1) Considere lo expuesto en la seccion 1.4.3 y demuestre que

$$A^{i'}_{k}\tilde{A}^{j}_{i'} = \delta^{j}_{k}$$

tenemos que los 2 factores anteriores son matrices de transformacion, por lo que:

$$A^{i'}_{k} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{k}} \quad , \quad \tilde{A}^{j}_{i'} = \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{i'}}$$

reemplazando en la ecuacion inicial tenemos

$$\frac{\cancel{\partial x^{i'}}}{\partial x^{k}}\frac{\partial x^{j}}{\cancel{\partial x^{i'}}} = \delta^{j}_{k}$$

Los diferenciales se "cancelan" por la regla de la cadena y obtenemos:

$$\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{k}} = \delta^{j}_{k}$$

nos resulta la derivada de 2 vectores de la misma base y dado que son bases ortonormales, el resultado sera 1 si $i=j$ y se anula en caso contrario, por lo que esta derivada sera igual al delta de Kronecker

$$\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{k}} = \delta^{j}_{k} \rightarrow \delta^{j}_{k} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i\neq j \end{cases}$$

(4) Considere el radio vector posicion $\vec{r} = x^i \hat{\imath}_i = x^1 \hat{\imath} + y \hat{\jmath}$ en 2 dimensiones. Dado el conjunto de transformaciones que se indican a continuacion, demuestre en cuales casos las componentes de $\vec{r}$ transforman como verdaderas componentes de vectores.

a) $(x, y) \to (-y, x)$

Sabemos que las componentes de un verdadero vector transforman como sigue:

$$x^{i'} = A^{i'}{}_j x^j$$

donde $A^{i'}{}_j$ es una matriz de transformacion que debe cumplir $\det|A^{i'}{}_j| = 1$, ser una matriz ortogonal y que el producto con su inversa de la matriz identidad (ser invertible). Por lo que hallaremos $A^{i'}{}_j$ para revisar si cumple.

$$A^{i'}{}_j = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} , \quad \begin{array}{ll} x^1 = x , & x^{1'} = -y = -x^2 \to x^{1'} = -x^2 \\ x^2 = y , & x^{2'} = x = x^1 \to x^{2'} = x^1 \end{array}$$

Sabiendo como son las ecs de transformacion derivamos

$$A^{1'}{}_1 = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} = 0 , \quad A^{1'}{}_2 = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} = -1 , \quad A^{2'}{}_1 = \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} = 1 , \quad A^{2'}{}_2 = 0$$

$$A^{i'}{}_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det|A^{i'}{}_{j}| = 1$

$$(A^{i'}{}_{j})^{-1} = \tilde{A}^{j}{}_{i'} = (A^{i'}{}_{j})^{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

el determinante es 1 y es ortogonal

$$A^{i'}{}_{j}\tilde{A}^{j}{}_{i'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Por lo que la transformacion $(x,y) \to (-y,x)$ si transforman como verdaderas componentes de vectores.

b) $(x,y) \to (x,-y)$

Hacemos el mismo proceso, hallamos la matriz de transformacion para comprobar si tiene las propiedades de las matrices que transforman componentes de verdaderos vectores

$$x^{i'} = A^{i'}{}_{j}\, x^{j} \to A^{i'}{}_{j} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j}}$$

$x^{1} = x \quad , \quad x^{1'} = x = x^{1}$

$x^{2} = y \quad , \quad x^{2'} = -y = -x^{2}$

$$A^{1'}{}_{1} = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^{1}} = 1 \quad , \quad A^{1'}{}_{2} = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^{2}} = 0 \,, \quad A^{2'}{}_{1} = \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^{1}} = 0 \,, \quad A^{2'}{}_{2} = \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^{2}} = -1$$

$$A^{i'}{}_{j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^{1}} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^{2}} \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^{1}} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Powered by CamScanner

$$\det|A^{i'}{}_j| = -1$$

$$\tilde{A}^{j}{}_{i'} = (A^{i'}{}_j)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{i'}{}_j A^{j}{}_{i'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Por lo tanto la matriz es ortogonal y conservara las longitudes y angulos al transformar las coordenadas de un vector, por lo que la transformacion $(x, y) \to (x, -y)$ corresponde a un verdadero vector

ⓒ $(x, y) \to (x - y, x + y)$

Hacemos el mismo proceso que los incisos anteriores

$$x^{i'} = A^{i'}{}_j x^j \to A^{i'}{}_j = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}$$

$$x^1 = x \quad , \quad x^{1'} = x - y = x^1 - x^2$$
$$x^2 = y \quad , \quad x^{2'} = x + y = x^1 + x^2$$

$$A^{1'}{}_1 = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} = 1 \quad , \quad A^{1'}{}_2 = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} = -1 \, , \, A^{2'}{}_1 = \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} = 1 \, , \, A^{2'}{}_2 = 1$$

$$A^{i'}{}_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det|A^{i'}{}_{j}| = 2$

$$\tilde{A}^{j}{}_{i'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \neq (A^{i'}{}_{j})^{T}$$

La matriz no es ortogonal por lo que las componentes no transforman como las de un vector verdadero, ya que la transformación no preserva longitudes, hay un escalamiento del vector.

d) $(x,y) \to (x+y, x-y)$

Haremos el mismo proceso de los incisos anteriores

$$x^{i'} = A^{i'}{}_{j}\, x^{j} \to A^{i'}{}_{j} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j}}$$

$x^{1} = x \quad , \quad x^{1'} = x^{1} + x^{2}$

$x^{2} = y \quad , \quad x^{2'} = x^{1} - x^{2}$

$A^{1'}{}_{1} = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^{1}} = 1 \; ; \; A^{1'}{}_{2} = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^{2}} = 1 \; ; \; A^{2'}{}_{1} = \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^{1}} = 1 \; ; \; A^{2'}{}_{2} = \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^{2}} = -1$

$$A^{i'}{}_{j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^{1}} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^{2}} \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^{1}} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det |A^{i'}{}_{j}| = -2$$

$$\hat{A}^{j}{}_{i} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \neq (A^{i'}{}_{j})^{T}$$

La matriz de transformacion no es una matriz ortogonal, por lo que la transformacion no corresponde con las coordenadas de un verdadero vector, ya que no se preservan longitudes, ni angulos.

2) Considere que:

* $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} = x_i \hat{\imath}_i$
* $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}(x,y,z) = a_i(x,y,z)\hat{\imath}_i$ y $\vec{b}(\vec{r}) = b_i(x,y,z)\hat{\imath}_i$
* $\phi = \phi(\vec{r}) = \phi(x,y,z)$ y $\psi = \psi(\vec{r}) = \psi(x,y,z)$

demostrar las siguientes identidades vectoriales

a) $\vec{\nabla}(\phi\psi) = \phi\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\phi$

$\longrightarrow \nabla_i(\phi\psi)\hat{e}_i = \partial_i(\phi\psi)\hat{e}_i = (\psi\partial_i\phi + \phi\partial_i\psi)\hat{e}_i$

entonces vemos que la identidad es consecuencia de la regla del producto para las derivadas y entonces

$\longrightarrow (\psi\partial_i\phi + \phi\partial_i\psi)\hat{e}_i = \psi\partial_i\phi\hat{e}_i + \phi\partial_i\psi\hat{e}_i$

$$= \psi\vec{\nabla}\phi + \phi\vec{\nabla}\psi$$

d) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{a})$ y que puede decir de $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\cdot\vec{a})$?

$\rightarrow \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{a}) = \partial_i \hat{e}_i \cdot (\partial_j \hat{e}_j \times a_m \hat{e}_m)$

$= \partial_i \hat{e}_i \cdot (\varepsilon_{jmn} \partial_j a_m \hat{e}_n)$

$= \varepsilon_{jmn} \partial_i \partial_j a_m \hat{e}_i \cdot \hat{e}_n$

$= \varepsilon_{jmn} \partial_i \partial_j a_m \delta_{in}$

$= \varepsilon_{jmn} \partial_n \partial_j a_m$

Y vemos que se esta multiplicando un tensor antisimetrico en j,n ε_{jmn} y un tensor simetrico $\partial_n \partial_j$ en j,n y ya que la multiplicacion de un tensor simetrico respecto a un par de indices y un tensor antisimetrico respecto a esos indices es cero, entonces nuestro resultado es cero

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{a}) = \varepsilon_{jmn} \partial_n \partial_j a_m = 0$$

$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}) = \partial_i \hat{e}_i \times (\partial_j a_j)$

esta expresion no tiene sentido ya que la expresion que resulta dentro del parentesis es un escalar por lo que no podemos realizar producto cruz con este elemento

e) $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}) - (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{a}$

$\rightarrow \partial_i \hat{e}_i \times (\partial_j \hat{e}_j \times a_k \hat{e}_k) = \partial_i \hat{e}_i \times (\varepsilon_{jkm} \partial_j a_k \hat{e}_m)$

$= \varepsilon_{jkm} \partial_i \partial_j a_k \hat{e}_i \times \hat{e}_m = \varepsilon_{jkm} \partial_i \partial_j a_k \varepsilon_{imn} \hat{e}_n$

Powered by CamScanner

$\rightarrow \varepsilon_{jkm} \varepsilon_{imn} \partial_i \partial_j a_k \hat{e}_n = \varepsilon_{jkm} \varepsilon_{nim} \partial_i \partial_j a_k \hat{e}_n$

$= (\delta_{jn}\delta_{ki} - \delta_{ji}\delta_{kn}) \partial_i \partial_j a_k \hat{e}_n$

$= [\delta_{jn}\delta_{ki} \partial_i \partial_j a_k - \delta_{ji}\delta_{kn} \partial_i \partial_j a_k] \hat{e}_n$

$= (\partial_k \partial_n a_k - \partial_j \partial_j a_n) \hat{e}_n$

$= (\partial_n \partial_k a_k - \partial_j \partial_j a_n) \hat{e}_n$

$= \partial_n \hat{e}_n \partial_k a_k - \partial_j \partial_j a_n \hat{e}_n$

$= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a}$

Seccion 1.6.6

$i^2 i$

2) Demuestre

a) $\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)\operatorname{sen}^2(\alpha)$

Usamos la formula de Moivre para demostrarlo

$\cos(3\alpha) + i\operatorname{sen}(3\alpha) = [\cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha)]^3$

$\rightarrow = \cos^3(\alpha) + 3\cos^2(\alpha)[i\operatorname{sen}(\alpha)] + 3\cos(\alpha)[i\operatorname{sen}(\alpha)]^2 + [i\operatorname{sen}(\alpha)]^3$

$\rightarrow = \cos^3(\alpha) + i3\cos^2(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) - 3\operatorname{sen}^2(\alpha)\cos(\alpha) - i\operatorname{sen}^3(\alpha)$

$\rightarrow = [\cos^3(\alpha) - 3\operatorname{sen}^2(\alpha)\cos(\alpha)] + i[3\cos^2(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}^3(\alpha)]$

y dado que $\cos(3\alpha)$ esta en la parte real del numero complejo, lo igualamos a la parte real de nuestro resultado

$\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\operatorname{sen}^2(\alpha)\cos(\alpha)$

b) $\operatorname{Sen}(3\alpha) = 3\cos^2(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}^3(\alpha)$

en el inciso anterior la parte imaginaria de nuestro numero es $\operatorname{sen}(3\alpha)$ por lo que igualando a la parte imaginaria del resultado

$$\operatorname{sen}(3\alpha) = 3\cos^2(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}^3(\alpha)$$

5) Encuentre todas las raices de las siguientes expresiones

a) $\sqrt{2i}$

$$2i = 2e^{i\pi/2} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$$

$$\sqrt{2i} = \left(2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}\right)^{1/2} = \sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)}$$

como la raiz es cuadrada k toma valores de 0 y 1

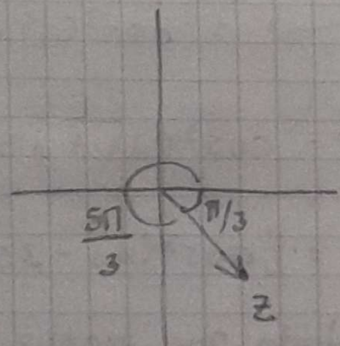
raiz 1: $x_1 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

raiz 2: $x_2 = \sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}$

b) $\sqrt{1-\sqrt{3}\,i}$

$z = 1 - i\sqrt{3}$ $\quad |z| = \sqrt{1+3} = 2$

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{5\pi}{3}$$



$$z = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{3}+2k\pi\right)}$$

$$\sqrt{z} = \left(2e^{i\left(\frac{5\pi}{3}+2k\pi\right)}\right)^{1/2} = \sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{5\pi}{6}+k\pi\right)}, \quad k=0,1$$

$$z_1 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}, \quad z_2 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{11\pi}{6}}$$

c) $(-1)^{1/3}$

$-1 = e^{i\pi} = e^{i(\pi + 2k\pi)}$, $k = 0, 1, 2$

$(-1)^{1/3} = \left(e^{i(\pi + 2k\pi)}\right)^{1/3} = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right)}$

raiz 1 ($k=0$): $x_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$

raiz 2 ($k=1$): $x_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\pi}$

raiz 3 ($k=2$): $x_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{3}}$

d) $(8)^{1/6}$

$8 = 8e^{i0} = 8e^{i(0+2k\pi)} = 8e^{i2k\pi}$

como la raiz es sexta k va a tomar valores de $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. dando 6 raices en total

$\rightarrow (8)^{1/6} = \left(8e^{i2k\pi}\right)^{1/6} = (8)^{1/6} e^{ik\frac{\pi}{3}}$

raiz 1 ($k=0$): $x_1 = (8)^{1/6}$

raiz 2 ($k=1$): $x_2 = (8)^{1/6} e^{i\frac{\pi}{3}}$

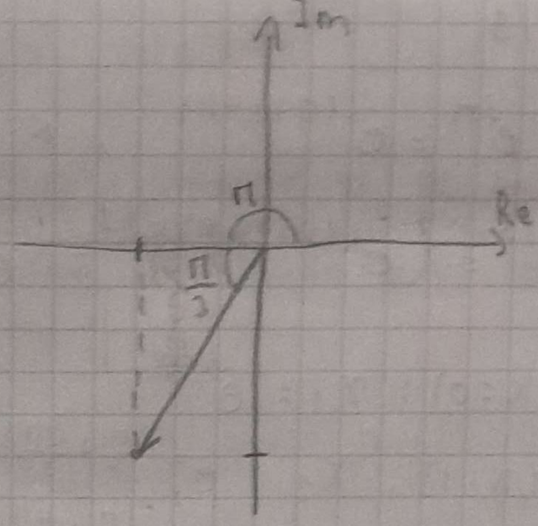
raiz 3 ($k=2$): $x_3 = (8)^{1/6} e^{i\frac{2\pi}{3}}$

raiz 4 ($k=3$): $x_4 = (8)^{1/6} e^{i\pi}$

raiz 5 ($k=4$): $x_5 = (8)^{1/6} e^{i\frac{4\pi}{3}}$

raiz 6 ($k=5$): $x_6 = (8)^{1/6} e^{i\frac{5\pi}{3}}$

e) $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}\,i}$



$z = -8 - 8\sqrt{3}\,i$

$|z| = \sqrt{64+192} = 16$

$\theta = tg^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{\pi}{3} + \pi$

$\theta = \frac{4\pi}{3}$

$z = -8 - 8\sqrt{3}\,i = 16\, e^{i\frac{4\pi}{3}} = 16\, e^{i\left(\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right)}$

$k = 0, 1, 2, 3$

$\longrightarrow \sqrt[4]{z} = \left(16\, e^{i\left(\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right)}\right)^{1/4} = 2\, e^{i\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}\right)}$

raiz 1 $(k=0)$: $x_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

raiz 2 $(k=1)$: $x_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

raiz 3 $(k=2)$: $x_3 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

raiz 4 $(k=3)$: $x_4 = 2e^{i\frac{11\pi}{6}}$

⑥ Demuestre que:

a) $\text{Log}(-ie) = 1 - \frac{\pi}{2} i$

$$e^{\text{Log}(-ie)} = e^{(1 - \frac{\pi}{2} i)}$$

$$-ie = e^1 e^{-\frac{\pi}{2} i}$$

$$-ie = e\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$-ie = e(-i)$$

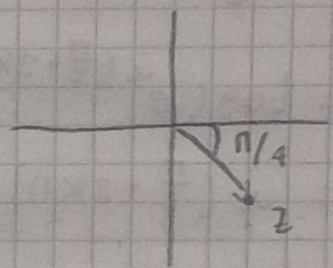
$$-ie = -ie$$

b) $\text{Log}(1-i) = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{\pi}{4} i$

$$z = 1 - i$$

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = tg^{-1}(1) = -\frac{\pi}{4}$$



el angulo es negativo ya que es respecto a la horizontal a favor de las manecillas del reloj

$$z = 1 - i = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{Log}(z) = \text{Log}(1-i) = \log\left(\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$= \ln(\sqrt{2}) + \ln\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$= \ln(2^{1/2}) + \left(-i\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2) - i\frac{\pi}{4}$$

c) $Log(e) = 1 + 2n\pi i$

$z = e$

$|z| = e$

$\theta = 0$

$z = e = e\,e^{i(0+2k\pi)} = e\,e^{i2k\pi} = e^{1+i2k\pi}$

$Log(z) = log(e^{1+i2k\pi}) = 1 + i2k\pi$

d) $Log(i) = (2n + \frac{1}{2})\pi i$

$z = i = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}$

$Log(z) = Log(e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)})$

$Log(z) = i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = i\pi(\frac{1}{2} + 2k)$