

Proyecto 3

Asesinato en el Mayfair

Samuel Iván Sánchez Salazar

Ecuaciones Diferenciales
MCI Luis Alonso Romo Mercado



Universidad Panamericana
Facultad de Ingeniería
Ingeniería en Inteligencia Artificial
28 de Noviembre 2022

Ley de Enfriamiento de Newton

La ley de enfriamiento de Newton enuncia que, cuando la diferencia de temperaturas entre un cuerpo y su medio ambiente no es demasiado grande, el calor transferido por unidad de tiempo hacia el cuerpo o desde el cuerpo por conducción, convección y radiación, es aproximadamente proporcional a la diferencia de temperaturas entre el cuerpo y dicho medio externo, siempre y cuando este último mantenga constante su temperatura durante el proceso de enfriamiento.

La genialidad de Newton se pone de manifiesto nuevamente cuando utilizando un horno de carbón de una pequeña cocina, realizó un sencillo experimento: calentó al rojo vivo un bloque de hierro, al retirarlo lo colocó en un lugar frío y observó cómo se enfriaba el bloque de metal en el tiempo. Sus conjeturas sobre el ritmo al cual se enfriaba el bloque dieron lugar a lo que hoy conocemos como ley de enfriamiento de Newton.

Problema 1

Después de reflexionar, Diff decide comenzar por suponer que el señor Wood fue asesinado en el refrigerador. ¿Más o menos a qué hora murió?

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m), t > 0 \quad (1)$$

$$T(0) = 85, t = 0 = 6 : 00\text{am}$$

$$T(-\frac{1}{2}) = 84$$

$$T_m = 50$$

$$T_{vivo} = 98$$

Solución

$$\frac{dT}{T - T_m} = k dt$$

$$\int \frac{dT}{T - T_m} = \int k dt$$

$$\ln(T - 50) = kt + c$$

$$T = ce^{kt} + 50;$$

Con la condicion inicial $T(0) = 85$,

$$T(0) = ce^{0t} + 50 = 85$$

$$c + 50 = 85$$

$$c = 35$$

$$T = 35e^{kt} + 50$$

Sustituyendo $t = -\frac{1}{2}$ y $T(-\frac{1}{2}) = 84$,

$$84 = 35e^{-\frac{1}{2}k} + 50$$

$$35e^{-\frac{1}{2}k} = 34$$

$$-\frac{k}{2} = \ln\left(\frac{34}{35}\right)$$

$$k = -2 \ln\left(\frac{34}{35}\right)$$

Sustituyendo $k = -2 \ln\left(\frac{34}{35}\right)$ y $T_{vivo} = 98$

$$99 = 35e^{kt} + 50$$

$$e^{kt} = \frac{49}{35}$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{49}{35}\right)}{-2 \ln\left(\frac{34}{35}\right)} = 5.803 \text{ hrs} = 5:48$$

\therefore Murió a las 0:12 hrs

Problema 2

Resuelva la ecuación diferencial en (2) por medio de la transformada de Laplace. Su solución $T(t)$ dependerá de h .

$$T_m(t) = 50 + 20U(h - t) \quad (2)$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m(t)) \quad (3)$$

Sustituyendo (2) en (3),

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 50 - 20U(h - t))$$

Con $k = -2 \ln\left(\frac{34}{35}\right)$ y $T(0) = 85$

Solución

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dT}{dt} = kT(t) - 50k - 20kU(t - h)\right\}$$

$$sT(s) - T(0) = kT(s) - \frac{50k}{s} - \frac{20ke^{-hs}}{s}$$

$$(s - k)T(s) = 85 - \frac{50k}{s} - \frac{20ke^{-hs}}{s}$$

$$T(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{85}{s - k} - \frac{50k}{s(s - k)} - \frac{20ke^{-hs}}{s(s - k)}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{85}{s - k}\right\} = 85e^{kt}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{50k}{s(s - k)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s} + \frac{B}{s - k}\right\}$$

$$-50k = A(s - k) + B(s)$$

$$A + B = 0$$

$$-A = -50$$

$$A = 50, B = -50$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{50}{s} - \frac{50}{s - k} \right\} = 50 - 50e^{kt}$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{20ke^{-hs}}{s(s - k)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{-hs} \left(-\frac{20k}{s(s - k)} \right) \right\} = U(t - h)h(t - h)$$

$$g(t - h) = \mathcal{L}_{t-h}^{-1} \left\{ -\frac{20k}{s(s - k)} \right\} = \mathcal{L}_{t-h}^{-1} \left\{ \frac{C}{s} + \frac{D}{s - k} \right\}$$

$$-20k = C(s - k) + D(s)$$

$$C + D = 0$$

$$-C = -20$$

$$C = 20, D = -20$$

$$h(t - h) = \mathcal{L}_{t-h}^{-1} \left\{ \frac{20}{s} - \frac{20}{s - k} \right\} = 20 - 20e^{k(t-h)}$$

$$g(t) = U(t - h) (20 - 20e^{k(t-h)})$$

$$T(t) = 85e^{kt} + 50 - 50e^{kt} + U(t - h) \cdot (20 - 20e^{k(t-h)})$$

$$T(t) = 35e^{kt} + 20U(t - h) \cdot (1 - e^{k(t-h)}) + 50; k = -2 \ln \left(\frac{34}{35} \right) \quad (4)$$

Problema 3 (CAS)

Completa la tabla de Diff. En particular, explique por qué los valores grandes de h dan la misma aproximación para la hora de la muerte.

Con la ecuación (4), $T(t) = 98$ y $t > h$

h	t	Hora en que movieron el cuerpo	Hora de la muerte
12	5.448081	18:00	
11	5.448081	19:00	
10	5.448081	20:00	
9	5.448081	21:00	
8	5.448081	22:00	
7	5.448081	23:00	
6	5.448081	0:00	
5	5.775420	1:00	
4	6.562310	2:00	
3	7.437305	3:00	
2	8.415677	4:00	

Problema 4

¿A quién quiere interrogar Diff y por qué?