DAS MATHEMATISCHE PENDULUM

Durch die Verwendung eines mathematischen Pendels berechnen wir die Gravitationskonstante g. Wir vergleichen diese Berechnung mit der vorgegebenen Gewichtskonstanten g=9.81m/s^2. Dabei variieren wir die Länge und die Auslenkung des Pendels.

Samuel Gair, Gabriele Spisani

Mathematisches Naturwissenschaftliches Gymnasium Rämibühl

8001 Zürich

Klasse 3g

Table of Contents

Einleitung mathematisches Pendel

Nach aristotelischer Überzeugung gibt es natürliche und erzwungene Bewegungen. Als eine natürliche Bewegung wird das Bestreben eines Körpers, nach unten zu fallen, bezeichnet. Dagegen ist der Bewegungsablauf erzwungen, wenn ein Objekt in waagrechter Richtung geworfen wird, genauer gesagt, der erste Abschnitt bei einem horizontalen Wurf ist erzwungen und geht dann, nach Aristoteles, in seine natürliche Bewegung nach unten über.

Beim Pendel kann der Übergang zwischen natürlicher und erzwungener Bewegung nicht beobachtet werden, anstatt die erzwungene Bewegung an einem bestimmten Punkt zu beenden, schwingt es um seinen natürlichen Tiefpunkt. Als Erklärung wird lange Zeit behauptet, das Pendel wäre eine Mischform der beiden Bewegungsabläufe.

Galileo Galilei sah einen schwingenden Leuchter im Dom zu Pisa. Galilei untersucht dieses Phänomen genauer. Er vergleicht verschiedene Pendel, zuerst mit gleicher Pendellänge aber unterschiedlichen Gewichten und anschließend mit gleichem Gewicht aber unterschiedlicher Pendellänge. Dabei entdeckt Galilei, dass die Schwingungszeit nicht vom Gewicht der Kugeln abhängt, sondern nur von der Pendellänge.

Außerdem behauptete Galilei die Schwingungszeit wäre unabhängig von der Amplitude was nach heutiger Sicht nicht so ganz stimmt.

Im Physik-Praktikum bauten wir Pendel auf und übten Messungen aus mit verschiedenen Auslenkungen und Längen.

Am Beispiel eines Experiments mit Hilfe eines mathematischen Pendels soll die Durchführung, das Protokollieren und das Auswerten eines Versuches demonstriert werden. Mithilfe von Schwingungsdauerformeln wurde die Fallbeschleunigung bestimmt.

Wichtige Punkte des Experiments waren dabei:

- das Protokollieren und Auswerten von Messresultaten,
- Fehlerberechnungen (absolute und relative)
- die Bestimmung des Mittelwerts und des Fehlers einer Messung.

Anwendungen finden sich viele für das mathematische Pendel.

Mithilfe des Foucaultschen Pendels kann die Erdrotation sichtbar gemacht werden.

Nur etwa 1,5 cm kurze Pendel dienen in Automatikgurten von Autos dem Detektieren von starker Horizontalbeschleunigung binnen kurzem Weg und Auslösen der Arretierung (neben zwei Fliehkraft-Klinken an der Spule).

Kletterer an einem Sicherungsseil hängend können sich durch wiederholtes Abstoßen zum Pendeln bringen, um seitlich versetzt eine Position zum Weiterklettern zu erreichen. Andererseits birgt ein Sturz in ein nach oben schräg verlaufendem Seil die Gefahr des Auspendelns und Anschlagens am Fels.

Sensoren, die ein Rücken oder Kippen eines Gegenstandes detektieren, etwa um Diebstahl anzuzeigen, enthalten im einfachsten Fall ein Pendel mit einem elektrischen Schleifkontakt in Neutralposition.

Schlagpendel dienen der Bestimmung der Kerbschlagzähigkeit und anderer Festigkeitsgrößen von Materialien oder Werkstücken.

Die Abrissbirne soll insbesondere senkrechte Mauern und Beton durch waagrechten Stoß demolieren. Es gibt auch Rammböcke, die an 2 Pendelarmen hängen, deren obenliegende Griffe von 4 Personen geführt werden.

Eine an einem Tau pendelnd zur Schiffsbordwand schwingende Flasche soll bei einer Schiffstaufe zerschellen.

Eine Schaukel ist ein an zwei Seilen oder Ketten aufgehängtes Sitzbrett (oder eine Stange) für Vergnügungs- oder Artistikzwecke.

Die Schiffsschaukel im Vergnügungspark, ein starres Pendel mit Gondel, wird von den darin stehenden Personen mit Körperkraft und -schwung aufgeschaukelt.

Die Künstlerin Carolee Schneemann „zeichnet kinetisch“ an einem Seil hängend.

Tänzer an Sicherungsseilen mit selbst einhändig bedienbaren Abseilgeräten können an einer etwa vertikalen Wand durch Laufen und Abstoßen seitliches Pendeln auslösen, sich schrittweise ablassen und damit ein weithin sichtbares Ballett vollführen.

Pendeln spielt eine Rolle bei der Akrobatik am Trapez und Vertikaltuch sowie beim Turnen an Ringen und am Kletterseil.

Das Balancieren eines Stabs oder einer Leiter ist das Führen eines starren umgekehrten Pendels alleine durch Unterstützen an einem Punkt.

Das Riefler-Pendel steigerte die Ganggenauigkeit von Pendeluhren auf besser als eine Zehntelsekunde pro Tag.

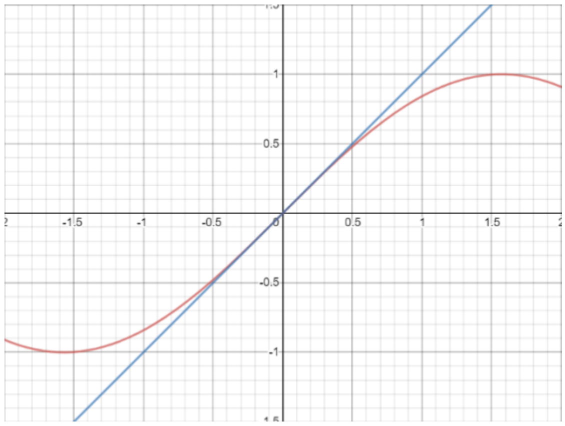
Die Pendelfigur ist ein Spielzeug.

Pendel sind wichtig, ob als Taktanzeiger oder in einer alten Kuckucksuhr oder Kirchenglocken.

Herleitung der Formel

Die Allgemeine Formel für beliebige Winkel existiert in der Form einer Differentialgleichung, es gibt keine Lösung, die man mit normalen Funktionen schreiben kann, aus diesem Grund würde eine Vereinfachung eingesetzt die für Winkel deutlich kleiner als 1 (in Radianten) funktioniert.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$



Wie man im Bild sehen kann, ist θ (blaue Funktion) sehr nah an $\sin\theta$ (rote Funktion) solang θ nicht zu gross wird, daher können wir $\sin\theta$ von der vorherigen Formel ersetzen und die Gleichung lösen:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$$

θ_0 ist der Anfangswinkel oder $\theta(0)$, diese Formel beschreibt eine einfache harmonische Bewegung. Wenn wir die Schwingung Zeit berechnen möchten muss wir einfach $\theta(t) = -\theta_0$ setzen, da wir wissen möchten zum welchem t wird die Pendel die andere Seite erreichen (also $-\theta_0$), dann wenn wir diese Zeit mal 2 multiplizieren können, wie berechnen wie viel Zeit eine Bewegung:

$$-\theta_0 = \theta_0 \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{1}{2}t) \rightarrow 2\,(\cos^{-1} -1)\sqrt{\frac{l}{g}} = t \rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = t$$

Die resultierende Formel sagt uns, dass mit einem längeren Seil wird die Schwingung Zeit länger, während falls wir in Stande wären die Schwerkraft zu modifizieren, mit eine grössere Schwerkraft Beschleunigung wird die Schwingung Zeit kürzer.

Anhand der Beziehung zwischen Seil Länge und Schwingung Zeit können wir einen Art Uhr bauen der drei Pendeln benutzt mit respektiv 1 Sekunde, 1 Minute und 1 Stunde Schwingung Zeit, jede volle Schwingung würde der Anzeiger auf der Uhr weiterbewegen. Dazu müssen wir die Länge der Seile der drei Pendeln berechnen:

Zuerst müssen wir nach der Länge auflösen:

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = t \rightarrow \left(\frac{t}{2\pi}\right)^2 g = l$$

Dann setzen wir die Werte ein für jede Situation:

$$\left(\frac{t}{2\pi}\right)^2 g = l \rightarrow \left(\frac{1.00s}{2\pi}\right)^2 9.81m/s^2 = 24.85cm$$

$$\left(\frac{t}{2\pi}\right)^2 g = l \rightarrow \left(\frac{60.00s}{2\pi}\right)^2 9.81m/s^2 = 894.56m$$

$$\left(\frac{t}{2\pi}\right)^2 g = l \rightarrow \left(\frac{3600.00s}{2\pi}\right)^2 9.81m/s^2 = 3220.43\ km$$

Sicher ist ein Seil von 3220 Km unpraktisch, aber wir sehen wie der Sekunden Pendel nur 25 cm lang ist, aus diesem existieren trotzdem Modelle die genau Pendeln benutzen, um einen regelmässigen Rhythmus zu halten (plus extra Mechanismen, die dem Benutzer erlauben die Uhr aufzuladen da es unvermeidbar ist Energie zu verlieren wegen Reibung und Luftwiederstand).

Auswertung

Schluss:

Die Methode 1 lieferte uns für die Fallgeschwindigkeit den folgenden Wert:

g= $(\ldots \pm \cdots)\frac{m}{s^2}$

Die Methode 2 lieferte uns für die Fallgeschwindigkeit den folgenden Wert:

g= $(\ldots \pm \cdots)\frac{m}{s^2}$

Mehrere Auswertungen zeigten, dass die Messgenauigkeit stark variierte, jedoch alle in einem guten Rahmen um das (fast) exakte Ergebnis von einer Erdbeschleunigung von etwa g= $\frac{9.80648\ m}{s^2}$ welches man als Referenz im FoTaBe auf Seite 204 als Fallbeschleunigung für Zürich findet.

Verbesserung (Auslösemechanismus um Pendel zeitlich richtig fallen lässt und nicht seitlich) besseres Zeitmessungssystem (Zeitmesslaser); Vakuum

Verbessern könnte man die Messungen, indem man einen Laser benutzen würde, um die genaue Zeit abzumessen, in der das Pendel schwingt, denn die menschliche Reaktionszeit verändert die Genauigkeit. Wenn man das Experiment in einem Vakuum durchführen würde, könnte man zusätzlich Reibungsenergieverluste vermindern und es wäre noch genauer. Im optimalen Zustand hätte das Seil keine Masse, denn dies verzerrt auch nochmals das Ergebnis. Als letztes wäre es vorteilhafter einen Fehlerfreien Auslösmechaneismus zu haben welcher das Pendel gerade und zeitgetreu pendeln und messen kann. Möglich wäre dies mit einem Laser.

Quellen:

https://de.wikipedia.org/wiki/Pendel (besucht am 21.03.2021)

https://www.physik.uzh.ch/dam/jcr:77d8398c-1e2a-4f4d-b89a-749561a3b10b/AnleitungEV-PHY102-FS16.pdf

https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_(mathematics) (besucht am 19.03.2021)