Capítulo 19 - Anillos Cocientes

D. Aplicaciones Elementales del Teorema Fundamental del Homomorfismo.

En cada ejercicio sea A un anillo conmutativo. Si $a \in A$ y n un entero positivo, la notación na denota:

$$a + a + \cdots + a \quad (n \text{ términos})$$

1. Sea $x, y \in A$,

a) $h(x+y) = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2$

b) $h(x+y) = (x+y)^2 = x^2 + y^2 = h(x) + h(y)$
$h(xy) = (xy)^2 = x^2y^2 = h(x)h(y)$

c) Sea $x \in A$ y $y \in A$: $(xy)^2 = x^2y^2 = 0y^2 = 0 \Longrightarrow xy \in J$
Sea $x, y \in B$: $(x+y)^2 = x^2 + y^2$; $(xy)^2 = x^2y^2$
$\ker h = \{x \in A \mid h(x) = 0\} = J$
Para $x^2 \in B$ se puede definir siempre $x \in A$ tal que $h(x) = x^2$, entonces: $A/J \cong B$

2. Sea $x, y \in A$

a) $h(x+y) = 3(x+y) = 3x + 3y = h(x) + h(y)$; $h(xy) = 3xy = 3xy + 6xy = 9xy = h(x)(y)$
*b)*Sea $x \in J$ y $y \in A$: $3xy = 3 \cdot 0 \cdot y = 0$
*c)*Sea $x, y \in B$: $3x + 3y = 3(x+y)$; $3x \cdot 3y = 9xy = 3xy + 6xy = 3xy$

3.

a) Sea $x, y \in A$: $\pi_a(x+y) = a(x+y) = ax + ay = \pi_a(x) + \pi_b(x)$; $\pi_a(xy) = a(xy) = a^2xy = \pi_a(x)\pi_a(y)$
b) $\ker \pi_a = \{x \in A \ \mid ax = 0\} = I_a = \{x \in A \mid ax = 0\}$
c) $\pi_a(n) = an = a + a + \cdots + a$ (n veces) $\in (a) \Longrightarrow A/I_0 \cong (a)$

4.

a) $\phi(a+b) = \pi_{a+b} = \pi_a + \pi_b = \phi(a) + \phi(b)$; $\phi(ab) = \pi_{ab} = \pi_a \cdot \pi(b) = \phi(a)\phi(b)$
b)$I_a = \{a \in A \mid ax = 0\}$; $\ker \phi = \{a \in A \mid \phi(a) = \pi_a = 0\} \Longleftrightarrow a = 0$
c)$A/I \cong \bar{A}$

E. Propiedades de Anillos Cocientes A/J en Relación de Propiedades de J.

1) Si cada elemento de A/J posee una raíz cuadrada, entonces $x + J = (y+J)^2 = y^2 + J$, es decir $x - y^2 \in J$. La implicancia contraria se da leyendo la demostración del revés.

2) Si todo elemento de A/J es su propio negativo, entonces $x + J = -x + J$m o equivalentemente, $x + x + J = J \Longleftrightarrow x + x \in J$. La implicancia contraria se da leyendo la demostración del revés.

3) Si A/J es anillo booleano, para todo $x + J \in A/J$: $(x+J)^2 = x^2 + J = x + J \Longleftrightarrow x^2 - x \in J$. La implicancia contraria se da leyendo la demostración del revés.

4) Se tiene que $J = \{x \in A \mid x^n = 0, n \in \mathbb{N}\}$. Usando el homomorfismo vemos que $\varphi(x^n) = \varphi(0) = x^n + J = J$, entonces $x^n \in J$, por lo que existe un entero m tal que $(x^n)^m = x^{nm} = 0$, pero esto quiere decir que a la vez $x \in J$ ($nm \in \mathbb{N}$), es decir $x + J = 0 + J$.

5) Supongamos que todo elemento de A/J es nilpotente, sea entonces $x + J \in A/J$, tal que $x^n + J = J$, entonces $x^n \in J$. (leer del reves)

6) Sea $y + J \in A/J$ elemento unidad, entonces existe para todo $x + J$, se cumple: $xy + J = x + J$ y $yx + J = x + J$, esto es equivalente a decir $xy - x \in J$ y $yx - x \in J$.

F. Ideales Primos y Maximales

Sea A un anillo conmutativo con unidad, J ideal de A. Demostrar:

1. A/J es un anillo conmutativo con unidad

Como A es conmutativo, se cumple que $ab = ba$ para todo $a, b \in A$, o equivalentemente que $ab - ba = 0$, usando el homomorfismo $\varphi : A \to A/J$, vemos que $\varphi(ab - ba) = \varphi(0) = ab - ba + J = J + 0$, esto es equivalente a decir $J + ab = J + ba$: $(J + a)(J + b) = (J + b)(J + b)$. Directamente usando el mapeo se ve que $\varphi(1) = 1 + J$, comprobar que es neutro trivial.

2. J es ideal primo si y solo si A/J es dominio entero (integral).

$\Longrightarrow$) Si J es primo, quiere decir que para $ab \in J$ entonces, $a \in J$ o $b \in J$, esto se puede traducir a que o, $J + a = J$ ó $J + b = 0$, entonces $(J + ab =)J = (J + a)(J + b)$ solo si uno de los factores es nulo.

$\Longleftarrow$ Si A/J dominio entero, la multiplicación $(J + a)(J + b) = J$, implica que $a + J = J$ ó $b + J = J$. Esto es la definición de ideal primo, solo falta traducirla: $ab \in J$, entonces $a \in J$ o $b \in J$.

3. Cada ideal maximal es un ideal primo.

Por ejercicio anterior, si J es maximal, A/J es un campo, los campos son dominios enteros en particular, y entonces J es primo.

4. Si A/J es un campo, entonces J es un ideal maximal.

Si A/J es un campo, para todo $J + a$, existe $J + b$ tal que $(J + a)(J + b) = J + 1$ o sea, $J + ab = J + 1 \Longleftrightarrow ab - 1 \in J$, supongamos que existe un ideal intermedio $J \subset I \subset A$. Si $a \in I - J$, entonces podemos encontrar $y \notin J$ tal que $xy - 1 \in J \subset I$. Pero como xy está en I, sigue que $1 = -(xy - 1) + xy \in I$, O equivalentemente que $I = A$.

G. Más Propiedades de Anillos Cocientes en Relación a Sus Ideales

Sea A un anillo y J un ideal de A.

1)
$\Longrightarrow$) Sea A/J un campo y $a \in A$ pero $a \notin J$, en el anillo todo elemento es invertible, por lo que para $J + a$ existe $J + b$ tal que $(J + a)(J + b) = J + 1$, es decir $J + ab = J + 1$, lo que es equivalente a decir que $ab - 1 \in J$

$\Longleftarrow$) Si hay $a \in A$ tal que $a \notin J$ y b tal que $ab - 1 \in J$, directamente podemos ver que A/J es un campo, pues $ab - 1 inJ \Longleftrightarrow J + ab = J + 1 \Longleftrightarrow (J + a)(J + b) = J + 1$

2)
$\Longrightarrow$) Primero supongamos que el elemento $J + a \in A/J$ es invertible, hay $J + b \in A/J$ tal que $(J + a)(J + b) = (J + ab) = J + 1$ si y solo si $ab - 1 \in J$. Supongamos ahora que es divisor de cero, entonces hay $J + b$ coset no trivial donde $(J + a)(J + b) = J + ab = J \Longleftrightarrow ab \in J$.

$\Longleftarrow$) Si $ax \in J$, tal que $a \notin J$ y $x \notin J$, si $J + ax = J \Longleftrightarrow (J + a)(J + x) = J$. Luego, si $ax - 1 \in J \Longleftrightarrow J + ax = J + 1 \Longleftrightarrow (J + a)(J + x) = J + 1$.

3)
$\Longrightarrow$) Sea J semiprimo

H. $\mathbf{Z}_n$ Como Imagen Homomorfa de $\mathbb{Z}$

1) Supongamos que hay números $x.y$ satisfaciendo la ecuación $x^2+7y^2 = 24$. Al mapear la ecuación a $\mathbb{Z}_7$ obtenemos: $\bar{x}^2 = \bar{3}$, pero no hay ninguna clase de equiv en $\mathbb{Z}_7$ que satisfaga la ecuación. Entonces, la ecuación original no posee solución.

2)

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = y^2$$
$$3x^2 + 6x + 5 = y^2$$

Se puede reducir la ecuación a módulo 3, obteniendo $\bar{y}^2 = \bar{2}$, pero no hay $\bar{y} \in \mathbb{Z}_3$ tal que su cuadrado sea $\bar{2}$

3) Para ver el último dígito reducimos módulo 10, entonces llevamos la ecuación $x^2 + 10y^2 = n$ a $\bar{x}^2 = \bar{n}$. Por computación directa, tenemos que los cuadrados en $\mathbb{Z}_{10}$ son:

$$0^2 = 0 \quad 1^2 = 1 \quad 2^2 = 4 \quad 3^2 = 9 \quad 4^2 = 6 \quad 5^2 = 5 \quad 6^2 = 6 \quad 7^2 = 9 \quad 8^2 = 4 \quad 9^2 = 1$$

ninguno termina en $2, 3, 7$ u 8.

4) Para ver que en la sucesión $3, 8, 13, 18, 23, \ldots$ no hay ningún cuadrado, vemos la forma general de la sucesión: $3 + 5n$ y la igualamos a un cuadrado $3 + 5n = x^2$. Teniendo esta ecuación, la podemos reducir módulo 5: $\bar{x}^2 = \bar{3}$, pero esta ecuación no posee solución.

5) Para ver que la sucesión $2, 10, 15, 26, \ldots$ no posee un cubo hacemos lo mismo que el ejercicio anterior: $2+8n = x^3$, reduciendo módulo 8 se obtiene: $\bar{x}^3 = \bar{2}$. Por computación directa, esta ecuación no posee solución:

$$0^3 = 0 \quad 1^3 = 1 \quad 2^3 = 0 \quad 3^3 = 3 \quad 4^3 = 0 \quad 5^3 = 5 \quad 6^3 = 0 \quad 7^3 = 7$$

No hay solución.

6) Para ver que la secuencia $3, 11, 19, 27, \ldots$ no posee un entero suma de dos cuadrados vemos la ecuación $3 + 8d = x^2 + y^2$, reduciendo módulo 8 se obtiene que: $\bar{3} = \bar{x}^2 + \bar{y}^2$. Por ejercicio anterior, podemos ver que la suma de los cuadrados módulo 8 nunca da $\bar{3}$.

7) $n = x(x+1) \Longrightarrow \bar{n} = \bar{x}^2 + \bar{x} \pmod{\mathbb{Z}_{10}}$

$$0^2 + 0 = 0 \quad 1^2 + 1 = 2 \quad 3^2 + 3 = 2 \quad 4^2 + 4 = 0 \quad 5^2 + 5 = 0 \quad 6^2 + 6 = 2 \quad 7^2 + 7 = 6 \quad 8^2 + 8 = 2 \quad 9^2 + 9 = 0$$

8) $n = x(x+1)(x+2) = x(x^2 + 3x + 2) = x^3 + 3x^2 + 2x$, luego, reduciendo la ecuación módulo 10 se obtiene: $\bar{n} = \bar{x}^3 + \bar{3}\bar{x}^2 + \bar{2}\bar{x}$. Por computación directa:

$$\begin{aligned}
0^3 + 3(0)^2 + 2(0) &= 0 \quad \Rightarrow 0 \pmod{10} = 0 \\
1^3 + 3(1)^2 + 2(1) &= 6 \quad \Rightarrow 6 \pmod{10} = 6 \\
2^3 + 3(2)^2 + 2(2) &= 24 \quad \Rightarrow 24 \pmod{10} = 4 \\
3^3 + 3(3)^2 + 2(3) &= 60 \quad \Rightarrow 60 \pmod{10} = 0 \\
4^3 + 3(4)^2 + 2(4) &= 120 \quad \Rightarrow 120 \pmod{10} = 0 \\
5^3 + 3(5)^2 + 2(5) &= 210 \quad \Rightarrow 210 \pmod{10} = 0 \\
6^3 + 3(6)^2 + 2(6) &= 336 \quad \Rightarrow 336 \pmod{10} = 6 \\
7^3 + 3(7)^2 + 2(7) &= 504 \quad \Rightarrow 504 \pmod{10} = 4 \\
8^3 + 3(8)^2 + 2(8) &= 720 \quad \Rightarrow 720 \pmod{10} = 0 \\
9^3 + 3(9)^2 + 2(9) &= 990 \quad \Rightarrow 990 \pmod{10} = 0
\end{aligned}$$