Semantica Operazionale MiniCaml

December 2022

Grammatica

Tipi: $\sigma, \tau ::= Int \mid Bool \mid String \mid Closure \mid$

Espressioni: $t, s, e ::= \underline{n} \mid \underline{true} \mid \underline{false} \mid x \mid t \oplus s \mid t \, ? \, s \mid t \circledless s$
$\mid ite\ (t, s, e) \mid let\ x = t \text{ in } s \mid fun\ x \to e$
$\mid let\ rec\ \varphi\ x = t \text{ in } s \mid t\ s$

Nota:

$\oplus$ varia su un insieme di operazioni aritmetiche.
$\circledless$ varia su un insieme di predicati aritmetici binari.
$?$ varia su un insieme di operazioni logiche binarie.

Es:

$\oplus ::= + \mid - \mid *$
$\circledless ::= == \mid < \mid >$
$? ::= \wedge \mid \vee$

Ambienti e valori sono definiti come segue:

$v ::= \underline{n} \ \mid \ \underline{b} \ \mid \ Clo\ (x, t, \Sigma) \ \mid \ RecClo(x, \varphi, t, \Sigma) \ \mid \perp$

Un ambiente Σ è una funzione da identificatori (X) a valori (V) ovvero $\Sigma : X \to V$.

Nota bene:

Valori e ambiente sono definiti mutuamente. Tra i valori c'è $\perp$.
Quindi se x non è definito nell'ambiente Σ, avremmo $\Sigma(x) = \perp$.

Semantica Operazionale

Relazione deterministica tra coppie Ambiente, Espressione e Valori.

Notazione: $(\Sigma, t) \Rightarrow v$

"Nell'ambiente Σ, il termine t viene valutato al valore v."

$$\frac{}{\left(\Sigma,\ c\right) \Rightarrow c}$$ (c costante) Esempio $\underline{n}$, $\underline{b}$, ...

$$\frac{\left(\Sigma,\ t\right) \Rightarrow \underline{n} \quad \left(\Sigma,\ s\right) \Rightarrow \underline{m} \quad l = n\ [\![\oplus]\!]\ m}{\left(\Sigma,\ t \oplus s\right) \Rightarrow \underline{l}}$$

$[\![\oplus]\!]$ è l'operazione "semantica" corrispondente a $\oplus$. A livello di interprete, $[\![\oplus]\!]$ è data come operazione primitiva implementata in OCaml.

Esempio:

$\oplus = add$ e $[\![add]\!] = +$

$$\frac{\left(\Sigma,\ t\right) \Rightarrow \underline{n} \quad \left(\Sigma,\ s\right) \Rightarrow \underline{m} \quad l = n + m}{\left(\Sigma,\ t\ add\ s\right) \Rightarrow \underline{l}}$$

Stessa cosa per '$<$' e '?'

$$\frac{\left(\Sigma,\ t\right) \Rightarrow true \quad \left(\Sigma,\ s_1\right) \Rightarrow v}{\left(\Sigma,\ ite(t, s_1, s_2)\right) \Rightarrow v} \qquad \frac{\left(\Sigma,\ t\right) \Rightarrow false \quad \left(\Sigma,\ s_2\right) \Rightarrow w}{\left(\Sigma,\ ite(t, s_1, s_2)\right) \Rightarrow w}$$

$$\frac{}{\left(\Sigma,\ fun\ x \rightarrow t\right) \Rightarrow Clo(x, t, \Sigma)}$$

$$\frac{\big(\Sigma,\ t\big) \Rightarrow v \quad \big(\Sigma[x := v],\ s\big) \Rightarrow w}{\big(\Sigma,\ let\ x = t\ in\ s\big) \Rightarrow w}$$

$$\frac{\big(\Sigma\ [\ \varphi := RecClo(x,\ \varphi,\ t,\ \Sigma)\ ],\ t\big) \Rightarrow v}{\big(\Sigma,\ let\ rec\ \varphi\ x = t\ in\ s\big) \Rightarrow v}$$

$$\frac{\big(\Sigma,\ t\big) \Rightarrow Clo(x,\ t',\ \Sigma') \quad \big(\Sigma,\ s\big) \Rightarrow v \quad \big(\Sigma'\ [x := v],\ t'\big) \Rightarrow w}{\big(\Sigma,\ t\ s\big) \Rightarrow w}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\big(\Sigma,\ t\big) \Rightarrow RecClo(x,\ \varphi,\ t',\ \Sigma') \\ \big(\Sigma,\ s\big) \Rightarrow v \\ \big(\Sigma'\ [\ \varphi := RecClo(x,\ \varphi,\ t',\ \Sigma')\ ]\ [x := v],\ t'\big) \Rightarrow w\end{array}}{\big(\Sigma,\ t\ s\big) \Rightarrow w}$$

Nota: Quest'ultima formula è scritta in colonna per motivi di spazio, le 3 implicazioni logiche formano la premessa della regola.

Notazione: $\Sigma\ [x := v]$ è l'aggiornamento di x in Σ con v.

$$\big(\Sigma\ [x := v]\big)\ (y) = \begin{cases} v & se\ \ x = y \\ \Sigma(y) & altrimenti \end{cases}$$