Proyecto 3

Asesinato en el Mayfair

Samuel Iván Sánchez Salazar

Ecuaciones Diferenciales
MCI Luis Alonso Romo Mercado

Universidad Panamericana
Facultad de Ingeniería
Ingeniería en Inteligencia Artificial
28 de Noviembre 2022

Ley de Enfriamiento de Newton

La ley de enfriamiento de Newton enuncia que, cuando la diferencia de temperaturas entre un cuerpo y su medio ambiente no es demasiado grande, el calor transferido por unidad de tiempo hacia el cuerpo o desde el cuerpo por conducción, convección y radiación, es aproximadamente proporcional a la diferencia de temperaturas entre el cuerpo y dicho medio externo, siempre y cuando este último mantenga constante su temperatura durante el proceso de enfriamiento.

La genialidad de Newton se pone de manifiesto nuevamente cuando utilizando un horno de carbón de una pequeña cocina, realizó un sencillo experimento: calentó al rojo vivo un bloque de hierro, al retirarlo lo colocó en un lugar frio y observó cómo se enfriaba el bloque de metal en el tiempo. Sus conjeturas sobre el ritmo al cual se enfriaba el bloque dieron lugar a lo que hoy conocemos como ley de enfriamiento de Newton.

Problema 1

Después de reflexionar, Diff decide comenzar por suponer que el señor Wood fue asesinado en el refrigerador. ¿Más o menos a qué hora murió?

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m), t > 0 \tag{1}$$

$$T(0) = 85, t = 0 = 6:00\text{am}$$

$$T(-\tfrac{1}{2}) = 84$$

$$T_m = 50$$

$$T_{vivo} = 99$$

Solución

$$\frac{dT}{T - T_m} = kdt$$

$$\int \frac{dT}{T - T_m} = \int kdt$$

$$\ln(T - 50) = kt + c$$

$$T = ce^{kt} + 50;$$

Con la condicion inicial $T(0) = 85$,

$$T(0) = ce^{0t} + 50 = 85$$

$$c + 50 = 85$$

$$c = 35$$

$$T = 35e^{kt} + 50$$

Sustituyendo $t = -\frac{1}{2}$ y $T(-\frac{1}{2}) = 84$,

$$84 = 35e^{-\frac{1}{2}k} + 50$$

$$35e^{-\frac{1}{2}k} = 34$$

$$-\frac{k}{2} = \ln\left(\frac{34}{35}\right)$$

$$k = -2\ln\left(\frac{34}{35}\right)$$

Sustituyendo $k = -2\ln\left(\frac{34}{35}\right)$ y $T_{vivo} = 99$

$$99 = 35e^{kt} + 50$$

$$e^{kt} = \frac{49}{35}$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{49}{35}\right)}{-2\ln\left(\frac{34}{35}\right)} = 5.803 \text{ hrs} = 5{:}48$$

$\therefore$ Murió a las 0:12 hrs

Problema 2

Resuelva la ecuación diferencial en (2) por medio de la transformada de Laplace. Su solución $T(t)$ dependerá de h.

$$T_m(t) = 50 + 20U(h-t) \tag{2}$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m(t)) \tag{3}$$

Sustituyendo (2) en (3),

$$\frac{dT}{dt} = k\big(T - 50 - 20U(h-t)\big)$$

Con $k = -2\ln\left(\frac{34}{35}\right)$ y $T(0) = 85$

Solución

$$\mathscr{L}\left\{\frac{dT}{dt} = kT(t) - 50k - 20kU(t-h)\right\}$$

$$sT(s) - T(0) = kT(s) - \frac{50k}{s} - \frac{20ke^{-hs}}{s}$$

$$(s-k)T(s) = 85 - \frac{50k}{s} - \frac{20ke^{-hs}}{s}$$

$$T(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{85}{s-k} - \frac{50k}{s(s-k)} - \frac{20ke^{-hs}}{s(s-k)}\right\}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{85}{s-k}\right\} = 85e^{kt}$$

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{50k}{s(s-k)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s} + \frac{B}{s-k}\right\}$$

$$-50k = A(s-k) + B(s)$$

$$A + B = 0$$

$$-A = -50$$

$$A = 50, B = -50$$

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{50}{s} - \frac{50}{s-k}\right\} = 50 - 50e^{kt}$$

$$g(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{20ke^{-hs}}{s(s-k)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-hs}\left(-\frac{20k}{s(s-k)}\right)\right\} = U(t-h)h(t-h)$$

$$g(t-h) = \mathscr{L}_{t-h}^{-1}\left\{-\frac{20k}{s(s-k)}\right\} = \mathscr{L}_{t-h}^{-1}\left\{\frac{C}{s} + \frac{D}{s-k}\right\}$$

$$-20k = C(s-k) + D(s)$$

$$C + D = 0$$

$$-C = -20$$

$$C = 20, D = -20$$

$$h(t-h) = \mathscr{L}_{t-h}^{-1}\left\{\frac{20}{s} - \frac{20}{s-k}\right\} = 20 - 20e^{k(t-h)}$$

$$g(t) = U(t-h)\left(20 - 20e^{k(t-h)}\right)$$

$$T(t) = 85e^{kt} + 50 - 50e^{kt} + U(t-h) \cdot \left(20 - 20e^{k(t-h)}\right)$$

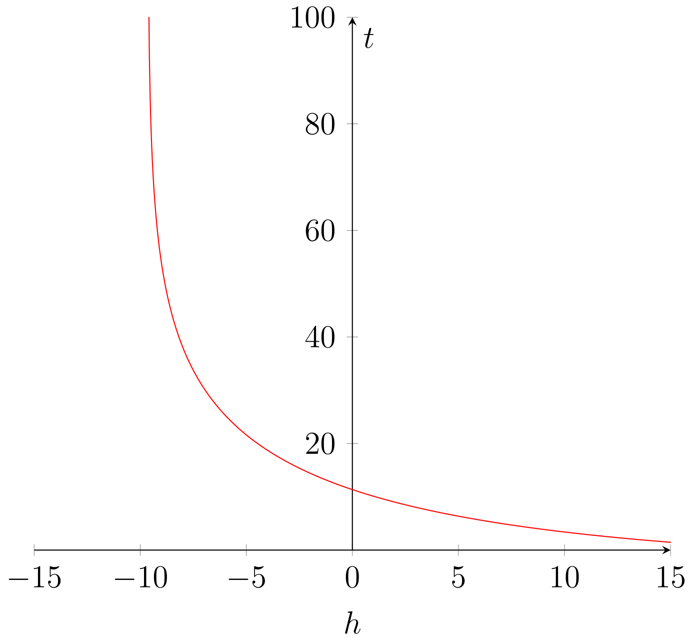
$$T(t) = 35e^{kt} + 20U(t-h) \cdot \left(1 - e^{k(t-h)}\right) + 50; k = -2\ln\left(\frac{34}{35}\right) \qquad (4)$$

Problema 3 (CAS)

Completa la tabla de Diff. En particular, explique por qué los valores grandes de h dan la misma aproximación para la hora de la muerte.

Con la ecuación (4), $T(t) = 99$ y $t > h$

h	t	Hora en que movieron el cuerpo	Hora de la muerte
12	2.5425	18:00	15:27
11	2.9578	19:00	16:03
10	3.4091	20:00	16:36
9	3.9006	21:00	17:06
8	4.4371	22:00	17:34
7	5.0246	23:00	17:59
6	5.6697	0:00	18:20
5	6.3807	1:00	18:37
4	7.1676	2:00	18:50
3	8.0426	3:00	18:57
2	9.0210	4:00	18:59



Gráfica Ecuación (4)

La Ecuación (4) al despejarla para que t dependa de h, tenemos:

$$t = \frac{\ln\left(\frac{29}{35-20e^{-kh}}\right)}{k}, k = -2\ln\left(\frac{34}{35}\right)$$

Podemos observar que se trata de una función exponencial inversa por lo que cuando crece h, t se hace cada vez más pequeño, por lo que da una hora de muerte cada vez más cercana a la hora en la que se movió el cuerpo. Por otro lado, cuando h decrece, t se hace cada vez más grande, lo que causa que la hora de muerte se aleje cada vez más de la hora en la que se movió el cuerpo y tienda a un sólo valor, aproximándose a las 19 hrs. como hora de la muerte.

Problema 4

¿A quién quiere interrogar Diff y por qué?
Debido a que se le vio por última vez entre las 17 y 18 hrs, sumando el hecho de que estuvo discutiendo con su esposa, y tomando en cuenta el rango de la hora de la muerte calculada en la tabla del Problema 3, que se encuentra entre las 16 y las 19 hrs, lo más lógico sería interrogar a la viuda, la señora Wood.