure et à inclure une inégalité due au bruit sur l'ensemble des solutions. En remarquant que $\|z\|_2^2 \leq M \sigma_z^2$, la procédure de minimisation l_1 se réécrit alors :

$$\text{Trouver } \tilde{x} = \underset{x \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \|\Psi x\|_1 \quad \text{s.c. } \|y - \Phi H x\|_2^2 \leq M \sigma_z^2$$

Bruit de quantification

Le bruit instrumental et le brouillage ne sont pas les seuls facteurs affectant le signal provenant du satellite. En effet, un satellite n'est pas capable de transmettre continuellement le signal car il lui arrive de traverser des zones de non-transmission. Dans ce cas, il est obligé de stocker le signal. Ses capacités de stockage étant limitées, ce signal est alors compressé, ce qui induit des erreurs de précision lorsqu'il sera effectivement transmis. Ces erreurs sont appelées bruit de quantification (*quantizing noise*).

Ce bruit de quantification peut être modélisé comme un réel b_i compris dans un segment du type $[-\frac{\Delta_i}{2}, \frac{\Delta_i}{2}]$ avec Δ_i pour tout y_i du vecteur final et dépendant directement de y_i . En reprenant les notations précédentes, on peut alors modéliser le vecteur y observé de la manière suivante :

$$y = \Phi H x_0 + z + b \quad \text{où } b \in B = \{b \in \mathbb{R}^M, \forall i \in [1, M], -\frac{\Delta_i}{2} \leq b_i \leq \frac{\Delta_i}{2}\}$$

Le problème de minimisation devient alors :

$$\text{Trouver } \tilde{x} = \underset{x \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \|\Psi x\|_1 \quad \text{s.c.} \begin{cases} z \in \mathbb{R}^M \text{ et } \|z\|_2^2 \leq M\sigma_z^2 \\ b \in \mathbb{R}^M \text{ et } b \in B \\ y = \Phi H x + z + b \end{cases}$$

Ou de manière équivalente :

$$\text{Trouver } \tilde{x} = \underset{x \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \|\Psi x\|_1 \quad \text{s.c.} \begin{cases} z \in \mathbb{R}^M \text{ et } \|z\|_2^2 \leq M\sigma_z^2 \\ y - (\Phi H x + z) \in B \end{cases}$$

Notons que ce problème est un problème de minimisation d'une fonction convexe sur un ensemble convexe et admet donc un unique ensemble convexe de solution. Nous verrons dans la suite une mise en pratique d'une version simplifiée de ce problème, prenant compte du bruit instrumental mais ni du brouillage, ni du bruit de quantification. Dans la partie qui suit, nous allons expliciter une procédure permettant de reproduire des signaux satellites multidimensionnels bruités en un temps acceptable.

3 Reconstruction de signaux satellites multidimensionnels par compressed sensing progressif

Dans ce qui précède, nous avons vu comment prendre en compte l'aspect bruité des signaux issus de l'imagerie satellite. Cependant, la procédure explicitée prenait comme entrée un signal représenté par un vecteur colonne $x \in \mathbb{R}^N$. En pratique, une image satellite n'est pas un vecteur colonne, mais plutôt une matrice de pixel $X \in \mathcal{M}_{N_{row}, N_{col}}(\mathbb{R})$. La manière la plus simple de se ramener au cas unidimensionnel précédemment décrit serait alors d'empiler les colonnes de X les unes au dessus des autres pour former un vecteur colonne $x \in \mathbb{R}^{N_{row} * N_{col}}$ et d'y appliquer la procédure vue en partie 2. Cependant, une telle approche ne permettrait pas de résoudre le problème de *Basis Pursuit*¹ en un temps raisonnable. Une solution à cela est proposée dans l'article de Coluccia et al.. L'idée est relativement simple : il s'agit d'appliquer la procédure de *Basis Pursuit* bruitée à chaque ligne de la matrice de pixels. Cependant, appliquer naïvement de manière indépendante cette procédure à chacune des lignes reviendrait à ignorer les corrélations entre lignes. Afin de répondre à ce problème, les auteurs proposent dès lors d'appliquer a posteriori un filtre de prédiction linéaire lors de la reconstruction des lignes : chaque ligne sera fonction de celles qui l'encadrent.

Après avoir introduit le cadre théorique de l'article et fait le parallèle avec la procédure de *Basis Pursuit denoising* introduite précédemment, nous présenterons dans cette partie les procédures d'acquisition et de reconstruction du signal proposés par les auteurs. Enfin, nous nous attarderons sur la manière d'initialiser la procédure ainsi que sur les possibles filtres utilisés lors de la reconstruction.

3.1 Cadre théorique

Afin de simplifier légèrement le problème lié au bruitage, les auteurs proposent de ne considérer que la partie liée au bruit instrumental. Par ailleurs, dans ce qui suit, nous considérerons par souci de cohérence avec la partie 2 que la représentation du signal d'origine x possède une représentation sparse, notée θ , dans une autre base Ψ . Ainsi, la procédure de minimisation l_1 se ré-écrit :

$$\text{Trouver } \tilde{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \|\theta\|_1 \quad \text{s.c. } \|y - \Phi \Psi \theta\|_2 \leq \epsilon = \sqrt{M} \sigma_z$$

1. le problème de *Basis Pursuit* est le terme générique donné au problème de recouvrement par norme l_1

3.2 Procédure d'acquisition du signal

Dans un premier temps, nous nous intéresserons à la procédure d'acquisition du signal. Rappelons que l'on suppose que pour chaque signal de dimension 2 nous devons obtenir un signal Y beaucoup plus petit en le composant directement par ce que l'on appelle une matrice de "mesures".

Les procédures décrites jusqu'alors concernent systématiquement des vecteurs colonnes et non des matrices. Ceci justifie le fait que l'acquisition du signal se fasse indépendamment ligne par ligne. Cette approche progressive à travers les lignes de la matrice est à mettre en lien avec la manière donc le signal est capté en pratique : en effet, que ce soit pour les *flatbed scanners* ou les *spaceborne imagers*, l'acquisition se fait à l'aide de capteurs optiques unidimensionnels qui se déplacent orthogonalement (i.e. à travers les lignes). Nous allons donc utiliser N_{row} matrices de mesure $\Phi_i \in \mathcal{M}_{M, N_{col}}(\mathbb{R})$ pour acquérir N_{row} signaux de mesures de taille M . Afin de minimiser les risques d'échec lors de la reconstruction, une nouvelle matrice Φ est tirée pour chaque ligne.

Quelle matrice de mesures Φ ?

Les matrices de mesures souvent utilisées sont des matrices gaussiennes. En effet, elles ont de bonnes propriétés qui leur permettent avec une probabilité élevée de vérifier RIP(s). Ainsi pour chaque ligne i du signal, on génère une matrice $\Phi_i \in \mathcal{M}_{M, N_{col}}(\mathbb{R})$ telle que $\forall k, j \in [1, M] \times [1, N_{col}], \Phi_{k,j} \sim N(0, 1/M)$. On obtient alors l'algorithme d'acquisition du signal ci-dessous.

```

Data : Image X, Nombre de mesures M
for  $i = 1$  to  $N_{row}$  do
    Simuler  $\Phi_i$  telle que :  $\forall k, j \in [1, M] \times [1, N_{col}], \Phi_{j,k}^i \sim N(0, 1/M)$ ;
     $Y_i = \Phi^i X_i$ ;
end
return Y

```

Algorithm 1: Acquisition du signal

3.3 Algorithmes de reconstruction du signal

Une fois acquis les mesures Y et connaissant la matrice de mesures Φ , la façon la plus simple de reproduire le signal de départ serait d'appliquer la procédure de minimisation l_1 à chaque ligne de Y comme décrite précédemment. Cependant, afin de prendre en compte les dépendances entre lignes, les auteurs proposent une nouvelle méthode consistant à appliquer jusqu'à convergence des filtres de prédiction linéaire sur des lignes consécutives. L'idée est d'utiliser ces prédictions linéaires pour en déduire une erreur pour chaque ligne, et appliquer la procédure de minimisation l_1 à l'erreur plutôt qu'à la ligne complète.

```

Data :  $Y, [\Phi^i], \mathcal{F}, P$ 
 $n \leftarrow 0$ 
 $X^{(n)} \leftarrow \mathcal{F}(Y, \Phi)$ 
repeat
     $n \leftarrow n + 1$ 
    for  $i = 1$  to  $N_{row}$  do
        if  $i = 1$  or  $i = N_{row}$  then
             $x_P \leftarrow (X^{(n-1)})_i^T$ 
        else
             $x_P \leftarrow P((X^{(n-1)})_{i-1}, (X^{(n-1)})_{i+1})$ 
        end if
         $y_P \leftarrow \Phi^i x_P$ 
         $e_Y \leftarrow Y_i^T - y_P$ 
         $e_\theta \leftarrow \underset{e}{\operatorname{argmin}} \|e\|_{l_1} \quad \text{s.c.} \quad \Phi^i \Psi e = e_Y$ 
         $e_X = \Psi e_\theta$ 
         $(X^{(n)})_i^T \leftarrow (x_P + e_X)^T$ 
    end
until Convergence
return  $X^{(n)}$ 

```

Algorithm 2: Reconstruction du signal (dimension 2)

Différents filtres sont proposés par les auteurs et sont détaillés dans la partie qui suit. Intuitivement (et les auteurs confirment cette intuition par des résultats numériques), il sera plus efficace d'appliquer l'algorithme de base sur l'erreur entre une ligne et sa prédiction par le filtre que sur la ligne elle-même dans la mesure où à chaque itération, on se rapproche de la bonne valeur et donc le signal sera d'avantage compressible qu'à l'étape précédente.

3.4 Initialisation et choix du filtre de prédiction

Deux des éléments essentiels de l'algorithme de reconstruction du signal explicité ci-dessus sont la stratégie d'initialisation \mathcal{F} ainsi que le filtre de prédiction P . Dans leur article, Coluccia et al. proposent ainsi plusieurs stratégies.

Filtres de prédiction

Trois différents filtres de prédiction sont proposés par les auteurs. Le plus simple consiste à prédire la ligne i comme la moyenne des lignes $i - 1$ et $i + 1$:

$$X_P = \frac{1}{2}((X)_{i-1} + (X)_{i+1})$$

En plus de cette prédiction basique, deux filtres prédisant pixel par pixel pour la ligne i sont proposés. Le premier effectue une moyenne des 6 pixels (8 moins les 2 de la ligne i) entourant le pixel en position (i, j) :

$$\forall j \in [1, N_{col}], \quad (X_P)_j = \frac{1}{6}[(X)_{i-1,j-1} + (X)_{i-1,j} + (X)_{i-1,j+1} + (X)_{i+1,j-1} + (X)_{i+1,j} + (X)_{i+1,j+1}]$$

Le second effectue une moyenne pondérée en fonction de la distance au pixel en position (i, j) . Le coefficient $a = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ correspond aux 4 pixels en diagonale et $b = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ aux pixels à la verticale :

$$\forall j \in [1, N_{col}], \quad (X_P)_j = [a(X)_{i-1,j-1} + b(X)_{i-1,j} + a(X)_{i-1,j+1} + a(X)_{i+1,j-1} + b(X)_{i+1,j} + a(X)_{i+1,j+1}]$$

Initialisation

Dans le cas de signaux 2D (i.e. pour une image satellite de base), les auteurs proposent de trivialement initialiser la procédure en appliquant indépendamment la reconstruction par norme l_1 indépendamment à chacune des lignes de la matrice de pixels, sans appliquer aucun filtre et donc en ignorant les possibles corrélations entre lignes.

4 Cas des images hyperspectrales

Dans leur article, Coluccia et al. s'intéressent également à un autre type d'image satellite : les images hyperspectrales. L'imagerie hyperspectrale, aussi appelée spectro-imagerie, est une technologie permettant la représentation d'une scène suivant un grand nombre de bandes spectrales (généralement plus d'une centaine), étroites et contiguës. C'est la notion de spectre continu (par opposition à l'imagerie multispectrale) qui est essentielle et permet d'exploiter au mieux l'information. L'imagerie hyperspectrale permet de reconnaître dans le pixel la « signature spectrale » des constituants qu'il contient, c'est-à-dire de les identifier. Cette technologie, classiquement utilisée en exploration planétaire, existe maintenant depuis plus de 25 ans en observation de la Terre sous forme aéroportée et depuis plus de 10 ans sous forme spatiale.

L'image résultante de cette approche est en conséquence tri-dimensionnelle : deux dimensions spatiales et une dimension spectrale. Les auteurs proposent de considérer ce cube comme une collection de N_{band} canaux spectraux. D'autres représentations sont possibles, comme par exemple une collection de N_{row} "tranches" spatial-spectral. Ces représentations sont à mettre en parallèle avec les différentes manières dont les images hyperspectrales sont acquises en pratique, ce sur quoi nous ne nous attarderons pas ici. En considérant la première approche décrite ci-dessus, une image hyperspectrale \mathcal{F} peut être représentée de la manière suivante :

$$\mathcal{F} \in \mathbb{R}^{N_{row} \times N_{col} \times N_{band}} = [F^1, F^2, \dots, F^{N_{band}}], \quad F^i = \mathcal{F}_{:, :, i} \in \mathbb{R}^{N_{row} \times N_{col}}$$

L'idée régissant des procédures d'acquisition et de reconstruction d'un signal hyperspectral restent les mêmes qu'en dimension 2. Cependant, pour conserver des vecteurs colonnes en entrée, l'idée est d'empiler les colonnes des matrices F^i de gauche à droite. Cette opération de concaténation, notée vec , permet d'obtenir une matrice $vec\{F^i\} \in \mathbb{R}^{N_{row}N_{col} \times 1}$. L'acquisition du signal se fait dès lors comme précédemment à l'aide de matrice de sensing $\Phi^i \in \mathbb{R}^{M \times N_{row}N_{col}}$ telles que :

$$y_i = \Phi^i vec\{F^i\} \in \mathbb{R}^{M \times 1}, \quad M < N_{row}N_{col}$$

L'algorithme de reconstruction du signal est identique dans l'idée au cas bi-dimensionnel, on applique pour chaque bande spectrale un filtre de prédiction linéaire afin de prendre en compte toute possible dépendance entre la dimension spectrale et la double-dimension spatiale. Au lieu de se servir des lignes adjacentes à la ligne i pour en déduire l'erreur de mesure, on se sert désormais des matrices spatiales adjacentes à la bande spectrale i .

5 Résultats

Nous avons implémenté l'algorithme tel que proposé par Coluccia et al. dans le cas d'une image satellite bi-dimensionnelle. L'image initiale utilisée est représentée ci-dessous. Par souci de rapidité des calculs, nous avons réduit l'image à une taille carrée de 300*300 pixels.



FIGURE 1 – Image satellite utilisée pour l'implémentation

L'algorithme a été implémenté pour différentes valeurs de M (nombre de mesures) ainsi que pour les différents filtres de prédiction proposés dans l'article. Afin d'évaluer la performance de la reconstitution, nous calculons la *Mean Squared Error* à chaque étape. Le nombre d'itérations, compte tenu des valeurs considérées par les auteurs, a été fixé à $N_{iter} = 10$. Nous aurions également pu imaginer faire tourner l'algorithme un certain nombre de fois jusqu'à convergence (en terme de MSE). Ci-dessous sont représentés l'image reconstruite pour $M = 100$ (i.e. 30% de chaque ligne a été prise aléatoirement lors de l'acquisition du signal) et pour le filtre de prédiction $P3$, qui correspond à une moyenne pondérée des pixels entourant celui que l'on cherche à prédire.

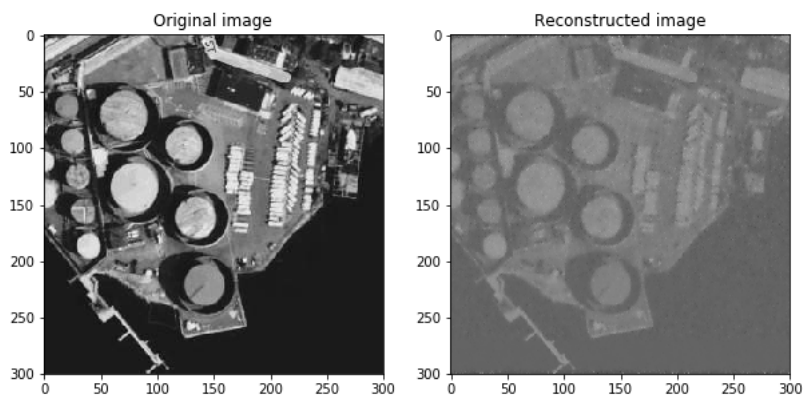


FIGURE 2 – Image reconstituée pour $M = 100$ mesures et pour le filtre de prédiction 3

L'image est plutôt bien reconstituée concernant la précision des différents éléments. Cependant, il apparaît que les niveaux de gris ne correspondent pas à ceux de l'image d'origine, ce que nous n'avons pas réussi à comprendre.

En faisant varier M , il ressort logiquement que la qualité de l'image reconstituée en 10 itérations augmente avec le nombre de mesures. A titre, d'exemple, ci-dessous est représentée l'image reconstituée pour $M = 250$ en utilisant le filtre 1 (moyenne des lignes).

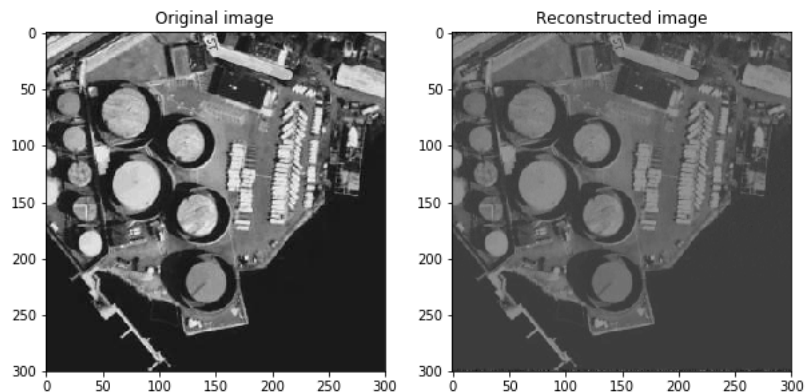
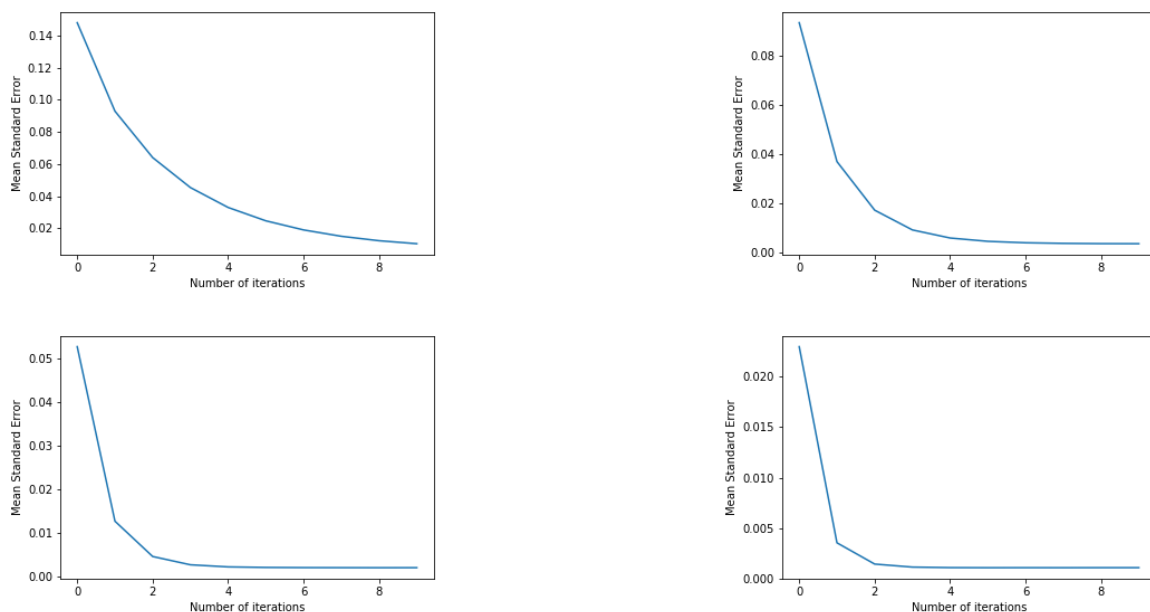


FIGURE 3 – Image reconstituée pour $M = 250$ mesures et pour le filtre de prédiction 1

En terme de performance, il est à noter que sans grande surprise, le 3^e filtre de prédiction surperforme les deux autres : la MSE atteinte au bout de 10 itérations est systématiquement plus faible que pour les filtres 1 et 2, et ce quelque soit le nombre de mesures considéré.

Par ailleurs, la décroissance du MSE est bien plus abrupte pour des valeurs élevées de M , ce qui est logique dans la mesure où non seulement la première mesure (lors de l'initialisation) est plus précise, mais aussi puisque la prédiction par les filtres est plus efficace si l'on possède plus de pixels par ligne. A ce titre sont représentées ci-dessous l'évolution de la MSE sur 10 itérations dans le cas du filtre 2 pour $M = 150$ et $M = 50$ (à gauche) et dans le cas du filtre 3 (à droite).



Les résultats que nous obtenons sont similaires à ceux de l'article de Coluccia et al.. Cependant, il est à noter que les temps de calcul sont longs. Bien qu'il ne soit pas à exclure que notre implémentation ne soit pas optimale, le fait que nous appliquions une procédure de *basis pursuit* pour chaque ligne de la matrice de pixels explique en partie la lenteur de la procédure. La complexité de l'algorithme, comme signalé

par les auteurs, est en $\mathcal{O}(N_{iter}N_{row}N_{col}^3)$. Par ailleurs, les résultats ne sont curieusement pas meilleurs en terme de rapidité lorsqu'on applique la transformée en cosinus discrète initialement à la matrice de pixels, comme suggéré par les auteurs.