Capítulo 23

A. Resolviendo Congruencias Simples

1.

a) $60x \equiv 12 \pmod{24}$.

$$m = \frac{22}{\gcd(60,24)} = \frac{22}{12} = 2$$

b) $42x \equiv 24 \pmod{30}$

$$m = \frac{30}{\gcd(42,30)} = \frac{30}{6} = 5$$

c) $49x \equiv 30 \pmod{25}$

$$m = \frac{25}{\gcd(49,25)} = \frac{25}{1} = 25$$

d) $39x \equiv 14 \pmod{52}$

No tiene solución, ya que: $\gcd(39,52) = 13$, pero $13 \nmid 14$

e) $147x \equiv 47 \pmod{98}$

No tiene solución, ya que: $\gcd(98,147) = 7$, pero $7 \nmid 47$

f) $39x \equiv 26 \pmod{52}$

$$m = \frac{26}{\gcd(39,52)} = \frac{26}{13} = 2$$

2.

a) $12x \equiv 7 \pmod{25}$
La ecuación no se puede reducir ya que $\gcd(12,25) = 1$. $x \equiv 11 \pmod{25}$

b) $35x \equiv 8 \pmod{12}$.
La ecuación no se puede reducir ya que $\gcd(35,12) = 1$. $x \equiv 4 \pmod{12}$

c) $15x \equiv 9 \pmod{6}$
Como $\gcd(15,6) = 3$, la ecuación se reduce a $5x \equiv 3 \pmod{2}$. $x \equiv 1 \pmod{2}$

d) $42x \equiv 12 \pmod{30}$
Como $\gcd(42,30) = 6$, la ecuación se reduce a $7x \equiv 2 \pmod{5}$. $x \equiv 1 \pmod{5}$

e) $147x \equiv 49 \pmod{98}$
Como $\gcd(39,52) = 12 \Longrightarrow 3x \equiv 2 \pmod{4}$. $x \equiv 2 \pmod{4}$

f) $39x \equiv 25 \pmod{52}$
Como $\gcd(39,52) = 13 \Longrightarrow 3x \equiv 2 \pmod{4}$. $x \equiv 2 \pmod{4}$

3.
a) Explicar por qué $2x^2 \equiv 8 \pmod{10}$ posee las mismas soluciones que $x^2 \equiv 4 \pmod{5}$.

Por teorema, existe una solución módulo m. En donde $m = 10/\gcd(2,10) = 10/2 = 5$. Con esto, la ecuación se puede reducir a $x^2 \equiv 4 \pmod{5}$.

b) Explicar por qué $x \equiv 2 \pmod{5}$ y $x \equiv 3 \pmod{5}$ son todas las soluciones de $2x^2 \equiv 8 \pmod{10}$

$$\gcd(2,10) = 2 \Longrightarrow x^2 \equiv 4 \pmod{5} \Longleftrightarrow x^2 - 4 \equiv 0 \pmod{5} \Longleftrightarrow (x-2)(x+2) \equiv 0 \pmod{5}$$
$$\Longrightarrow x \equiv 2 \pmod{5} \text{ o } x \equiv 3 \pmod{5}$$

4. Resolver las siguientes congruencias cuadráticas

a) $6x^2 \equiv 9 \pmod{12}$.

$\gcd(6,15) = 3 \Longrightarrow 2x^2 \equiv 3 \pmod 5 \Longrightarrow x^2 \equiv 4 \pmod 5 \Longleftrightarrow (x+2)(x-2) \equiv 0 \pmod 5 \Longrightarrow x \equiv 2 \pmod 5$ o $x \equiv 3 \pmod 5$

b) $60x^2 \equiv 18 \pmod{24}$

$\gcd(60,18) = 6 \Longrightarrow 10x^2 \equiv 3 \pmod 4$. La ecuación reducida no tiene solución ya que $\gcd(10,4) \nmid 3$

c) $30x^2 \equiv 18 \pmod{24}$

$\gcd(30,24) = 6 \Longrightarrow 5x^2 \equiv 3 \pmod 4 \Longrightarrow x^2 \equiv 3 \pmod 4$. Esta ecuación no tiene soluciones en $\mathbb{Z}_4$

d) $4(x+1)^2 \equiv 14 \pmod{10}$

$\gcd(4,10) = 2 \Longrightarrow 2(x+1)^2 \equiv 7 \pmod 5 \Longleftrightarrow (x+1)^2 \equiv 1 \pmod 5 \Longleftrightarrow (x+1-1) \equiv 0 \pmod 5$ o $(x+1+1) \equiv 0 \pmod 5 \Longrightarrow x \equiv 0 \pmod 5$ o $x \equiv 3 \pmod 5$

e) $4x^2 - 2x - 2 \equiv 0 \pmod 6$

La ecuación es equivalente a $4x^2 + 4x + 4 \equiv 0 \pmod 6 \Longleftrightarrow 4(x^2 + x + 1) \equiv 0 \pmod 6 \Longleftrightarrow 2(x^2 + x + 1) \equiv 0 \pmod 3 \Longrightarrow x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod 3 \Longrightarrow x \equiv 1 \pmod 3$

f) $3x^2 - 6x + 6 \equiv 0 \pmod{15}$

$3(x^2 - 2x + 2) \equiv 0 \pmod{15} \Longleftrightarrow 3(x^2 - 2x + 1 - 1 + 2) \equiv 0 \pmod{15} \Longleftrightarrow 3\big((x-1)^2 + 1\big) \equiv 0 \pmod{15} \Longleftrightarrow 3(x-1)^2 \equiv 12 \pmod{15} \longrightarrow (x-1)^2 \equiv 4 \pmod 5 \Longleftrightarrow x + 1 \equiv 0 \pmod 5$ o $x - 3 \equiv 0 \pmod 5$

$$x \equiv 4 \pmod 5 \text{ o } x \equiv 3 \pmod 5$$

5. Resolver las siguientes congruencias

a) $x^4 \equiv 4 \pmod 6$

Equivalente a $x^2 - 2 \equiv 0 \pmod 6$ o $x^2 + 2 \equiv 0 \pmod 6 \Longleftrightarrow x^2 \equiv 2 \pmod 6$ o $x^2 \equiv 4 \pmod 6$

$x^2 \equiv 2 \pmod 6$ no tiene solución. De la segunda ecuación se extrae que $x \equiv 2 \pmod 6$ o $x \equiv 4 \pmod 6$

b) $2(x-1)^4 \equiv 0 \pmod 8$.

$\gcd(2,8) = 2 \Longrightarrow (x-1)^4 \equiv 0 \pmod 4 \Longrightarrow 2^2 \mid \big((x-1)^2\big)^2 \Longrightarrow (x-1) \equiv 0 \pmod 2 \Longleftrightarrow x \equiv 1 \pmod 2$

c) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \equiv 0 \pmod 8$

$(x+1)^3 \equiv 0 \pmod 8 \Longrightarrow 2^3 \mid (x+1)^3 \Longrightarrow 2 \mid (x+1) \Longleftrightarrow x + 1 \equiv 0 \pmod 2 \Longleftrightarrow x \equiv 1 \pmod 2$

d) $x^4 + 2x^2 + 1 \equiv 4 \pmod 5$

$(x^2+1)^2 \equiv 4 \pmod 5 \Longleftrightarrow (x^2-1)(x^2+3) \equiv 0 \pmod 5 \Longleftrightarrow x^2 \equiv 1 \pmod 5$ o $x^2 \equiv 2 \pmod 5$

La ecuación $\bar{x}^2 = \bar{2}$ no posee solución en $\mathbb{Z}_5$. De la primera ecuación se obtiene que $x \equiv 1 \pmod 5$ o $x \equiv 4 \pmod 5$

6. Resolver las siguientes ecuaciones diofantinas (Si no tienen solución, argumentar).

a) $14x + 15y = 11$

$$14x \equiv 11 \pmod{15} \Longrightarrow x \equiv 4 \pmod{15}$$
$$15y \equiv 11 \pmod{14} \Longrightarrow x \equiv 11 \pmod{14}$$

b) $4x + 5y = 1$

$$4x \equiv 1 \pmod 5 \Longrightarrow x \equiv 4 \pmod 5$$
$$5y \equiv 1 \pmod 4 \Longrightarrow x \equiv 1 \pmod 4$$

c) $21x + 10y = 9$

$$21x \equiv 9 \pmod{10} \Longrightarrow x \equiv 9 \pmod{10}$$
$$10y \equiv 9 \pmod{21} \Longrightarrow x \equiv 3 \pmod{21}$$

d) $30x^2 + 24y = 18$

$$24y \equiv 18 \pmod{30} \Longrightarrow 4y \equiv 3 \pmod 5 \Longrightarrow x \equiv 2 \pmod 5$$
$$30x^2 \equiv 18 \pmod{24} \Longrightarrow 5x^2 \equiv 3 \pmod 4 \Longleftarrow x^2 \equiv 3 \pmod 4 \Longleftrightarrow \bar{x}^2 = \bar{3} \text{ no tiene solución en } \mathbb{Z}_4$$