Demostrar que $D^4 f$ es dado por

$$D^4 f(x_j) \simeq \frac{f(x_j+2) - 4f(x_j+1) + 6f(x_j) - 4f(x_j-1) + f(x_{j-2})}{h^4}$$

Para estimar la derivada central se comparan las expresiones de ambos desarrollos de Taylor

$$f(x+2h) = \cancel{f(x)} + h\cancel{f'} + \frac{h^2}{2!} f'' + \frac{h^3}{\cancel{3!}} f''' + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}$$

$$f(x-2h) = \cancel{f(x)} - h\cancel{f'} + \frac{h^2}{2!} f'' - \frac{h^3}{\cancel{3!}} f''' + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}$$

$$f(x+h) = \cancel{f(x)} + 2h\cancel{f'} + 2h^2 f'' + \frac{16h^3}{\cancel{3!}} f''' + \frac{16h^4}{4!} f^{(4)}$$

$$f(x-h) = \cancel{f(x)} - 2h\cancel{f'} - 2h^2 f'' - \frac{16h^3}{\cancel{3!}} f''' + \frac{16h^4}{4!} f^{(4)}$$

Resto a $f(x+2h) - f(x+h)$ y Resto a $f(x-2h) - f(x-h)$ ent quedan terminos pares

La suma de los coeficientes de $h^4 f^{(4)} = \frac{15}{12}$

La suma de los coeficientes de $h^2 f'' = 3$

$$f(x+2h) - f(x+h) - f(x-h) + f(x-2h) = 3h^2 f'' + \frac{15}{12} h^4 f^{(4)}$$

$$f(x+2h) - f(x+h) - f(x-h) + f(x-2h) - 3h^2 f'' = \frac{15h^4 f^{(4)}}{12}$$

De internet sacamos que: $f'' = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$

$$\Rightarrow f(x+2h) - f(x+h) - f(x-h) + f(x-2h) - 3h^2\left(\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}\right) = \frac{15h^4 f^{(4)}}{12}$$

$$\Rightarrow f(x+2h) - f(x-h) - f(x-h) + f(x-2h) - 3f(x+h) + 6f(x) - 3f(x-h) = \frac{15h^4 f^{(4)}}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x+2h) - 4f(x-h) + 6f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{h^4} = \frac{15}{12} f^{(4)}$$

$$\Rightarrow D^4 f(x_j) \simeq \frac{f(x_j+2) - 4f(x_j+1) + 6f(x_j) - 4f(x_j-1) + f(x_{j-2})}{h^4}$$

El error es de tipo truncamiento

$$\frac{h^2}{6!} f^6(x) \Rightarrow O(h^2)$$