Docente/i

Luigi Orsina / Adriana Garroni

Disequazioni

Con due moduli

$\{x \in \Re: |x - a| + |x - b| \leq c\}$

01

$x - a \leq c$

$x - b \leq c$

02

|Grafico|

03

- calcolare il segno dei due moduli (01);
- disegnare il grafico del segno (02);
- creare un sistema per ogni zona del grafico: se il segno del modulo è negativo in quella zona dovrai cambiarne il segno (03);
- fai l'unione tra i sistemi (04).

Formula con modulo

$\{x \in \Re: |x - a| \leq b\} = \{x \in \Re: a - b \leq x \leq a + b\} = [a - b, a + b]$

Logaritmi

Proprietà

$a^{log_a(b)} = b \, con \, a > 0 \, e \, \neq 1 \, e \, b > 0$	$log_a(b \times c) = log_a(b) + log_a(c)$
$log_a(b^c) = c \times log_a(b)$	$log_a(\frac{b}{c}) = log_a(b) - log_a(c)$
$log_a(b) = \frac{log_c(b)}{log_c(a)} con \, c > 1$	$log_a(b) = \frac{1}{log_b(a)}$

Prodotti notevoli

Quadrato del binomio

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

Cubo del binomio

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Somma per differenza

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Differenza di cubi

$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^2$ oppure
$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^2$

Razionalizzazione

Semplice

$\frac{Q}{\sqrt{A}} = \frac{Q}{\sqrt{A}} x \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A}} = \frac{Q\sqrt{A}}{\sqrt{A}}$ o in generale $\frac{Q}{\sqrt[n]{A^m}} = \frac{Q}{\sqrt{A}} x \frac{\sqrt[n]{A^{n-m}}}{\sqrt[n]{A^{n-m}}} = \frac{Q\sqrt[n]{A^{n-m}}}{\sqrt[n]{A^{m+n-m}}} = \frac{Q\sqrt[n]{A^{n-m}}}{A}$

Somma o differenza di radici quadratiche

$\frac{Q}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{Q}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} x \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{Q(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$ oppure

$\frac{Q}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{Q}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} x \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{Q(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$

poiché in entrambi i casi
$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$

Somma o differenza di radici cubiche

$$\frac{Q}{\sqrt[3]{a}\_+\sqrt[3]{b}} = \frac{Q}{\sqrt[3]{a}\_+\sqrt[3]{b}} x \frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}} = \frac{Q(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2})}{a+b}$$ oppure

$$\frac{Q}{\sqrt[3]{a}\_-\sqrt[3]{b}} = \frac{Q}{\sqrt[3]{a}\_-\sqrt[3]{b}} x \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}} = \frac{Q(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2})}{a-b}$$

Potenze

Regola del prodotto	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 128$
	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$3^2 \cdot 4^2 = (3 \cdot 4)^2 = 144$
Regola del quoziente	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 4$
	$\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$	$\frac{4^3}{2^3} = (\frac{4}{2})^3 = 8$
Regole delle potenze	$(b^n)^m = b^{n \cdot m}$	$(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 64$
	$_{b}n^{m}\ _{=\ b}(n^{m})$	$_{2}3^{2}\ _{=\ 2}(3^{2})_{=\ 512}$
	$^{m}\sqrt{(b^n)} = b^{n/m}$	$^{2}\sqrt{(2^6)} = 2^{6/2} = 8$
	$b^{1/n} = {}^{n}\sqrt{b}$	$8^{1/3} = {}^{3}\sqrt{8} = 2$
Esponenti negativi	$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = 0.125$

N su radice di N

$\frac{Qn}{H\sqrt{n}} = \frac{Q\sqrt{n}}{H}$ $con\ Q,\ H\ polinomi\ generici\ cioè$ $\frac{n}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{1}$

Quoziente di potenze con la stessa base

$\frac{a^n}{a^m} = a^{m-n}$ o $\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}}$ $se\ m\ >\ n$ o $\frac{a^n}{a^m} = \frac{a^{m-n}}{1}$ $se\ m\ <\ n$

Insiemi

Monotonia

$E\ =\ \{a_n\ \forall\, n\ \in\ \aleph\}$

Se a_n è monotona crescente ↗

$inf(E)\ =\ a_0$	$sup(E)\ n\ \in\ \aleph\ =\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n$	$m(E)\ =\ inf(E)$	$\nexists M(E)$

Quindi esiste il minimo di E ed è uguale ad $inf(E)$, ma non esiste il massimo

Se a_n è monotona decrescente ↘

$inf(E)\ n\ \in\ \aleph\ =\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n$	$sup(E)\ =\ a_0$	$\nexists m(E)$	$M(E)\ =\ sup(E)$

Quindi esiste il massimo di E ed è uguale a $sup(E)$, ma non esiste il minimo

Dimostrazione che $inf(E)\ \neq\ min(E),\ con\ inf(E) \to 1,\ a_n\ =\ \frac{11n+10}{11n+8}$:

$\exists_{\overline{n}}\ \in\ \aleph\ con\ a_{\overline{n}}\ =\ 1 \Leftrightarrow \frac{11\overline{n}+10}{11\overline{n}+8}\ =\ 1 \Leftrightarrow 11\overline{n}\ +\ 10\ =\ 11\overline{n}\ +\ 8 \Leftrightarrow 10\ \neq\ 8$

Intervallo

$E\ =\ \{a_n,\ n\ \in\ \aleph\},\ non\ è\ mai\ un\ intervallo$

Se c'è una successione a_n con n che appartiene ai naturali E non è mai un intervallo.

Successioni

Operazioni

$a_n \to L, \qquad b_n \to M$

$a_n \pm b_n \to L \pm M$	$a_n * b_n \to L * M$	$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{L}{M} \quad con\, M \neq 0$

Forme indeterminate

$\frac{\infty}{\infty}$	$\infty \times 0$	$\infty - \infty$	$\frac{0}{0}$
∞^0	0^0	$1^{\pm\infty}$	

Gerarchia degli infiniti

$$log_B(n)^a << n^s << A^n << n! << n^n \qquad con\, B > 1,\ a > 0,\ s > 0,\ A > 1$$

Numero di nepero

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{A}{a_n}\right)^{a_n} = e^A \; o\; se \; \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{A}{a_n}\right)^{a_n} cioè \; \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-A}{a_n}\right)^{a_n} = e^{-A}$$

Semplificazione

$$A^{n^x\times\frac{n^y}{n^y}} = (A^{n^y})^{\frac{n^x}{n^y}}$$

oppure se abbiamo una somma/differenza

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{A}{a_n+x})^{a_n} = (1+\frac{A}{a_n+x})^{a_n\times\frac{a_n+x}{a_n+x}} = (e^A)^1$$

Stirling

$n! \simeq n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ cioè

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$$

Limiti Notevoli Fratti

Se $a_n \to 0$ allora

$\frac{log_e(1+a_n)}{a_n} = 1$	$\frac{tg(a_n)}{a_n} = 1$	$\frac{1-cos(a_n)}{(a_n)^2} = \frac{1}{2}$
$\frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$	$\frac{arcsen(a_n)}{a_n} = 1$	$\frac{(a_n)^2}{1-cos(a_n)} = 2$
$\frac{sin\, a_n}{a_n} = 1$	$\frac{arctg(a_n)}{a_n} = 1$	

Limiti Notevoli

Se $a_n \to 0$ allora

$log_e(1 + a_n) \simeq a_n$	$tg(a_n) \simeq a_n$	$1 - cos(a_n) \simeq \frac{(a_n)^2}{2}$
$e^{a_n} - 1 \simeq a_n$	$arcsen(a_n) \simeq a_n$	
$sen(a_n) \simeq a_n$	$arctg(a_n) \simeq a_n$	

Monotonia

$a_{n+1} \geq a_n$ $per\ vedere\ se\ è\ monotona\ crescente\ = a_{n+1} - a_n \geq 0$

$a_{n+1} \leq a_n$ $per\ vedere\ se\ è\ monotona\ decrescente\ = a_{n+1} - a_n \leq 0$

Se nello svolgimento il denominatore è positivo, possiamo escluderlo in quanto non utile nel determinare il segno della disequazione.
Quindi confrontiamo solo i numeratori.

Goniometria

Valori fondamentali

gradi	rad	$sen(\alpha)$	$cos(\alpha)$	$tg(\alpha)$	gradi	rad	$sen(\alpha)$	$cos(\alpha)$	$tg(\alpha)$
0°	0	0	1	0	180°	π	0	-1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	**240°**	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	-	**270°**	$\frac{3\pi}{4}$	-1	0	-
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	**300°**	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	**315°**	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	**330°**	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Periodicità

$sen(\alpha)$	$cos(\alpha)$	$tg(\alpha)$
2π	2π	π