DU 9

April 21, 2023

Vizualizujte problem 3 telies. Tri hmotne body budu mat na zaciatku vygenerovane nahodne suradnice a pociatocne rychlosti. Zmena ich pohyboveho stavu sa len v dosledku "gravitacneho" posobenia medzi nimi. Cize na kazdy hmotny bod budu posobit sily od dalsich dvoch, tieto sily treba vektorovo scitat a urcit z nich vektor zrychlenia aktualneho hmotneho bodu. Obrazok z tabule je prilozeny. Gravitacna sila, ktora posobi medzi dvoma hmotnymi bodmi (napriklad bodmi 1 a 2) je dana:

$$\vec{f_{12}} = \kappa \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r_{12}}}{r_{12}}, \tag{1}$$

kde $\vec{f_{12}}$ je vektor sily, κ je gravitacna konstanta, m_1 a m_2 su prislusne hmotnosti bodov, $\vec{r_{12}}$ je vektor medzi polohami bodov 1 a 2 a r_{12} je jeho velkost.Pre jednoduchost budeme uvazovat $\kappa = 1.0\ Nm^2kg^{-2}$ a $m_1 = m_2 = m_3 = 1.0\ kg$. Pre takuto zavislost sily od vzdialenosti $1/r_{12}^2$ je ale tazke nastavit parametre simulacie tak, aby sa hmotne body nerozleteli daleko do priestoru. My budeme preto pouzivat radsej zavislost:

$$\vec{f_{12}} = \kappa \frac{m_1 m_2}{r_{12}} \frac{\vec{r_{12}}}{r_{12}}, \tag{2}$$

co sice nie je gravitacna sila, ale lepsie sa s tym pracuje.
Ked pocitame velkost a smer sily na i-ty bod, tak vektor $\vec{r_{ij}}$ musi smerovat od bodu i k bodu j:

$$\vec{r_{ij}} = \vec{r_j} - \vec{r_i} = (x_j - x_i, y_j - y_i, z_j - z_i), \tag{3}$$

kde $\vec{r_i}$ a $\vec{r_j}$ su vlastne suradnice polohy bodu i a j. Velkost r_{ij} je potom:

$$r_{ij} = \sqrt{r_{ijx}^2 + r_{ijy}^2 + r_{ijz}^2}. \tag{4}$$

Na kazdy hmotny bod posobia takto dve pritazlive sily od ostatnych dvoch bodov, vyslednica je potom vektorovy sucet tychto dvoch sil. Pre kazdy hmotny bod potom mame vektor zrychlenia dany touto vyslednou silou (pre hmotnost rovnu 1). Z tej potom mozeme pouzitim Eulerovej metody vypocitat rychlost a suradnice v dalsom kroku. Napriklad pre bod 1 vypocet x-ovej zlozky rychlosti a suradnice bude:

$$\vec{f_1} = \vec{f_{12}} + \vec{f_{13}} \tag{5}$$

$$v_{1x}(t + \Delta t) = v_{1x}(t) + \Delta t f_{1x} \tag{6}$$

$$x_1(t + \Delta t) = x_1(t) + \Delta t v_{1x}(t) \tag{7}$$

a podobne pre y a z. Tu si treba dat ale pozor, nemozeme menit postupne jednotlive suradnice a zlozky rychlosti a medzi tym pocitat sily na ostatne hmotne body, lebo bude simulacia nestabilna. Treba vypocitat nove hodnoty v aktualnom kroku zo starych hodnot do nejakej pomocnej premennej pre vsetky tri body a az potom nakoniec ich naraz zmenit na nove.

Nakoniec este musime nejak generovat pociatocne hodnoty polohy a rychlosti pre vsetky tri body. Najlepsie je to spravit tak, ze tazisko systemu bude v pociatku suradnicoveho systemu $(0, 0, 0)$ a celkova hybnost systemu bude nulova - aby nam body neodleteli prec. Tieto veliciny sa pocitaju:

$$x_T = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$y_T = ...$$

$$z_T = ...$$

$$\vec{p} = m_1 \vec{v_1} + m_2 \vec{v_2} + m_3 \vec{v_3} \tag{8}$$

kde x_T, y_T a z_T su suradnice taziska a $\vec{p}$ je vektor celkovej hybnosti. My chceme, aby boli vsetky rovne 0. Spravit to mozeme tak, ze vygenerujeme nahodne suradnice a rychlosti prvych dvoch hmotnych bodov v nejakom rozumnom intervale, mozeme dat:

$$x, y, z, v_x, v_y, v_z \in (-1, 1), \tag{9}$$

a potom dopocitame suradnice a zlozky rychlosti tretieho bodu (pre rovnaku hmotnost $m = 1$) ako:

$$x_3 = -x_1 - x_2 \tag{10}$$

$$v_{3x} = -v_{1x} - v_{2x} \tag{11}$$

a podobne pre y-ovu a z-ovu zlozku. Ak bude vsetko spravne fungovat, tak by sa poloha taziska nemala pocas simulacie pohybovat a aj celkova hybnost by mala zostavat nulova (v ramci numerickej chyby). Pre kontolu tieto veliciny vypiste v kazdom kroku do konzoly.

Kvoli nazornosti vykreslujte aj stopu trajektorie kazdeho hmotneho bodu.