DU 8

April 14, 2023

Z tejto ulohy spravte vystup len do datoveho suboru a zobrazte v gnuplote (nepouzivate OpenGL). Pojde o volny pad telesa v atmosfere s odporom vzduchu. V prvom pripade zoberieme do uvahy konstantu hustotu vzduchu $\rho(z) = konst$. Odporovu silu budeme modelovat ako priamo umernu druhej mocnine rychlosti, takze zavislost zrychlenie bude:

$$\frac{dv}{dt} = -g + Kv^2 \tag{1}$$

kde

$$K = \frac{1}{2}\frac{CS\rho}{m} \tag{2}$$

C je koeficient odporu, S je plocha prierezu objektu, ρ je hustota vzduchu a m je hmotnost telesa. Analyticky vztah pre casovu zavislost rychlosti je potom:

$$v(t) = \frac{v_0 - v_\infty \tanh\left(\frac{gt}{v_\infty}\right)}{1 - \frac{v_0}{v_\infty}\tanh\left(\frac{gt}{v_\infty}\right)} \tag{3}$$

kde $v_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{\rho CS}}$.
Pre pripad $v_0 = 0\ m/s$ plati pre vysku:

$$z(t) = z_0 - \frac{v_\infty^2}{g} ln\left[\cosh\left(\frac{gt}{v_\infty}\right)\right] \tag{4}$$

Tuto zavislost vyneste do grafu. Nasledne ju porovnajte s numerickym riesenim tejto ulohy pomocou Eulerovej metody. Cize ked mame v jednom kroku zname z_n a v_n, potom v dalsom kroku:

$$v_{n+1} = v_n + h * f_v(t_n, z_n, v_n) \tag{5}$$
$$f_v(t_n, v_n, z_n) = -g - K|v_n|v_n \tag{6}$$
$$z_{n+1} = z_n + h * f_z(t_n, v_n) \tag{7}$$
$$f_z(t_n, v_n) = v_n \tag{8}$$

kde h je dlzka kroku, teda nase Δt. Pre prvy krok zvolte $v_0 = 0$ a $z_0 = 10000\ m$. Toto cele mozete pocitat v nejakom *while* cykle, zastavit to mozete pri dopade na zem $z_n <= 0$. Casova zavislost vysky v tomto pripade nie je az tak zaujimava, lebo od nej nezavisia ziadne veliciny. Porovnajte vysledky pre krok dlzky 1, 0.1 a 0.01 s. Krivka by mala kopirovat tu z analytickeho riesenia, len s vacsim Δt by tam mali byt vacsie odchylky.
Potom upravte program pre pripad, kedy hustota vzduchu zavisi od vysky:

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-\kappa z} \tag{9}$$

$$\rho_0 = \frac{M}{RT} p_0 \tag{10}$$

$$\kappa = \frac{Mg}{RT} \tag{11}$$

kde κ je koeficient exponencialneho poklesu hustoty s vyskou, M je molova hmotnost vzduchu, R je univerzalna plynova konstatnta, T je termodynamicka teplota (v Kelvinoch) a p_0 je tlak na urovni mora (pri $z = 0$ m). Tym padom uz v diferencialnej rovnici pre rychlost nebudu konstantne koeficienty, ale bude v nich vystupovat zavislost od vysky:

$$\frac{dv_z}{dt} = -g - K_0 e^{-\kappa z} |v_z| v_z \tag{12}$$

$$K_0 = \frac{1}{2} \frac{CS\rho_0}{m} \tag{13}$$

Takze dostaneme system diferencialnych rovnic prveho radu:

$$\frac{dv_z}{dt} = -g - K_0 e^{-\kappa z} |v_z| v_z \tag{14}$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z \tag{15}$$

Riesenie Eulerovou metodou vyzera ale rovnako ako v predchadajucom pripadem, len namiesto konstantneho koeficientu K je tam $K_0 e^{-\kappa z}$.
Pociatocnu vysku mozete dat vlastne lubovolnu, pre skok z lietadla napriklad $z_0 = 10000$ m (len pri vacsich vyskach sa zmena hustoty vzduchu nejak viac prejavi), pociatocna rychlost pri volnom pade je $v_0 = 0$, ak by smerovala hore (zvisly vrh) tak je kladna, smerom dole zaporna. Parametre mozete pouzit taketo:

$$g = 9.81\ m.s^{-1}$$
$$R = 8.314\ J.mol^{-1}.s^{-1}$$
$$p_0 = 101325\ Pa$$

$$\begin{aligned} M &= 0.029\ kg.mol^{-1} \\ S &= 2\ m^2 \\ C &= 0.5 \\ m &= 80\ kg \end{aligned}$$

Tak isto by sa dala pouzit aj zavislost teploty od vysky $T(z)$, co by dalo este realnejsi priebeh.

Vysledok zase zobrazte v gnuplot-e. Tieto hodnoty uz ale nemame s cim porovnat, kedze nemame analyticke riesenie k tymto rovniciam.