Docente/i

Luigi Orsina / Adriana Garroni

Limiti di funzioni

Teorema Ponte

Valgono tutti i teoremi già visti con i limiti di successioni

I TEOREMI VALGONO <u>FORMALMENTE</u> A $+\infty$, QUINDI SE ANDIAMO A $-\infty$ DOBBIAMO USARE IL CAMBIO DI VARIABILE $y =- x$

Cambio di variabile

Se ad esempio ho:

$\lim\limits_{x \to 3} \frac{sen(3x)}{3x}$ poniamo $t = x - 3$ cioè $x \to 3,\ t = 3 - 3 = 0$

$\lim\limits_{t \to 0} \frac{sen(t)}{t} = 1$ per il teorema dei limiti notevoli $se\ a_n \to 0, \frac{sen(a_n)}{a_n} = 1$

Esistenza di un punto

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$

Continuità su X

$f\colon \Re \to \Re\ x_0 \in \Re$ Allora f è continua in x_0 se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

cioè deve valere $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$

Continuità su R/E

$f\colon \Re \to \Re\ x_0 \in \Re$

Allora f è continua su $\Re/E$ se è continua in x_0, $\forall x_0 \in \Re/E$

$\Rightarrow \forall x_0 \in \Re/E,\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Operazioni tra funzioni continue

Se $f\ e\ g$ sono due funzioni continue allora lo sono anche

$f \pm g$	$f * g$	$\frac{f}{g}$, $g \neq 0$
f^g	$f(g(x))$	

Esistenza degli 0

Sia f: $[a, b] \rightarrow \Re$ continua in $[a, b]$

Se $f(a) * f(b) < 0$ $allora$ $\exists_c \in [a, b]: f(c) = 0$

Weierstrass

Sia f: $[a, b] \rightarrow \Re$ una funzione <u>continua</u> in $[a, b]$ <u>intervallo chiuso e limitato</u>

Allora $\exists_{x_m, x_M} \in [a, b]$: $min(f(x)) = m = f(x_m) \leq f(x_M) = M = max(f(x))$

Con $max\ e\ min\ riferiti\ ad$ $[a, b]$

Valori intermedi generalizzato

Se f: $\Re \rightarrow \Re$ è continua e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm \infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \mp \infty$

allora $f(\Re) = \Re$ cioè $f(x)$ è suriettiva cioè $\forall t \in \Re$, $\exists x_t \in \Re$: $f(x_t) = t$

Derivate

Definizione

La derivata è il limite di h (incremento) che tende a 0 del rapporto incrementale:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Regole

Moltiplicazione per costante	$Dkf(x) = kf'(x)$
Somma / Differenza	$D\, f(x) \pm g(x) = f'(x) \pm g'(x)$
Moltiplicazione	$D\, f(x)g(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$
Divisione	$D\, \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)g'(x)-f'(x)g(x)}{g(x)^2}$

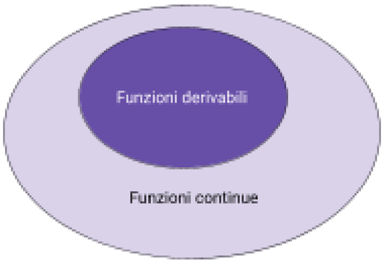
Funzione composta	$D\ f(g(x)\ =\ f'(g(x))g'(x)$

Elementari (log = ln)

$D[x^n]\ =\ nx^{n-1},\ n\ \in\ \aleph$	$D[tg(x)]\ =\frac{1}{cos^2(x)}$
$D[x^\alpha]\ =\ \alpha x^{\alpha-1},\ \alpha\ \in\ \Re$	$D[log(x)]\ =\frac{1}{x}$
$D[e^x]\ =e^x$	$D[arctg(x)]\ =\frac{1}{x^2+1}$
$D[sen(x)]\ =\ cos(x)$	$D[arcsen(x)]\ =\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$D[cos(x)]\ =-\ sen(x)$	$D[arccos(x)]\ =-\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Continuità e derivabilità

Se una funzione è derivabile in un punto allora sicuramente è continua
Se è continua però non è sicuramente derivabile



o piccolo

Si dice $o(h)$ [o piccolo di h] una qualsiasi quantità tale che $\lim_{h\to 0}\frac{o(h^m)}{h^n}\ =\ 0$

Esempio

$$\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h}\ =\ \lim_{h\to 0}\ h\ =\ 0,\ h^2\ =\ o(h)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}\ =\ 1,\ h\ \neq\ o(h)$$

Se $\exists_m \in \Re$: $f(x_0 + h) = f(x_0) + mh + o(h) \Rightarrow$ f è derivabile in x_0 e $m = f'(x_0)$

Proprietà o piccolo

$h^k * o(x^n) = o(x^{n+k})$

$o(x^k) * o(x^n) = o(x^{n+k})$

$o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)$

$Mo(x^n) = o(x^n),\ M \in \Re$

Funzioni non derivabili

1. $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \notin \Re$, f non è derivabile in x_0
2. $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \to \pm\ \infty$ f non è derivabile in x_0

Se una funzione è definita in un punto non bisogna mai derivare in quel punto

Lagrange

Sia $f:\ [a, b] \to \Re$ una funzione continua e derivabile in $[a, b]$

Allora $\exists_c \in [a, b]:\ f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Rollè

Sia f una funzione continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b). Se $f(a) = f(b) \Rightarrow\ \exists_c \in (a, b):\ f'(c) = 0$

Monotonia

f è crescente se:

$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0\ \forall x \neq y \in [a, b]$

f è decrescente se:

$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq 0\ \forall x \neq y \in [a, b]$

Cioè:

f è crescente e derivabile $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$
f è decrescente e derivabile $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0$

Esistenza dei massimi e minimi

Se f: $\Re \rightarrow \Re$ continua

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm \infty; \lim_{x \to -\infty} f(x) = \mp \infty \Rightarrow f(\Re) = \Re \Rightarrow$
  Generalizzazione valori intermedi
- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = + \infty, \exists_m = min(\{f(x), x \in \Re\}) \Rightarrow f(\Re) = [m, + \infty] \Rightarrow$
  Generalizzazione Weierstrass
- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = - \infty, \exists_M = max(\{f(x), x \in \Re\}) \Rightarrow f(\Re) = [- \infty, M] \Rightarrow$
  Generalizzazione Weierstrass

Massimi e minimi assoluti e relativi su un intervallo

In un intervallo $[a, b]$ dopo aver studiato il segno della derivata prima possiamo conoscere massimi e minimi assoluti e relativi.

I massimi e minimi relativi sono i punti stazionari.
I massimi e minimi assoluti vanno calcolati studiando:
$f(a), f(b), f(x_0), f(x_1)..., f(x_n)$ dove x_n sono i punti stazionari presenti nell'intervallo.

Il massimo assoluto sarà il valore più grande $max(\{f(x), x \in [a, b]\})$ e il minimo assoluto $min(\{f(x), x \in [a, b]\})$

Retta tangente

Equazione: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ con x_0 valore dato.

Taylor

Polinomio

Il polinomio di Taylor di un polinomio è rappresentato da tutti i monomi di grado inferiore o uguale al polinomio di Taylor richiesto.

Formula Generica

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

Taylor di grado superiore al grado massimo

Se ho un polinomio di grado n, tutti i polinomi di Taylor di ordine maggiore di n sono uguali a T_n.

Esempio

$f(x) = 3x^2 - 3x + 7$

$T_2(f(x); 0) = 3^2 - 3x + 7$

$T_2 = T_3 = T_4 = T_5 = T_{...}$

VALE SOLO CON POLINOMI DELLA FORMA STANDARD!

Esempio non vale con $e^{6x} - sen(2x) \Rightarrow T_1 \neq T_2$

Notevoli (con $x_0 = 0$)

e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$sin\, x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$cos\, x$	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$tan\, x$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$
$log(1 + x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + ... + x^n + o(x^n)$
$arcsin\, x$	$x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + ... + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n} + 2)$
$arccos\, x$	$\frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40}x^5 - ... - \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n} + 2)$
$arctan\, x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n} + 2)$

$(1 + x)^{\alpha}$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^{2} + ... + \frac{\alpha}{n}x^{n} + o(x^{n})$