(10) Sea $P_n$ el conjunto de todos los polinomios de grado n, en $x$, con coeficientes reales.

$$|P_n\rangle = P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

a) Demostrar que $P_n$ es un espacio vectorial respecto a la suma de polinomios y a la multiplicacion de polinomios por un numero real

R// El conjunto $P_n$ sera un espacio vectorial si cumple con los 10 axiomas o propiedades de los espacios vectoriales, entonces probemos cada axioma a este conjunto con la suma usual de polinomios y la multiplicacion de polinomios con numeros reales.

Sea:

$$P_n = \{ |V_1\rangle, |V_2\rangle, \ldots, |V_n\rangle, \ldots \}$$

$$|a_n\rangle = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \in P_n$$

$$|b_n\rangle = b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} \in P_n$$

$$|c_n\rangle = c_0 + c_1x + \cdots + c_{n-1}x^{n-1} \in P_n$$

$$\alpha, \gamma, \lambda \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

entonces probemos los axiomas:

1. Cerrado bajo la operacion $|V_i\rangle, |V_j\rangle \in \bar{V} \Rightarrow |V_i\rangle + |V_j\rangle \in \bar{V}$

$|a_n\rangle, |b_n\rangle \in P_n$, entonces

$$|a_n\rangle + |b_n\rangle = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \cdots + (a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}$$

$$|a_n\rangle + |b_n\rangle \in P_n$$

Por lo tanto se cumple

2. Conmutatividad: $|V_i\rangle + |V_j\rangle = |V_j\rangle + |V_i\rangle$

$|a_n\rangle + |b_n\rangle = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + \cdots + (a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}$

$|b_n\rangle + |a_n\rangle = (b_0+a_0) + (b_1+a_1)x + \cdots + (b_{n-1}+a_{n-1})x^{n-1}$

Los polinomios son iguales termino a termino ya que la suma de reales conmuta, entonces se cumple

3. Asociatividad: $(|V_i\rangle + |V_j\rangle) + |V_k\rangle = |V_i\rangle + (|V_j\rangle + |V_k\rangle)$

$(|a_n\rangle + |b_n\rangle) + |c_n\rangle = [(a_0+b_0)+c_0] + [(a_1+b_1)+c_1]x + \cdots + [(a_{n-1}+b_{n-1})+c_{n-1}]x^{n-1}$

$|a_n\rangle + (|b_n\rangle + |c_n\rangle) = [a_0+(b_0+c_0)] + [a_1+(b_1+c_1)]x + \cdots + [a_{n-1}+(b_{n-1}+c_{n-1})]x^{n-1}$

Los polinomios son iguales termino a termino ya que la suma de reales es asociativa, entonces se cumple

4. Existe un unico elemento neutro: $|0\rangle \in V \,/\, |0\rangle + |V_i\rangle = |V_i\rangle \;\forall\, |V_i\rangle \in V$

$P_n$ tiene un elemento neutro el cual es el polinomio con todas sus coeficientes cero

$|0\rangle = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^{n-1}$

y es unico, entonces se cumple

5. Inverso para cada elemento de $V$ $\exists\, |V_i\rangle^{-1} \in V \;\forall\, |V_i\rangle \in V \,/\, |V_i\rangle^{-1} + |V_i\rangle = |0\rangle$

Cualquier polinomio de $P_n$:

$|a_n\rangle = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$

tendra un elemento simetrico o inverso dado por

$|a_n\rangle^{-1} = (-1)|a_n\rangle = -a_0 - a_1x - a_2x^2 - \cdots - a_{n-1}x^{n-1}$

y al sumarlos resultara el elemento neutro

$|a_n\rangle + |a_n\rangle^{-1} = (a_0 - a_0) + (a_1 - a_1)x + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-1})x^{n-1} = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots$

entonces se cumple.

6. Cerrado bajo la multiplicacion por elemento del campo,

$\alpha|V_i\rangle \in V \quad \forall \alpha \in K$

$$\alpha|a_n\rangle = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \cdots + \alpha a_{n-1} x^{n-1}$$

$$\alpha|a_n\rangle \in P_n$$

Sigue siendo un polinomio de grado n, entonces cumple

7. $\alpha(\beta|V_i\rangle) = (\alpha\beta)|V_i\rangle \quad \forall |V_i\rangle \in V \text{ y } \alpha, \beta \in K$

$$\alpha(\beta|a_n\rangle) = \alpha(\beta a_0) + \alpha(\beta a_1)x + \cdots + \alpha(\beta a_{n-1})x^{n-1}$$

$$(\alpha\beta)|a_n\rangle = (\alpha\beta)a_0 + (\alpha\beta)a_1 x + \cdots + (\alpha\beta)a_{n-1} x^{n-1}$$

$$\alpha(\beta|a_n\rangle) = (\alpha\beta)|a_n\rangle$$

los polinomios son iguales termino a termino porque la multiplicacion de reales es asociativa, entonces cumple

8. $(\alpha+\beta)|V_i\rangle = \alpha|V_i\rangle \boxplus \beta|V_i\rangle$

$$(\alpha+\beta)|a_n\rangle = (\alpha+\beta)a_0 + (\alpha+\beta)a_1 x + \cdots + (\alpha+\beta)a_{n-1}x^{n-1}$$

$$= (\alpha a_0) + (\beta a_0) + (\alpha a_1 x) + \beta a_1 x) + (\alpha a_{n-1} x^{n-1}) + (\beta a_{n-1} x^{n-1})$$

$$= \alpha|a_n\rangle + \beta|a_n\rangle$$ , entonces cumple

9. $\alpha(|V_i\rangle \boxplus |V_j\rangle) = \alpha|V_i\rangle \boxplus \alpha|V_j\rangle$

$$\alpha(|a_n\rangle + |b_n\rangle) = \alpha(a_0+b_0) + \alpha(a_1+b_1)x + \cdots + \alpha(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}$$

$$= (\alpha a_0) + (\alpha b_0) + (\alpha a_1 x) + (\alpha b_1 x) + \cdots + (\alpha a_{n-1}x^{n-1}) + (\alpha b_{n-1} x^{n-1})$$

$$= \alpha|a_n\rangle + \alpha|b_n\rangle$$ , entonces cumple

10. $1|V_i\rangle = |V_i\rangle \quad \forall |V_i\rangle \in V \text{ y } 1 \in K$

$1|a_n\rangle = 1a_0 + 1a_1 x + 1a_2 x^2 + \cdots + 1a_{n-1}x^{n-1} = |a_n\rangle$, Se cumple

Se cumplen los 10 axiomas para $P_n$ por lo tanto es espacio Vectorial

b) Si los coeficientes $a_i$ son enteros ¿$P_n$ sera un espacio vectorial? ¿Por que?

Si $P_n$ son los polinomios de grado n cuyos coeficientes son enteros, no sera un espacio vectorial ya que una de las propiedades que debe cumplir es que sea cerrada bajo la multiplicacion de un elemento del campo:

$\alpha|a_n) = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \cdots + \alpha a_{n-1} x^{n-1}$

y $\alpha a_i \in \mathbb{R}$ por lo que esta operacion no siempre sera cerrada.

c) ¿Cual de los siguientes subconjuntos de $P_n$ es un subespacio vectorial?

Para que un subconjunto de un espacio vectorial $V$ sea un subespacio debe cumplir: contener al elemento neutro de $V$, ser cerrado al operar dos elementos cualesquiera del subconjunto y ser cerrado al multiplicar cualquier elemento por un elemento del campo. En los siguientes casos vamos a verificar cada propiedad, para ver si se trata de un subespacio

I. El polinomio cero y todos los polinomios de grado n-1

a Contiene al elemento neutro de $P_n$:

si, el cual es

$|0) = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^{n-1}$

b Cerrada al operar 2 elementos del subespacio

Sea:

$$|u\rangle = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots \in S$$
$$|v\rangle = v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \cdots \in S$$

$$|u\rangle + |v\rangle = (u_0+v_0) + (u_1+v_1)x + (u_2+v_2)x^2 + \cdots \in S$$

entonces si cumple

- Cerrada bajo la multiplicacion de un elemento del campo

$$\alpha|u\rangle = \alpha u_0 + \alpha u_1 x + \alpha u_2 x^2 + \cdots \in S$$

Cumple, por lo que S si es subespacio

II. El polinomio cero y todos los polinomios de grado par

- Contiene el elemento neutro

el enunciado dice que contiene al polinomio cero, el cual es el elemento neutro, entonces cumple

$$|0\rangle = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots + 0x^{n-1} = 0 + 0x^2 + 0x^4 + \cdots \in S$$

- La operacion es cerrada

Sea:

$$|u\rangle = u_0 + u_1 x^2 + u_2 x^4 + u_3 x^6 + \cdots + u_{n-1} x^{n-1} \in S$$
$$|v\rangle = v_0 + v_1 x^2 + v_2 x^4 + v_3 x^6 + \cdots + v_{n-1} x^{n-1} \in S$$

$$|u\rangle + |v\rangle = (u_0+v_0) + (u_1+v_1)x^2 + (u_2+v_2)x^4 + \cdots \in S$$

entonces cumple

- Cerrada bajo la multiplicacion por un escalar

$$\alpha|u\rangle = \alpha u_0 + \alpha u_1 x^2 + \alpha u_2 x^4 + \alpha u_3 x^6 + \cdots \in S$$

cumple, por lo tanto S si es un subespacio vectorial

III. Todos los polinomios que tienen a $x$ como un factor (grado $n \geq 1$)

* Contiene al elemento neutro

el polinomio cero tiene a $x$ como factor ya que

$$(x)|0\rangle = x(0 + 0x + 0x^2 + \quad) = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots$$

Pero el enunciado indica que los polinomios deben ser de grado $\geq 1$ y el polinomio cero es de grado nulo por lo que no pertenece al subconjunto, entonces el anterior subconjunto no se trata de un subespacio.

IV. Todos los polinomios que tienen a $x-1$ como factor.

* Contiene al elemento neutro

El polinomio cero puede tener a $x-1$ como factor ya que

$$(x-1)|0\rangle = (x-1)(0 + 0x + 0x^2 + \cdots) = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots$$

Por lo que esta propiedad se cumple

* La operacion es cerrada

Sea:

$$|u\rangle = (x-1)(u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots) \in S$$

$$|v\rangle = (x-1)(v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \cdots) \in S$$

$$|u\rangle + |v\rangle = (x-1)(u_0 + u_1 x + \cdots) + (x-1)(v_0 + v_1 x + \cdots)$$

$$= (x-1)[(u_0 + v_0) + (u_1 + v_1)x + \cdots] \in S$$

Por lo que esta propiedad se cumple

* Cerrada bajo la multiplicacion por un escalor

$$\alpha|u\rangle = \alpha(x-1)(u_0+u_1x+u_2x^2+\dots)$$
$$= (x-1)(\alpha u_0+\alpha u_1 x+\alpha u_2 x^2+\dots) \in S$$

Esta propiedad y las anteriores se cumplen por lo tanto S es un subespacio vectorial

## Seccion 2.2.4

(6) Los vectores en $\mathbb{R}^3$ en coordenadas cartesianas los definimos como $\vec{a} = a^i|\hat{e}_i\rangle = a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}$ y definimos la tabla de multiplicacion entre ellos de la forma $\langle e^i|e_j\rangle = \delta^i_j$ , $i,j=1,2,3$, esto es

| $\langle e^i\|e_j\rangle$ | $\hat{i}$ | $\hat{j}$ | $\hat{k}$ |
|---|---|---|---|
| $i$ | 1 | 0 | 0 |
| $j$ | 0 | 1 | 0 |
| $k$ | 0 | 0 | 1 |

Un cuaternion cartesiano puede escribirse de manera analoga a los vectores cartesianos, vale decir.

$$|a\rangle = a^\alpha|q_\alpha\rangle = a^0 + a^i|q_i\rangle = a_0+a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}$$

con $\alpha=0,1,2,3$ y donde las $a^i$ son numeros reales que representan las componentes vectoriales en coordenadas cartesianas de los cuaterniones, mientras que la $a^0$, se le llama componente escalar.

a) Comprueve si los cuaterniones, $|a\rangle$, forman un espacio vectorial respecto a esa operacion suma y esa multiplicacion por escalares, analogo a la de los vectores en $\mathbb{R}^3$ en coordenadas cartesianas.

R// Para comprobar si los cuaterniones forman un espacio vectorial, tenemos que verificar que cumplan los 10 axiomas de espacios vectoriales.

Sea:

$$|a\rangle = a^\alpha |q_\alpha\rangle = a^0 + a^1 |q_1\rangle + a^2 |q_2\rangle + a^3 |q_3\rangle \in V$$

$$|b\rangle = b^\alpha |q_\alpha\rangle = a^0 + b^1 |q_1\rangle + b^2 |q_2\rangle + b^3 |q_3\rangle \in V$$

$$|c\rangle = c^\alpha |q_\alpha\rangle = a^0 + c^1 |q_1\rangle + c^2 |q_2\rangle + c^3 |q_3\rangle \in V$$

$\beta, \gamma, \lambda \in K = \mathbb{R}$

1. Cerrado bajo la operacion: $|u\rangle \boxplus |v\rangle \in V \ \forall \ |u\rangle, |v\rangle \in V$

$|a\rangle + |b\rangle = (a^0 + b^0) + (a^1 + b^1)|q_1\rangle + (a^2 + b^2)|q_2\rangle + (a^3 + b^3)|q_3\rangle \in V$

$|a\rangle + |b\rangle \in V$, por lo tanto se cumple

2. Conmutatividad: $|u\rangle \boxplus |v\rangle = |v\rangle + |u\rangle \ \forall \ |u\rangle, |v\rangle \in V$

$|b\rangle + |a\rangle = (b^0 + a^0) + (b^1 + a^1)|q_1\rangle + (b^2 + a^2)|q_2\rangle + (b^3 + a^3)|q_3\rangle$

esta suma es igual a la del inciso anterior ya que la suma de reales conmuta, por lo que se cumple la propiedad

3. Asociatividad: $|u\rangle \boxplus (|v\rangle \boxplus |w\rangle) = (|u\rangle \boxplus |v\rangle) \boxplus |w\rangle$

Las componentes de los cuaterniones son reales y dado a que la suma de reales es asociativa, se cumple la propiedad

4 Existe un unico elemento neutro:

el elemento neutro de los cuaterniones es aquel con todas sus componentes nulas

$|0\rangle = 0 + 0|q_1\rangle + 0|q_2\rangle + 0|q_3\rangle$

Por lo tanto se cumple la propiedad

5. Existe un elemento simetrico para cada elemento:

El elemento inverso para cada cuaternion sera aquel que tenga sus componentes con signo contrario:

$(-1)|a\rangle = -a^0 - a^1|q_1\rangle - a^2|q_2\rangle - a^3|q_3\rangle$

$|a\rangle + (-1)|a\rangle = |0\rangle$, por lo tanto se cumple la propiedad

6. Cerradura bajo el producto por un escalar:

$\alpha|a\rangle = \alpha a^0 + \alpha a^1|q_1\rangle + \alpha a^2|q_2\rangle + \alpha a^3|q_3\rangle \in \bar{V}$

por lo tanto se cumple la propiedad

7. $\alpha(\beta|V_i\rangle) = (\alpha\beta)|V_i\rangle \quad \forall\ |V_i\rangle \in \bar{V}$ y $\forall\ \alpha, \beta \in K$

$\alpha(\beta|a\rangle) = \alpha(\beta a^0) + \alpha(\beta a^1)|q_1\rangle + \alpha(\beta a^2)|q_2\rangle + \alpha(\beta a^3)|q_3\rangle$

$(\alpha\beta)|a\rangle = (\alpha\beta)a^0 + (\alpha\beta)a^1|q_1\rangle + (\alpha\beta)a^2|q_2\rangle + (\alpha\beta)a^3|q_3\rangle$

$\alpha(\beta|a\rangle) = (\alpha\beta)|a\rangle$ ya que los reales son asociativos bajo multiplicacion, por lo tanto se cumple la propiedad

8. $(\alpha+\beta)|V_i\rangle = \alpha|V_i\rangle + \beta|V_i\rangle$

$(\alpha+\beta)|a\rangle = (\alpha+\beta)a^0 + (\alpha+\beta)a^1|q_1\rangle + (\alpha+\beta)a^2|q_2\rangle + (\alpha+\beta)a^3|q_3\rangle$

$= \alpha a^0 + \beta a^0 + \alpha a^1|q_1\rangle + \beta a^1|q_1\rangle + \alpha a^2|q_2\rangle + \beta a^2|q_2\rangle + \cdots$

$= \alpha|a\rangle + \beta|a\rangle$

Por lo tanto se cumple la propiedad

9. $\alpha(|V_i\rangle \boxplus |V_j\rangle) = \alpha|V_i\rangle \boxplus \alpha|V_j\rangle$

$$\alpha(|a\rangle + |b\rangle) = \alpha(a^0 + b^0) + \alpha(a^1 + b^1)|q_1\rangle + \alpha(a^2 + b^2)|q_2\rangle + \alpha(a^3 + b^3)|q_3\rangle$$

$$= \alpha a^0 + \alpha b^0 + (\alpha a^1 + \alpha b^1)|q_1\rangle + (\alpha a^2 + \alpha b^2)|q_2\rangle + (\alpha a^3 + \alpha a^3)|q_3\rangle$$

$$= \alpha|a\rangle + \alpha|b\rangle$$

Por lo tanto, se cumple la propiedad

10. $1|V_i\rangle = |V_i\rangle \ \forall \ |V_i\rangle \in V$

$1|a\rangle = (1)a^0 + (1)a^1|q_1\rangle + (1)a^2|q_2\rangle + (1)a^3|q_3\rangle = |a\rangle$

Por lo tanto se cumple esta propiedad y todas las demas, lo que significa que estamos tratando con un espacio vectorial.

b) Dados 2 cuaterniones cualesquiera $|b\rangle = (b^0, \vec{b})$ y $|r\rangle = (r^0, \vec{r})$ y su tabla de multiplicacion, muestre que el producto entre esos cuaterniones $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$ podra representarse como:

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle \longleftrightarrow (d^0, \vec{d}) = (b^0 r^0 - \vec{b}\cdot\vec{r}, r^0\vec{b} + b^0\vec{r} + \vec{b}\times\vec{r})$$

$$|b\rangle = b^0 + b^1|q_1\rangle + b^2|q_2\rangle + b^3|q_3\rangle$$
$$|r\rangle = r^0 + r^1|q_1\rangle + r^2|q_2\rangle + r^3|q_3\rangle$$

$$= (b^0 + b^1|q_1\rangle + b^2|q_2\rangle + b^3|q_3\rangle)(r^0 + r^1|q_1\rangle + r^2|q_2\rangle + r^3|q_3\rangle)$$

$$= b^0r^0 + b^0r^1|q_1\rangle + b^0r^2|q_2\rangle + b^0r^3|q_3\rangle + b^1r^0|q_1\rangle + b^1r^1|q_1\rangle\odot|q_1\rangle$$
$$+ b^1r^2|q_1\rangle\odot|q_2\rangle + b^1r^3|q_1\rangle\odot|q_3\rangle + b^2r^0|q_2\rangle + b^2r^1|q_2\rangle\odot|q_1\rangle$$
$$+ b^2r^2|q_2\rangle\odot|q_2\rangle + b^2r^3|q_2\rangle\odot|q_3\rangle + b^3r^0|q_3\rangle + b^3r^1|q_3\rangle\odot|q_1\rangle$$
$$+ b^3r^2|q_3\rangle\odot|q_2\rangle + b^3r^3|q_3\rangle\odot|q_3\rangle$$

Usando la tabla de multiplicacion, realizamos el producto entre vectores base

$= b^0r^0 + b^0r^1|q_1\rangle + b^0r^2|q_2\rangle + b^0r^3|q_3\rangle + b^1r^0|q_1\rangle - b^1r^1$

$+ b^1r^2|q_3\rangle - b^1r^3|q_2\rangle + b^2r^0|q_2\rangle - b^2r^1|q_3\rangle - b^2r^2$

$+ b^2r^3|q_1\rangle + b^3r^0|q_3\rangle + b^3r^1|q_2\rangle - b^3r^2|q_1\rangle - b^3r^3$

$= (b^0r^0 - b^1r^1 - b^2r^2 - b^3r^3) + (b^0r^1 + b^1r^0 + b^2r^3 - b^3r^2)|q_1\rangle$

$+ (b^0r^2 - b^1r^3 + b^2r^0 + b^3r^1)|q_2\rangle + (b^0r^3 + b^1r^2 - b^2r^1 + b^3r^0)|q_3\rangle$

organizando la parte compleja vectorial del cuaternion

por componentes tenemos

$= (b^0r^0 - \vec{b}\cdot\vec{r}) + [(b^0\vec{r})_x + (r^0\vec{b})_x + (\vec{b}\times\vec{r})_x]|q_1\rangle$

$+ [(b^0\vec{r})_y + (r^0\vec{b})_y + (\vec{b}\times\vec{r})_y]|q_2\rangle + [(b^0\vec{r})_z + (r^0\vec{b})_z + (\vec{b}\times\vec{r})_z]|q_3\rangle$

entonces escribiendo el cuaternion como un elemento de 2 componentes, una escalar y otra vectorial, en donde los vectores base de la componente vectorial son $|q_1\rangle, |q_2\rangle, |q_3\rangle$ podemos escribir el anterior resultado de la siguiente manera

$\longrightarrow (b^0r^0 - \vec{b}\cdot\vec{r},\ r^0\vec{b} + b^0\vec{r} + \vec{b}\times\vec{r})$

c) Ahora con indices: dados $|b\rangle = b^\alpha|q_\alpha\rangle$ y $|r\rangle = r^\alpha|q_\alpha\rangle$ compruebe si el producto $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$ puede ser escrito de la forma

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle = a|q_0\rangle + S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha|q_j\rangle + A^{[jk]i} b_j r_k |q_i\rangle$$

$S^{ij} = S^{ji}$ es una cantidad simetrica y $A^{jki}$ es antisimetrico respecto a los indices $j$ y $k$

R// Si puede ser escrito de esta forma y vamos a demostrarlo componente por componente.

$|d\rangle = (d^0, \vec{d}) = d^0|q_0\rangle + d^i|q_i\rangle$

tenemos que $a = d^0 = b^0 r^0 - \vec{b}\cdot\vec{r}$, por lo que ya tenemos que las componentes escalares son iguales.

$$S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha|q_j\rangle = (S^{\alpha j}\delta^0_\alpha + S^{j\alpha}\delta^0_\alpha)|q_j\rangle$$

Al aplicar la propiedad de sustitucion del delta de Kronecker, resulta:

$\rightarrow (S^{0j} + S^{j0})|q_j\rangle$

y comparando las cantidades $S^{0j}$ y $S^{j0}$ con la identidad que hallamos en el anterior punto resulta

$$S^{0j}|q_j\rangle = r^0\cdot\vec{b} \quad , \quad S^{j0}|q_j\rangle = b^0\vec{r}$$

ya que $S^{\alpha j}$ es una matriz formada por los vectores $\vec{r}$, $\vec{b}$. Ya solo queda demostrar que $A^{[jk]i} b_j r_k|q_i\rangle$ es $\vec{b}\times\vec{r}$ para completar la igualdad.

$$A^{[jk]i} b_j r_k = (A^{jki} b_j r_k - A^{kji} b_j r_k) = \varepsilon^{ijk} b_j r_k$$

Vemos que la matriz $A^{[jk]i}$ es identica al Levi-Civita el cual indica producto cruz entre 2 vectores por lo que: $A^{[jk]i} b_j r_k = \vec{b}\times\vec{r}$

Y asi comparando componente a componente, termino a termino, tenemos que es equivalente a la identidad del punto anterior

$$|b\rangle \odot |r\rangle = \underbrace{a}_{b^0 r^0 - \vec{b}\cdot\vec{r}}|q_0\rangle + \underbrace{S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha}_{r^0\vec{b} + b^0\vec{r}}|q_j\rangle + \underbrace{A^{[jk]i} b_j r_k}_{\vec{b}\times\vec{r}}|q_i\rangle$$

(d) Identifique las cantidades: $a$, $S^{(ij)}$ y $A^{[jk]i}$, en terminos de las componentes de los cuaterniones ¿El producto de cuaterniones $|d\rangle = |a\rangle \odot |r\rangle$ sera un vector, pseudovector o ninguna de las anteriores? explique por qué

R// El producto de cuaterniones no sera un vector ni un pseudovector. La componente escalar del cuaternion resultante se comportara como un escalar verdadero ya que el escalar producido por un producto punto no es pseudoescalar, pero la componente vectorial tiene tanto vectores simetricos como antisimetricos sumandose, la suma de un vector mas un pseudovector no nos genera ninguno de ambos, por lo que el cuaternion resultante no sera vector ni pseudovector.

(e) Compruebe si las matrices de Pauli y la identidad

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pueden representar la base de los cuaterniones $\{|q_1\rangle, |q_2\rangle, |q_3\rangle, |q_0\rangle\}$

R// Para que estas matrices puedan representar a los vectores base $\{|q_1\rangle, |q_2\rangle, |q_3\rangle, |q_0\rangle\}$ deben ser linealmente independientes y generar a todos los cuaterniones.

Un cuaternion es un elemento de 4 numeros, por lo que puede ser representado por una matriz 2x2, entonces si las anteriores matrices son linealmente independientes significara que son base para los cuaterniones

$$c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3 + c_4\sigma_0 = 0$$

$$c_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c_4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} c_3 + c_4 & c_1 - ic_2 \\ c_1 + ic_2 & -c_3 + c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$c_3 + c_4 = 0$ $\qquad$ $c_1 - ic_2 = 0 + 0i$

$c_3 = -c_4$ $\qquad$ $c_1 = 0$, $c_2 = 0$

$-c_3 + c_4 = 0$

$c_4 + c_4 = 0$

$c_4 = 0 \rightarrow c_3 = 0$

Por lo tanto las matrices de Pauli si son linealmente independiente y si forman base para el espacio vectorial de cuaterniones.

II Seguidamente muestre que matrices complejas $2\times 2$ del tipo

$$|6\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}$$

pueden ser consideradas como cuaterniones, donde $z = x + iy$ y $w = a + ib$ son numeros complejos.

R// En el anterior inciso hallamos una base para los cuaterniones, asi que si la matriz $|6\rangle$ es un cuaternion debe ser generada por esa base

$$|6\rangle = \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+iy & a+ib \\ -a+ib & x-iy \end{pmatrix} = c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3 + c_4\sigma_0$$

$$\begin{pmatrix} x+iy & a+ib \\ -a+ib & x-iy \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c_4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x + iy = c_3 + c_4 \quad \wedge \quad a + ib = c_1 - ic_2 \qquad c_1 = a \;,\; c_2 = -b$$

$$+\; x - iy = -c_3 + c_4 \qquad +\; -a + ib = c_1 + ic_2$$

$$2x = 2c_4 \qquad 2ib = 2c_1$$

$$x = c_4 \qquad ib = c_1$$

$$\rightarrow c_3 = iy \qquad \rightarrow a = -ic_2$$

$$c_2 = ia$$

$$|6\rangle = ib\,\sigma_1 + ia\,\sigma_2 + iy\,\sigma_3 + x\,\sigma_0$$

F) Muestre que una representación posible para la base de cuaterniones es: la matriz identidad y las matrices reales 4x4 de la forma:

$$|q_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad |q_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |q_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

R// Para demostrar que las anteriores matrices son una posible representación de la base de los cuaterniones, debemos verificar que cumple la tabla de multiplicación de esta base

| $\lvert q_i\rangle \odot \lvert q_j\rangle$ | $1$ | $\lvert q_1\rangle$ | $\lvert q_2\rangle$ | $\lvert q_3\rangle$ |
|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $\lvert q_1\rangle$ | $\lvert q_2\rangle$ | $\lvert q_3\rangle$ |
| $\lvert q_1\rangle$ | $\lvert q_1\rangle$ | $-1$ | $\lvert q_3\rangle$ | $-\lvert q_2\rangle$ |
| $\lvert q_2\rangle$ | $\lvert q_2\rangle$ | $-\lvert q_3\rangle$ | $-1$ | $\lvert q_1\rangle$ |
| $\lvert q_3\rangle$ | $\lvert q_3\rangle$ | $\lvert q_2\rangle$ | $-\lvert q_1\rangle$ | $-1$ |

$$* \; |q_1\rangle \odot |q_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I = -1$$

$$* \; |q_2\rangle \odot |q_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I = -1$$

$$* \; |q_3\rangle \odot |q_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I = -1$$

$$* \; |q_1\rangle \odot |q_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = |q_3\rangle$$

$$* \; |q_2\rangle \odot |q_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -|q_3\rangle$$

$$* \; |q_1\rangle \odot |q_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -|q_2\rangle$$

$$* \; |q_3\rangle \odot |q_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = |q_2\rangle$$

$$* \; |q_2\rangle \odot |q_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = |q_1\rangle$$

$$* \; |q_3\rangle \odot |q_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -|q_1\rangle$$

El conjunto de matrices cumple la tabla de multiplicacion de la base de cuaterniones y ademas el conjunto de matrices son linealmente independientes y generan un esp. vectorial de dimension 4, igual que el de los cuaterniones, entonces las matrices si representan una base para los cuaterniones.

9) Comprueve si la siguiente es una buena definicion de producto interno

$$\widetilde{\langle a|b\rangle} = |a\rangle^{+} \odot |b\rangle$$

R// Si queremos comprobar si la anterior es una buena definicion de producto interno debemos verificar que cumple todas las propiedades que define al producto interno.

* $\langle V_i|V_i\rangle = \| |V_i\rangle \|^2 \in \mathbb{K} \wedge \langle V_i|V_i\rangle \geq 0$, si $\langle V_i|V_i\rangle = 0 \to |V_i\rangle = 0$

$$|a\rangle = a^0 + a^1\hat{i} + a^2\hat{j} + a^3\hat{k} = (a^0, \vec{a})$$

$$|a\rangle^{+} = a^0 - a^1\hat{i} - a^2\hat{j} - a^3\hat{k} = (a^0, -\vec{a})$$

$$\langle a|a\rangle = |a\rangle^{+} \odot |a\rangle = (a^0a^0 - (-\vec{a})\cdot\vec{a},\ a^0(-\vec{a}) + a^0(\vec{a}) + (-\vec{a})\times\vec{a})$$

$$\langle a|a\rangle = [(a^0)^2 + \|\vec{a}\|^2,\ -a^0(\vec{a}) + a^0(\vec{a})]$$

$$\langle a|a\rangle = (a^0)^2 + \|\vec{a}\|^2 \geq 0\ , \in \mathbb{K}$$

y podemos ver que el producto interno de dos mismos vectores se anulara solo si el vector es el vector nulo.

* $\langle V_i|V_j\rangle = \langle V_j|V_i\rangle^{*}$

$$|a\rangle \odot |b\rangle = [|b\rangle \odot |a\rangle]^{+}$$

$$|a\rangle \odot |b\rangle = |a\rangle^{+} \odot |b\rangle = (a^0, -\vec{a}) \odot (b^0, \vec{b})$$

$$= (a^0b^0 - (-\vec{a})\cdot\vec{b},\ b^0(-\vec{a}) + a^0(\vec{b}) + (-\vec{a})\times\vec{b}]$$

$$= (a^0b^0 + \vec{a}\cdot\vec{b},\ -b^0(\vec{a}) + a^0(\vec{b}) - \vec{a}\times\vec{b})$$

$$|b\rangle \odot |a\rangle = |b\rangle^{+} \odot |a\rangle = (b^0, -\vec{b}) \odot (a^0, \vec{a})$$

$$= (b^0a^0 + \vec{b}\cdot\vec{a},\ -a^0(\vec{b}) + b^0(\vec{a}) - \vec{b}\times\vec{a})$$

Podemos ver como el producto interno que definimos sobre el espacio de cuaterniones, no es una aplicacion que va del espacio vectorial al campo, sino que nos puede dar como resultado otro elemento del espacio, por lo que este producto interno no esta bien definido.

(h) Modifique un poco la definicion anterior de tal forma que: $\langle a|b\rangle = \frac{1}{2}[\widetilde{\langle a|b\rangle} - |q_1\rangle \odot \langle a|b\rangle \odot |q_1\rangle]$, y compruebe si esta definicion compleja del producto interno cumple con todas las propiedades. Notese que un cuaternion de la forma $|f\rangle = f^0 + f^1|q_1\rangle$ es un numero complejo convencional.

R// Para comprobar esto debemos verificar que la anterior operacion cumple con las propiedades que definen el producto interno

* $\langle V_i|V_i\rangle = \| |V_i\rangle \|^2 \in K$

$\langle a|a\rangle = \frac{1}{2}[\widetilde{\langle a|a\rangle} - |q_1\rangle \odot \langle a|a\rangle \odot |q_1\rangle]$

en el ejercicio anterior vimos que $\widetilde{\langle a|a\rangle} = (a^0)^2 + \|\vec{a}\|^2$ por lo que remplazamos.

$\langle a|a\rangle = \frac{1}{2}[(a^0)^2 + \|\vec{a}\|^2 - |q_1\rangle \odot [(a^0)^2 + \|\vec{a}\|^2] \odot |q_1\rangle]$

$\langle a|a\rangle = \frac{1}{2}[(a^0)^2 + \|\vec{a}\|^2 - [(a^0)^2 + \|\vec{a}\|^2] \underbrace{|q_1\rangle \odot |q_1\rangle}_{-1}]$

$\langle a|a\rangle = \frac{1}{2}[(a^0)^2 + \|\vec{a}\|^2 + (a^0)^2 + \|\vec{a}\|^2]$

$\langle a|a\rangle = (a^0)^2 + \|\vec{a}\|^2 \in K$, cumple la propiedad

$\langle V_i | V_j \rangle = \langle V_j | V_i \rangle^* \quad \forall \; |V_i\rangle, |V_j\rangle \in V$

$$\langle a|b\rangle = \tfrac{1}{2}\left[\widehat{\langle a|b\rangle} - |q_1\rangle \odot \widehat{\langle a|b\rangle} \odot |q_1\rangle\right]$$

$$\widehat{\langle a|b\rangle} = |a\rangle^\dagger \odot |b\rangle$$

$$= (a^0 - a^1|q_1\rangle - a^2|q_2\rangle - a^3|q_3\rangle) \odot (b^0 + b^1|q_1\rangle + b^2|q_2\rangle + b^3|q_3\rangle)$$

$$= a^0b^0 + a^0b^1|q_1\rangle + a^0b^2|q_2\rangle + a^0b^3|q_3\rangle - b^0a^1|q_1\rangle$$

$$- a^1b^1|q_1\rangle|q_1\rangle - a^1b^2|q_1\rangle|q_2\rangle - a^1b^3|q_1\rangle|q_3\rangle$$

$$- b^0a^2|q_2\rangle - a^2b^1|q_2\rangle|q_1\rangle - a^2b^2|q_2\rangle|q_2\rangle - a^2b^3|q_2\rangle|q_3\rangle$$

$$- b^0a^3|q_3\rangle - a^3b^1|q_3\rangle|q_1\rangle - a^3b^2|q_3\rangle|q_2\rangle - a^3b^3|q_3\rangle|q_3\rangle$$

$$= (a^0b^0 + a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3) + (a^0b^1 - b^0a^1 - a^2b^3 + a^3b^2)|q_1\rangle$$

$$+ (a^0b^2 + a^1b^3 - b^0a^2 + a^3b^1)|q_2\rangle + (a^0b^3 - a^1b^2 + a^2b^1 - b^0a^3)|q$$

$$|q_1\rangle \odot \widehat{\langle a|b\rangle} = (a^0b^0 + a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3)|q_1\rangle + (a^0b^1 - b^0a^1 - a^2b^3 + a^3b^2)|q_1\rangle|$$

$$+ (a^0b^2 + a^1b^3 - b^0a^2 + a^3b^1)|q_1\rangle|q_2\rangle + (a^0b^3 - a^1b^2 + a^2b^1 - b^0a^3)|q_1\rangle|$$

$$= (b^0a^1 + a^2b^3 - a^3b^2 - a^0b^1)$$

$$+ (a^0b^0 + a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3)|q_1\rangle + (a^0b^2 + a^1b^3 - b^0a^2 + a^3b^1)|q_3\rangle$$

$$+ (a^1b^2 - a^0b^3 - a^2b^1 + b^0a^3)|q_2\rangle$$

$$|q_1\rangle \odot \widehat{\langle a|b\rangle} \odot |q_1\rangle = (b^0a^1 + a^2b^3 - a^3b^2 - a^0b^1)|q_1\rangle$$

$$+ (a^0b^0 + a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3)|q_1\rangle|q_1\rangle + (a^0b^2 + a^1b^3 - b^0a^2 + a^3b^1)|q_3\rangle|q$$

$$+ (a^1b^2 - a^0b^3 - a^2b^1 + b^0a^3)|q_2\rangle|q_1\rangle$$

$$= (-a^0b^0 - a^1b^1 - a^2b^2 - a^3b^3) + (b^0a^1 + a^2b^3 - a^3b^2 - a^0b^1)|q_1\rangle$$

$$+ (a^0b^2 + a^1b^3 - b^0a^2 + a^3b^1)|q_2\rangle + (a^0b^3 + a^2b^1 - a^1b^2 - b^0a^3)|q_3\rangle$$

$$|q_1\rangle \odot \widehat{\langle a|b\rangle} \odot |q_1\rangle = -(1)\widehat{\langle a|b\rangle}$$

$\langle a|b\rangle = \frac{1}{2}[\langle \widetilde{a}|\widetilde{b}\rangle - |q_1\rangle \odot \langle \widetilde{a}|\widetilde{b}\rangle \odot |q_1\rangle]$

$= \frac{1}{2}[\langle \widetilde{a}|\widetilde{b}\rangle + \langle \widetilde{a}|\widetilde{b}\rangle]$

$\langle a|b\rangle = \langle \widetilde{a|b}\rangle$

Por lo tanto es la misma definicion de producto y dado que la anterior no era producto interno por no tener como elemento de llegada un elemento del campo, esta definicion tampoco es un producto interno.

i) Compruebe si la anterior es una buena definicion de norma para los cuaterniones

$$n(|b\rangle) = \| |a\rangle \| = \sqrt{\langle a|a\rangle} = \sqrt{|a\rangle^{+} \odot |a\rangle}$$

. R// Para demostrar que es una buena definicion debemos verificar que cumpla todas las propiedades de norma

★ $\| |v_i\rangle \| \geq 0$

$\| |a\rangle \| = \sqrt{|a\rangle^{+} \odot |a\rangle}$

el producto interno $|a\rangle^{+} \odot |a\rangle$ ya lo hemos hecho en los anteriores ejercicios, asi que reemplazamos

$\| |a\rangle \| = \sqrt{(a^0)^2 + \|\vec{a}\|^2} \geq 0$

y esto es mayor que 0 ya que los coeficientes $a^{\alpha}$ son reales y estan elevados al cuadrado.

* $\| \alpha |V_i\rangle \| = |\alpha| \, \| |V_i\rangle \|$

$\alpha|a\rangle = (\alpha a^0, \alpha \vec{a})$

$\| \alpha |a\rangle \| = \sqrt{(\alpha a^0)^2 + \|\alpha \vec{a}\|^2}$

$= \sqrt{\alpha^2 [(a^0)^2 + \|\vec{a}\|^2]}$

$= |\alpha| \sqrt{(a^0)^2 + \|\vec{a}\|^2} = |\alpha| \, \| |a\rangle \|$

Por lo tanto cumple la propiedad

* $\| |V_i\rangle + |V_j\rangle \| \leq \| |V_i\rangle \| + \| |V_j\rangle \|$

$|a\rangle + |b\rangle = (a^0 + b^0, \vec{a} + \vec{b})$

$\| |a\rangle + |b\rangle \| = \sqrt{(a^0 + b^0)^2 + \|\vec{a} + \vec{b}\|^2}$

$\| |a\rangle \| = \sqrt{(a^0)^2 + \|\vec{a}\|^2}$ , $\| |b\rangle \| = \sqrt{(b^0)^2 + \|\vec{b}\|^2}$

$\sqrt{(a^0 + b^0)^2 + \|\vec{a} + \vec{b}\|^2} \leq \sqrt{(a^0)^2 + \|\vec{a}\|^2} + \sqrt{(b^0)^2 + \|\vec{b}\|^2}$

$(a^0 + b^0)^2 + \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 \leq (a^0)^2 + \|\vec{a}\|^2 + (b^0)^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\sqrt{[(a^0)^2 + \|\vec{a}\|^2][(b^0)^2 + \|\vec{b}\|^2]}$

$(a^0)^2 + 2a^0 b^0 + (b^0)^2 + \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \leq (a^0)^2 + \|\vec{a}\|^2 + (b^0)^2 + \|\vec{b}\|^2$

$+ 2\sqrt{[(a^0)^2 + \|\vec{a}\|^2][(b^0)^2 + \|\vec{b}\|^2]}$

$\left[2a^0 b^0 + 2\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos(\theta)\right]^2 \leq \left[2\sqrt{(a^0)^2 (b^0)^2 + (a^0)^2 \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{a}\|^2 (b^0)^2 + \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2}\right]^2$

$4(a^0)^2 (b^0)^2 + 8 a^0 b^0 \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos(\theta) + 4\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \cos^2(\theta) \leq$

$4(a^0)^2 (b^0)^2 + 4(a^0)^2 \|\vec{b}\|^2 + 4\|\vec{a}\|^2 (b^0)^2 + 4\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2$

$8 a^0 b^0 \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos(\theta) \leq 4(a^0)^2 \|\vec{b}\|^2 + 4\|\vec{a}\|^2 (b^0)^2$

$2\cos(\theta) \leq \dfrac{(a^0) \|\vec{b}\|}{b^0 \|\vec{a}\|} + \dfrac{\|\vec{a}\| (b^0)}{a^0 \|\vec{b}\|}$

Me corche aqui

j) Compruebe si un cuaternión definido por:

$$|\bar{a}\rangle = \frac{|a\rangle^{+}}{\| |a\rangle \|^{2}}$$

puede ser considerado como el inverso o elemento simétrico de $|a\rangle$, respecto a la multiplicación $\odot$.

R//

$$|\bar{a}\rangle = \frac{|a\rangle^{+}}{\| |a\rangle \|^{2}}$$

despejando $|a\rangle^{+}$

$$\rightarrow \| |a\rangle \|^{2} |\bar{a}\rangle = |a\rangle^{+}$$

$$\| |a\rangle \|^{2} |\bar{a}\rangle \odot |a\rangle = |a\rangle^{+} \odot |a\rangle$$

Anteriormente vimos que el producto interno $|a\rangle^{+} \odot |a\rangle$ daba como resultado la norma de $|a\rangle$ al cuadrado $\| |a\rangle \|^{2}$, por lo que para que se mantenga la igualdad en ambos lados, el único resultado que puede tener $|\bar{a}\rangle \odot |a\rangle$ es $1 \in K$, probando así nuestra hipótesis.

k) Compruebe si los cuaterniones $|a\rangle$ forman un grupo respecto a la operación multiplicación $\odot$. Construya la tabla de multiplicación para el grupo de cuaterniones

R// Si $|a\rangle$ es de orden 3 $(|a\rangle)^{3} = 1$ y es unitario, entonces el conjunto $\{1, |a\rangle, (|a\rangle)^{2}\}$ forman un grupo respecto a la multiplicación

| $\odot$ | $1$ | $\|a\rangle$ | $\|a\rangle^2$ |
|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $\|a\rangle$ | $\|a\rangle^2$ |
| $\|a\rangle$ | $\|a\rangle$ | $\|a\rangle^2$ | $1$ |
| $\|a\rangle^2$ | $\|a\rangle^2$ | $1$ | $\|a\rangle$ |

$| \quad (\vec{a} \cdot \vec{v} \quad a^0 \vec{v} -$

## Ejercicios 2.3.6

(5) Considere el espacio vectorial de las matrices complejas 2x2 hermíticas. Una matriz hermítica (o autoadjunta) sera igual a su adjunta. Esto es una matriz sera igual a su transpuesta conjugada

$$A \longleftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = A^{+} = \begin{pmatrix} z_1^{*} & z_3^{*} \\ z_2^{*} & z_4^{*} \end{pmatrix} \text{ es decir } \begin{cases} z_1^{*} = z_1 & \text{real} \\ z_4 = z_4^{*} & \text{real} \\ z_2^{*} = z_3 & \text{complejos} \end{cases}$$

(a) Muestre que las matrices de Pauli $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ presentadas en el ejercicio 2.2.4 forman una base para ese espacio vectorial

R// Para demostrar que un subconjunto es base debemos comprobar que sean linealmente independientes y que generen todo el espacio vectorial

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c_1\sigma_0 + c_2\sigma_1 + c_3\sigma_2 + c_4\sigma_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} c_1 + c_4 & c_2 - ic_3 \\ c_2 + ic_3 & c_1 - c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$$

linealmente independientes

y generan el espacio ya que

$$A = \begin{pmatrix} c_1 + c_4 & c_2 - ic_3 \\ c_2 + ic_3 & c_1 - c_4 \end{pmatrix} = A^{+} = \begin{pmatrix} c_1 + c_4 & (c_2 + ic_3)^{*} \\ (c_2 - ic_3)^{*} & c_1 - c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_4 & c_2 - ic_3 \\ c_2 + ic_3 & c_1 - c_4 \end{pmatrix}$$

por lo tanto son base para las matrices hermíticas 2x2

b) Compruebe que esa base es ortogonal bajo la definicion de producto interno $\langle a|b\rangle \rightleftharpoons Tr(A^{\dagger}B)$ que introducimos en los ejercicios de esa misma seccion

R// Para comprobar que la base compuesta por las matrices de Pauli es ortogonal, su matriz de Gram debe ser una matriz diagonal

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \langle\sigma_0|\sigma_0\rangle & \langle\sigma_0|\sigma_1\rangle & \langle\sigma_0|\sigma_2\rangle & \langle\sigma_0|\sigma_3\rangle \\ \langle\sigma_1|\sigma_0\rangle & \langle\sigma_1|\sigma_1\rangle & \langle\sigma_1|\sigma_2\rangle & \langle\sigma_1|\sigma_3\rangle \\ \langle\sigma_2|\sigma_0\rangle & \langle\sigma_2|\sigma_1\rangle & \langle\sigma_2|\sigma_2\rangle & \langle\sigma_2|\sigma_3\rangle \\ \langle\sigma_3|\sigma_0\rangle & \langle\sigma_3|\sigma_1\rangle & \langle\sigma_3|\sigma_2\rangle & \langle\sigma_3|\sigma_3\rangle \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de Gram}} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

$\langle\sigma_0|\sigma_0\rangle = Tr(\sigma_0^{\dagger}\sigma_0) = 2$

$$\sigma_0^{\dagger}\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\langle\sigma_0|\sigma_1\rangle = Tr(\sigma_0^{\dagger}\sigma_1) = 0$

$$\sigma_0^{\dagger}\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\langle\sigma_0|\sigma_2\rangle = Tr(\sigma_0^{\dagger}\sigma_2) = 0$

$$\sigma_0^{\dagger}\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$\langle\sigma_0|\sigma_3\rangle = Tr(\sigma_0^{\dagger}\sigma_3) = 0$

$$\sigma_0^{\dagger}\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\langle\sigma_1|\sigma_0\rangle = Tr(\sigma_1^{\dagger}\sigma_0) = 0$

$$\sigma_1^{\dagger}\sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\langle\sigma_1|\sigma_1\rangle = Tr(\sigma_1^{\dagger}\sigma_1) = 2$

$$\sigma_1^{\dagger}\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\langle\sigma_1|\sigma_2\rangle = Tr(\sigma_1^{\dagger}\sigma_2) = 0$

$$\sigma_1^{\dagger}\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$\langle\sigma_1|\sigma_3\rangle = Tr(\sigma_1^{\dagger}\sigma_3) = 0$

$$\sigma_1^{\dagger}\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\langle \sigma_2 | \sigma_0 \rangle = Tr(\sigma_2^{\dagger} \sigma_0) = 0$

$$\sigma_2^{\dagger}\sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$\langle \sigma_2 | \sigma_1 \rangle = Tr(\sigma_2^{\dagger} \sigma_1) = 0$

$$\sigma_2^{\dagger}\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$\langle \sigma_2 | \sigma_2 \rangle = Tr(\sigma_2^{\dagger} \sigma_2) = 2$

$$\sigma_2^{\dagger}\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\langle \sigma_2 | \sigma_3 \rangle \; Tr(\sigma_2^{\dagger} \sigma_3) = 0$

$$\sigma_2^{\dagger}\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$\langle \sigma_3 | \sigma_0 \rangle = Tr(\sigma_3^{\dagger} \sigma_0) = 0$

$$\sigma_3^{\dagger}\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\langle \sigma_3 | \sigma_1 \rangle = Tr(\sigma_3^{\dagger} \sigma_1) = 0$

$$\sigma_3^{\dagger}\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\langle \sigma_3 | \sigma_2 \rangle = Tr(\sigma_3^{\dagger} \sigma_2) = 0$

$$\sigma_3^{\dagger}\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$\langle \sigma_3 | \sigma_3 \rangle = Tr(\sigma_3^{\dagger} \sigma_3) = 2$

$$\sigma_3^{\dagger}\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ya habiendo hecho todos los productos internos ponemos las componentes de la matriz de Gram

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

por lo que la base es ortogonal pero no normal.

c) Explore si se pueden construir subespacios de matrices reales e imaginarias puras

R// El subespacio que tiene como base el subconjunto $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_3\}$, es un subespacio de matrices reales ya que la combinación lineal de estos elementos siempre da una matriz real

Sea $|x\rangle \in S_1$

base para $S_1$: $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_3\}$

$$|x\rangle = c_1\sigma_0 + c_2\sigma_1 + c_3\sigma_3 = c_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} c_1+c_3 & c_2 \\ c_2 & c_1-c_3 \end{pmatrix}$$

Este subespacio estara compuesto por matrices hermiticas (simetricas) reales.

---

Sea $|y\rangle \in S_2$

base para $S_2$: $\{\sigma_2\}$

$$|y\rangle = c_1\sigma_2 = c_1\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$|y\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -c_1 i \\ c_1 i & 0 \end{pmatrix}$$

Este subespacio estara compuesto por matrices hermiticas imaginarias puras.

$S_1 \oplus S_2 = V \rightarrow$ espacio vectorial de matrices hermiticas $2\times 2$.