1. a) Considerando que A tiene una distribución normal

Primero buscamos la distribución conjunta de las variables aleatorias

$$L(X,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} A(x_i,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{\sigma^2}} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \frac{1}{(\sigma^2)^n} e^{\frac{\sum_{i=1}^{n} -(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

Luego aplicamos logaritmo natural a la función de distribución conjunta

$$ln(L(X,\sigma)) = ln\left(\prod_{i=1}^{n} A(x_i,\sigma)\right) = ln\left(\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \frac{1}{(\sigma^2)^n} e^{\frac{\sum_{i=1}^{n} -(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}}\right)$$
$$= -nln(\sqrt{2\pi}) - nln(\sigma^2) - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

Posteriormente derivamos este logaritmo respecto a μ

$$\frac{\partial ln(L(X,\sigma))}{\partial\mu} = -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(x_i-\mu)^2}{\partial\mu} = \frac{2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$$

Ahora igualamos la derivada a cero y despejamos μ

$$\frac{2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0$$

Despejando μ se tiene

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

b) Para estimar la varianza derivamos el logaritmo de la función de distribución conjunta y lo igualamos a cero

$$\frac{\partial ln(L(X,\sigma))}{\partial\sigma^2} = -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{{\sigma^2}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0 \rightarrow \frac{1}{\sigma^2}\left[-n + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right] = 0$$
$$\rightarrow -n + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0$$

Despejando σ^2

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}$$